

Obr. 7.1: Model konstrukce a zatížení

Příklad č. 7 – Staticky neurčitý nosník

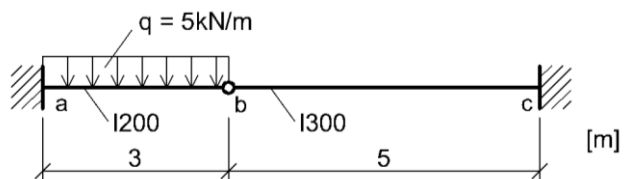
Zadání

Vykreslete průběhy vnitřních sil na staticky neurčitém ocelovém nosníku podle obrázku. Pro řešení použijte silovou metodu. Modul pružnosti oceli $E = 210 \text{ GPa}$, momenty setrvačnosti jsou pro I200 – $I_{ab} = 21,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$, pro I300 – $I_{bc} = 97,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$. Zanedbejte práci posouvajících sil.

Řešení

Určete stupeň statické neurčitosti konstrukce

$$s = (2)$$



Obr. 7.1: Model konstrukce a zatížení

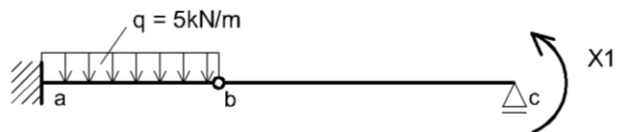
Konstrukce je 2x staticky neurčitá. Vzhledem k tomu, že nosník je přímý a nezatížený ve své ose není třeba se zabývat osovými silami a je možno řešit 1x staticky neurčitou konstrukci.

Bude se postupovat silovou metodou, kdy se odebráním vazeb (vnějších nebo vnitřních) vytvoří staticky určitá základní soustava. Odebrané vazby se nahradí neznámými silami X_i , a podmínkami pro přemístění δ_i , které tyto vazby zajišťovaly. Tyto podmínky slouží k určení neznámých sil X_i .

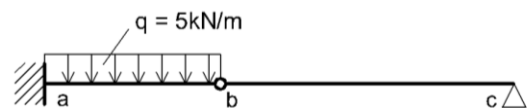
Řešení proběhne ve dvou variantách základní staticky určité soustavy:

- a) základní soustava vznikne odebráním vnější vazby
- b) základní soustava vznikne odebráním vnitřní vazby

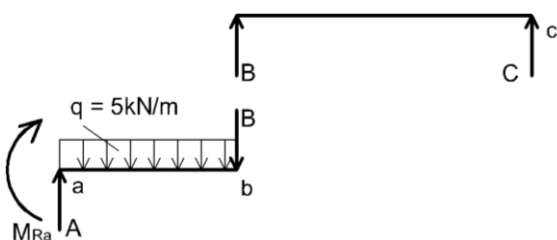
Nakreslete staticky určitou základní soustavu vytvořenou odebráním vazby proti pootočení v bodě c.



Obr.: Základní staticky určitá soustava



Obr.: Původní zatížení základní soustavy



Obr. Původní zatížení základní soustavy - schéma reakcí

a) základní soustava vznikne odebráním vnější vazby

Základní staticky určitá soustava (ZS) se vytvoří odebráním vazby proti pootočení v podpoře c . Tato vazba se nahradí neznámou reakcí X_1 a podmínkou, kterou tato vazba zajišťovala – podmínkou pro pootočení průřezu v bodě c .

$$\delta_1 = \varphi_c = 0$$

Zatěžovací stav 0: původní zatížení

Určete reakce vnějších a vnitřních vazeb základní soustavy zatížené původním zatížením:

$$B = (0) \text{ [kN]}$$

$$C = (0) \text{ [kN]}$$

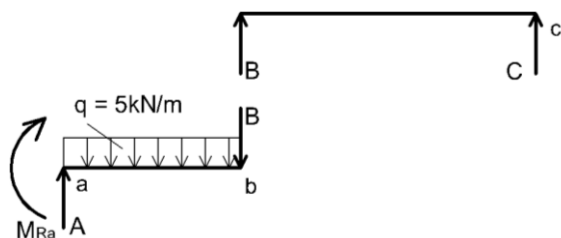
$$A = (15) \text{ [kN]}$$

$$M_{Ra} = (-22,5) \text{ [kNm]}$$

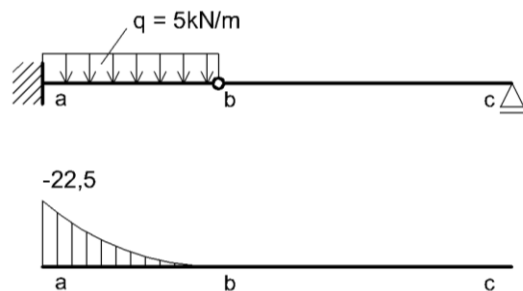
Určete ohybové momenty:

$$M_a = (-22,5) \text{ [kNm]}$$

Vykreslete průběhy ohybových momentů.



Obr. Původní zatížení základní soustavy - schéma reakcí



Obr.: Průběhy momentů od původního zatížení

Zatěžovací stav 0: původní zatížení

Reakce vnějších a vnitřních vazeb základní soustavy zatížené původním zatížením:

Na nesené části:

$$\sum M_{c,i} = 0 \quad 5 \cdot B = 0 \quad B = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad B + C = 0 \quad C = 0 \text{ kN}$$

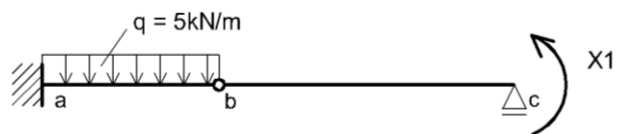
Na nosoucí části:

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad -A + 3 \cdot q = 0 \quad A = 15 \text{ kN}$$

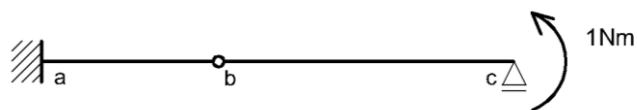
$$\sum M_{a,i} = 0 \quad M_{Ra} + 3 \cdot q \cdot \frac{3}{2} = 0 \quad M_{Ra} = -22,5 \text{ kNm}$$

Ohybové momenty:

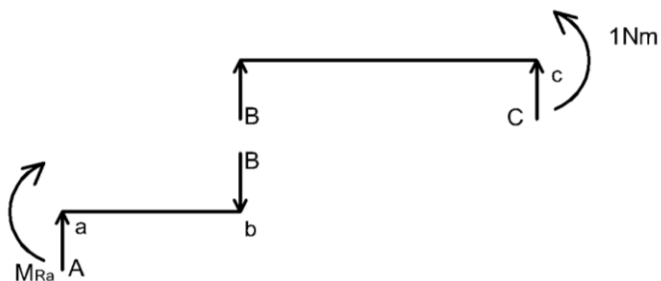
$$M_a = M_{Ra} - 22,5 \text{ kNm}$$



Obr.: Základní staticky určitá soustava



Obr.: Jednotkové zatížení základní soustavy



Obr. Jednotkové zatížení základní soustavy - schéma reakcí

Zatěžovací stav 1: jednotková síla ve směru a místě X_1

Určete reakce vnějších a vnitřních vazeb základní soustavy zatížení jednotkovou silou:

$$B = (0,2) \text{ [N]}$$

$$C = (-0,2) \text{ [N]}$$

$$A = (0,2) \text{ [N]}$$

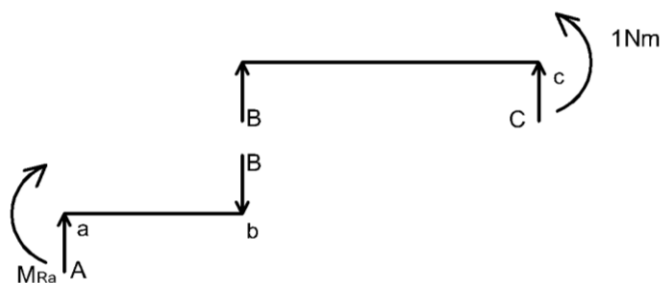
$$M_{Ra} = (-0,6) \text{ [Nm]}$$

Určete ohybové momenty:

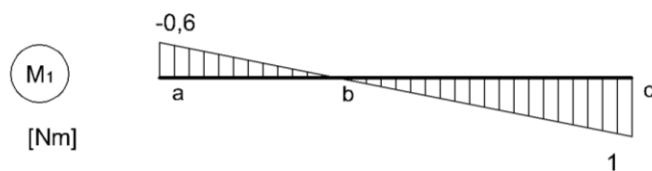
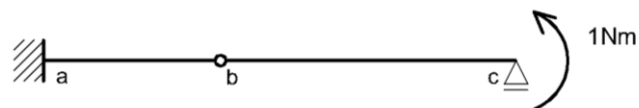
$$M_a = (-0,6) \text{ [Nm]}$$

$$M_c = (1) \text{ [Nm]}$$

Vykreslete průběhy ohybových momentů.



Obr. Jednotkové zatížení základní soustavy - schéma reakcí



Obr.: Průběhy momentů od jednotkového zatížení

Zatěžovací stav 1: jednotková síla ve směru a místě X₁

Reakce vnějších a vnitřních vazeb základní soustavy zatížení jednotkovou silou

Na nesené části:

$$\sum M_{c,i} = 0 \quad 5 \cdot B - 1 = 0 \quad B = 0,2N$$

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad B + C = 0 \quad C = -0,2N$$

Na nosoucí části:

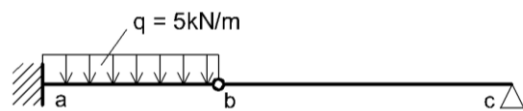
$$\sum F_{z,i} = 0 \quad -A + B = 0 \quad A = 0,2N$$

$$\sum M_{a,i} = 0 \quad M_{Ra} + 3 \cdot B = 0 \quad M_{Ra} = -0,6Nm$$

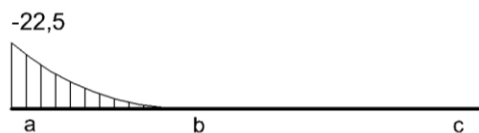
Ohybové momenty:

$$M_a = M_{Ra} = -0,6Nm$$

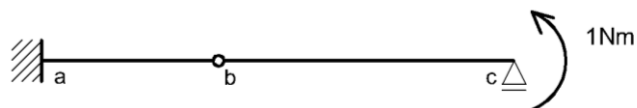
$$M_c = 1Nm$$



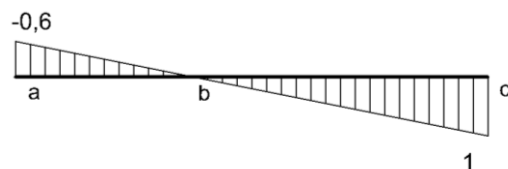
M_0
[kNm]



Obr.: Průběhy momentů od původního zatížení



M_1
[Nm]



Obr.: Průběhy momentů od jednotkového zatížení

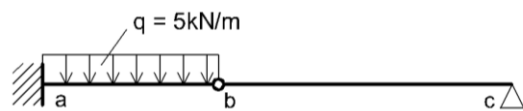
Výpočet přemístění

Určete pootočení bodu c od původního zatížení:

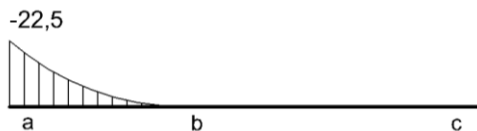
$$\delta_{1,0} = (2,253e-3)[-]$$

Určete pootočení bodu c od jednotkového zatížení:

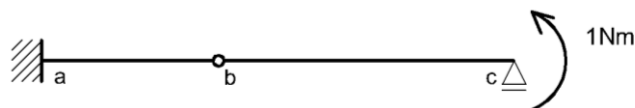
$$\delta_{1,1} = (1,61174e-7)[-]$$



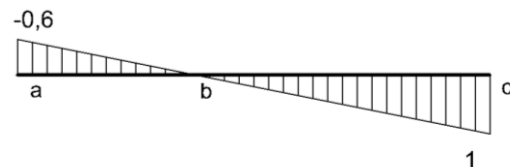
M_0
[kNm]



Obr.: Průběhy momentů od původního zatížení



M_1
[Nm]



Obr.: Průběhy momentů od jednotkového zatížení

Výpočet přemístění – podle tabulek

Pootočení bodu c od původního zatížení:

$$\delta_{1,0} = \frac{1}{EI_{ac}} \left[\frac{1}{4} M_{a,0} M_{a,1} L_{ac} \right]$$

$$= \frac{1}{210 \cdot 10^9 \cdot 21,4 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-22,5 \cdot 10^3) \cdot (-0,6) \cdot 3 = 2,253 \cdot 10^{-3}$$

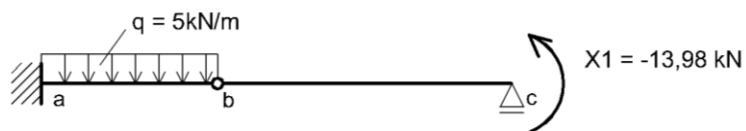
Pootočení bodu c od jednotkového zatížení:

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI_{ac}} \left[\frac{1}{3} M_{a,1} M_{a,1} L_{ac} \right] + \frac{1}{EI_{cb}} \left[\frac{1}{3} M_{b,1} M_{b,1} L_{cb} \right]$$

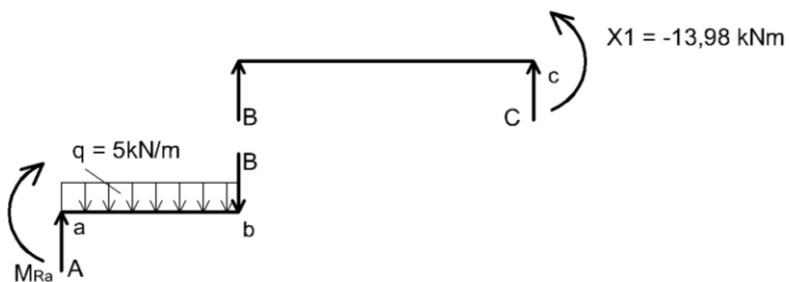
$$\delta_{1,1} = \frac{1}{210 \cdot 10^9 \cdot 21,4 \cdot 10^{-6}} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (-0,6) \cdot (-0,6) \cdot 3 \right]$$

$$+ \frac{1}{210 \cdot 10^9 \cdot 97,9 \cdot 10^{-6}} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 5 \right] = 1,61174 \cdot 10^{-7}$$

Sestavte kanonickou rovnici (podmínku pro pootočení bodu c) a vyřešte neznámou sílu X_1 .



Obr.: Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1



Obr.: Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1 – schéma reakcí

Kanonická rovnice:

$$\delta_{1,0} + \delta_{1,1} X_1 = 0$$

$$2,253 \cdot 10^{-3} + 1,61174 \cdot 10^{-7} X_1 = 0$$

Řešení:

$$X_1 = -13979 = -13,979 \text{ kN}$$

Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1

Určete reakce vnějších a vnitřních vazeb základní soustavy

$$B = (-2,796) [\text{kN}]$$

$$C = (2,796) [\text{kN}]$$

$$A = (12,204) [\text{kN}]$$

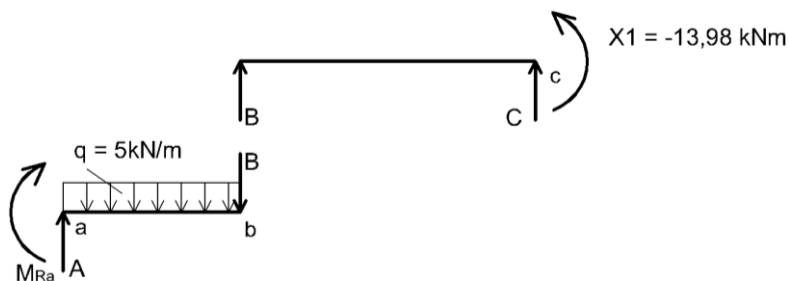
$$M_{Ra} = (-14,112) [\text{kNm}]$$

Určete posouvající síly:

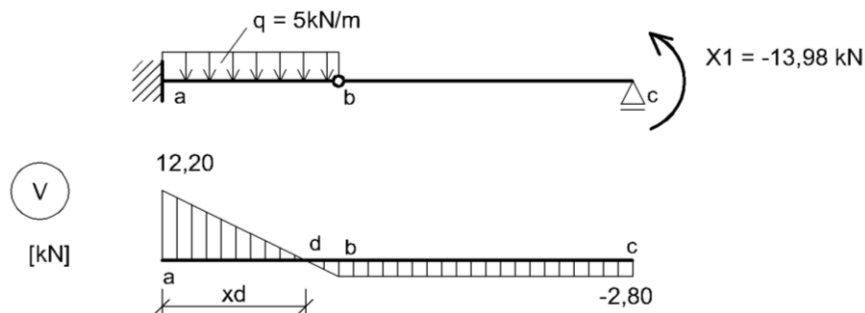
$$V_a = (12,204) [\text{kN}]$$

$$V_c = (-2,796) [\text{kN}]$$

Vykreslete průběhy posouvajících sil.



Obr.: Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1 – schéma reakcí



Obr.: Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1 – posouvající síly

Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1

Reakce vnějších a vnitřních vazeb základní soustavy zatížení původním zatížením a silou X_1

Na nesené části:

$$\sum M_{c,i} = 0 \quad 5 \cdot B - X_1 = 0 \quad B = -2,796 \text{ kN}$$

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad B + C = 0 \quad C = 2,796 \text{ kN}$$

Na nosoucí části:

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad -A + B + 3 \cdot q = 0 \quad A = 12,204 \text{ kN}$$

$$\sum M_{a,i} = 0 \quad M_{Ra} + 3 \cdot q \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot B = 0 \quad M_{Ra} = -14,112 \text{ kNm}$$

Posouvající síly:

$$V_a = A = 12,204 \text{ kN}$$

$$V_c = -C = -2,796 \text{ kN}$$

Určete vzdálenost nulové posouvající síly x_d :

$$x_d = (2,44) \text{ [m]}$$

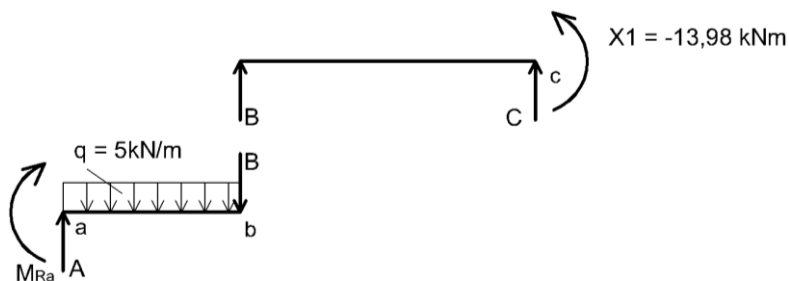
Určete ohybové momenty:

$$M_a = (-14,112) \text{ [kNm]}$$

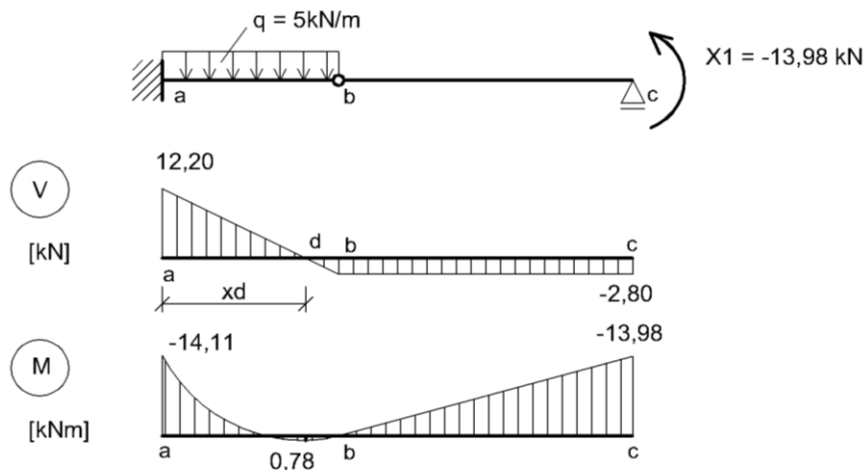
$$M_c = (-13,979) \text{ [kNm]}$$

$$M_d = (-0,782) \text{ [kNm]}$$

Vykreslete průběhy ohybových momentů.



Obr.: Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1 – schéma reakcí



Obr.: Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1 – posouvající síly a ohybové momenty

Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1

Reakce vnějších a vnitřních vazeb základní soustavy zatížení původním zatížením a silou X_1

Na nesené části:

$$\sum M_{c,i} = 0 \quad 5 \cdot B - X_1 = 0 \quad B = -2,796 \text{ kN}$$

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad B + C = 0 \quad C = 2,796 \text{ kN}$$

Na nesoucí části:

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad -A + B + 3 \cdot q = 0 \quad A = 12,204 \text{ kN}$$

$$\sum M_{a,i} = 0 \quad M_{Ra} + 3 \cdot q \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot B = 0 \quad M_{Ra} = -14,112 \text{ kNm}$$

Posouvající síly:

$$V_a = A = 12,204 \text{ kN}$$

$$V_c = -C = -2,796 \text{ kN}$$

Vzdálenost nulové posouvající síly x_d :

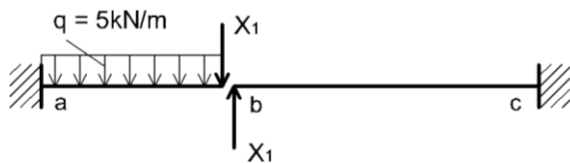
$$x_d = \frac{V_a}{q} = 2,44 \text{ m}$$

Ohybové momenty:

$$M_a = M_{Ra} = -14,112 \text{ kNm}$$

$$M_c = X_1 = -13,979 \text{ kNm}$$

$$M_d = M_{Ra} + A \cdot x_d - q \cdot x_d \cdot \frac{x_d}{2} = 0,782 \text{ kNm}$$



Obr.: Základní staticky určitá soustava

b) základní soustava vznikne odebráním vnitřní vazby

Základní staticky určitá soustava se vytvoří odebráním vazby zajišťující nulový vzájemný posun konců prutů v kloubu b . Vazba se nahradí reakcí vnitřní vazby silou X_1 , která působí opačně na oba konce prutů, podobně jako posouvající síla.

Deformační podmínka představuje rovnost průhybu v levé a pravé části v místě kloubu.

$$w_b^L = w_b^P$$

Vzhledem k opačnému působení reakce na oba konce prutů svislé posuny zleva a zprava bodu b můžeme vyjádřit

$$\delta^L = w^L \quad \dots \text{směřuje dolů}$$

$$\delta^P = -w^P \quad \dots \text{směřuje nahoru}$$

po dosazení do první rovnice dostaneme

$$\delta^L + \delta^P = \delta = 0$$

Rovnice vyjadřuje, že vzájemný posun obou konců prutů je nulový a není nutné rozdělovat konstrukci na levou a pravou část při integraci přemístění. Pro názornost toto rozdělení bude provedeno.

Posun na levé části je dán vlivem zatížení a reakce X_1 .

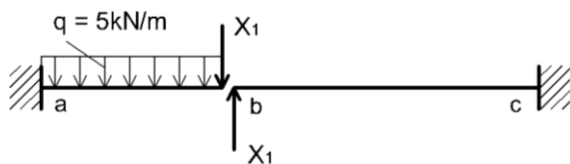
$$\delta^L = \delta_{1,0}^L + \delta_{1,1}^L X_1$$

Obdobně posun na pravé části

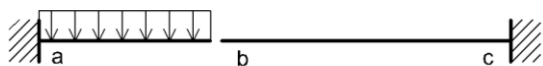
$$\delta^P = \delta_{1,0}^P + \delta_{1,1}^P X_1$$

Po dosazení se získá kanonická rovnice pro určení neznámé síly X_1 .

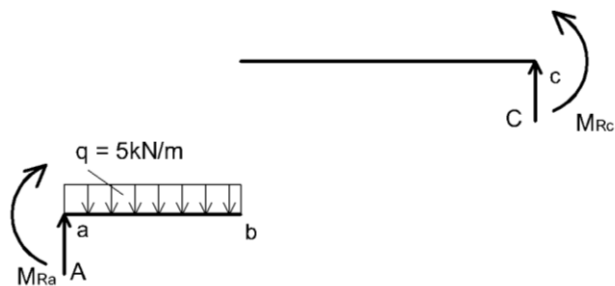
$$\delta_{1,0}^L + \delta_{1,0}^P + (\delta_{1,1}^L + \delta_{1,1}^P) X_1 = 0$$



Obr.: Základní staticky určitá soustava



Obr.: Původní zatížení základní soustavy



Obr. Původní zatížení základní soustavy - schéma reakcí

Zatěžovací stav 0: původní zatížení

Určete reakce vnějších vazeb základní soustavy zatížené původním zatížením:

$$A = (15) \text{ [kN]}$$

$$M_{Ra} = (-22,5) \text{ [kNm]}$$

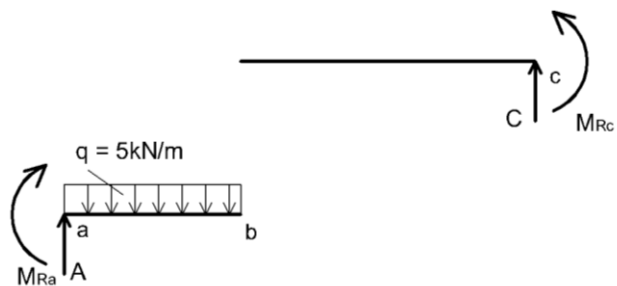
$$C = (0) \text{ [kN]}$$

$$M_{Rc} = (0) \text{ [kNm]}$$

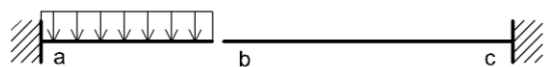
Určete ohybové momenty:

$$M_a = (-22,5) \text{ [kNm]}$$

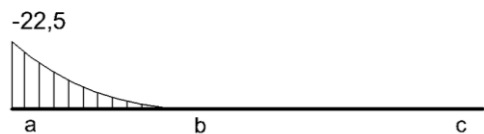
Vykreslete průběhy ohybových momentů.



Obr. Původní zatížení základní soustavy - schéma reakcí



Mo
[kNm]



Obr.: Průběhy momentů od původního zatížení

Zatěžovací stav 0: původní zatížení

Reakce vnějších vazeb základní soustavy zatížené původním zatížením:

část a-b:

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad -A + 3 \cdot q = 0 \quad A = 15 \text{ kN}$$

$$\sum M_{a,i} = 0 \quad M_{Ra} + 3 \cdot q \cdot \frac{3}{2} = 0 \quad M_{Ra} = -22,5 \text{ kNm}$$

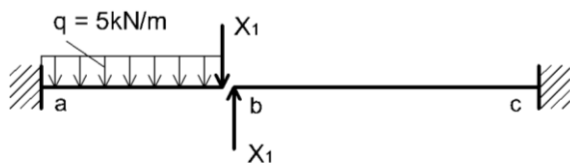
část b-c:

$$\sum M_{c,i} = 0 \quad M_{Rc} = 0 \text{ kNm}$$

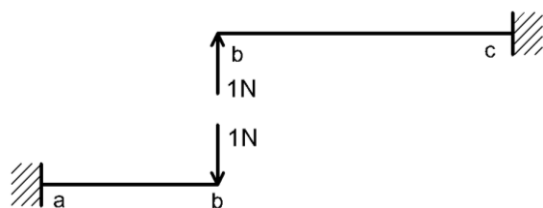
$$\sum F_{z,i} = 0 \quad C = 0 \text{ kN}$$

Ohybové momenty:

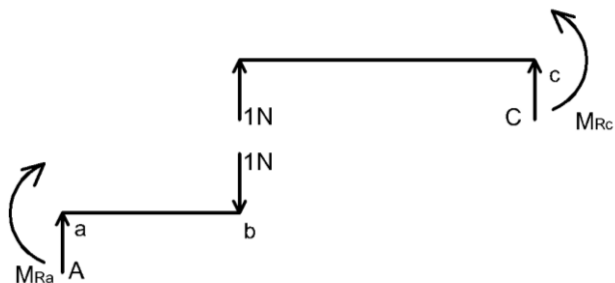
$$M_a = M_{Ra} - 22,5 \text{ kNm}$$



Obr.: Základní staticky určitá soustava



Obr.: Jednotkové zatížení základní soustavy



Obr. Jednotkové zatížení základní soustavy - schéma reakcí

Zatěžovací stav 1: jednotková síla ve směru a místě X_1

Určete reakce vnějších vazeb základní soustavy zatížení jednotkovou silou:

$$A = (1) \text{ [N]}$$

$$M_{Ra} = (-3) \text{ [Nm]}$$

$$C = (-1) \text{ [N]}$$

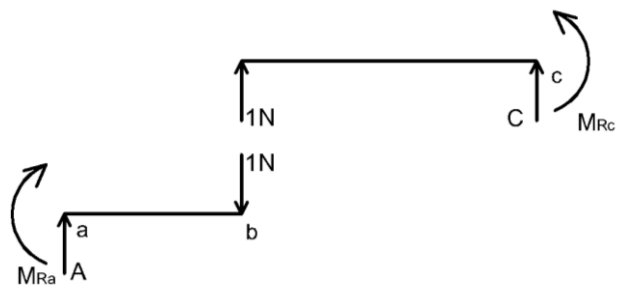
$$M_{Rc} = (5) \text{ [Nm]}$$

Určete ohybové momenty:

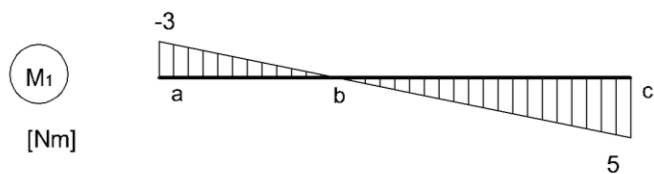
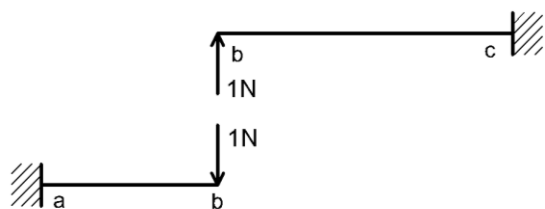
$$M_a = (-3) \text{ [Nm]}$$

$$M_c = (5) \text{ [Nm]}$$

Vykreslete průběhy ohybových momentů.



Obr. Jednotkové zatížení základní soustavy - schéma reakcí



Obr.: Průběhy momentů od jednotkového zatížení

Zatěžovací stav 1: jednotková síla ve směru a místě X_1

Reakce vnějších vazeb základní soustavy zatížení jednotkovou silou

část a-b:

$$\begin{aligned} \sum F_{z,i} &= 0 & -A + 1 &= 0 & A &= 1N \\ \sum M_{a,i} &= 0 & M_{Ra} + 3 \cdot 1 &= 0 & M_{Ra} &= -3Nm \end{aligned}$$

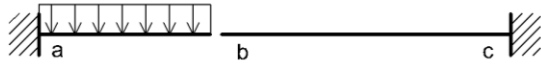
část b-c:

$$\begin{aligned} \sum F_{z,i} &= 0 & C + 1 &= 0 & C &= -1N \\ \sum M_{c,i} &= 0 & M_{Rc} - 5 \cdot 1 &= 0 & M_{Rc} &= 5Nm \end{aligned}$$

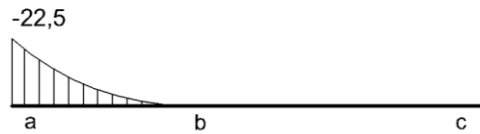
Ohybové momenty:

$$M_a = M_{Ra} = -3Nm$$

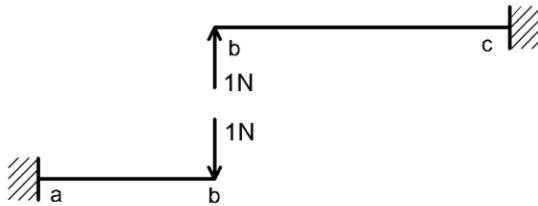
$$M_c = M_{Rc} = 5Nm$$



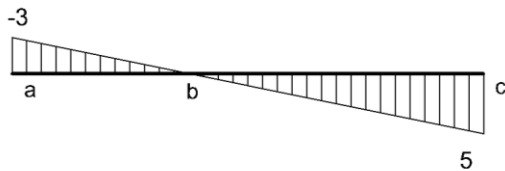
M_0
[kNm]



Obr.: Průběhy momentů od původního zatížení



M_1
[Nm]



Obr.: Průběhy momentů od jednotkového zatížení

Výpočet přemístění

Kladné směry posunů jsou dány směry působení jednotkové síly na jednotlivé části nosníku.

Určete posun bodu b na levé části od původního zatížení:

$$\delta_{1,0}^L = (0,0127)[m]$$

Určete posun bodu b na pravé části od původního zatížení:

$$\delta_{1,0}^P = (0)[m]$$

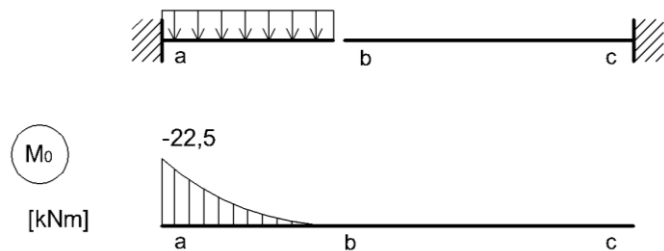
Posun bodu b na levé části od jednotkového zatížení:

$$\delta_{1,1}^L = (2,00267e-6)[m]$$

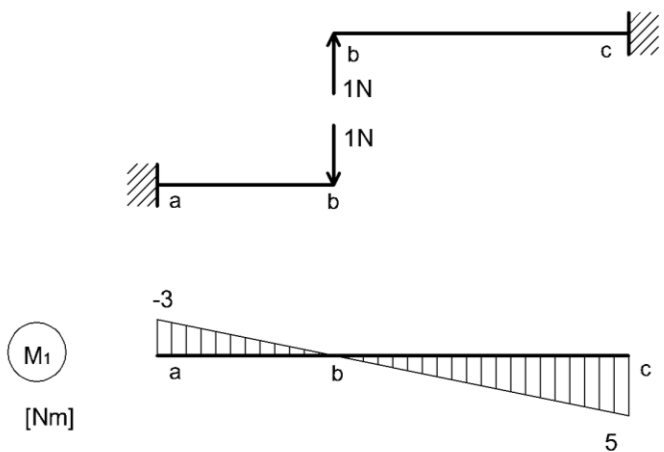
Posun bodu b na pravé části od jednotkového zatížení:

$$\delta_{1,1}^P = (2,02669e-6)[m]$$

Sestavte kanonickou rovnici (podmínku pro pootočení bodu c) a vyřešte neznámou sílu X_1 .



Obr.: Průběhy momentů od původního zatížení



Obr.: Průběhy momentů od jednotkového zatížení

Výpočet přemístění – podle tabulek

Posun bodu b na levé části od původního zatížení:

$$\delta_{1,0}^L = \frac{1}{EI_{ac}} \left[\frac{1}{4} M_{a,0} M_{a,1} L_{ac} \right]$$

$$= \frac{1}{210 \cdot 10^9 \cdot 21,4 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-22,5 \cdot 10^3) \cdot (-3) \cdot 3 = 0,0127$$

Posun bodu b na pravé části od původního zatížení:

$$\delta_{1,0}^P = 0$$

Posun bodu b na levé části od jednotkového zatížení:

$$\delta_{1,1}^L = \frac{1}{EI_{ac}} \left[\frac{1}{3} M_{a,1} M_{a,1} L_{ac} \right]$$

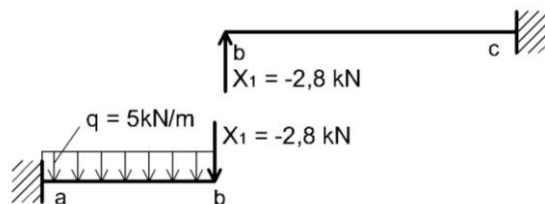
$$= \frac{1}{210 \cdot 10^9 \cdot 21,4 \cdot 10^{-6}} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot 3 \right] = 2,00267 \cdot 10^{-6}$$

Posun bodu b na pravé části od jednotkového zatížení:

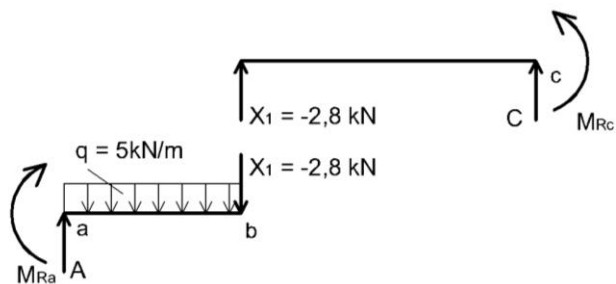
$$\delta_{1,1}^P = \frac{1}{EI_{cb}} \left[\frac{1}{3} M_{b,1} M_{b,1} L_{cb} \right]$$

$$= \frac{1}{210 \cdot 10^9 \cdot 97,9 \cdot 10^{-6}} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \right] = 2,02669 \cdot 10^{-6}$$

Sestavte kanonickou rovnici (podmínku pro vzájemný posun bodu b) a vyřešte neznámou sílu X_1 .



Obr.: Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1



Obr.: Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1 – schéma reakcí

Kanonická rovnice:

$$\delta_{1,0}^L + \delta_{1,0}^P + (\delta_{1,1}^L + \delta_{1,1}^P) X_1 = 0$$

$$0,0127 + 0 + (2,00267 \cdot 10^{-6} + 2,02669 \cdot 10^{-6}) \cdot X_1 = 0$$

Řešení

$$X_1 = -2796 N = -2,796 kN$$

Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1

Určete reakce vnějších vazeb:

$$A = (12,204) [kN]$$

$$M_{Ra} = (-14,112) [kNm]$$

$$C = (2,796) [kN]$$

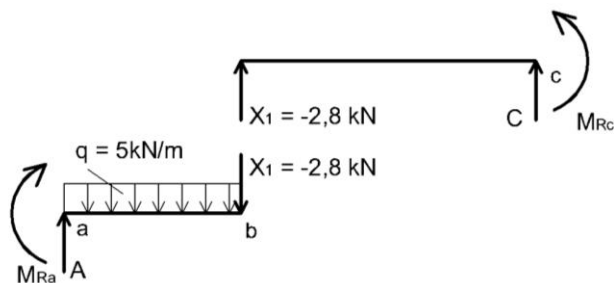
$$M_{Rc} = (-13,976) [kNm]$$

Určete posouvající síly:

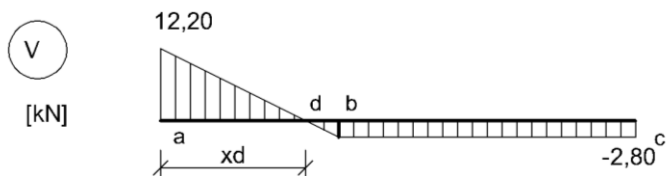
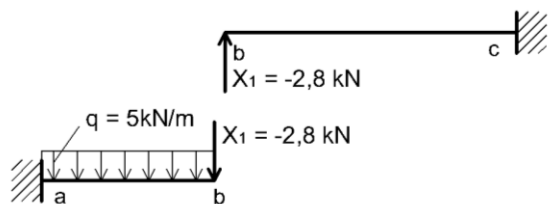
$$V_a = (12,204) [kN]$$

$$V_c = (-2,796) [kN]$$

Vykreslete průběhy posouvajících sil.



Obr.: Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1 – schéma reakcí



Obr.: Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1 – posouvající síly

Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1

Reakce vnějších a vnitřních vazeb základní soustavy zatížení původním zatížením a silou X_1

část a-b:

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad -A + 3 \cdot q + X_1 = 0 \quad A = 12,204 \text{ kN}$$

$$\sum M_{a,i} = 0 \quad M_{Ra} + 3 \cdot q \cdot \frac{3}{2} + X_1 \cdot 3 = 0 \quad M_{Ra} = -14,112 \text{ kNm}$$

část b-c:

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad C + X_1 = 0 \quad C = 2,796 \text{ kN}$$

$$\sum M_{c,i} = 0 \quad M_{Rc} - 5 \cdot X_1 = 0 \quad M_{Rc} = -13,979 \text{ kNm}$$

Posouvající síly:

$$V_a = A = 12,204 \text{ kN}$$

$$V_c = -C = -2,796 \text{ kN}$$

Určete vzdálenost nulové posouvající síly x_d :

$$x_d = (2,44) \text{ [m]}$$

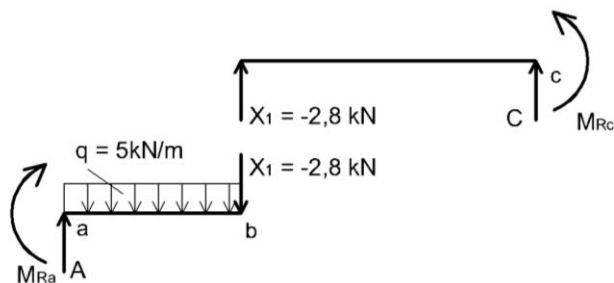
Určete ohybové momenty:

$$M_a = (-14,112) \text{ [kNm]}$$

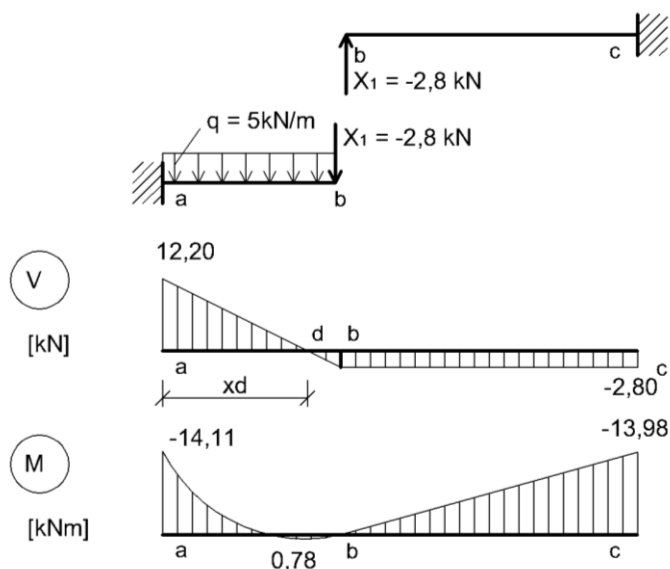
$$M_c = (-13,979) \text{ [kNm]}$$

$$M_d = (-0,782) \text{ [kNm]}$$

Vykreslete průběhy ohybových momentů.



Obr.: Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1 – schéma reakcí



Obr.: Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1 – posouvající síly a ohybové momenty

Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1

Reakce vnějších a vnitřních vazeb základní soustavy zatížení původním zatížením a silou X_1

část a-b:

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad -A + 3 \cdot q + X_1 = 0 \quad A = 12,204 \text{ kN}$$

$$\sum M_{c,i} = 0 \quad M_{Ra} + 3 \cdot q \cdot \frac{3}{2} + X_1 \cdot 3 = 0 \quad M_{Ra} = -14,112 \text{ kNm}$$

část b-c:

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad C + X_1 = 0 \quad C = 2,796 \text{ kN}$$

$$\sum M_{c,i} = 0 \quad M_{Rc} - 5 \cdot X_1 = 0 \quad M_{Rc} = -13,979 \text{ kNm}$$

Posouvající síly:

$$V_a = A = -12,204 \text{ kN}$$

$$V_c = -C = -2,796 \text{ kN}$$

Vzdálenost nulové posouvající síly x_d :

$$x_d = \frac{V_a}{q} = 2,44 \text{ m}$$

Ohybové momenty:

$$M_a = M_{Ra} = -14,112 \text{ kNm}$$

$$M_c = X_1 = -13,979 \text{ kNm}$$

$$M_d = M_{Ra} + A \cdot x_d - q \cdot x_d \cdot \frac{x_d}{2} = 0,782 \text{ kNm}$$