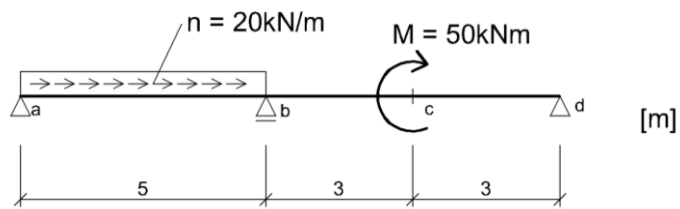


Obr.: Model konstrukce a zatížení

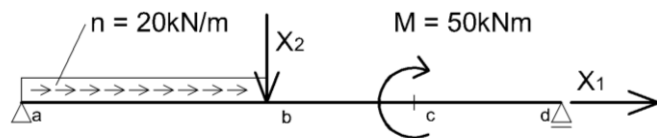
Příklad č. 8 – Staticky neurčitý nosník

Zadání

Vykreslete průběhy vnitřních sil na staticky neurčitém spojitém nosníku podle obrázku. Použijte silovou metodu v obvyklé variantě vytváření základní soustavy odebráním vnějších vazeb. Průřezové charakteristiky jsou konstantní po celé délce nosníku. Práci posouvajících sil zanedbejte.



Obr.: Model konstrukce a zatížení



Obr.: Základní staticky určitá soustava

Řešení

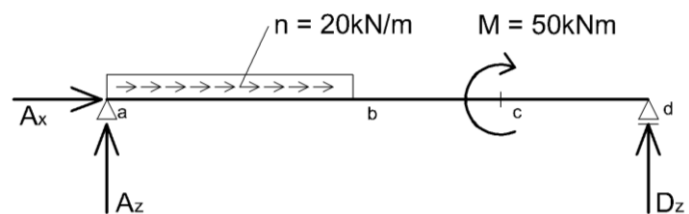
Bude se postupovat silovou metodou, kdy se odebráním vazeb (vnějších nebo vnitřních) vytvoří staticky určitá základní soustava. Odebrané vazby se nahradí neznámými silami X_i , a podmínkami pro přemístění δ_i , které tyto vazby zajišťovaly. Tyto podmínky slouží k určení neznámých sil X_i .

Základní staticky určitá soustava se vytvoří odebráním vazby proti vodorovnému posunu bodu d a vazby proti svislému posunu bodu b . Vazby se nahradí neznámými reakcemi X_1 a X_2 a přidají se příslušné deformační podmínky.

$$u_d = \delta_1 = 0$$

$$w_b = \delta_2 = 0$$

Pro řešení kanonických rovnic (deformačních podmínek) je třeba vyřešit průběhy vnitřních sil na základní staticky určité soustavě (ZS) od tří zatěžovacích stavů.



Obr.: Původní zatížení základní soustavy – schéma reakcí

Zatěžovací stav 0: Původní zatížení

Určete reakce:

$$A_x = (-100)[\text{kN}]$$

$$A_z = (-4,546)[\text{kN}]$$

$$D_z = (4,546)[\text{kN}]$$

Určete normálovou sílu:

$$N_a = (100)[\text{kN}]$$

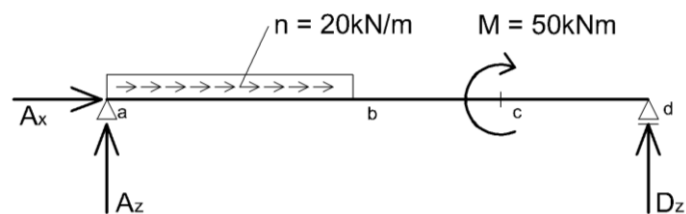
Určete ohybové momenty:

$$M_b = (-22,725)[\text{kNm}]$$

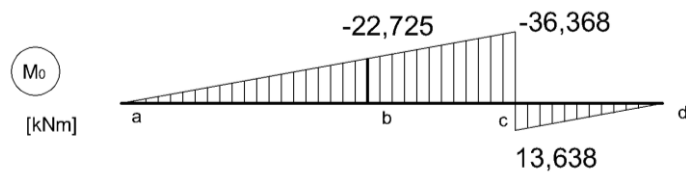
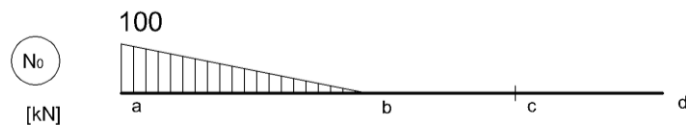
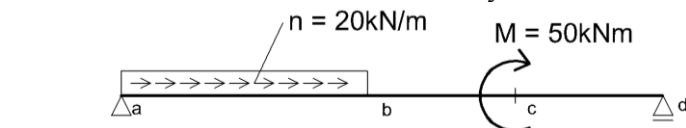
$$M_{c,L} = (-36,368)[\text{kNm}]$$

$$M_{c,P} = (13,638)[\text{kNm}]$$

Vykreslete průběhy normálových sil a momentů.



Obr.: Původní zatížení základní soustavy – schéma reakcí



Obr.: Zatížení základní soustavy původním zatížením a odpovídající vnitřní síly

Zatěžovací stav 0: Původní zatížení

Reakce:

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad 20 \cdot 5 + A_x = 0 \quad A_x = -100 \text{ kN}$$

$$\sum M_{d,i} = 0 \quad 11 \cdot A_z + 50 = 0 \quad A_z = -4,546 \text{ kN}$$

$$\sum M_{a,i} = 0 \quad -11 \cdot D_z + 50 = 0 \quad D_z = 4,546 \text{ kN}$$

Normálová síla:

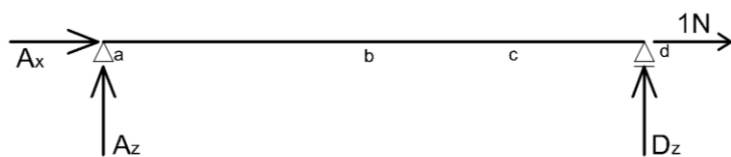
$$N_a = -A_x = 100 \text{ kN}$$

Ohybové momenty:

$$M_b = 5 \cdot A_z = -22,725 \text{ kNm}$$

$$M_{c,L} = 8 \cdot A_z = -36,368 \text{ kNm}$$

$$M_{c,P} = 3 \cdot D_z = 13,638 \text{ kNm}$$



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X_1 – schéma reakcí

Zatěžovací stav 1: Jednotková síla ve směru neznámé síly X_1

Určete reakce:

$$A_x = (-1)[N]$$

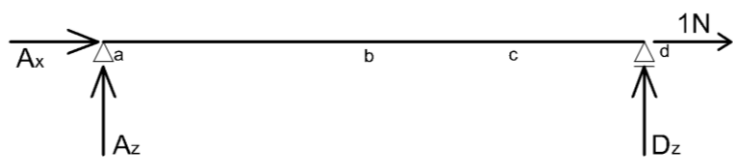
$$A_z = (0)[N]$$

$$D_z = (0)[N]$$

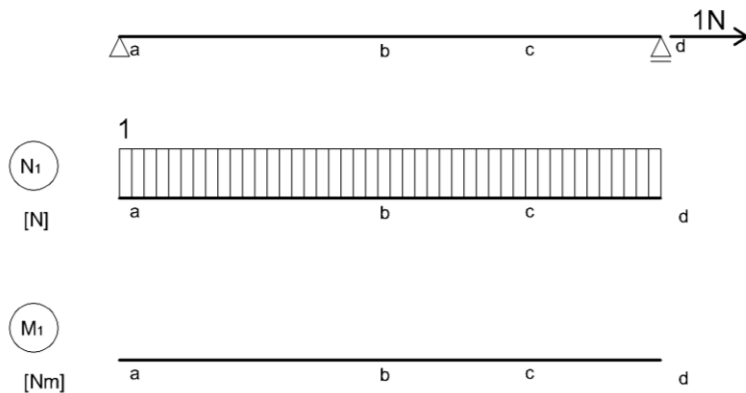
Určete normálovou sílu:

$$N_a = (1)[N]$$

Vykreslete průběhy normálových sil.



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X_1 – schéma reakcí



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X_1 a odpovídající vnitřní síly

Zatěžovací stav 1: Jednotková síla ve směru neznámé síly X_1

Reakce:

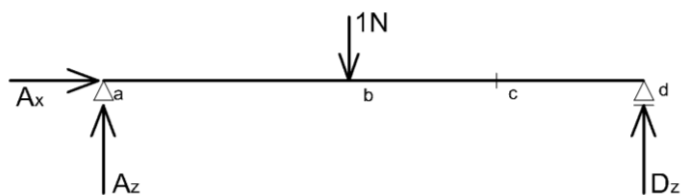
$$\sum F_{x,i} = 0 \quad 1 + A_x = 0 \quad A_x = -1N$$

$$\sum M_{d,i} = 0 \quad 11 \cdot A_z = 0 \quad A_z = 0N$$

$$\sum M_{a,i} = 0 \quad -11 \cdot D_z = 0 \quad D_z = 0N$$

Normálová síla:

$$N_a = -A_x = 1N$$



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X_2 – schéma reakcí

Zatěžovací stav 2: Jednotková síla ve směru neznámé síly X_2

Určete reakce:

$$A_x = 0 \text{ N } (0) [\text{N}]$$

$$A_z = 0,5456 \text{ N } (0,5456) [\text{N}]$$

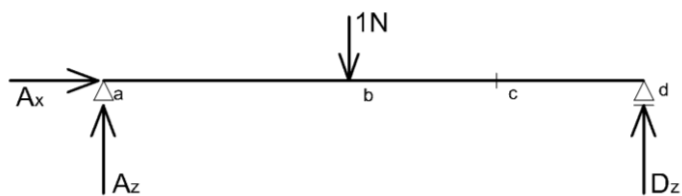
$$D_z = 0,4544 \text{ N } (0,4544) [\text{N}]$$

Určete ohybové momenty:

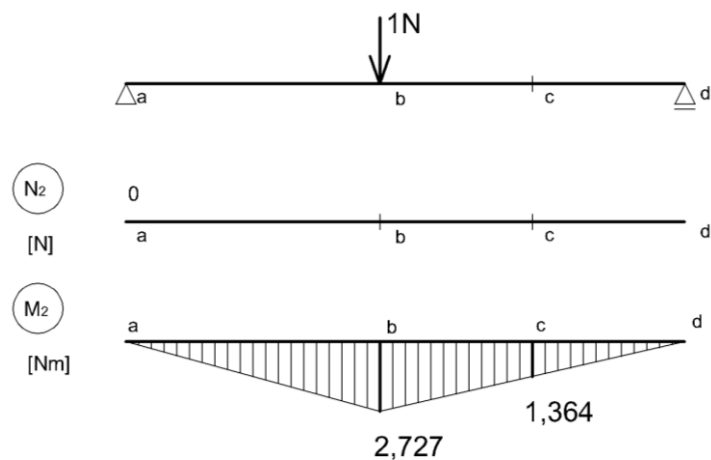
$$M_b = 5 \cdot A_z = 2,727 \text{ Nm } (2,727) [\text{Nm}]$$

$$M_c = 3 \cdot D_z = 1,364 \text{ Nm } (1,364) [\text{Nm}]$$

Vykreslete průběh ohybových momentů.



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X_2 – schéma reakcí



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X_2 a odpovídající vnitřní síly

Zatěžovací stav 2: Jednotková síla ve směru neznámé síly X_2

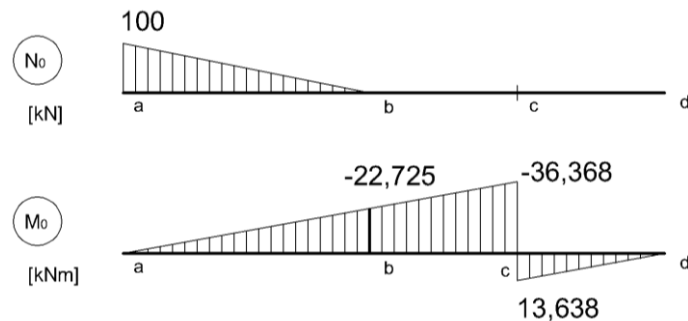
Reakce:

$$\begin{aligned} \sum F_{x,i} &= 0 & A_x &= 0N \\ \sum M_{d,i} &= 0 & 11 \cdot A_z - 1 \cdot 6 &= 0 & A_z &= 0,5456N \\ \sum M_{a,i} &= 0 & -11 \cdot D_z + 1 \cdot 5 &= 0 & D_z &= 0,4545kN \end{aligned}$$

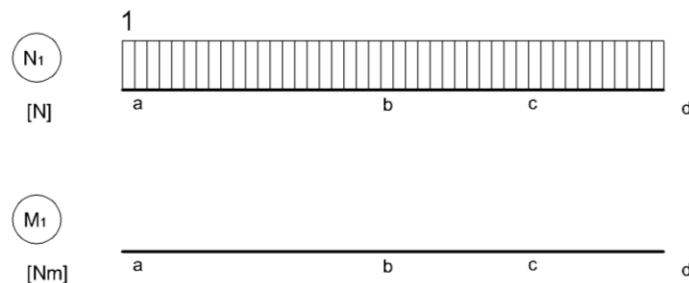
Ohybové momenty:

$$M_b = 5 \cdot A_z = 2,727Nm$$

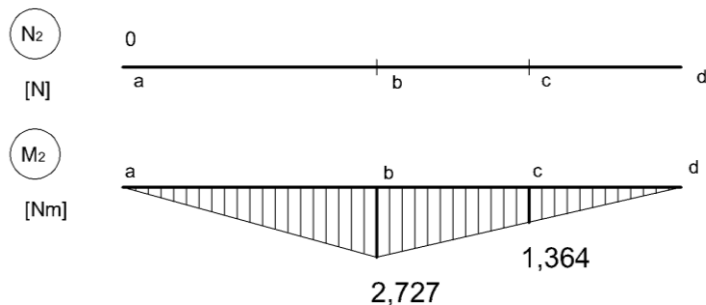
$$M_c = 3 \cdot D_z = 1,364Nm$$



Obr.: Původní zatížení základní soustavy a odpovídající vnitřní síly



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X_1 a odpovídající vnitřní síly



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X_2 a odpovídající vnitřní síly

Výpočet přemístění

Vodorovný posun bodu d od původního zatížení:

$$\delta_{1,0} = (250e3) \frac{1}{EA} + (0) \frac{1}{EI}$$

Svislý průhyb bodu b od původního zatížení:

$$\delta_{2,0} = (0) \frac{1}{EA} + (-261326e3) \frac{1}{EI}$$

Vodorovný posun bodu d od jednotkové síly ve směru X_1 :

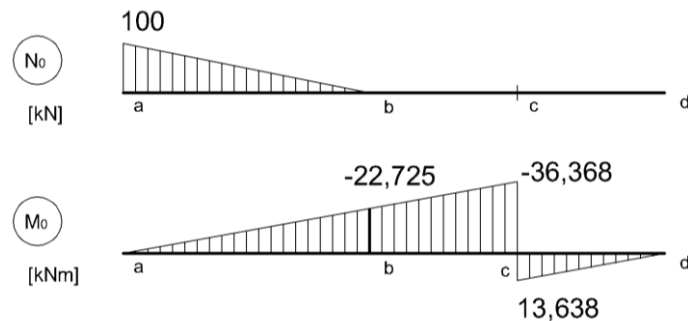
$$\delta_{1,1} = (11) \frac{1}{EA} + (0) \frac{1}{EI}$$

Vodorovný posun bodu d od jednotkové síly ve směru X_2 , svislý průhyb bodu b od jednotkové síly ve směru X_1 :

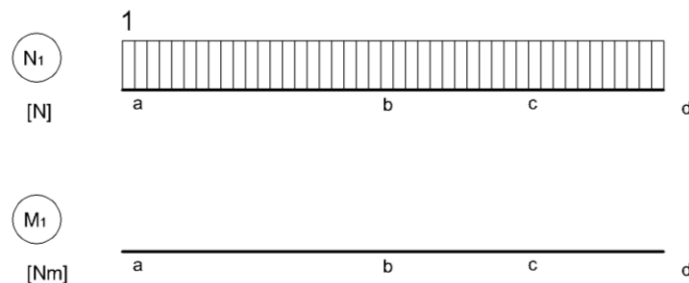
$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \delta_{1,2}^N + \delta_{1,2}^M = 0 + 0 = 0 (0) \frac{1}{EA} + (0) \frac{1}{EI}$$

Svislý průhyb bodu b od jednotkové síly ve směru X_2 :

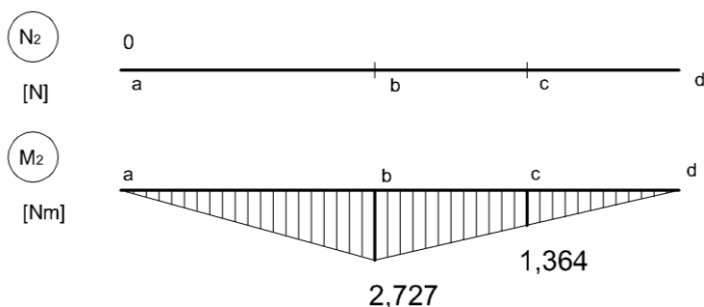
$$\delta_{2,2} = (0) \frac{1}{EA} + (27.267) \frac{1}{EI}$$



Obr.: Původní zatížení základní soustavy a odpovídající vnitřní síly



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X_1 a odpovídající vnitřní síly



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X_2 a odpovídající vnitřní síly

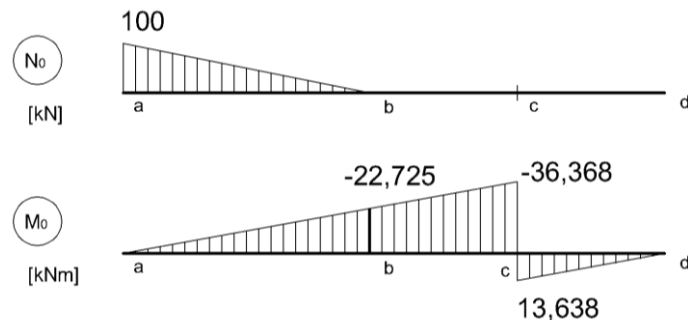
Výpočet přemístění

Vodorovný posun bodu d od původního zatížení:

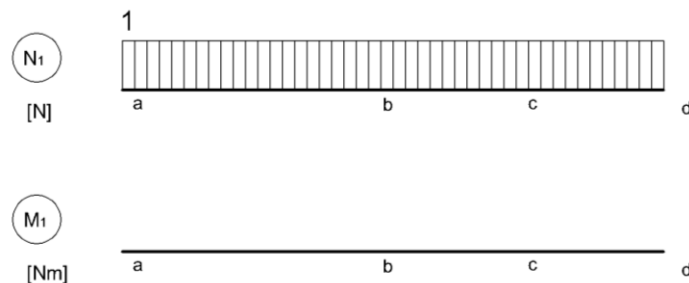
$$\delta_{1,0} = \delta_{1,0}^N + \delta_{1,0}^M = \frac{1}{EA} \frac{1}{2} N_{a,1} N_{a,0} L_{ab} + 0 = \frac{1}{EA} \frac{1}{2} 100 \cdot 10^3 \cdot 1.5 = \frac{250 \cdot 10^3}{EA}$$

Svislý průhyb bodu b od původního zatížení:

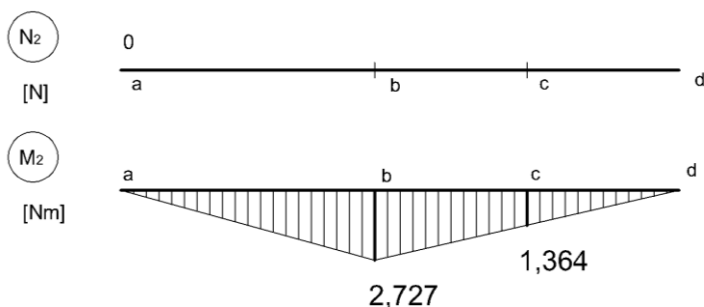
$$\begin{aligned} \delta_{2,0} &= \delta_{2,0}^N + \delta_{2,0}^M \\ &= 0 + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} M_{b,0} M_{b,2} L_{ab} + \frac{1}{6} (M_{b,0} (2M_{b,2} + M_{c,2}) + M_{c,0} (M_{b,2} + 2M_{c,2})) L_{bc} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} M_{c,0}^P M_{c,2} L_{cd} \right] \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \cdot (-22,725 \cdot 10^3) \cdot 2,727 \cdot 5 \right] \\ &\quad + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{6} \cdot ((-22,725 \cdot 10^3)(2 \cdot 2,727 + 1,364) + (-36,368 \cdot 10^3)(2,727 + 2 \cdot 1,364)) \cdot 3 \right] \\ &\quad + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \cdot 13,636 \cdot 10^3 \cdot 1,364 \cdot 3 \right] = \frac{-261326}{EI} \end{aligned}$$



Obr.: Původní zatížení základní soustavy a odpovídající vnitřní síly



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X_1 a odpovídající vnitřní síly



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X_2 a odpovídající vnitřní síly

Výpočet přemístění

Vodorovný posun bodu d od jednotkové síly ve směru X_1 :

$$\delta_{1,1} = \delta_{1,1}^N + \delta_{1,1}^M = \frac{1}{EA} [N_{a,1} N_{a,0} L_{ad}] + 0 = \frac{1}{EA} [1 \cdot 1 \cdot 11] = \frac{11}{EA}$$

Vodorovný posun bodu d od jednotkové síly ve směru X_2 , svislý průhyb bodu b od jednotkové síly ve směru X_1 :

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \delta_{1,2}^N + \delta_{1,2}^M = 0 + 0 = 0$$

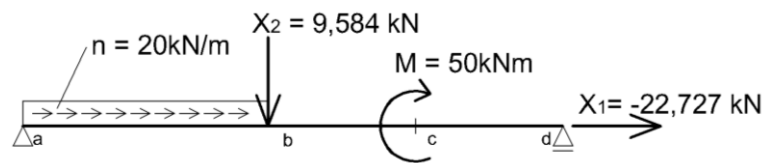
Svislý průhyb bodu b od jednotkové síly ve směru X_2 :

$$\begin{aligned} \delta_{2,2} &= \delta_{2,2}^N + \delta_{2,2}^M \\ &= 0 + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} M_{b,2} M_{b,2} L_{ab} + \frac{1}{3} M_{b,2} M_{b,2} L_{bd} \right] \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \cdot 2,727 \cdot 2,727 \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 2,727 \cdot 2,727 \cdot 6 \right] = \frac{27,267}{EI} \end{aligned}$$

Sestavte kanonické rovnice (podmínka pro vodorovný posun bodu d a svislý posun bodu b) a vyřešte neznámé síly X_1 a X_2 .

$$X_1 = (-22,727) \text{ [kN]}$$

$$X_2 = (9,584) \text{ [kN]}$$



Obr.: Zatížení ZS

Kanonické rovnice:

$$\delta_{1,0} + \delta_{1,1}X_1 + \delta_{1,2}X_2 = 0$$

$$\delta_{2,0} + \delta_{2,1}X_1 + \delta_{2,2}X_2 = 0$$

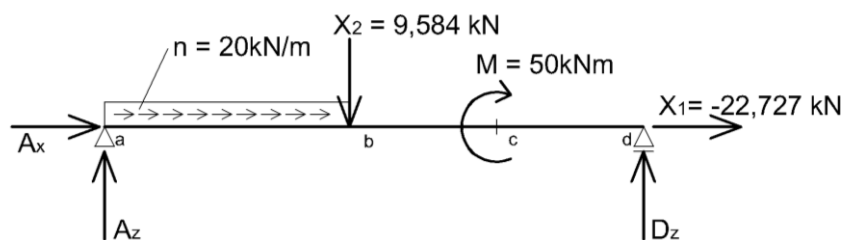
$$\frac{250 \cdot 10^3}{EA} + \frac{11}{EA}X_1 + 0 \cdot X_2 = 0$$

$$\frac{261236}{EI} + 0 \cdot X_1 + \frac{27,267}{EI}X_2 = 0$$

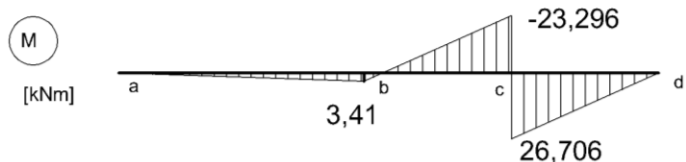
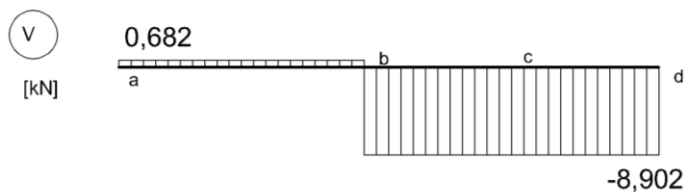
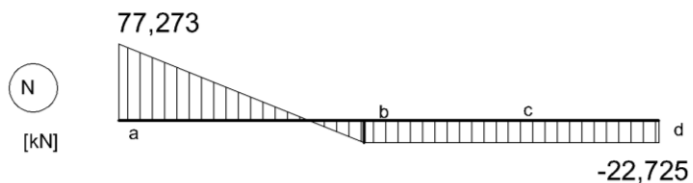
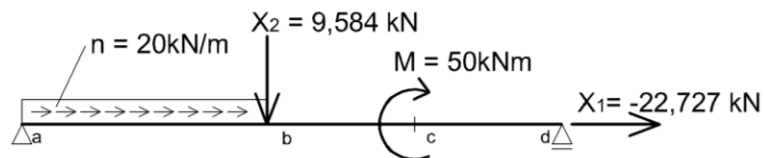
Řešení

$$X_1 = -22727N = -22,727kN$$

$$X_2 = 9584N = 9,584kN$$



Obr.: Zatížení ZS původním zatížením a silami X_1 a X_2 – schéma reakcí



Obr.: Zatížení ZS původním zatížením a silami X_1 a X_2 - výsledné průběhy posouvajících sil a momentů

Základní soustava zatížená původním zatížením a silami X_1 a X_2

Určete reakce:

$$A_x = (-77,273) [\text{kN}]$$

$$A_z = (0,682) [\text{kN}]$$

$$D_z = (8,902) [\text{kN}]$$

Určete normálové síly:

$$N_a = (77,273) [\text{kN}]$$

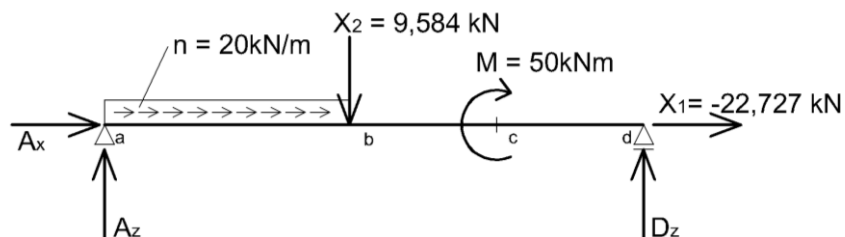
$$N_d = (-22,727) [\text{kN}]$$

Určete ohybové momenty:

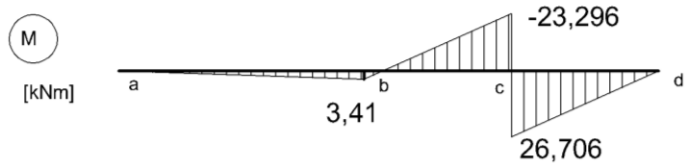
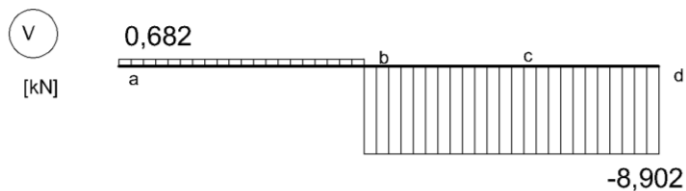
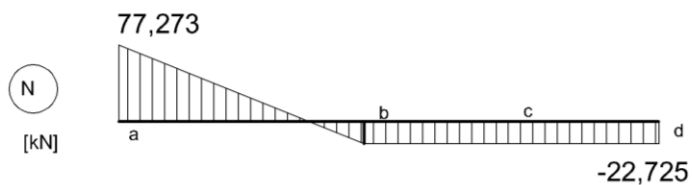
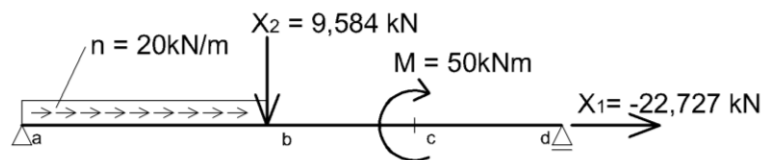
$$M_b = (3,41) [\text{kNm}]$$

$$M_{c,L} = (-23,296) [\text{kNm}]$$

$$M_{c,P} = (26,706) [\text{kNm}]$$



Obr.: Zatížení ZS původním zatížením a silami X_1 a X_2 – schéma reakcí



Obr.: Zatížení ZS původním zatížením a silami X_1 a X_2 - výsledné průběhy posouvajících sil a momentů

Základní soustava zatížená původním zatížením a silami X_1 a X_2

Reakce:

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad 20 \cdot 5 + A_x + X_1 = 0 \quad A_x = -77,273 \text{ kN}$$

$$\sum M_{d,i} = 0 \quad 11 \cdot A_z + 50 - 6 \cdot X_2 = 0 \quad A_z = 0,682 \text{ kN}$$

$$\sum M_{a,i} = 0 \quad -11 \cdot D_z - 50 + 5 \cdot X_2 = 0 \quad D_z = 8,902 \text{ kN}$$

Normálové síly:

$$N_a = -A_x = 77,273 \text{ kN}$$

$$N_d = X_1 = -22,727 \text{ kN}$$

Ohybové momenty:

$$M_b = 5 \cdot A_z = 3,41 \text{ kNm}$$

$$M_{c,L} = 8 \cdot A_z - 3 \cdot X_2 = -23,296 \text{ kNm}$$

$$M_{c,P} = 3 \cdot D_z = 26,706 \text{ kNm}$$