

Teorie měření a regulace

chyby 1

17.SPEC-ch.2.

ZS – 2015/2016

CHYBY MĚŘENÍ – a co s tím souvisí...

1. Speciál informací
o chybách

CHYBY MĚŘENÍ

Hlavní témata – nikoliv však jediná

podstata chyb měření

důvody analýzy chyb měření

rozdělení chyb (princip, matem. vyjádření apod.)

chyby nepřímých měření – princip, výpočet

nejistoty měření – princip, rozdělení, výpočet

další související

Měření

je kvantitativní (číselné) zkoumání vlastností předmětů (jevů, procesů), obvykle porovnáváním s obecně přijatou jednotkou. Výsledkem měření je tedy číslo, které vyjadřuje poměr zkoumané veličiny k jednotce, spolu s uvedením té jednotky.

Význam měření je hlavně v tom, že:

- charakterizuje měřenou veličinu významně přesněji než kvalitativní údaje (např. dlouhý, vysoký, těžký);
- dovoluje měření opakovat a porovnávat;
- výsledek lze zpracovávat matematickými prostředky.

V širším slova smyslu, ve společenských vědách, v ekonomii aj. se měřením rozumí jakékoli kvantitativní zkoumání.

Například dotazníkovým šetřením, jehož výsledky lze zpracovávat statisticky.

Metaforicky se mluví o "měření sil", tj. přímém porovnání schopností například v zápase.

Každé měření je zatíženo chybou

Jakékoliv měření fyzikální veličiny je vždycky zatížené nějakou chybou – ať vzniklou z principu (podstaty) prováděného měření nebo z principu použitých přístrojů a zařízení – ať ovlivnitelnou nebo vzniklou objektivně či subjektivně bez ohledu na osoby připravující či měřící. Této skutečnosti bychom se nevyhnuli, i kdybychom měření a jeho přípravu prováděli s největší důkladností a precizností.

Každé měření je zatíženo chybou

Žádné měření není dobrým a úplným měřením, pokud není určena (hodnota) chyba s níž bylo měřeno.

Patří sem i chyba teoretických výsledků.

Každé měření je zatíženo chybou

Stejně tak i každé opakované měření téže fyzikální veličiny nevede vždy k přesně stejným výsledkům – ani když se použijí přístroje shodných kvalit a měření proběhne shodným postupem a za shodných podmínek) hlavně podmínek prostředí v němž měření probíhá – dokonce ani když se použijí tytéž přístroje a zařízení.

Této realitě se prakticky nelze vyhnout.

Není totiž možné něco opakovat za absolutně shodných podmínek a pomůcek.

Každé měření je zatíženo chybou

Pochopitelně – pokud provádíme orientační (hrubá a z principu i v provedení) měření – tak tento princip a poznatek bude velmi slabý.

Každé měření je zatíženo chybou

Při každém měření fyzikální veličiny vždy vznikají určité odchylky naměřené hodnoty od skutečné hodnoty.

Absolutně přesné měření neexistuje - většinou je několik zdrojů nepřesností – některé lze přesně nebo přibližně vyjádřit – ale vždy jde o ***určení intervalu hodnot***, ve kterých se pohybuje skutečná hodnota (případně procentní odchylka od skutečné hodnoty).

Každé měření je zatíženo chybou

Chyba měření je rozdíl mezi skutečnou hodnotou měřené veličiny a hodnotou zjištěnou měřením.

Každé měření je zatíženo určitou chybou a ke správné hodnotě se pouze přibližuje - během měření se uplatňují vlivy, které se projeví odchylkou mezi skutečnou a naměřenou hodnotou reálně měřené veličiny.

<http://cs.wikipedia.org/wiki/Veli%C4%8Dina>

<http://cs.wikipedia.org/wiki/M%C4%9B%C5%99en%C3%AD>

Každé měření je zatíženo chybou

CHYBA určuje, do jaké míry je rozdíl mezi

správnou (skutečnou) a naměřenou hodnotou

závisící na přesnosti měřicího přístroje a přesnosti měřicí metody..... ale (!!!) i na provedení měření a podmínkách jeho uskutečnění.



Základní chyby měření

je přístrojem dosahováno za předpokladu, že měřicí přístroj je provozován v předepsaných referenčních podmínkách.

To znamená, že veškeré veličiny, které mohou nepříznivě ovlivnit přesnost měření, musí mít předepsanou konstantní velikost, popř. je povolen rozptyl jen ve velmi úzkých mezích.

Mezi hlavní ovlivňující veličiny obvykle patří okolní teplota, kolísání napájecího napětí přístroje atd.

Zjednodušeně lze říci, že základní chyby měření daným přístrojem je dosahováno v laboratorních, přesně definovaných podmínkách.

Pracovní chyba měření

platí pro měření prováděná v pracovních podmínkách, oproti základní chybě dosahováno v širším rozsahu pracovních teplot, při větším kolísání napájecího napětí apod.

Proto pracovní chyba bývá vyšší než chyba základní.

Základní pojmy

Citlivost (anglicky *sensitivity*) - podíl změny indikace měřicího systému a odpovídající změny hodnoty veličiny (zjednodušeně jde o převodní vztah vyjádřený citlivostním koeficientem).

Nejistota měření (anglicky *measurement uncertainty*) – nezáporný parametr charakterizující rozptyl hodnot veličiny, přiřazený k výsledku na základě znalosti vlastností použité měřicí metody.

Opakovatelnost (anglicky *repeatability*) - preciznost měření za souboru podmínek opakovatelnosti měření (tedy měřením stejným způsobem a v krátkém časovém úseku).

Základní pojmy

Pravdivost/správnost (anglicky *trueness*) - těsnost shody mezi aritmetickým průměrem nekonečného počtu opakovaných naměřených hodnot veličiny a referenční hodnotou veličiny (zjednodušeně míra systematické chyby).

Preciznost (anglicky *precision*) - těsnost shody mezi indikacemi nebo naměřenými hodnotami veličiny získanými opakovanými měřeními na stejném objektu nebo na podobných objektech za specifikovaných podmínek (zjednodušeně míra statistické chyby).

Základní pojmy

Přesnost (anglicky *accuracy*) - těsnost shody mezi naměřenou hodnotou veličiny a pravou hodnotou měřené veličiny (zjednodušeně míra chyby).

Reprodukovatelnost (anglicky *reproducibility*) - preciznost měření za podmínek reprodukovatelnosti měření (tedy měřením různým způsobem - různými měřidly, personálem či na různém místě a v různém čase).

Rozlišení (anglicky *resolution*) - nejmenší změna veličiny, která způsobí rozeznatelnou změnu v odpovídající indikaci (zjednodušeně jde o nejmenší).



CHYBY

→ jde o určení intervalu hodnot, ve kterých se pohybuje skutečná hodnota (případně procentuální odchylka od skut., příp. jiné hodnoty)

- správná hodnota (SH)*** - neznámá → konvenčně správná hodnota
- změřena přesnějším MP
- naměřená hodn. (MH)*** - údaj na stupnici nebo displeji MP
- přesnost měření*** - míra těsnosti, se kterou výsledek vyjadřuje SH

Každé měření je zatíženo chybou

CHYBA

Skutečná (pravá) hodnota veličiny je hodnota ideální, hodnota zjištěná s nekonečnou přesností a proto ji nelze žádným reálným způsobem poznat a určit.

Naměřená hodnota veličiny je hodnota, kterou zobrazí (zveřejní, publikuje, ukáže, zaznamená, zapamatuje,) (měřicí) přístroj (zařízení, systém,).

Každé měření je zatíženo chybou

CHYBA

musí být *kvantitativně vyjádřena* a jejich soubor *matematicky vyhodnocen*.

Z těchto výsledných údajů (informací) se získají *informace o spolehlivosti měření*.

Při výborných výsledcích lze vyvodit *obecnou platnost* závěrů (vyvozených z měření) a lze je *aplikovat* na jiné obdobné děje nebo lze najít *obecnou závislost*.

Každé měření je zatíženo chybou

Odchyłky nazýváme **chybami měření**

- příčiny chyb jsou velmi různé
- někdy jsou známé
- ale často je také nedovedeme vůbec zjistit

- s tím bychom se neměli smířit.....
- korigování chyby není možné nebo je neekonomické, je vždy třeba opakovat měření.

Každé měření je zatíženo chybou

Pochopitelně – pokud se provádí orientační či informativní měření („hrubé“ z principu i v provedení) – tak tento princip a poznatek bude velmi slabý a prakticky bezvýznamný.

Je tedy zřejmé, **proč** se **zabývat chybami**, jejich teoriemi, příčinami vzniku a hlavně, jak jim zabránit nebo jejich působení maximálně omezit.

Každé měření je zatíženo chybou

Je tedy zřejmé, **proč** se **zabývat chybami**,

..... at' už se jedná o (běžná) měření – technická ve výrobě, v přípravě výroby či (např.) v laboratoři výrobního procesu – nebo o certifikační, ověřovací, posudkové apod. měření – nebo o měření v rámci diagnostiky určitého zařízení

... všude může chyba – hl. ta neidentifikovaná a nezjištěná – znamenat menší či větší problémy, případně i havárie a katastrofy.

Každé měření je zatíženo chybou

Chyby – než přijdou další informace je nezbytné upozornění.....

Označení v literatuře není jednotné – obvyklý symbol je δ nebo (většinou) ϵ , někdy také Δ

CHYBY – další způsob dělení

Rozdíl mezi hodnotou odečtenou na přístroji a hodnotou, která v měřeném bodu skutečně existuje (tzv. ideální hodnota) je chybou.

Rozdělení chyb - *soustavné* (systematické, vyplývají z principů či konstrukce MP) a *nahodilé* (náhodné, neopakující se, závisející na daných podmínkách a okolnostech).

Jiné **rozdělení chyb** – *absolutní* a *relativní* (viz dále).

CHYBY – další způsob dělení

Chyby, které vznikají během měření jsou trojího druhu

- *hrubé*
- *systematické*
- *náhodné*

Nebo jsou:

stálé, neproměnné

nestálé, proměnné, měnící se v průběhu měření vedoucím k jejich vzniku....

CHYBY – další způsob dělení

- Chyby měřicích přístrojů
- Chyby přímých měření
- Chyby nepřímých měření
- Metodické chyby
- Chyby způsobené lidským faktorem a okolním prostředím
- Další druhy.....



Chyby měření se rozdělují podle celé řady kritérií.... nebo podle jejich vzniku, nebo podle principu a působnosti – atd.



Chyby

Hrubé

*ničí
správnost*

vyloučit

Systematické

ovlivňují správnost

*odstranit
nebo
korigovat*

Náhodné

ovlivňují přesnost

*statisticky
vyhodnotit*

**Výchozí funkční
dělení chyb**



CHYBY

HRUBÉ

- omyly (chybný rozsah, nesprávná stupnice, špatné napájení, , ...)
- volba špatné metody
- nepozornost, popletení údajů, únava pozorovatele ...
- významně převyšuje rozptyl náhodné chyby

OPRAVA - KOREKCE CHYB

Hrubá chyba

- » nápadně se lišící od ostatních hodnot – je ze souboru měření stejné veličiny
- » je větší než lze připustit v závislosti na přesnosti zvolené metody měření a použitého přístroje

Vzniká většinou, převážně, prakticky a ***jedině nepozorností nebo přehlédnutím*** - omylem pracovníka, ***výrazným n-dodržením*** pravidel měření, metodiky a postupu práce, apod.

! vyloučení ze souboru měření !

CHYBY

NAHODILÉ / NÁHODNÉ - což jsou chyby s obtížně -
nebo vůbec ne... - zjistitelným původem – mívají statis-
tické zákonitosti

SYSTEMATICKÉ / SOUSTAVNÉ - což jsou chyby
opakující se (pravidelně) – vznikají obvykle jako dů-
sledek definovatelné příčiny či nedokonalosti =
POČETNÍ (zaokrouhlení konstant) - PŘÍSTROJOVÉ
(konstrukce přístroje, vliv okolí, vadné cejchování) -
ČTENÍM (ručkové) – OBSLUHY (lidský vliv)

CHYBY

Chyba měření (absolutní) je výsledek měření minus (konvenčně) pravá hodnota měřené veličiny.

Systematická chyba Δ je střední hodnota, která by vznikla z nekonečného počtu měření téže veličiny uskutečněných za podmínek opakovatelnosti, od které se odečte pravá hodnota měřené veličiny.

Nahodilá chyba (viz dále)





CHYBY VÝSKYT

Systematická chyba

- » při opakovaných měřeních je stálá (*chyby metody, nastavení nuly, korekční konstanty, odečítání hodnot stupnice...*) nebo se předvídatelně mění
- » lze odstranit korekcí výsledné hodnoty (pokud lze) změřením pomocí přesnějšího přístroje
- » lze odstranit početní korekcí nebo korekcí postupu dané použité metody....

- chybné kalibrace měřidel,
- „principielní“ (ne)přesnost metody ...
- zatěžují stejným způsobem výsledek každého měření
- není-li udána, uvažuje se hodnotu jedné poloviny nejmenšího dílku měřidla (nebo hodnoty citlivosti)

při opakovaných měřeních je stálá nebo se předvídatelně mění → proto ji lze ovlivnit → korekcí (pokud lze změřit přesnějším měřicím přístrojem)

chyba metody - zjednodušení početního vztahu (něco se zanedbá – přesně zdůvodnit)

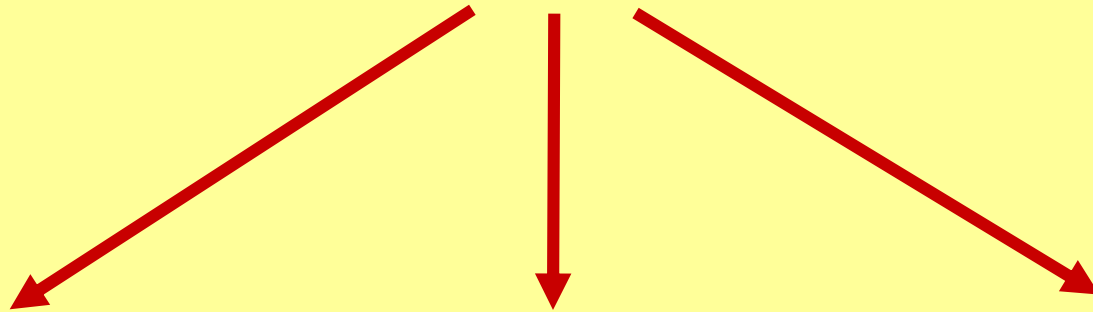
- nedostatečná přesnost metody
- většinou lze dopočítat a početně korigovat

chyba nuly (offset) - většinou u zesilovačů a převodníků

- při nulovém vstupu nenulový výstup
- má aditivní charakter – přičítá se k měřením

chyba zesílení - nepřesná hodnota rezistoru ve vstupním děliči

Dělení systematických chyb



konstantní

*Stejné znaménko
a velikost*

jednostranné

*Stejné znaménko,
ale velikost se
náhodně mění*

skupinové

*Systematicky ovlivňují
výsledky měření v celé
skupině měření -
náhodně mění své
znaménko i velikost*

- *chyba kalibrace* měřidel, stupnice, celého MP
- *hodnota systematické chyby* - není-li udána, uvažuje se hodnota jedné poloviny nejmenšího dílku měřidla
- *zatěžuje* stejným způsobem výsledek každého měření
- *absolutní chyba* je úměrná měřené veličině

Systematické či soustavné ... jsou zaviněny trvalými vlivy působícími jednoznačně co do smyslu i velikosti - lze je předem stanovit rozbořem použité metody či rozbořem vlastností použitého měřicího přístroje.

Lze je kompenzovat nebo alespoň omezit jejich vliv.

Vznikají skutečnými a reálnými vlastnostmi součástek a dílů z nichž je přístroj konstruován a vyroben.

Vznikají postupným opotřebováním provozem nebo stárnutím a únavou materiálů.

Vznikají působením vnějších vlivů (teplota, vlhkost,...) na použité materiály.

Jsou odhalovány při cejchování přístroje a při jeho periodických kontrolních měřeních ve srovnáních s „měřicími nebo cejchovnými normály“ nebo s výsledky souběžně získanými přístroji majícími vyšší třídu přesnosti (ta by pak měla být minimálně o dvě třídy výše).

Odstranit chyby lze obvykle opravou (výměnou zdánlivě dobrých a opotřebovaných součástí, ...), seřízením pracovních bodů jednotlivých částí a obvodů, pečlivým a opakovaným nastavením pracovních bodů, atd.

Nebo používáním korekčních (cejchovních) tabulek a grafů.

Systematické chyby způsobené omezenou přesností měřicích přístrojů

Určení maximální chyby - buď se vychází z dokumentace a údajů poskytnutých výrobcem – nebo, pokud nejsou žádné podklady, se rozhoduje podle možnosti odečítání hodnot na stupnici přístroje – takto lze postupovat zejména u jednoduchých MP.

Pro některé sériově vyráběné přístroje výrobce udává **největší přípustnou (maximální) chybu m_x** – je tím zaručeno, že hodnota veličiny $x = \mathbf{MH}$ naměřená přístrojem bude mít v celém jeho rozsahu chybu nanejvýš rovnou maximální chybě.



CHYBY VÝSKYT

Náhodná chyba

- » při opakovaných. měřeních se mění (*šumy, vliv teploty okolí, tlak, vlhkost, ...*)
- » nelze odstranit korekcí
- » lze zmírnit – příp. zcela odstranit - vícečetným měřením za shodných podmínek

šumy a vlivy rušení

výskyt šumů a změny podmínek se předpokládá podle normálního (Gaussovo) rozdělení

zaokrouhlování výsledku měření (čtení hodnot stupnice analogového MP nebo vliv posledního místa v počtu cifer digitální MP)

předpokládá se rovnoměrné rozdělení

Hustota pravděpodobnosti veličiny X s normálním (Gaussovským) rozdělením.

neznámé změny podmínek měření

důsledky působení náhodných vlivů

nelze je zjistit ani ovlivnit

lze je „odhadnout“ – je potřeba vyšší počet shodných / opakovaných měření - užívá se matematická statistika – korekční výpočty s využitím např. cejchovních křivek

Náhodné či nahodilé ... jsou způsobeny nepravidelně působícími vlivy, okamžitými stavy (přístroje, okolí), změnami v přístroji, někdy i nevhodně zvolenou metodou (!).

Patří sem i různé či neobvyklé rozptyly čtení naměřených hodnot (dáno „čtenářem“ a jeho „kvalitou či pečlivostí“ nebo vlivem momentálních okolností při čtení - osvětlení čtené hodnoty, konstrukce stupnice,...).

Patří sem i odchylky hodnot způsobených tzv. chybou opakovatelnosti měření (ovlivňují ji mechanické i elektrické konstrukční vlastnosti použitých prvků a součástí – např.: tření převodů ukazatele, ručky měřicího přístroje nebo působení různých rušivých vlivů).

Eliminace nebo korekce těchto chyb je obtížná – spíše nemožná – vyžaduje znační /až speciální) znalosti a dovednosti.

Jejich spektrum a rozsah, jak ovlivní zaznamenanou hodnotu lze popsat, analyzovat a specifikovat (jakkoliv je to pracné a časově až velice náročné) – i to je jedna z možností jak působení nahodilých chyb vyloučit nebo alespoň omezit.

Je nezbytná pečlivost – od teoretické přípravy, přes volbu prvků a jejich realizaci (umístění, zapojení, atp.), provedení vlastního měření, až po zpracování a vyhodnocení výsledků.

Náhodné chyby

Eliminace vlivu náhodných chyb na měření:

- danou veličinu změříme vícekrát a z naměřených hodnot určíme **nejpravděpodobnější hodnotu** (hodnotu považovanou za nejbližší skutečné hodnotě)

Je-li každé měření provedeno se stejnou přesností (hrubé chyby vylučujeme), lze ukázat, že nejpravděpodobnější hodnotou je **aritmetický průměr**.

Procentní údaj chyby přístroje z jeho měřicího rozsahu (neboli třída přesnosti) udává i hodnotu chyby s kterou je každé měření zatíženo - čím je třída přesnosti menším číslem, tím vyšší přesnosti přístroj dosahuje.

Přesnost přístrojů udává

Třída přesnosti = TP

Je to relativní chyba vztažená k maximální hodnotě měřicího rozsahu – pozor na přístroje s přepínáním rozsahu....

Je klasifikačním znakem přesnosti měřicího přístroje v celém měřicím rozsahu přístroje.

Vyjadřuje se číslem, které je vždy větší, nebo nanejvýš stejné, jako největší absolutní hodnota z redukovaných mezních chyb, zjištěných za daných podmínek v celém měřicím rozsahu přístroje.

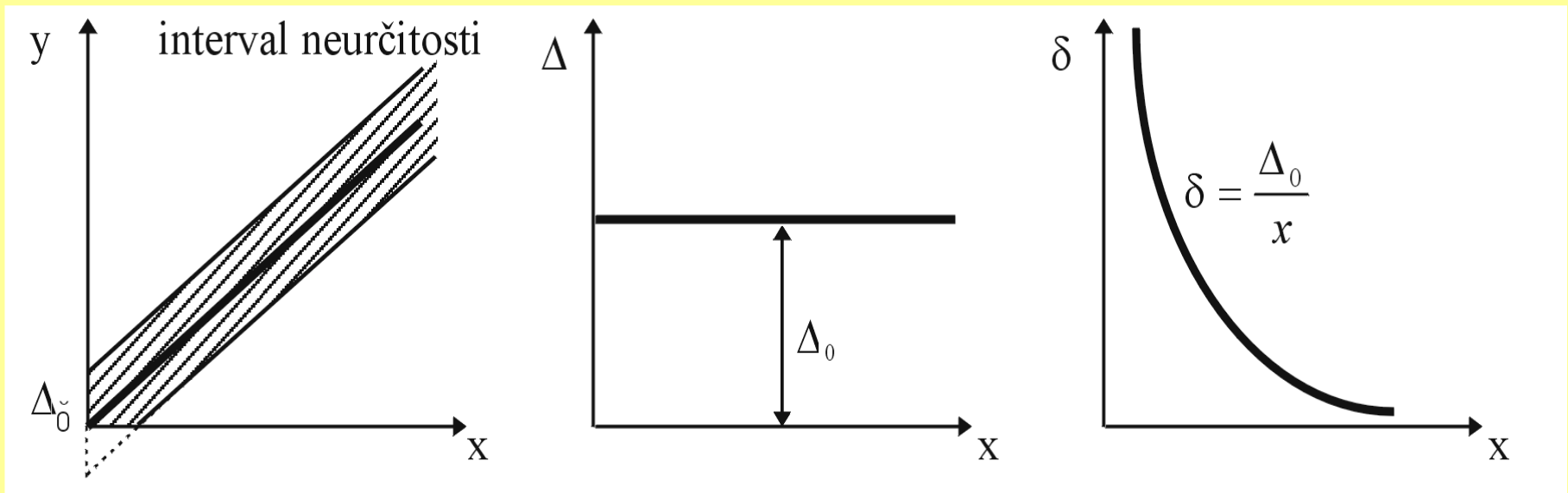
Určení třídy přesnosti záleží na typu chyby, kterou přístroj vykazuje.

Dle druhu přítomné chyby rozlišujeme pak tři skupiny přístrojů:

- * s konstantní absolutní chybou
- * s konstantní relativní chybou
- * s kombinovanými chybami

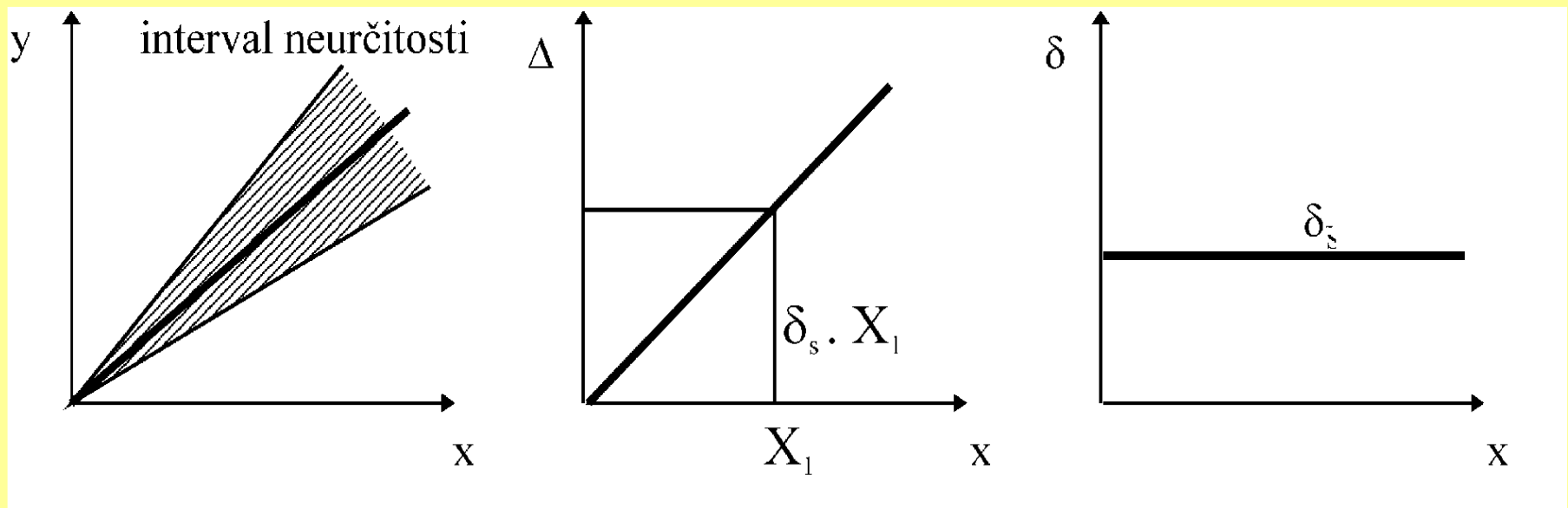
Třída přesnosti

Charakteristika chyby u přístroje s konstantní absolutní chybou (obvykle bývá shodná s TP přístroje) – **aditivní chyba Δ_0** (chyba nulové hodnoty) pro dané rozmezí stupnice - omezuje rozsah použití přístroje v oblasti malých hodnot vstupní veličiny **x**.



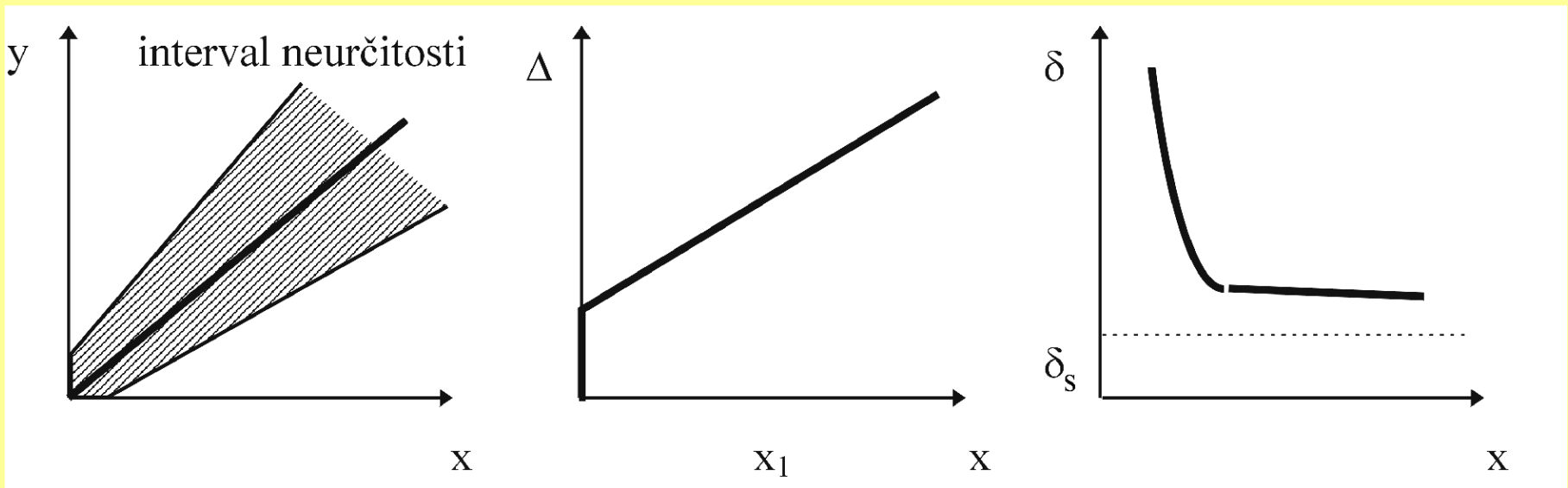
Třída přesnosti

Charakteristika chyby u přístroje s konstantní relativní chybou (obvykle bývá shodná s TP přístroje) – **multiplikatívní** chyba δ_s (chyba nulové hodnoty) roste s narůstající vstupní veličinou x .



Třída přesnosti

Charakteristika chyby u přístroje s kombinovanou chybou
– celkovou chybu lze rozepsat na **součet** aditivní a multiplikační složky



Třída přesnosti

Výhody používání TP:

Přehledná kategorizace měřicích přístrojů z hlediska přesnosti jejich měření a tedy i z hlediska dosažených výsledků.

Mezinárodní normalizace a sjednocení.

Třída přesnosti

TP je dána upravenou řadou R5 v následujícím rozvoji -- **10; 5; 2.5; 1.5; 1.0; 0.5; 0.25; 0.1; 0,05; atd.**

Udává **mez dovolené relativní chyby v %** největší (nejvyšší) hodnoty měřícího rozsahu.

Běžné přístroje jsou ve třídách přesnosti 2,5 až 1.0 – s menší hodnotou jsou pro laboratorní a cejchovní účely – s vyšší naopak pouze pro informativní (orientační) účely.

Třída přesnosti


Relativní chyba přístroje se většinou vztahuje k největší hodnotě měřicího rozsahu **M**:

$$\delta_{TP} = \frac{|\Delta_m|}{X_R} \cdot 100 [\%]$$

Δ_m je maximální absolutní chyba přístroje
 X_R je největší hodnota měřicího rozsahu

To je *totožné* s údajem pro TP – před zaokrouhlením....

Relativní chyba údaje (odečtené hodnoty):


$$\delta_M = \pm \frac{\Delta_m}{X_M} \cdot 100 [\%]$$

Δ_m je maximální absolutní chyba přístroje
 X_M je měřená hodnota

Třída přesnosti

Relativní chyba údaje

Po dosazení ze vztahu pro chybu

$$\Delta_m = \pm \frac{X_R}{100} \cdot \delta_{TP}$$

$$\delta_M = \pm \frac{X_R \cdot \delta_{TP}}{100 \cdot X_M} \cdot 100 = \pm \delta_{TP} \frac{X_R}{X_M} [\%]$$

Čím menší měřená hodnota, tím menší výchylka (naměřený – indikovaný údaj) přístroje a tím je i větší relativní chyba tohoto údaje.

Z toho vyplývá, že u *analogových přístrojů* má být zvolen měřicí rozsah tak, aby výchylka ručky byla co největší (!).

Třída přesnosti

Celková výsledná **relativní chyba analogového** měřicího přístroje a tedy i třída přesnosti do níž je zaříděn a následně hodnoty tímto přístrojem změřené (a publikované) je vždy vztažena k maximální hodnotě měřicího rozsahu.

Pokud se vztahuje k naměřené hodnotě, výrobce to vyznačí, protože takový přístroj je kvalitnější – viz příklad.

Při odečítání je nutno vymežit (anulovat) chybu vzniklou špatným čtením – musí být zajištěna paralaxa, kolmost čtecího oka, ručky a stupnice.

Třída přesnosti

Chyba měřicího přístroje

Většina výrobců udává **přesnost** – *digitálních i analogových* – přístrojů a tedy základní chybu přístroje ve tvaru

$$\delta_X = \pm(\delta_1 + d) \text{ nebo } \delta_X = \pm(\delta_1 + \delta_2).$$

- δ_1 - je chyba z naměřené hodnoty v [%] a je v celém měřicím rozsahu konstantní, někdy se za ni připisuje značka rdg (reading),
- δ_2 - je chyba z měřicího rozsahu, někdy se k ní připisuje FS (full scale),
- d - je chyba, daná v počtu digitů posledního místa displeje.

Třída přesnosti

Chyba měřicího přístroje

Pro digitální chybu platí

$$\delta_2 = \frac{d}{\text{max. počet indikovaných jednotek}} \cdot 100 [\%]$$

Pak celková výsledná **relativní chyba digitálního přístroje** bude:

$$\delta_X = \pm \left(\delta_1 + \delta_2 \cdot \frac{X_R}{X_M} \right) [\%]$$

X_R hodnota měřicího rozsahu
 X_M je měřená hodnota

Třída přesnosti

ANALOGOVÝ MP

Chyba měřicího přístroje

Příklad působení chyb a třídy přesnosti na naměřený údaj:

voltmetr třídy přesnosti : 1

největší hodnota měřicího rozsahu : 130 V

dovolená chyba : $\pm 1,3$ V podél celé stupnice (v celém rozsahu)

skutečná přípustná procentní chyba tedy s rostoucí hodnotou – vý-
chylkou – stoupá :

při měření plné hodnoty = 130 V je chyba $\pm 1,3$ V rovna ± 1 %

při měření poloviční hodnoty = 65 V je chyba rovněž $\pm 1,3$ V, což
jsou už ± 2 %

při měření malé hodnoty = 10 V je chyba rovněž $\pm 1,3$ V, což už je
celých ± 13 %!!!

Třída přesnosti

ANALOGOVÝ MP

Chyba měřicího přístroje

Příklad.

Měřicím přístrojem s jmenovitým rozsahem $I_m = 10 \text{ mA}$ byl změřen proud $I = 8,3 \text{ mA}$.

Podle technických údajů výrobce je třída přesnosti **TP = 2,5 %**

Největší přípustná chyba měřeného proudu je

$$\Delta_m = (2,5 / 100) * 10 \text{ mA} = 0,25 \text{ mA}$$

To znamená správný údaj v rozmezí hodnot

$$I = 8,05 \text{ mA} \dots \text{ až } \dots 8,55 \text{ mA}$$

Relativní chyba naměřené hodnoty proudu je pak

$$\delta_m = 0,25 / 8,3 = 0,030 = 3 \%$$

Třída přesnosti

Ilustrační příklad

Na analogovém voltmetru s rozsahem $X_R=120V$ jsme změřili dvě napětí: $U_{M1}=120V$ a $U_{M2}=5V$. Určete absolutní a relativní chybu jednotlivých měření. Třída přesnosti přístroje je 1.

Řešení: **Absolutní chyba** je při obou měřeních stejná a je dána třídou přesnosti:

$$\Delta_m = \pm \frac{X_R}{100} \cdot \delta_{TP} = \pm \frac{120}{100} \cdot 1 = \pm 1,2 \text{ V}$$

Přístroj měří s přesností $\pm 1,2V$ po celé stupnici daného rozsahu.

Relativní chybu můžeme vypočítat např. ze vztahu $\delta_M = \pm \delta_{TP} \cdot \frac{X_R}{X_M}$.

Pak obdržíme výsledky: $\delta_{M1} = \pm 1 \cdot \frac{120}{120} = \pm 1\%$

$$\delta_{M2} = \pm 1 \cdot \frac{120}{5} = \pm 24\%$$

Třída přesnosti

DIGITÁLNÍ MP

Chyba měřicího přístroje

Příklad.

Měřicím přístrojem bylo naměřeno napětí $U = 1,5136 \text{ V}$ na jmenovitém rozsahu $U_m = 2 \text{ V}$ – u DMP to představuje mezní údaj číslicového displeje $1,9999 \text{ V}$.

Největší přípustná chyba je podle údaje výrobce dána hodnotou $0,05 \%$ z měřené hodnoty a dále **3-mi jednotkami (digit)** nejnižšího místa číslicového displeje.

.....

Třída přesnosti

DIGITÁLNÍ MP

Údaj **0,05 %** z měřené hodnoty představuje chybu

$$U = (0,05/100) * 1,5136 \text{ V} = 7,568 * 10^{-4} \text{ V}$$

a údaj třetí jednotky nejnižšího místa znamená chybu

$$U = 0,0003 \text{ V} = 3 * 10^{-4} \text{ V}$$

celková největší přípustná chyba je

$$\Delta m = (7,568 + 3) * 10^{-4} \text{ V} = 10,568 * 10^{-4} \text{ V}$$

a po zaokrouhlení na dvě platné číslice

$$\Delta m = (1,1) * 10^{-3} \text{ V}$$

Relativní chyba naměřené hodnoty je

$$\delta m = (1,1) * 10^{-3} \text{ V} / 1,5136 \text{ V} = 0,000727 \text{ V} = 0,07 \%$$

Opakovatelnost (výsledků měření)

je **těsnost shody** mezi *výsledky* po sobě následujících měření téže měřené veličiny provedených za stejných podmínek měření.

Podmínky opakovatelnosti:

- stejný postup měření
- stejný pozorovatel
- stejné měřicí přístroje použité za stejných podmínek
- ve stejném místě
- (opakování v průběhu krátké časové periody).

Správnost

je **těsnost shody** mezi *průměrnou hodnotou* získanou z velké řady výsledků zkoušek a přijatou referenční hodnotou.

Míra správnosti se obvykle vyjadřuje pomocí *strannosti*.

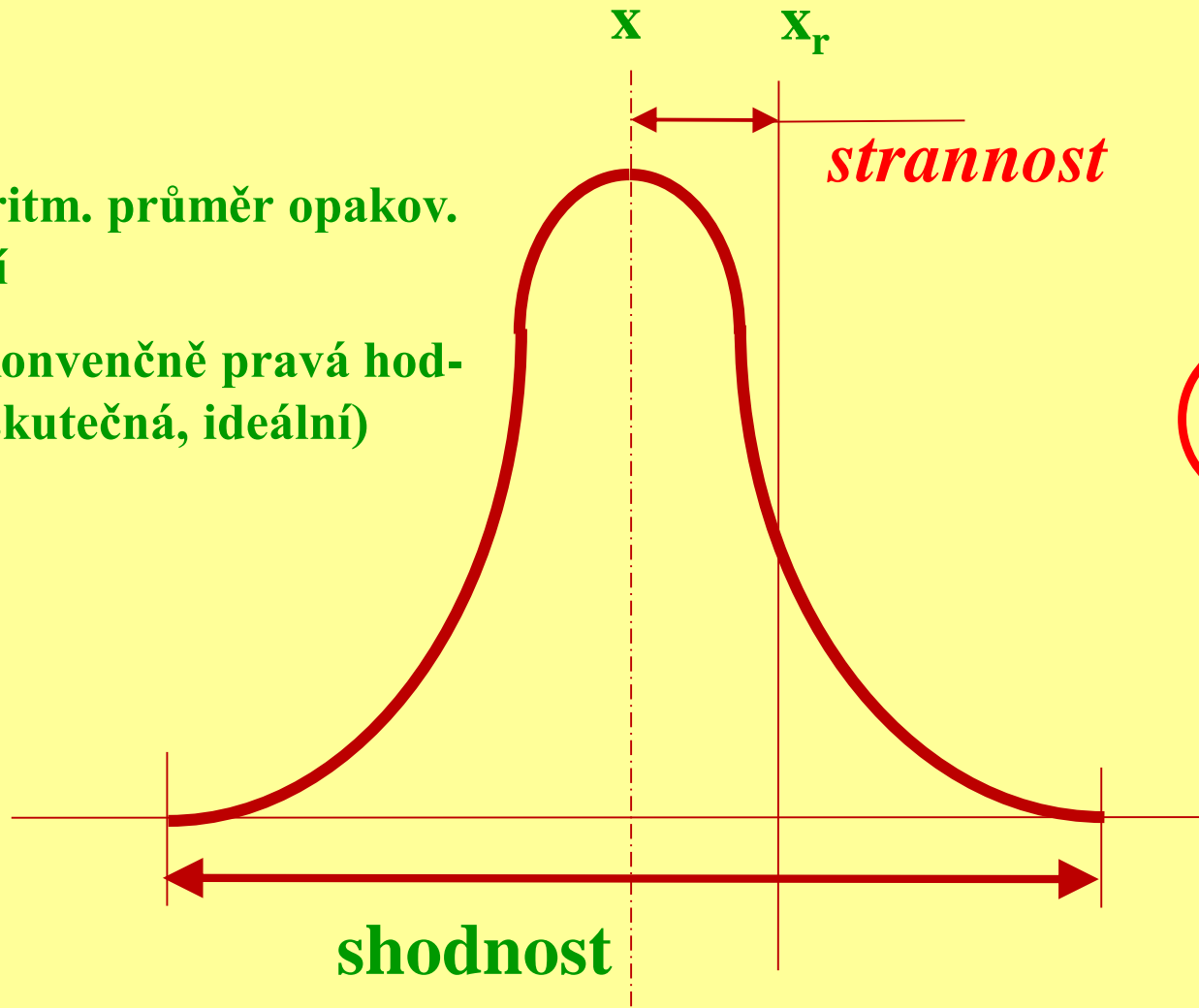
Strannost (vychýlení)

je **rozdíl** mezi střední hodnotou výsledků zkoušek a přijatou referenční hodnotou - viz následující obrázek.

Strannost je celková systematická chyba.

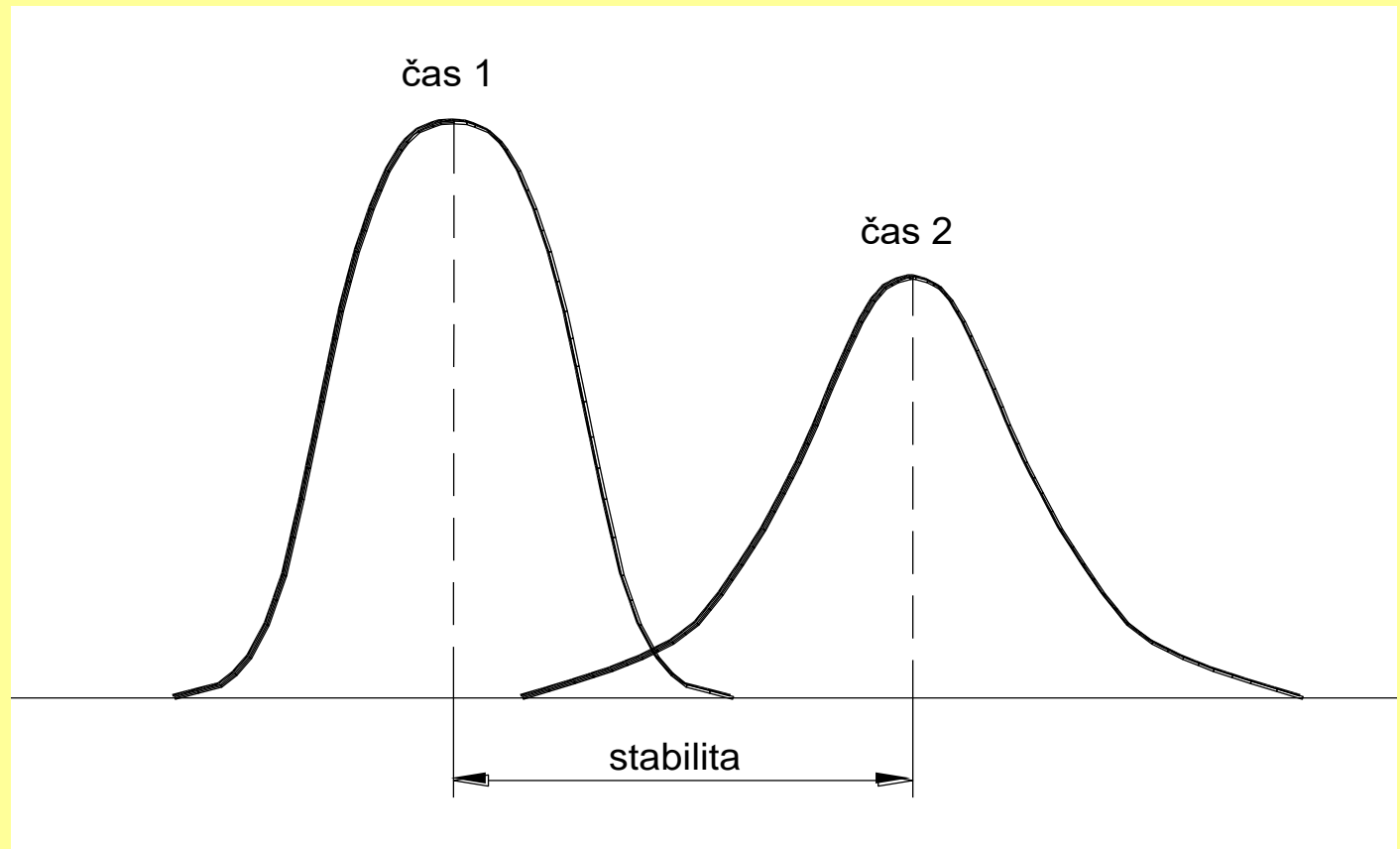
\bar{x} ... aritm. průměr opakov. měření

x_r ... konvenčně pravá hodnota (skutečná, ideální)



Stabilita měření

charakterizuje **celkovou proměnlivost** výsledků měření stejného rozměru (znaku jakosti) v delším časovém úseku.



Odlehlá hodnota

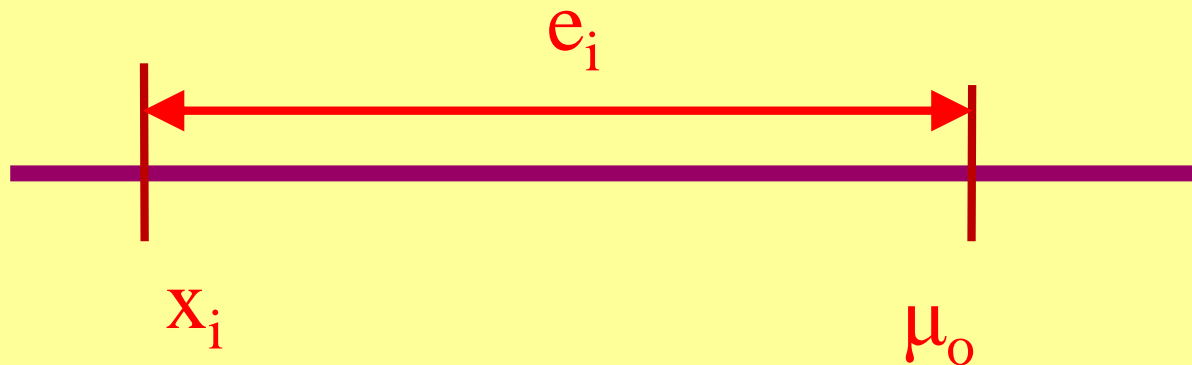
je **prvek množiny hodnot**, který není konzistentní s ostatními prvky této množiny.

ČSN ISO 5725-2 vymezuje statistické testy a hladinu významnosti, které se mají používat k odhalení odlehlých hodnot v experimentech správnosti a shodnosti.

Kvantifikace chyby

Chybou e_i naměřené veličiny je rozdíl:

$$e_i = x_i - \mu_0$$



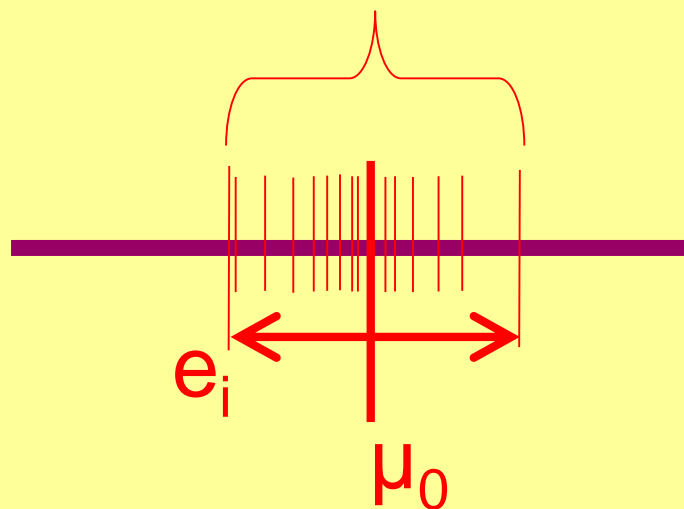
Kvantifikace chyby

Pozor na rozdíly v realitě provedených měření – měření může být přesné, ale nemusí být správné.

Grafické vyjádření vztažené na naměřené hodnoty a jejich skutečnou (ideální) hodnotu.

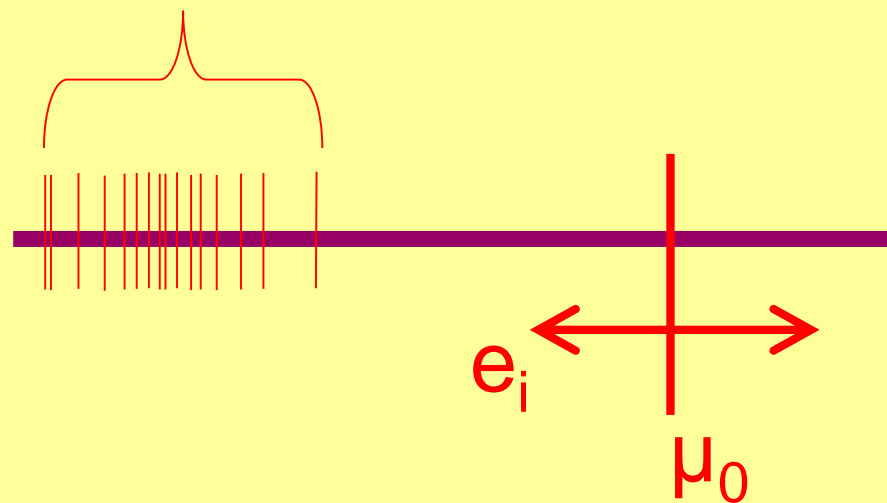
Kvantifikace chyby

jednotlivé naměřené hodnoty x_i



správné a přesné měření

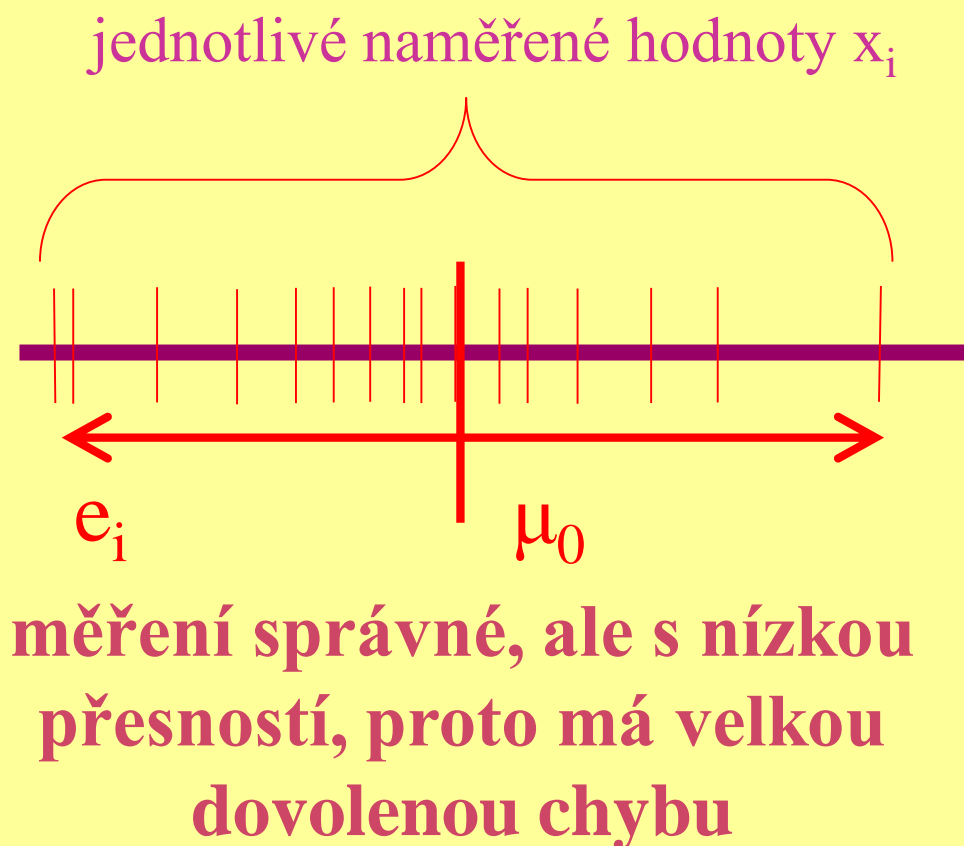
jednotlivé naměřené hodnoty x_i



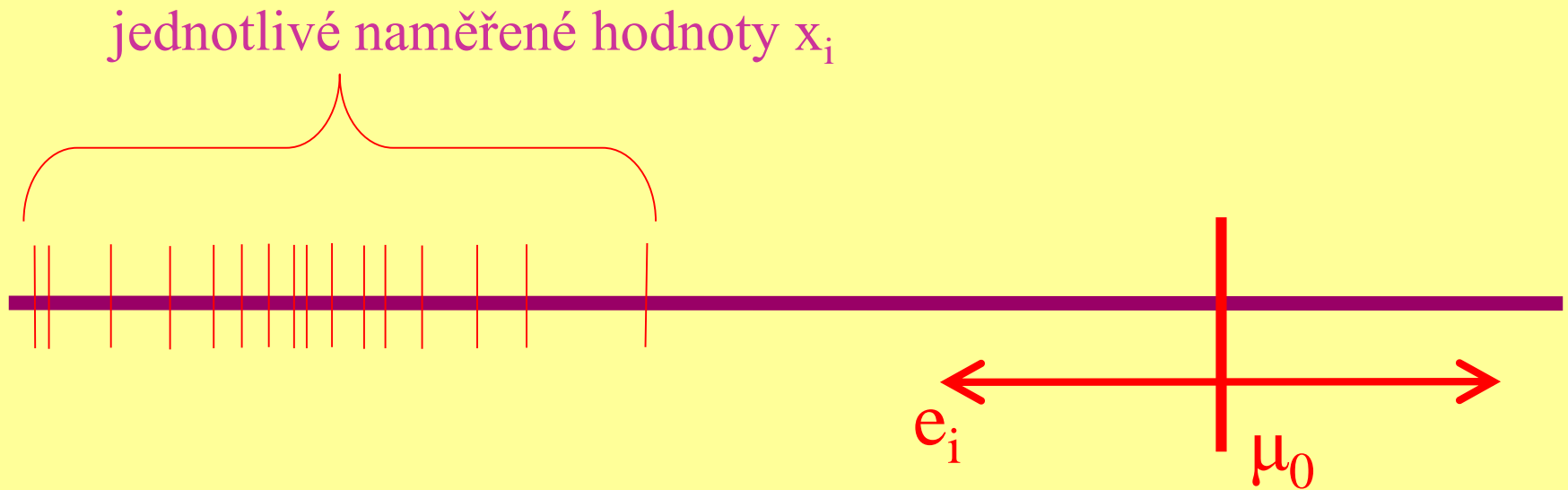
nesprávná i když přesná měření

Kvantifikace chyby

správná varianta
rozložení výsled-
ků jednotlivých
měření, i když by
bylo správné zúžit
rozptyl a tím i
zlepšit přesnost

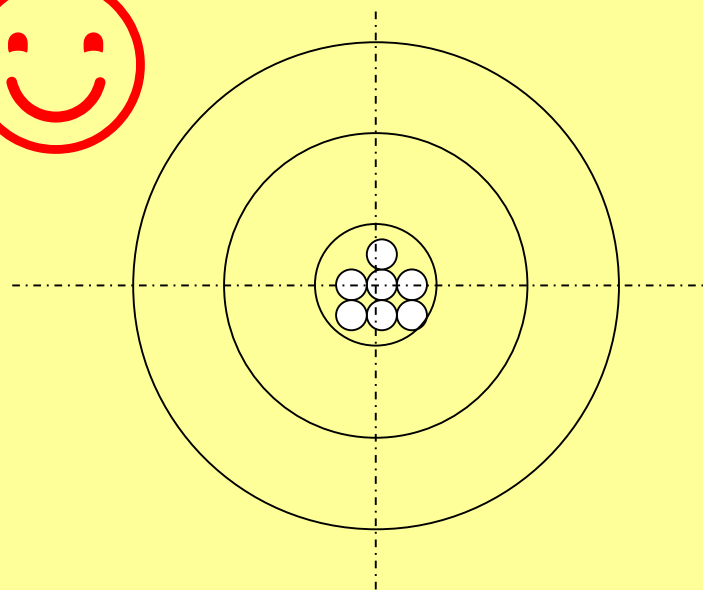


Kvantifikace chyby

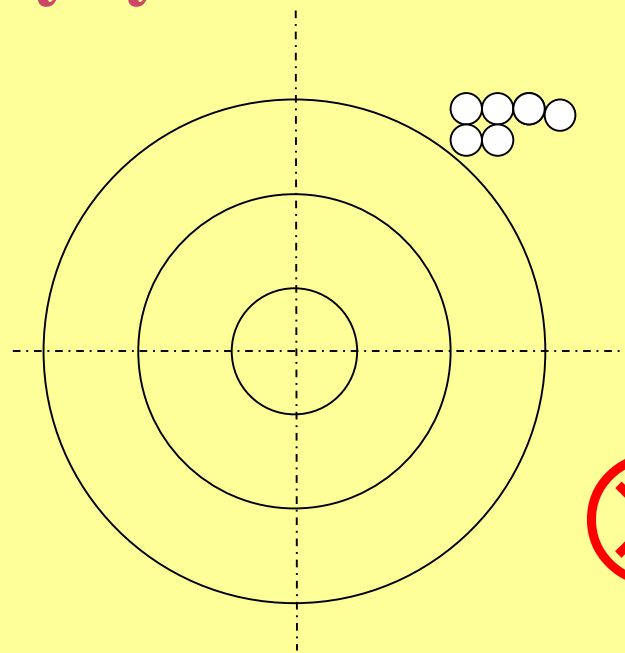


měření **nesprávné a nepřesné**, i když má
dovolenu velkou chybu

Kvantifikace chyby



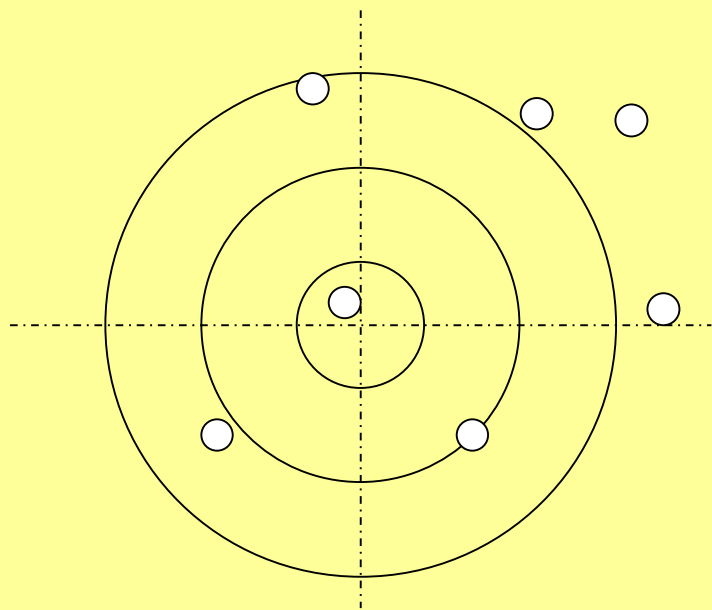
vysoká přesnost
vysoká správnost
nalezené = pravdivé



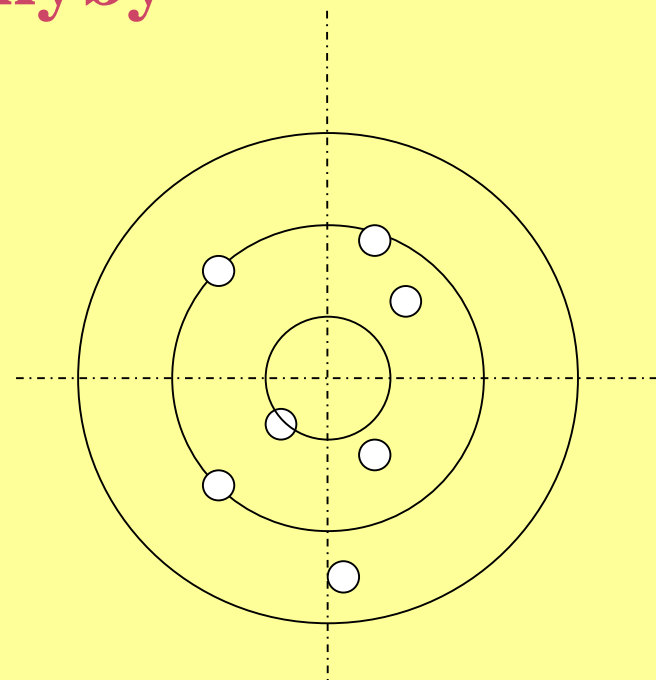
vysoká přesnost
nízká (nulová) správnost
nalezené \neq pravdivé

CHYBY

Kvantifikace chyby

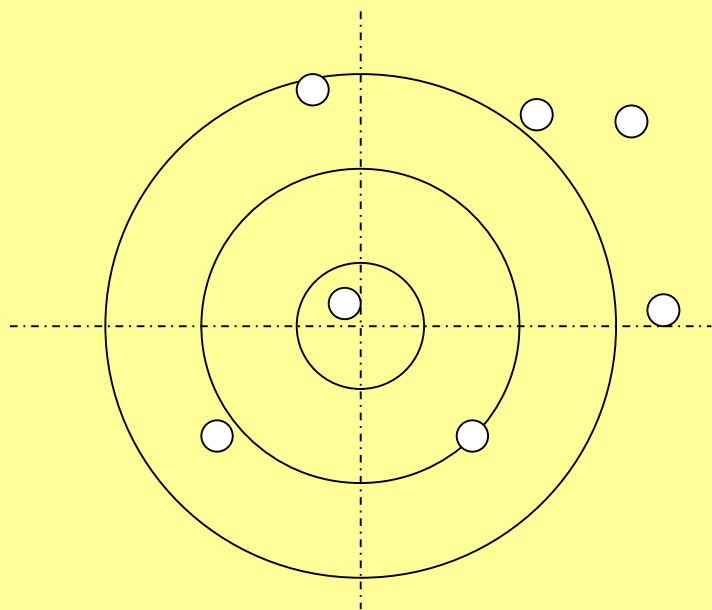


nízká přesnost
nízká správnost
nalezené \neq pravdivé

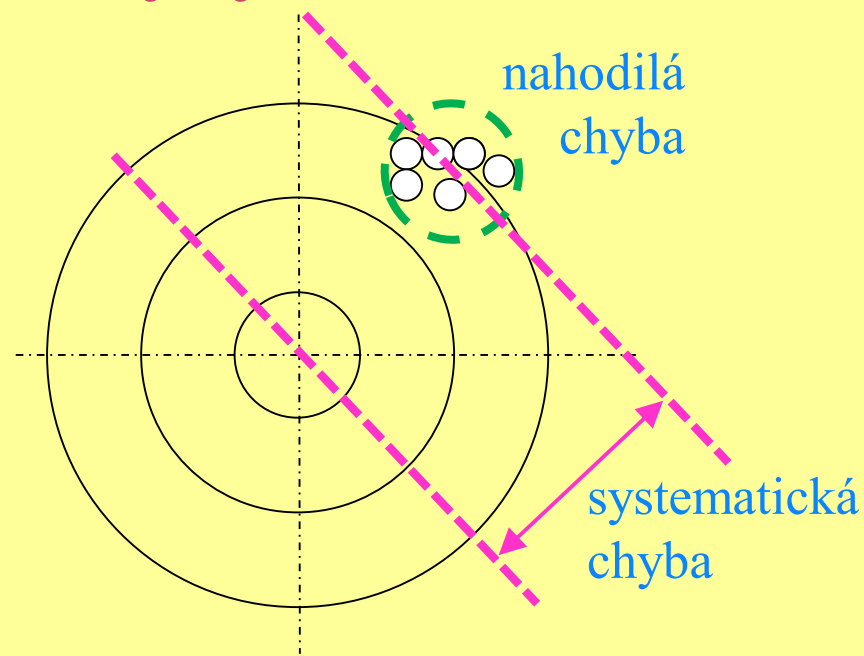


nízká přesnost
vysoká správnost
nalezené = pravdivé

Kvantifikace chyby



ROZPTYL – je dán vzdálenostmi zásahů mezi sebou i vůči středu



SYSTEMATICKÁ CHYBA

CHYBY

Podmínky opakovatelnosti:

- stejný postup měření
- stabilita měření i měřené veličiny
- stejný pozorovatel
- stejný měřicí přístroj (*kus !!!* , nestačí shodný typ a provedení), řetězec nebo soubor přístrojů
- za stejné pracovní podmínky i podmínky pracovního okolí
- stejné (totožné) místo měření
- opakování v průběhu krátké (co možná nejkratší) časové periody, aby se vyloučila změna vnějších vlivů.

Chyba analogového MP I.

- rozdíl údaje MP a pravé hodnoty měřené veličiny
- závisí i na podmínkách měření
- přesnost AMP dána třídou přesnosti TP (uvedeno na stupnici)
(0,05 - 0,1 - 0,2 - 0,5 - 1 - 1,5 - 2,5 - 5)

Řád absolutní chyby MP nesmí být nižší než nejnižší řád naměřené hodnoty !!!

Chyba analogového MP I.

- **TP** – procentní chyba při maximální výchylce (chyba z rozsahu) a při dodržení referenčních podmínek:
 - teplota okolí
 - vnější magnetické pole
 - frekvence
 - činitel zkreslení (pro střídavá měření).

Pro **elektrické analogové** (ručkové) měřicí přístroje je výrobcem udávána **třída přesnosti T_p**

$$m_x = \frac{T_p}{100} * x_m$$

x_m je největší možná naměřená hodnota určená rozsahem

Chyba digitálního MP I.

U **digitálních (číslicových)** měřicích přístrojů je maximální chyba m_x složena z výrobcem udávaných dvou složek:

$m_{1,x}$ závislá na velikosti měřené hodnoty a vyjadřované v procentech měřené hodnoty

$m_{2,x}$ závislá buď na použitém rozsahu (v tom případě vyjádřené v procentech použitého rozsahu) nebo vyjádřené počtem jednotek (digitů) nejnižšího místa číslicového displeje na zvoleném rozsahu.

Chyba digitálního MP I.

Digitální měřicím přístroj ukazuje (naměří) na rozsahu $U_m = 2 \text{ V}$ „pouze“ (počet číslic číslicového displeje je 4 a $\frac{1}{2}$ posic) největší zobrazený údaj 1,9999V.

Největší přípustná chyba je podle údaje výrobce dána hodnotou 0,05% z měřené hodnoty a dále 4-mi jednotkami (digity) nejnižšího místa číslicového displeje.

Matematika

Absolutní a relativní chyba měření

Absolutní a relativní chyba měření jsou chyby charakterizující přesnost měřicího přístroje.

Matematika

Skutečná chyba

(statická chyba - odchylka) je dána vztahem:

$$\Delta y = y - x_i \sim y - x_s$$

nebo

$$x_i = x_s - \Delta x_1 - \Delta x_2$$

Absolutní chyba

$$\delta = y - x_{\text{stř}} \sim x_s - x_i$$

Relativní chyba

$$\delta_r = (\Delta y / y) * 100\% = (\delta / y) * 100\%$$

Vyjádřeno pomocí **třídy přesnosti přístroje**

$$T_p = (\Delta y_{\max} / x_{\max}) * 100\% = (\delta_{\max} / x_{\max}) * 100\%$$

Skutečná chyba – význam jednotlivých značek:

- y --- údaj přístroje
- x_i --- skutečná (ideální) hodnota
- x_s --- naměřená hodnota
- $x_{stř}$ --- střední hodnota měřené veličiny (obvykle zastoupená jejím nejlepším odhadem)
- Δx_1 --- soustavná chyba měření
- Δx_2 --- náhodná chyba měření
- δ --- chyba absolutní (má rozměr měřené veličiny)
- δ_r --- chyba relativní (je vždy udávána jako poměrová)
- Δy_{max} --- maximální (přípustná) chyba
- $\Delta \delta_{max}$ --- maximální (přípustná) absolutní chyba
- x_{max} --- rozsah přístroje (jeho maximum)

Matematika

$$\Delta_{syst} = \bar{X} - X_S$$

$$\delta_{syst} = \frac{\Delta_{syst}}{X_S} * 100$$

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

N – počet měření

\bar{X} – výběrový průměr

X_S – konvenčně správná hodnota (skutečná)

n - počet měření dané veličiny

X_S - skutečná hodnota měřené veličiny

\bar{X} - nejpravděpodobnější hodnota měřené veličiny

X_i - naměřená hodnota (*i-té měření*)

$\Delta X_i = X_i - X$ - **absolutní chyba** (*i-tého měření*)

$\Delta V_i = X_i - \bar{X}$ - **nejpravděpodobnější chyba**
(*i-tého měření*)

Skutečná chyba – jiný pohled

(statická chyba - odchylka) je dána vztahem:

$$\Delta y = y - x_i \sim y - x_s$$

nebo

$$x_i = x_s - \Delta x_1 - \Delta x_2$$

Absolutní chyba

$$\delta = y - x_{\text{stř}} \sim x_s - x_i$$

Relativní chyba

$$\delta_r = (\Delta y / y) * 100\% = (\delta / y) * 100\%$$

Vyjádřeno pomocí třídy přesnosti přístroje

$$T_p = (\Delta y_{\text{max}} / x_{\text{max}}) * 100\% = (\delta_{\text{max}} / x_{\text{max}}) * 100\%$$



Výpočet chyby měření - příklad

naměřená hodnota $\rightarrow MH = 25 \text{ V}$

konvenčně správná hodnota $\rightarrow SH = 26 \text{ V}$

absolutní chyba měření $\Delta = MH - SH = 25 - 26 = -1 \text{ V}$

relativní chyba měření $\delta = \frac{\Delta}{SH} * 100 = \frac{-1}{26} * 100 = -3,85\%$

Je-li známa SH \rightarrow relaci u výpočtu relativní chyby se vztahuje k SH, jinak se dosazuje MH



Absolutní chyba měření

je algebraický rozdíl mezi ukazovanou hodnotou a porovnávanou hodnotou.

Absolutní chyba = ukazovaná hodnota - porovnávaná hodnota.

Lze z ní stanovit absolutní hodnotu (velikost) chyby měření konkrétní naměřené hodnoty přímo v jednotkách měřené veličiny. Je-li absolutní hodnota chyby přičtena a odečtena od naměřené hodnoty, definuje interval, ve kterém se nachází skutečná (pravá) hodnota měřené veličiny.

Chyby

Za skutečnou (ideální) hodnotu nelze považovat teoreticky určenou (vypočtenou, navrženou, odvozenou), protože se realita může od skutečnosti značně lišit a odchýlovat – to je základní a principiální problém určení této hodnoty.....

Teorie chyb proto musí dát postup a principy, jak tuto situaci řešit a zvládat

Čili, jak tu „neznámou a snadno a přímo“ nedostupnou“ skutečnou hodnotu odhadnout a zároveň odhadnout (lepší by bylo určit či propočítat) přesnost tohoto odhadu.

Chyby

Základem tohoto řešení je získat více výsledků „téhož“ měření – měřit vícekrát a z nich pak hledat (a nacházet) reálně nejlepší odhad hodnoty té inkriminované skutečné hodnoty – v podstatě jde o to, aby rozptyl naměřených hodnot (těch z přístroje odečtených) byl co nejmenší a určení přesnosti tohoto odhadu – to znamená **určit absolutní chybu**.

POZOR na častý omyl:

tento údaj není odchylkou o skutečné hodnoty, ale charakterizuje velikost intervalu v němž by se měla skutečná hodnota nacházet a kterou v něm lze s dohodnutou (určenou) pravděpodobností očekávat.

Chyby

Standardně je volena **hodnota pravděpodobnosti** na úrovni

0,683

pro **výskyt skutečné hodnoty** v intervalu:

$$(x_0 - \delta^* x_0 , x_0 + \delta^* x_0)$$

Většinou se bere za fakt, že chybu tvoří dvě základní chyby /
/ složky (viz dále) - **systematická** chyba a **náhodná** chyba.

Platí vztah:

$$\Delta_c = \Delta_{sc} + \Delta_{nc}$$

Nebo jinak....

$$\Delta = MH - SH \quad - \text{absolutní chyba}$$

$$\Delta V_i = X_i - \bar{X} \quad - \text{nejpravděpodobnější chyba} \\ (\text{i-tého měření})$$

$$\delta = \frac{\Delta}{MH} * 100 [\%] \quad - \text{relativní (poměrná, procentní)} \\ \text{chyba}$$

MH ... naměřená hodnota

SH ... konvenčně správná hodnota

Chyby fyzikálních veličin určených výpočtem

Násobení - veličina X je součinem veličin A , B

T- MaR

Nejpravděpodobnější hodnota $\bar{X} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

Relativní chyba $\delta_X = \delta_A + \delta_B$

Dělení - veličina X je podílem veličin A , B

Nejpravděpodobnější hodnota $\bar{X} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}}$

Relativní chyba $\delta_X = \delta_A + \delta_B$

Chyby fyzikálních veličin určených výpočtem

Posloupnost kroků

T- MaR

a) *Měřená veličina*

– 1. průměr – 2. absolutní chyba – 3. relativní chyba

Relativní chyba

$$\delta_X = \frac{\Delta X}{\bar{X}}$$

b) **Počítaná veličina**

– 1. průměr – 2. relativní chyba – 3. absolutní chyba

Absolutní chyba

$$\Delta X = \delta_X \cdot \bar{X}$$

Absolutní chyba měření

Příklad:

Naměříme-li na displeji ohmmetru 1.00Ω

→ přístroj má 7% chybu.

Vypočítaná chyba měření je $\pm(0,02 + 0,05) = \pm 0,07 \Omega$.

Což znamená, že skutečná (pravdivá) hodnota odporu bude v rozmezí $0,93 - 1,07 \Omega$.

Relativní chyba měření

je poměr absolutní chyby k porovnávané hodnotě.

Chyba relativní může být udána v několika tvarech, jako bezrozměrné číslo, v procentech nebo v jednotkách ppm (Parts per milion, česky „dílů či částic na jeden milion“).

Vyjádření v procentech je nejčastější je dáno vztahem

$$dx = (Dx / Xs) * (100) [\%]$$

Jedná se tedy o procentní vyjádření absolutní chyby k hodnotě měřené veličiny.

Relativní chyba měření

Praktičtější, než je **absolutní** chyba, je používání chyby **relativní** – je bezrozměrná nebo se vyjadřuje v % – a pomocí absolutní chyby vyjadřuje přímý vztah k naměřené hodnotě:

$$\delta = (\Delta * x_0 / x_0) * 100$$

Relativní chyba měření

Příklady výpočtu pro ohmmetr s uvedenou přesností měření – pro hodnoty $1,00 \Omega$ a $0,1 \Omega$ a $0,01 \Omega$:

$$\pm(0,07 \Omega / 1,00 \Omega) \times 100 \% = 7 \%$$

$$\pm(0,052 \Omega / 0,10 \Omega) \times 100 \% = 52 \%$$

$$\pm(0,0502 \Omega / 0,01 \Omega) \times 100 \% = 502 \%$$



Bezrozměrné číslo:

chyba relativní je dána vztahem

$$dx = Dx / Xs [-]$$

Vyjádření v jednotkách [ppm]: chyba relativní je dána vztahem

$$dx = (Dx / Xs) * (1\ 000\ 000) [ppm]$$

Relativní chyba měření je tedy tím vyšší, čím nižší je měřená hodnota.

Budeme-li měřit například dokonalý zkrat tedy odpor 0,0000000000000000 Ω , relativní chyba měření bude nekonečně velká.

Nebo jinak....

Relativní chyba ($\hat{\delta}$) je *bezrozměrné číslo*, nebo se může vyjádřit v % nebo v p.p.m. (*angl. parts per milion*), tj. v miliontinách:

$$\hat{\delta}_{(X)} = \frac{\Delta(X)}{X_{(S)}}$$

$$\hat{\delta}_{(X)} = \frac{\Delta(X) * 100}{X_{(S)}} \quad (\%)$$

$$\hat{\delta}_{(X)} = \frac{\Delta(X) * 10^6}{X_{(S)}} \quad (\text{ppm})$$

Zápis výsledku měření:

$$X = \bar{X} \pm \Delta X$$

X - měřená veličina

\bar{X} - výsledek měření (aritmetický průměr)

ΔX - absolutní chyba (odchylka) měření

$\delta X = \frac{\Delta X}{\bar{X}}$ - **relativní chyba** (odchylka) měření

- zavádí se pro porovnání přesnosti měření

Zápis výsledku měření:

$$X = \bar{X} \pm \Delta X$$

naměřená hodnota $\rightarrow MH = 25 \text{ V}$

konvenčně správná hodnota $\rightarrow SH = 26 \text{ V}$

absolutní chyba měření $\Delta = MH - SH = 25 - 26 = -1 \text{ V}$

relativní chyba měření $\delta = \frac{\Delta}{SH} * 100 = \frac{-1}{26} * 100 = -3,85\%$

Je-li známa SH \rightarrow relaci u výpočtu relativní chyby vztahujeme k SH, jinak dosazujeme MH

Zápis výsledku

Zápis výsledku měření tedy bude

$$MH \text{ nebo } X = 25 \pm 1 \text{ [V]}$$

$$\delta = -3,85\%$$

.....pokračování dále.....

Náhodné chyby

Pokud při hledání nejpravděpodobnější hodnoty požadujeme, aby součet nejpravděpodobnějších chyb byl roven 0:

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = 0$$

dosazením

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = \sum_{i=1}^n X_i - n\bar{X} = 0$$

dostáváme

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$


aritmetický průměr

$$\bar{a} = \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$$

Dosazením $X_i = X + \Delta X_i$ do předchozího vztahu

dostáváme
$$n\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n (X + \Delta X_i) = nX + \sum_{i=1}^n \Delta X_i$$

odtud

$$n\bar{X} - nX = \sum_{i=1}^n \Delta X_i$$

$$\bar{X} - X = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta X_i}{n}$$

Celková chyba - Δ_c

je **součtem** systematické a náhodné chyby:

$$\Delta_c = \Delta + \delta$$

kde:

Δ - systematická chyba,

δ - náhodná chyba

Náhodná (nahodilá, statistická) chyba měření - δ

Vzniká **nepravidelnými, náhodnými rušivými vlivy** měnícími se podle okamžitých podmínek pokusu nebo měření (otřesy, změnami teplot, tlaku vzduchu atd.) a **nedokonalostí** našich smyslů.

Náhodné chyby se vyskytují naprosto nepravidelně.

Nahodilou chybu nelze úplně odstranit.

Odhadnout ji (nebo i přesněji zjistit) lze opakovaným měřením a statistickým zpracováním naměřených výsledků.

Je to **výsledek** měření *minus* střední hodnota, která by vznikla z nekonečného počtu měření téže veličiny uskutečněných za podmínek opakovatelnosti.

Náhodné chyby

Postup měření a jeho zpracování:

1. **n – krát se zopakuje měření** téže veličiny za stejných podmínek.
2. Spočteme **aritmetický průměr**.
3. Spočteme **střední kvadratickou odchylku** aritmetického průměru.
4. Vyloučí se **hrubé chyby** a zopakují se kroky 2 až 4.
5. Zvolí se **pravděpodobnost P** , určí se hodnota **Studentova součinitele** $t_{P,n}$ a spočteme **krajní chybu** aritmetického průměru - nejčastěji se používá **$P = 95 \%$** .
6. **Zapíše se výsledek** měření ve tvaru

$$X = (\bar{x} \pm t_{P,n} * \sigma_{\bar{X}}) \quad \text{jednotek.}$$

Hustota pravděpodobnosti veličiny X s *normálním*
(*Gaussovským*) *rozdělením*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R$$

σ – směrodatná odchylka

m – průměrná hodnota veličiny X

σ - směrodatná odchylnka – určuje tvar Gaussovy křivky dané pravděpodobnosti

s - **odhad** směrodatné odchylnky

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-1}}$$

$S(\bar{X})$ - odhad směrodatné odchylnky výběrem průměru
→ pro výpočet nepřímých měření

$$S(\bar{X}) = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N(N-1)}}$$

d_i – absolutní odchylka i-tého členu od průměru

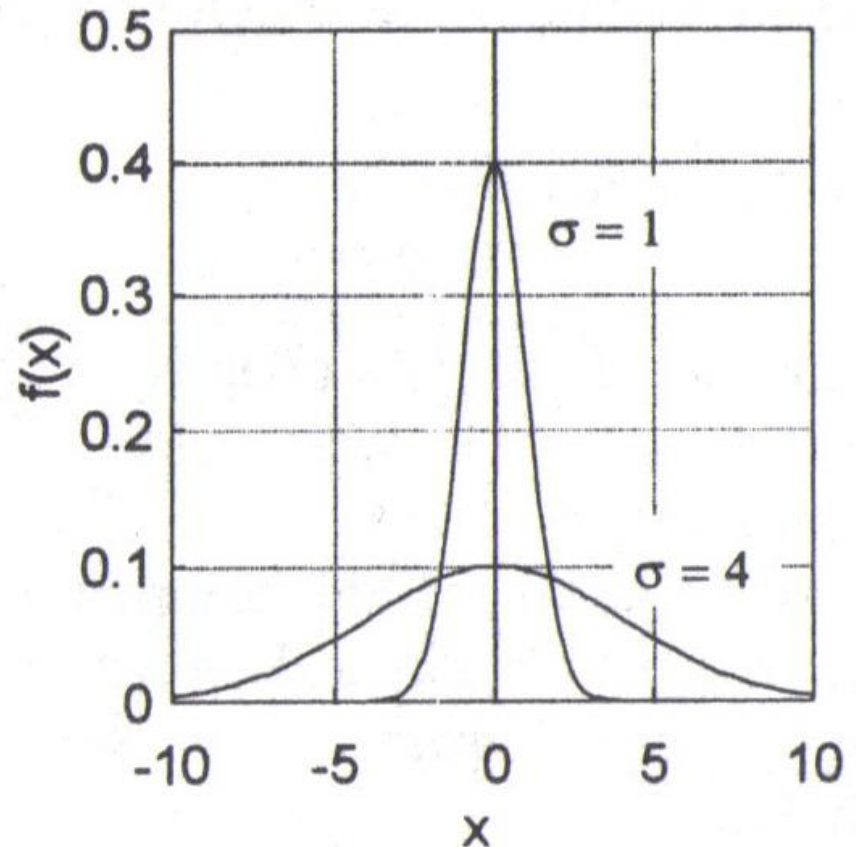
$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

• známe-li s a $m \rightarrow$ určíme **meze intervalu**, ve kterém leží skoro všechny hodnoty měř. veličiny $\rightarrow \langle m - \Delta_k; m + \Delta_k \rangle$

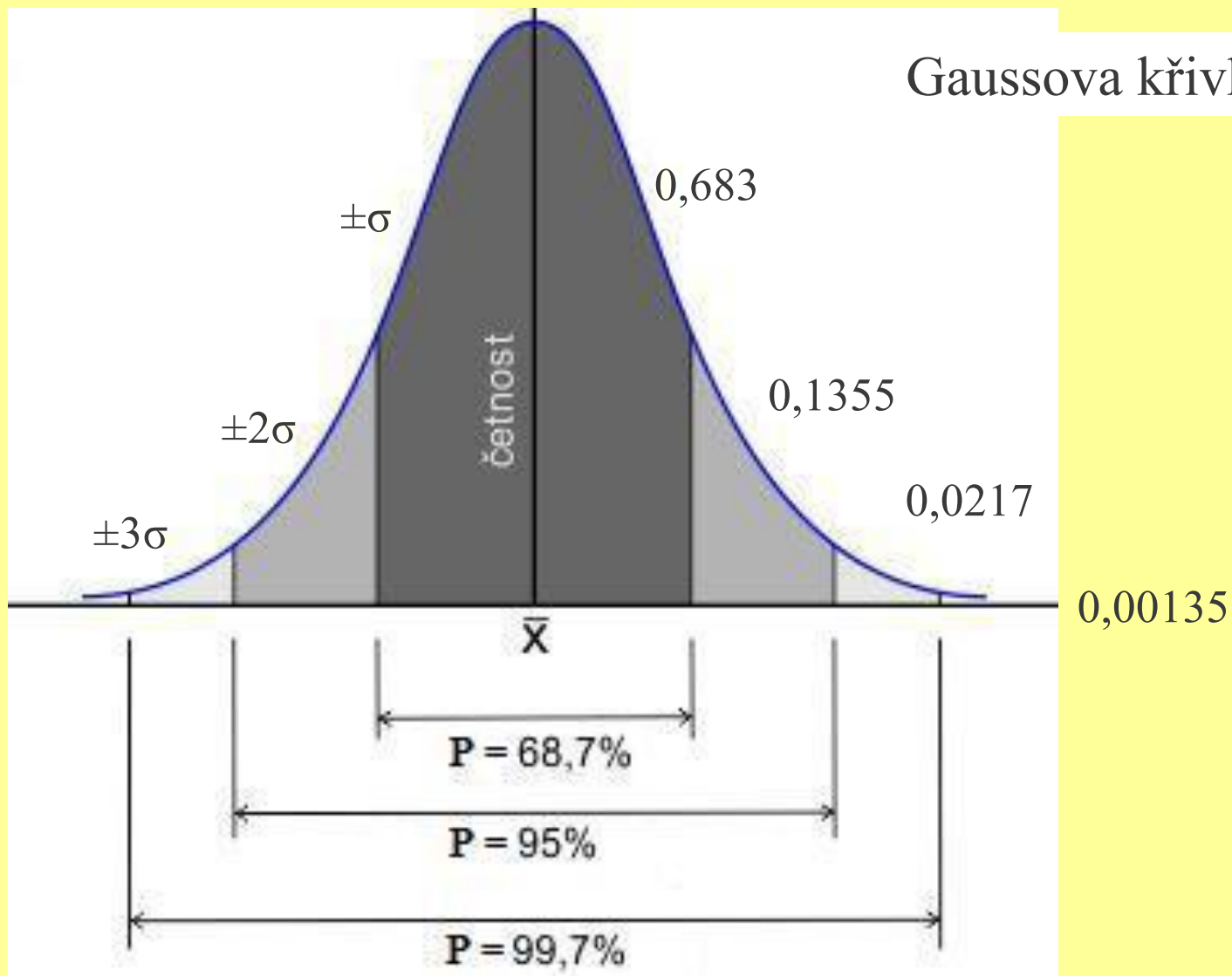
$\Delta_k = k*s$ **krajní chyba měření**

$k = 2$ nebo $3 \rightarrow$ pro $k=3$ leží v intervalu 99,7% všech hodnot

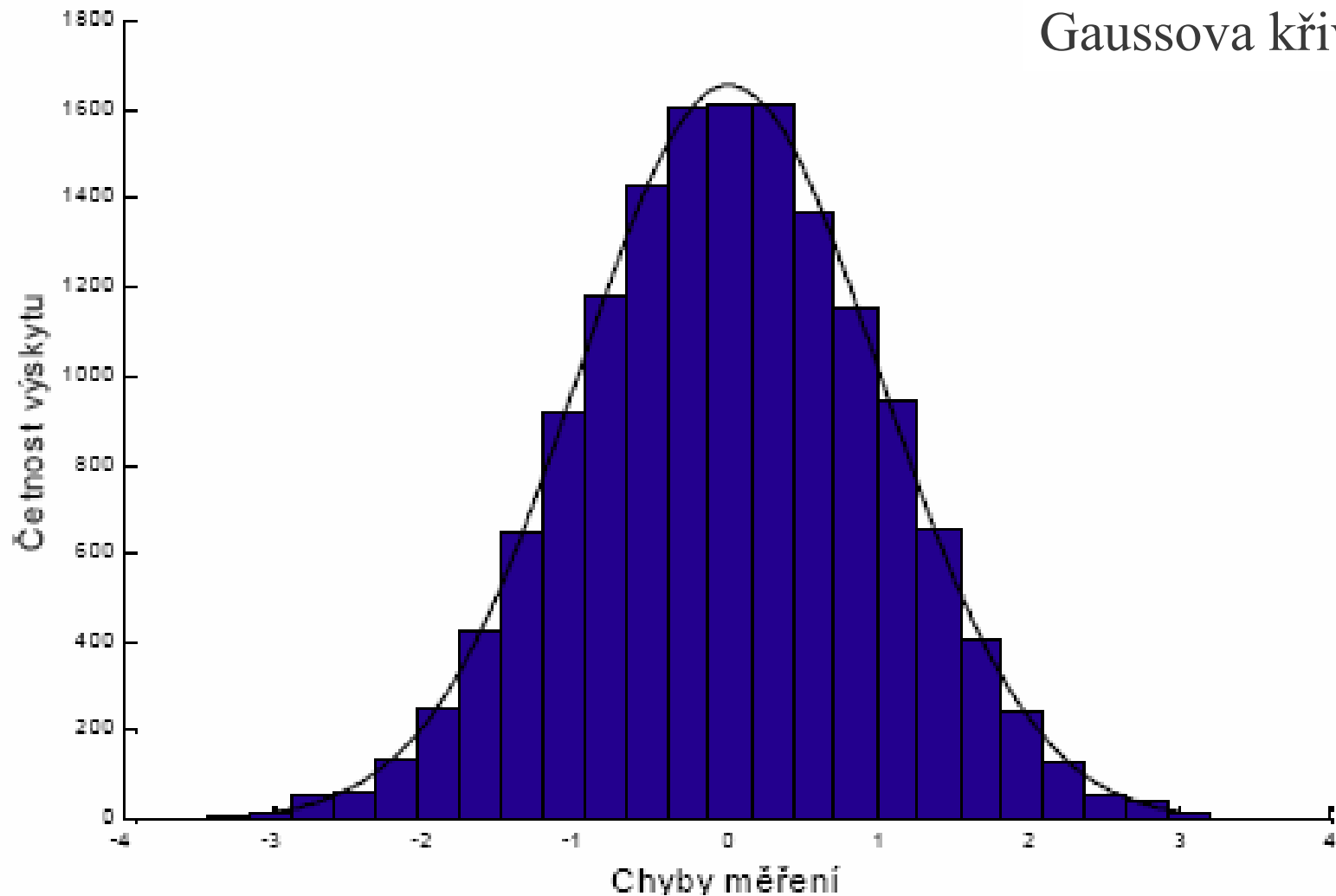
$m=0$ (průměr)



Gaussova křivka



Gaussova křivka



Postup měření a jeho zpracování:

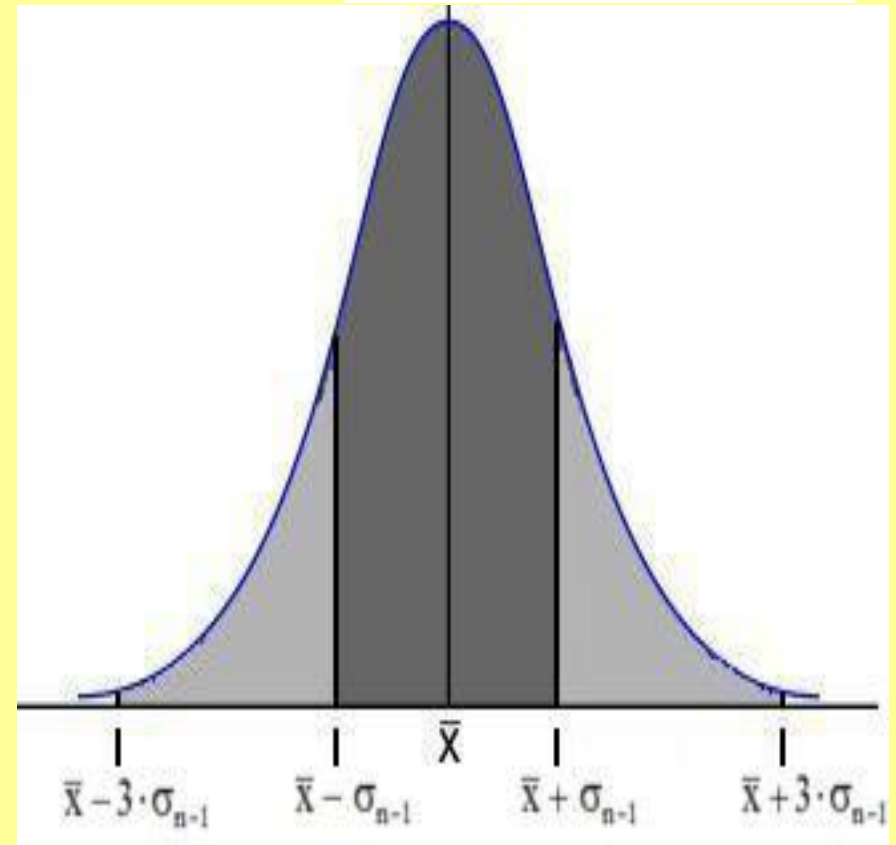
K vyloučení hrubých chyb používáme tzv.

3s – kritérium

Za hrubou chybu považujeme všechny hodnoty, které neleží v intervalu určeném trojnásobkem výběrové směrodatné odchylky:

σ_{n-1} , tj. x_i ($x - 3 * \sigma_{n-1}$; $x + 3 * \sigma_{n-1}$)

Gaussova křivka



Náhodné chyby

.... zápis výsledku

Postup měření a jeho zpracování:

Zápis výsledku měření

V mezivýpočtech zásadně **nezaokrouhlujeme** !!!!

Krajní chybu aritmetického průměru zaokrouhlíme na 1 platnou číslici.

Aritmetický průměr zaokrouhlíme na stejný počet desetinných (desítkových) míst jako má krajní chyba.

Náhodné chyby

Protože chyby ΔX_i nabývají se stejnou pravděpodobností kladných i záporných hodnot, blíží se pravá strana pro nekonečný počet měření k nule.

Pro nekonečně velký počet měření je tedy skutečná hodnota naměřené veličiny X totožná s aritmetickým průměrem.

Náhodné chyby

Na základě směrodatné odchylky je možno spočítat chybu vymezující kolem aritmetického průměru interval spolehlivosti - skutečná střední hodnota měřené veličiny leží s pravděpodobností $P = 1 - \alpha$ v intervalu $\langle \bar{x} - \Delta x; \bar{x} + \Delta x \rangle$

$$\Delta x = t_{\alpha}(f) s_{\bar{x}} = t_{\alpha}(f) \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

- $t_{\alpha}(f)$ je koeficient Studentova rozdělení
- α je zvolená hladina významnosti (riziko)
- $f = n - 1$ je počet stupňů volnosti
- n je počet měření.

Volíme-li $\alpha = 0,05$, tedy $P = 0,95$, pak s pravděpodobností $P = 1 - \alpha = 95\%$ leží skutečná hodnota měřené veličiny v intervalu $(x \pm \Delta x)$.

Náhodné chyby

Nejistotu, s jakou přesností aritmetický průměr určuje měřenou veličinu lze odhadnout různými metodami.

Průměrná chyba

Pravděpodobnost vzniku kladné a záporné odchylky je stejná \Rightarrow při velkém počtu měření je aritmetický průměr chyb ΔX_i roven 0 \Rightarrow průměrná chyba se počítá z absolutních hodnot chyb $|\Delta X_i|$.

$$\Delta X = \frac{\sum_{i=1}^n |\Delta X_i|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|}{n}$$

Náhodné chyby

Zásady pro zápis výsledku

- chybu měření uvádíme na **nejvýše**
- ve výsledku zaokrouhlujeme v řádu **poslední platné číslice chyby**

$$l = (6,32 \pm 0,02) \text{ mm} \quad \delta l = 0,3 \%$$

$$v = (26,32 \pm 0,42) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \delta v = 1,6 \%$$

- pokud se **chyba měření** ve výsledku **neudává**, předpokládá se, že je menší, než polovina řádu za poslední platnou číslicí výsledku

$$v = 3,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \equiv (3,45 \leq v \leq 3,55) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Náhodné chyby

Zápis výsledku měření a jeho zpracování:

<i>Nesprávný zápis</i>	<i>Co je špatně</i>	<i>Správný zápis</i>
$k = (92,43231 \pm 2,450661) \text{ N/m}$	<i>není zaokrouhleno</i>	$k = (92 \pm 2) \text{ N/m}$
$b = (0,00460 \pm 0,0000424) \text{ m}$	<i>není zaokrouhleno, příliš mnoho nul</i>	$b = (4,60 \pm 0,04) \text{ mm}$ $b = (4,60 \pm 0,04) \cdot 10^{-3} \text{ m}$
$R = (1653,2 \pm 19,3) \Omega$	<i>není zaokrouhleno</i>	$R = (1650 \pm 20) \Omega$
$m = (198,4351 \pm 0,04) \text{ g}$	<i>není zaokrouhleno</i>	$m = (198,44 \pm 0,04) \text{ g}$
$E = (1,639 \cdot 10^3 \pm 3) \text{ MPa}$	<i>různé řády</i>	$E = (1639 \pm 3) \text{ MPa}$
$k_B = (1,391 \cdot 10^{-23} \pm 7 \cdot 10^{-26}) \text{ J/K}$	<i>různé řády</i>	$k_B = (1,391 \pm 0,007) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
$d = 35 \pm 6 \text{ m}$	<i>chybí závorky</i>	$d = (35 \pm 6) \text{ m}$
$a = 4,038 \text{ cm} \pm 0,02 \text{ mm}$	<i>různé jednotky</i>	$a = (40,38 \pm 0,02) \text{ mm}$
$F = 235 \pm 3 \% \text{ N}$	<i>za ± se uvádí absolutní chyba</i>	$F = (235 \pm 7) \text{ N}$
$R = (1600000 \pm 300000) \Omega$	<i>příliš mnoho nul</i>	$R = (1,6 \pm 0,3) \text{ M}\Omega$

Pořadové číslo měření	$\frac{l_i}{\text{mm}}$	$\frac{\Delta l_i}{\text{mm}}$
1.	107,2	-0,16
2.	107,4	0,04
3.	107,4	0,04
4.	107,5	0,14
5.	107,3	-0,06
Průměr	107,36	0,088

$$1. \quad \bar{l} = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n}{n}$$

Vypočítáme **aritmetický průměr** z naměřených hodnot.

Považuje se za **nejpravděpodobnější** hodnotu měřené veličiny.

2. $\Delta l_i = l_i - \bar{l}$ Δl_i – **odchylka (chyba)** jednotlivého měření - pro každé měření určíme **rozdíl** Δl_i mezi naměřenou hodnotou l_i a aritmetickým průměrem.

Pořadové číslo měření	$\frac{l_i}{\text{mm}}$	$\frac{\Delta l_i}{\text{mm}}$
1.	107,2	-0,16
2.	107,4	0,04
3.	107,4	0,04
4.	107,5	0,14
5.	107,3	-0,06
Průměr	107,36	0,088

3.

$$\Delta l = \frac{|\Delta l_1| + |\Delta l_2| + \dots + |\Delta l_n|}{n}$$

Z jednotlivých odchylek vypočítáme **průměrnou odchylku** Δl jako **aritmetický průměr absolutních hodnot odchylek** jednotlivých měření.

Pořadové číslo měření	$\frac{l_i}{\text{mm}}$	$\frac{\Delta l_i}{\text{mm}}$
1.	107,2	-0,16
2.	107,4	0,04
3.	107,4	0,04
4.	107,5	0,14
5.	107,3	-0,06
Průměr	107,36	0,088

Měřením nezjišťujeme skutečnou číselnou hodnotu veličiny, ale horní a dolní mez intervalu.

$$4. \quad \bar{l} = 107,36 \text{ mm}$$
$$\Delta l = 0,088 \text{ mm}$$

$$l = \bar{l} \pm \Delta l$$

$$l = (107,36 \pm 0,088) \text{ mm}$$

$$l = (107,272 ; 107,448) \text{ mm}$$

Pomocí **aritmetického průměru** a **průměrné odchylky** určíme **horní a dolní mez intervalu**, o kterém předpokládáme, že obsahuje skutečnou hodnotu měřené veličiny.

Pořadové číslo měření	$\frac{l_i}{\text{mm}}$	$\frac{\Delta l_i}{\text{mm}}$
1.	107,2	-0,16
2.	107,4	0,04
3.	107,4	0,04
4.	107,5	0,14
5.	107,3	-0,06
Průměr	107,36	0,088

5.

$$l = (107,36 \pm 0,088) \text{ mm}$$

$$\delta l = 0,08\%$$

$$\delta l = \frac{\Delta l}{\bar{l}} = \frac{0,088}{107,36} \cdot 100\%$$

Pro porovnání přesnosti měření uvádíme **průměrnou relativní odchylku**.

Je určena **podílem** průměrné odchylky a aritmetického průměru z naměřených hodnot.

Pořadové číslo měření	$\frac{l_i}{\text{mm}}$	$\frac{\Delta l_i}{\text{mm}}$
1.	107,2	-0,16
2.	107,4	0,04
3.	107,4	0,04
4.	107,5	0,14
5.	107,3	-0,06
Průměr	107,36	0,088

6.

$$l = (107,36 \pm 0,088) \text{ mm}$$

$$\delta l = 0,08\%$$

Výsledek měření udáváme **formou intervalu**, o kterém předpokládáme, že **obsahuje** skutečnou hodnotu měřené veličiny, s průměrnou relativní odchylkou měření.

Analogový měřicí přístroj

Běžný ručkový přístroj – spíše starší výroby – nicméně musí být v pořádku a měl by být ocejchovaný (relevantnost měření)....

Měření bude probíhat za normálních podmínek.... **teplota a tlak prostředí (okolí), vnější magnetické pole,**

Přesnost přístroje je dána **třídou přesnosti TP** (z normálové stupnice - 0,05 - 0,1 - 0,2 - 0,5 - 1 - 1,5 - 2,5 - 5) kde TP je procentní chyba při maximální výchylce (chyba z rozsahu)

$$|\Delta_{AMP}| = \frac{TP * MR}{100}$$

$$|\delta_{AMP}| = \frac{\Delta_{AMP} * 100}{MH}$$

Analogový měřicí přístroj

Příklad 1: $MR = 30 \text{ V}$
 $TP = 1,5$
 $MH = 25,0 \text{ V}$

Příklad 2: $MR = 30 \text{ V}$
 $TP = 1,5$
 $MH = 10,0 \text{ V}$

$$|\Delta_{AMP1}| = \frac{TP * MR}{100} = \frac{1,5 * 30}{100} = 0,45 \text{ V}$$

$$|\Delta_{AMP2}| = \frac{TP * MR}{100} = \frac{1,5 * 30}{100} = 0,45 \text{ V}$$

$$|\delta_{AMP1}| = \frac{\Delta_{AMP1} * 100}{MH} = \frac{50}{25} = 2 \%$$

$$|\delta_{AMP2}| = \frac{50}{10} = 5 \%$$

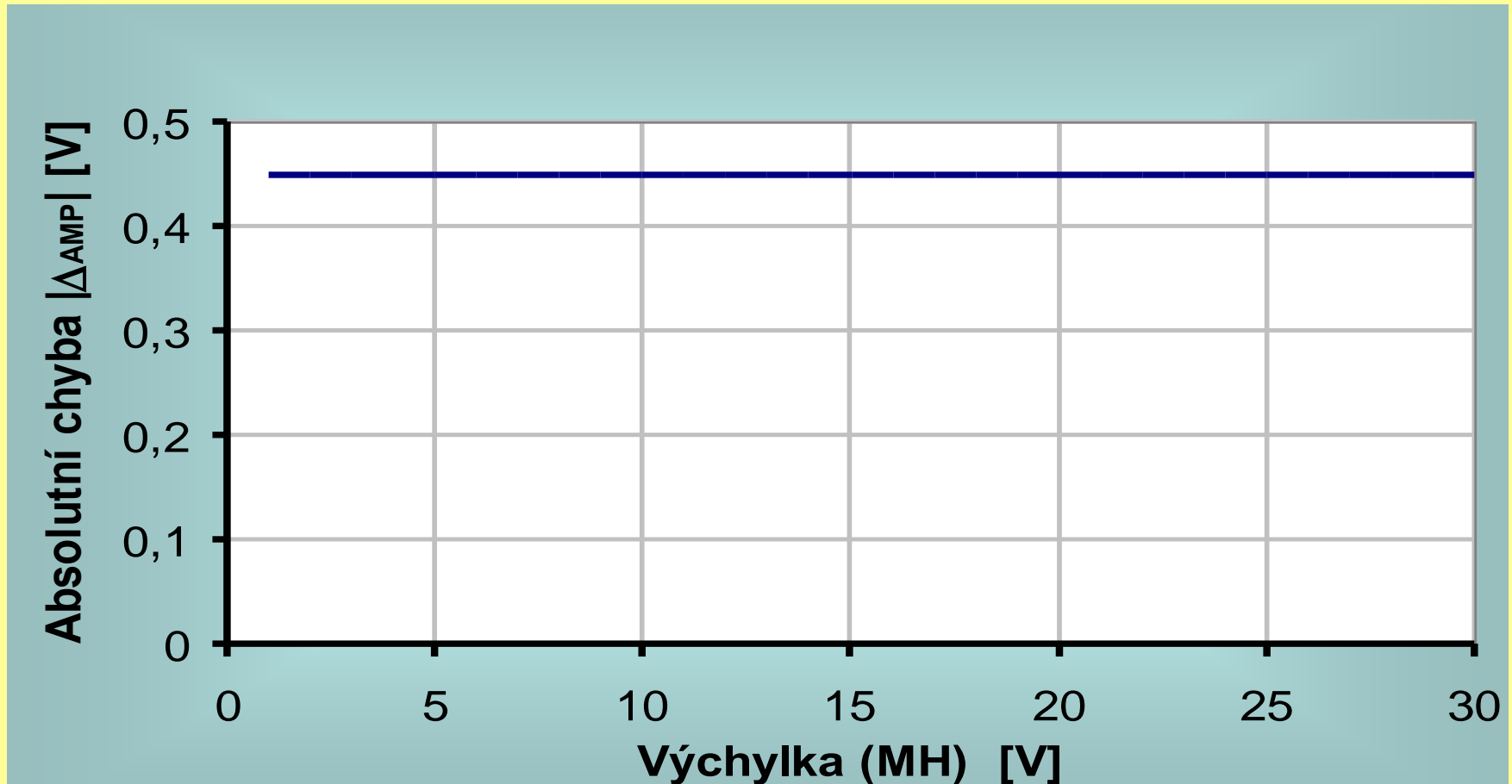
- **absolutní chyba** - nezávisí na MH
- **relativní chyba** - nepřímo úměrná MH – nejnižší je při max. výchylce MH

Analogový měřicí přístroj – závislost absolutní chyby na výchylce, tj. na naměřené hodnoty

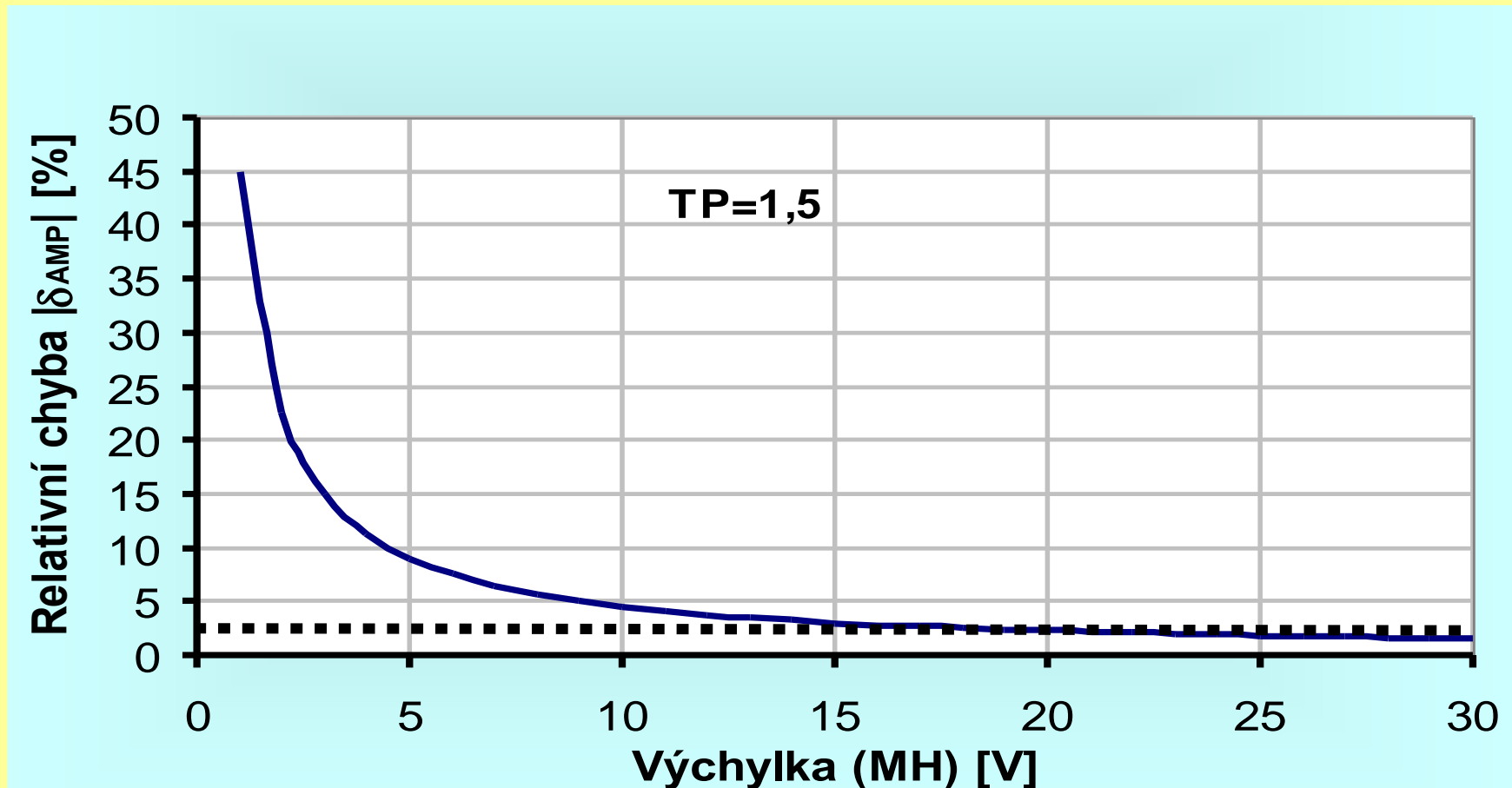
MH	MR	abs.chyba	rel.chyba	TP
1	30	0,45	45	1,5
2	30	0,45	22,5	
3	30	0,45	15	
4	30	0,45	11,25	
5	30	0,45	9	
6	30	0,45	7,5	
7	30	0,45	6,4285714	
8	30	0,45	5,625	
9	30	0,45	5	
10	30	0,45	4,5	
11	30	0,45	4,0909091	
12	30	0,45	3,75	
13	30	0,45	3,4615385	
14	30	0,45	3,2142857	
15	30	0,45	3	
16	30	0,45	2,8125	
17	30	0,45	2,6170588	

17	30	0,45	2,6470588	
18	30	0,45	2,5	
19	30	0,45	2,3684211	
20	30	0,45	2,25	
21	30	0,45	2,1428571	
22	30	0,45	2,0454545	
23	30	0,45	1,9565217	
24	30	0,45	1,875	
25	30	0,45	1,8	
26	30	0,45	1,7307692	
27	30	0,45	1,6666667	
28	30	0,45	1,6071429	
29	30	0,45	1,5517241	
30	30	0,45	1,5	

Analogový měřicí přístroj – závislost absolutní chyby na výchylce, tj. na naměřené hodnotě



Analogový měřicí přístroj – závislost relativní chyby na výchylce, tj. na naměřené hodnotě



Digitální měřicí přístroj

Běžný digitální – číslicový měřicí přístroj – současný výrobek – i tento musí být v pořádku a měl by být zkontrolovaný a oceňovaný (relevantnost měření)....

Měření bude probíhat za normálních podmínek.... **teplota a tlak prostředí (okolí), vnější magnetické pole,**

Relativní chyba měření je tedy tím vyšší, čím nižší je měřená hodnota

Digitální měřicí přístroj

Základní chyba → informace je v návodu k MP, nebo se najde na webu výrobce.

Základní vzorce zůstávají...

$$|\Delta_{AMP}| = \frac{TP * MR}{100}$$

$$|\delta_{AMP}| = \frac{\Delta_{AMP} * 100}{MH}$$

Digitální měřicí přístroj

Chyba měření

- je dána chybou AD převodníku a údaji posledního digitu

Chyba čtení

- %-ní chyba z MH, dána chybou AD převodníku daného přístroje

Chyba z rozsahu

- %-ní chyba z MR, dána chybou vstupních děličů daného přístroje

Kvantizační (digitalizační) krok

- počet zobrazovaných cifer na displeji (počet digitů) daného přístroje – *někdy* první cifra je jen „1“ a poslední „0“ a „5“

Digitální měřicí přístroj

dvojí vyjádření přesnosti:

- *chyba čtení* δ_{RDG} + *chyba rozsahu* δ_{FS}
- *chyba čtení* δ_{RDG} + *počet kvantizačních kroků (digitů)* N_{dgt}

Digitální měřicí přístroj

U **digitálních (číslicových) měřicích přístrojů** je maximální chyba

m_x složena z výrobcem udávaných dvou složek :

$m_{1,x}$ závislá na velikosti měřené hodnoty a vyjadřované v procentech měřené hodnoty

$m_{2,x}$ závislá buď na použitém rozsahu (v tom případě vyjádřené v procentech použitého rozsahu) nebo vyjádřené počtem jednotek (digitů) nejnižšího místa číslicového displeje na zvoleném rozsahu.

Digitální měřicí přístroj

Digitální měřicím přístroj ukazuje (naměří) na rozsahu $U_m = 2 \text{ V}$ „pouze“ největší **údaj 1,9999V** = počet číslic číslicového displeje je **4 a ½ posic** --- pro počet číslic číslicového displeje **8 posic** bude na displeji zobrazeno „správných“ **2,0000 V**

Největší přípustná chyba je podle údaje výrobce dána hodnotou 0,05% z měřené hodnoty a dále 4-mi jednotkami (digity) nejnižšího místa číslicového displeje.

Digitální měřicí přístroj

U moderních digitálních přístrojů se *chyba měření* nejčastěji vyjadřuje ve tvaru:

$$\pm(n \% z MH + 2 D)$$

- kde **MH** je měřená hodnota $\pm n$ hodnota v %
- tato část chyby je proměnná a její velikost závisí na velikosti měřené veličiny, tzn. že např.: 4 % z 1,00 W je 0,04 W, avšak 4 % z 50 W jsou 2 W
- D „digit“ číslo (cifra) na nejméně významném místě displeje (tj. na posledním místě vpravo); tato část chyby je stálá a připočítává se v celém měřicím rozsahu k proměnné části chyby.

Digitální měřicí přístroj

Zadání: $MR = 30 \text{ V}$

$MH = 25,0 \text{ V}$

$|\Delta_{MP}| = 0,8 \% \text{ RDG} + 0,2 \% \text{ FS}$ – údaj z manuálu multimetru

Doplněné vzorce:

$$|\Delta_U| = \frac{\delta_{rdg} * MH}{100} + \frac{\delta_{fs} * MR}{100}$$

$$|\delta_U| = \frac{|\Delta_U|}{MH} * 100 \text{ [%]}$$

Digitální měřicí přístroj

Výpočet:

$$|\Delta_U| = \frac{0,8 * 25}{100} + \frac{0,2 * 30}{100} = 0,20 + 0,06 = 0,26 \text{ V}$$

$$|\delta_U| = \frac{0,26}{25} * 100 = 1,04 \%$$

Výsledek:

*Správná hodnota je v intervalu $\langle 25,0 - 0,26 \text{ V} ; 25,0 + 0,26 \text{ V} \rangle$
tj. $\langle 24,4 ; 25,26 \rangle$.*

Neboli $\rightarrow U_{\text{nam}} = 25,0 \pm 0,26 \text{ V}$
 $\rightarrow U_{\text{nam}} = 25,0 \text{ V} \pm 1,04 \%$

Digitální měřicí přístroj

Zadání: $MR = 30 \text{ V}$

$MH = 10,0 \text{ V}$

$\Delta_{MP} = 0,8 \% RDG + 0,2 \% FS$ – údaj z manuálu multimetru

Doplněné vzorce:

$$|\Delta_U| = \frac{\delta_{rdg} * MH}{100} + N * U_{dgt}$$

$$|\delta_U| = \frac{|\Delta_U|}{MH} * 100 \text{ [%]}$$

Digitální měřicí přístroj

Výpočet:

$$|\Delta_U| = \frac{0,8 * 10}{100} + \frac{0,2 * 30}{100} = 0,08 + 0,06 = 0,14 \text{ V}$$

$$|\delta_U| = \frac{0,14}{10} * 100 = 1,40 \%$$

Výsledek:

*Správná hodnota je v intervalu $\langle 10,0 - 0,14 \text{ V} ; 10,0 + 0,14 \text{ V} \rangle$
tj. $\langle 9,86 ; 10,14 \rangle$.*

Neboli $\rightarrow U_{\text{nam}} = 10,0 \pm 0,14 \text{ V}$
 $\rightarrow U_{\text{nam}} = 10,0 \text{ V} \pm 1,40 \%$

Digitální měřicí přístroj

Zadání: $MR = 30 \text{ V}$ --- 3 a 1/2 místný displej - zobrazí max. 19,99 V
 $MH = 25,0 \text{ V}$

1 digit = 0,01 V = U_{dgt}

$|\Delta_{MP}| = 0,8 \% RDG + 5 \text{ digit}$ – údaj z manuálu multimetru

Doplněné vzorce:

$$|\Delta_U| = \frac{\delta_{rdg} * MH}{100} + N * U_{dgt}$$

$$|\delta_U| = \frac{|\Delta_U|}{MH} * 100 \text{ [%]}$$

Digitální měřicí přístroj

Výpočet:

$$|\Delta_U| = \frac{0,8 * 25,0}{100} + 5 * 0,01 = 0,20 + 0,05 = 0,25 \text{ V}$$

$$|\delta_U| = \frac{0,25}{25,0} * 100 = 1,0 \%$$

Výsledek:

*Správná hodnota je v intervalu $\langle 25,0 - 0,25 \text{ V} ; 25,0 + 0,25 \text{ V} \rangle$
tj. $\langle 24,75 ; 25,25 \rangle$.*

Neboli $\rightarrow U_{\text{nam}} = 25,0 \pm 0,25 \text{ V}$

$\rightarrow U_{\text{nam}} = 25,0 \text{ V} \pm 1,0 \%$

Zadání: $MR = 20 \text{ V}$

$MH = 15,50 \text{ V}$

3 a ½ místný displej → zobrazí max. 19,99 V

→ 1 digit = 0,01 V = U_{dgt}

$|\Delta MP| = 0,8 \% RDG + 0,2 \% FS$ – údaj z manuálu multimetru

$|\Delta MP| = 0,8 \% RDG + 5 \text{ dgt}$ – údaj z manuálu multimetru

Doplňné vzorce:

$$|\Delta_U| = \frac{\delta_{rdg} * MH}{100} + \left(\frac{\delta_{fs} * MR}{100} \dots \text{nebo} \dots N * U_{rdg} \right)$$

$$|\delta_U| = \frac{|\Delta_U|}{MH} * 100 \text{ [%]}$$

Výpočet:

$$|\Delta_U| = \frac{0,8 * 15,5}{100} + \frac{0,2 * 20}{100} = 0,124 + 0,04 = 0,16 \text{ V}$$

$$|\delta_U| = \frac{0,16}{15,5} * 100 = 1,03 \%$$

$$|\Delta_U| = \frac{0,8 * 15,5}{100} + 0,01 * 5 = 0,124 + 0,05 = 0,17 \text{ V}$$

$$|\delta_U| = \frac{0,17}{15,5} * 100 = 1,1 \%$$

Výsledek:

Správná hodnota leží v intervalu $\langle 15,5 - 0,16 \text{ V}; 15,5 + 0,16 \text{ V} \rangle$

Výsledek měření se píše i s tolerancí:

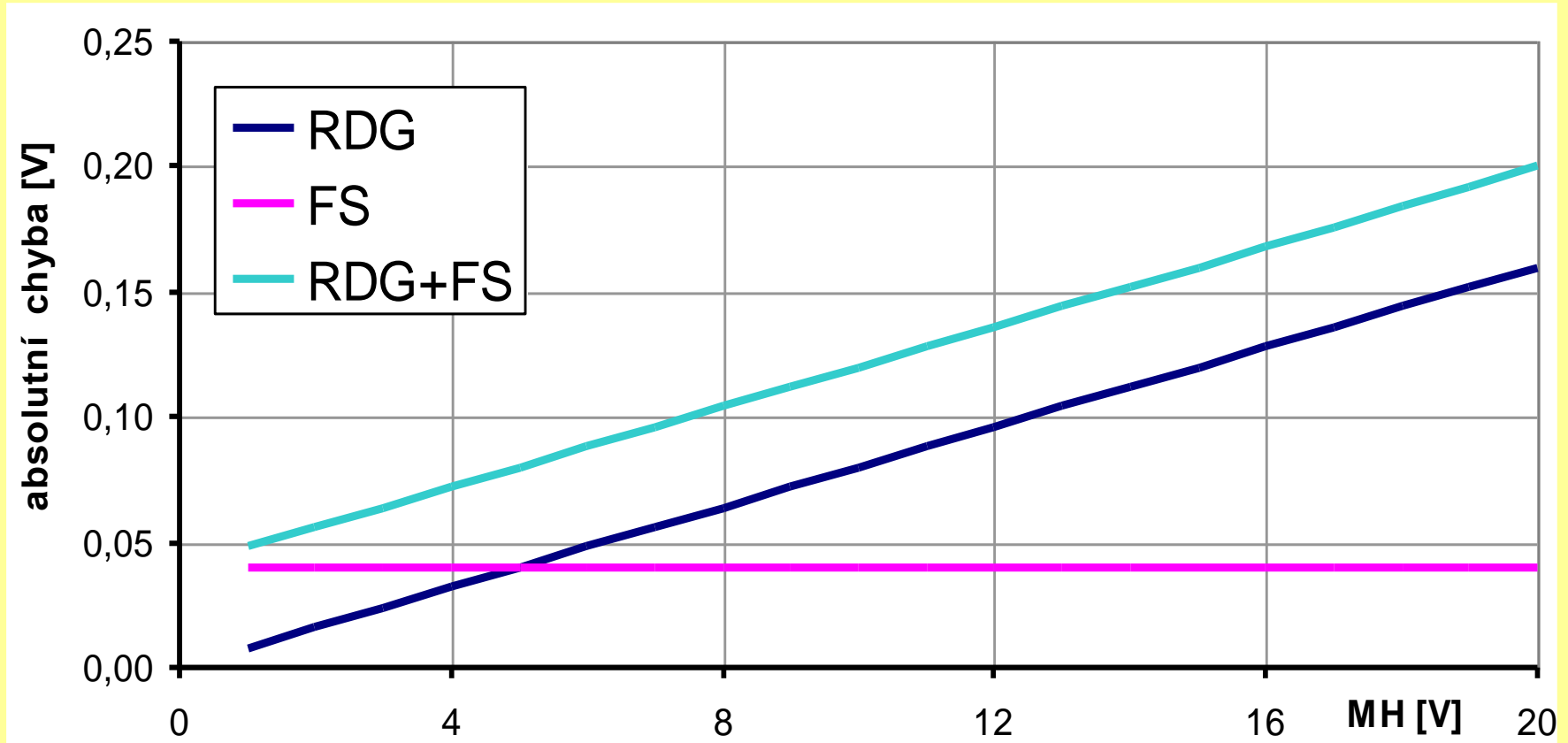
$$\mathbf{U_{nam} = 15,50 \pm 0,16 \text{ V}}$$

$$\mathbf{U_{nam} = 15,50 \text{ V} \pm 1,03 \%}$$

$$\mathbf{U_{nam} = 15,50 \pm 0,17 \text{ V}}$$

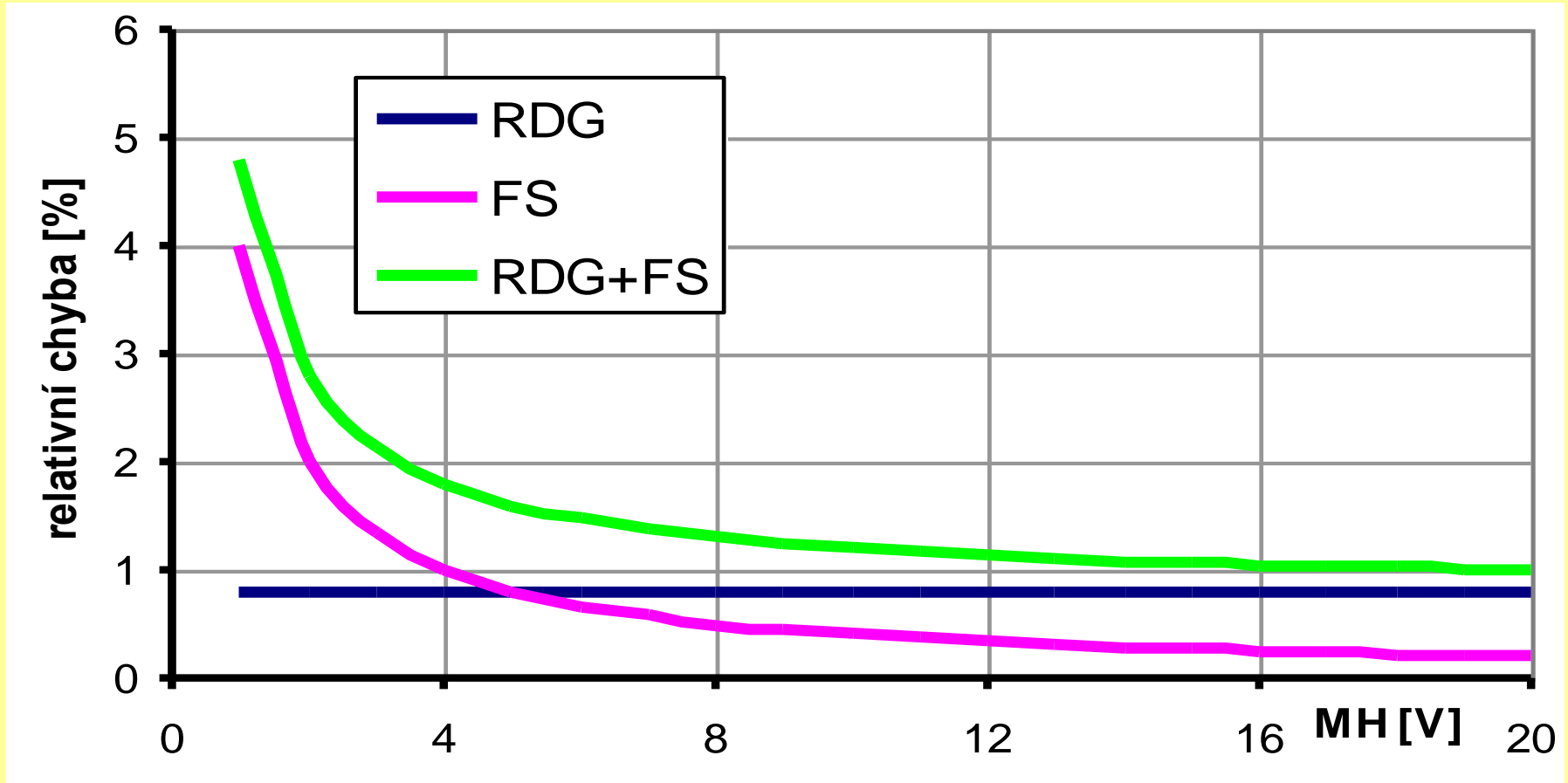
$$\mathbf{U_{nam} = 15,50 \text{ V} \pm 1,1 \%}$$

Digitální měřicí přístroj – absolutní chyba



$$|\Delta_{\check{C}MP}| = \frac{\delta_{rdg}}{100} MH + \frac{\delta_{fs}}{100} MR$$

Digitální měřicí přístroj – relativní chyba



$$|\delta_{\check{C}MP}| = \delta_{rdg} + \delta_{fs} \frac{MR}{MH}$$

Oblast teorie i praxe týkající se **CHYB** je tak široká, že by bylo možné se toto oblastí zabývat prakticky skoro celý semestr * nicméně jsou v tomto a dalších souborech popsány hlavní a zásadní informace a teorie, které jsou „vhodné“ (asi sem více patří pojem „nezbytné“ nebo „nezbytně nutné) k uskutečnění měření za jejichž výsledky si může měřič stát a které jsou jen obtížně napadnutelné – po stránce relevantnosti, reálnosti a pravdivosti.

Další důležité téma z této oblasti měřicí techniky a teorií měření je oblast zabývající se *nejistotami měření* – tento pojem postupně nahrazuje starší (a ještě dlouho používaný) termín chyba měření a správná hodnota měření.

Tento nový termín vyjadřuje rozsah hodnot, které je možno k měřené veličině racionálně přiřadit podle současným poznatků zakotvených v normativech.

Zde je „MH“ definován jako *střední prvek souboru*, který reprezentuje měřenou veličinu a nejistotu měření *charakterizující rozptýlení hodnot...*“

SCHOVÁNEK, P., HAVRÁNEK, V.: Chyby a nejistoty měření - doplňující text k laboratornímu cvičení. ČVUT.

VÍTOVEC J.: Stanovení nejistot měření. ČMÚ, Praha, 1993.

HAASZ V.: Elektrická měření. ČVUT, Praha, 2003.

ANDĚL J.: Statistické metody. MatFyzPress, Praha, 1998.

BROŽ, J. a kol.: Základy fyzikálních měření I. SPN, Praha 1967.

Pokračování tématem

NEJISTOTY MĚŘENÍ

Nejistoty měření fyzikálních veličin

Spec. chyby 1

... a to by bylo
k tomuto cvičení



vše



T- MaR



CHYBY

© VR - ZS
2014/2016