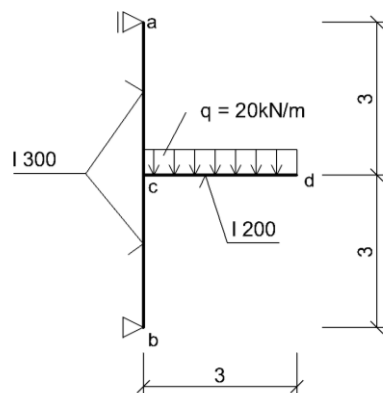




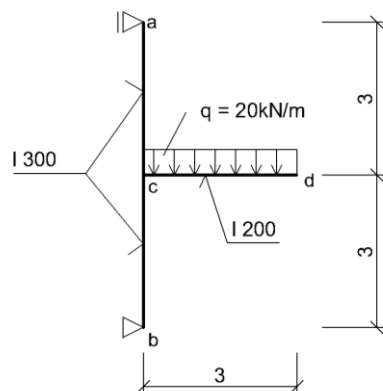
Obr.: Model konstrukce a zatížení

Zadání

Vypočtete vodorovný posun u_c bodu c a svislý posun w_d v bodě d na staticky určeném rámu podle obrázku. Do řešení uvažte příspěvek všech vnitřních sil.

Rám je ocelový ($E = 210\text{GPa}$, $G = 81\text{GPa}$), průřezové charakteristiky jsou následující:

Průřezová charakteristika	I200	I300
Průřezová plocha A	$3,34 \cdot 10^{-3}\text{m}^2$	$6,90 \cdot 10^{-3}\text{m}^2$
Smyková plocha A_k (přibližně)	$1,25 \cdot 10^{-3}\text{m}^2$	$2,70 \cdot 10^{-3}\text{m}^2$
Moment setrvačnosti I	$21,4 \cdot 10^{-6}\text{m}^4$	$97,9 \cdot 10^{-6}\text{m}^4$



Obr.: Model konstrukce a zatížení

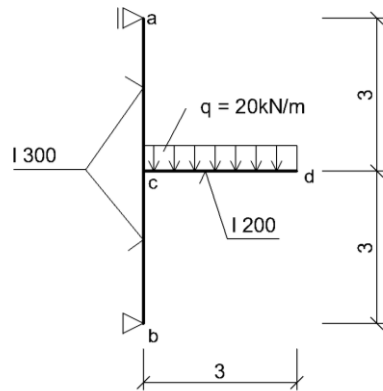
Řešení

Z Maxwell-Mohrova vzorce pro výpočet přemístění

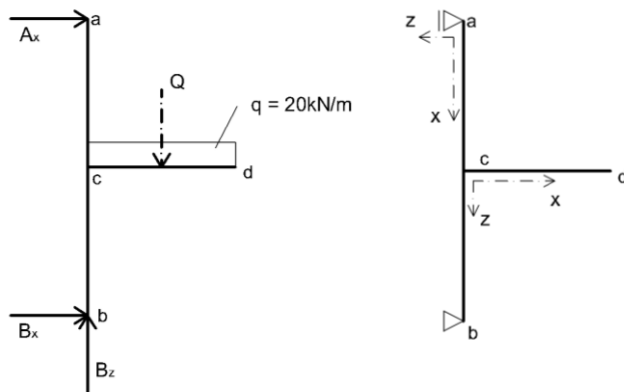
$$\delta = \int_L \frac{N\bar{N}}{EA} ds + \int_L \frac{V\bar{V}}{GA_\kappa} ds + \int_L \frac{M\bar{M}}{EI} ds + \int_L \bar{N}\alpha_t \Delta t_0 ds + \int_L \bar{M}\alpha_t \frac{\Delta t_1}{h} ds - \sum_r (\bar{R}_{rx}u_r + \bar{R}_{rz}w_r + \bar{M}_r\varphi_r)$$

se použijí první tři integrály, protože nenulové jsou všechny tři vnitřní síly.

Je tedy třeba určit průběhy vnitřních sil N , V , M od vlastního zatížení a od jednotkového impulsu v místě a směru hledaného přemístění.



Obr.: Model konstrukce a zatížení



Obr.: Schéma reakcí a lokálních souřadných systémů

A) průběhy vnitřních sil od skutečného zatížení

V prvním kroku výpočtu se stanoví průběhy vnitřních sil (v tomto případě ohybových momentů M) od skutečného zatížení.

Určete náhradní břemeno a reakce:

$$Q = (60) \text{ [kN]}$$

$$A_x = (-15) \text{ [kN]}$$

$$B_x = (15) \text{ [kN]}$$

$$B_z = (60) \text{ [kN]}$$

Určete vnitřní síly:

$$N_b = (-60) \text{ [kN]}$$

$$V_a = (15) \text{ [kN]}$$

$$V_b = (-15) \text{ [kN]}$$

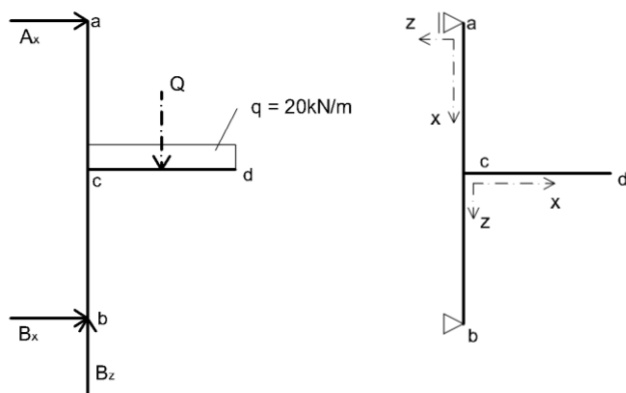
$$V_{c,d} = (60) \text{ [kN]}$$

$$M_{c,a} = (-45) \text{ [kNm]}$$

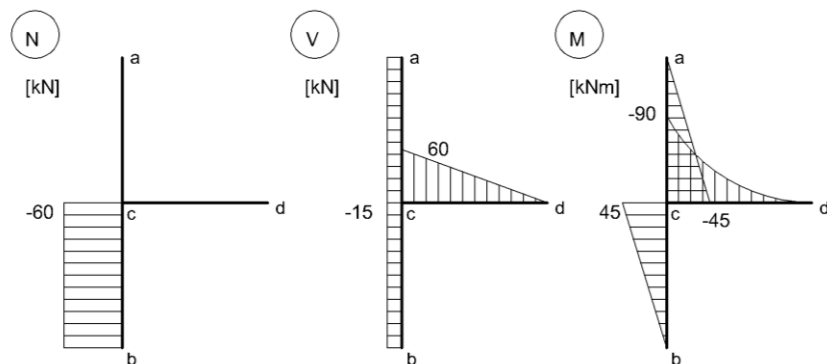
$$M_{c,b} = (45) \text{ [kNm]}$$

$$M_{c,d} = (90) \text{ [kNm]}$$

Nakreslete průběhy vnitřních sil.



Obr.: Schéma reakcí a lokálních souřadných systémů



Obr.: Průběh vnitřních sil od původního zatížení

A) průběhy vnitřních sil od skutečného zatížení

Reakce

$$Q = q \cdot L_{cd} = 20 \cdot 3 = 60 \text{ kN}$$

$$\sum M_{b,i} = 0 \quad + 6A_x + 1,5Q = 0 \quad A_x = -15 \text{ kN}$$

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad A_x + B_x = 0 \quad B_x = 15 \text{ kN}$$

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad Q - B_z = 0 \quad B_z = 60 \text{ kN}$$

Vnitřní síly:

$$N_b = -B_z = -60 \text{ kN}$$

$$V_a = A_x = -15 \text{ kN}$$

$$V_b = -B_x = -15 \text{ kN}$$

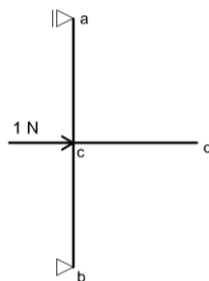
$$V_{c,d} = Q = 60 \text{ kN}$$

$$M_{c,a} = 3 \cdot A_x = -45 \text{ kNm}$$

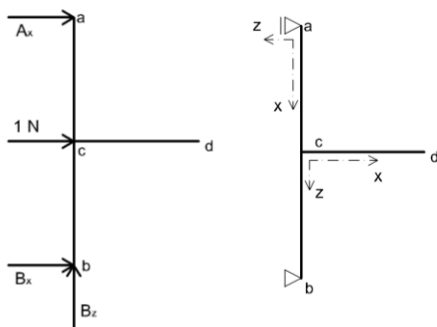
$$M_{c,b} = 3 \cdot B_x = 45 \text{ kNm}$$

$$M_{c,d} = -1,5 \cdot Q = -90 \text{ kNm}$$

Nakreslete fiktivní zatížení konstrukce pro výpočet vodorovného posunu v bodě c.



Obr.: Zatížení nosníku jednotkovou silou



Obr.: Schéma reakcí a lokálních souřadných systémů

I. Výpočet vodorovného posunu bodu c

B) průběhy vnitřních sil od fiktivního zatížení

Jednotkový impuls, v místě a směru hledaného zatížení, představuje vodorovná síla v bodě c

Určete reakce:

$$A_x = (-0,5) \text{ [N]}$$

$$B_x = (-0,5) \text{ [N]}$$

$$B_z = (0) \text{ [N]}$$

Určete vnitřní síly:

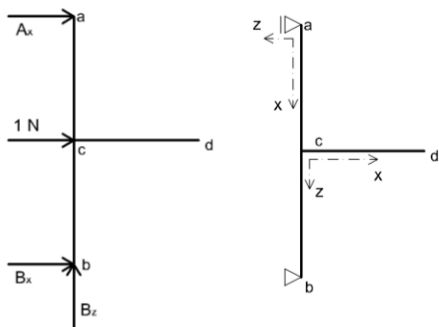
$$V_a = (-0,5) \text{ [N]}$$

$$V_b = (0,5) \text{ [N]}$$

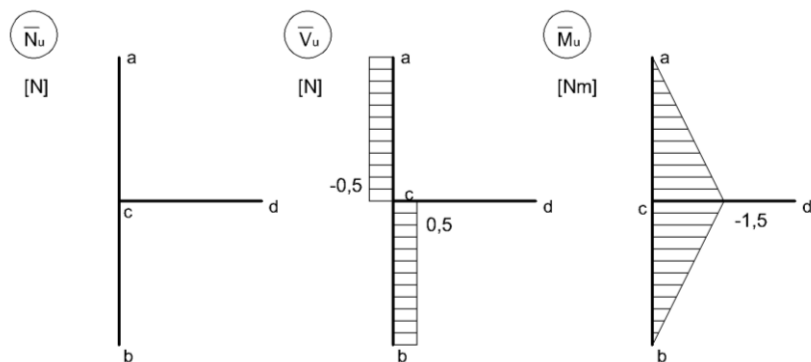
$$M_{c,a} = (-1,5) \text{ [Nm]}$$

$$M_{c,b} = (-1,5) \text{ [Nm]}$$

Nakreslete průběhy vnitřních sil.



Obr.: Schéma reakcí a lokálních souřadných systémů



Obr.: Průběh vnitřních sil od jednotkové vodorovné síly v bodě c

I. Výpočet vodorovného posunu bodu c

B) průběhy vnitřních sil od fiktivního zatížení

Reakce

$$\sum M_{b,i} = 0 \quad + 6 \cdot A_x + 3 \cdot 1 = 0 \quad A_x = -0,5N$$

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad A_x + B_x + 1 = 0 \quad B_x = -0,5N$$

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad B_z = 0$$

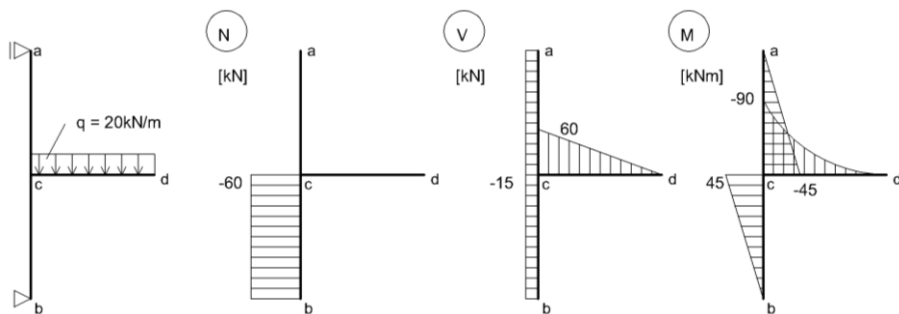
Vnitřní síly:

$$V_a = A_x = -0,5N$$

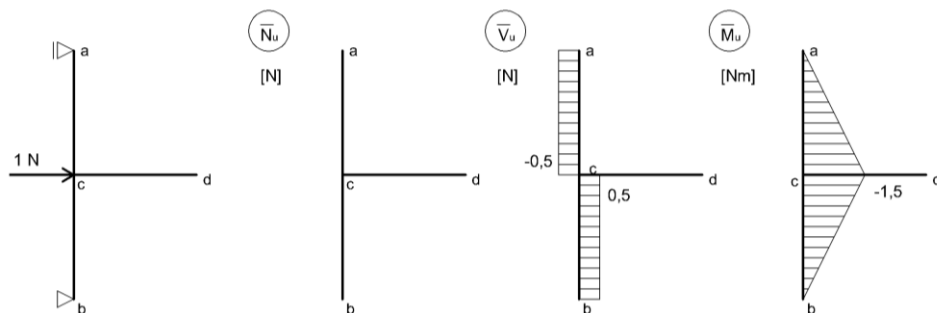
$$V_b = -B_x = 0,5N$$

$$M_{c,a} = 3 \cdot A_x = -1,5Nm$$

$$M_{c,b} = 3 \cdot B_x = 1,5Nm$$



Obr.: Průběh vnitřních sil od původního zatížení



Obr.: Průběh vnitřních sil od jednotkové vodorovné síly v bodě c

I. Výpočet vodorovného posunu bodu c

C) Výpočet průhybu v bodě a

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$G = 81 \text{ GPa}$$

Průřezová charakteristika

I200 (a-b)

I300 (c-d)

Průřezová plocha A

$$3,34 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$6,90 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

Smyková plocha A_k (přibližně)

$$1,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$2,70 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

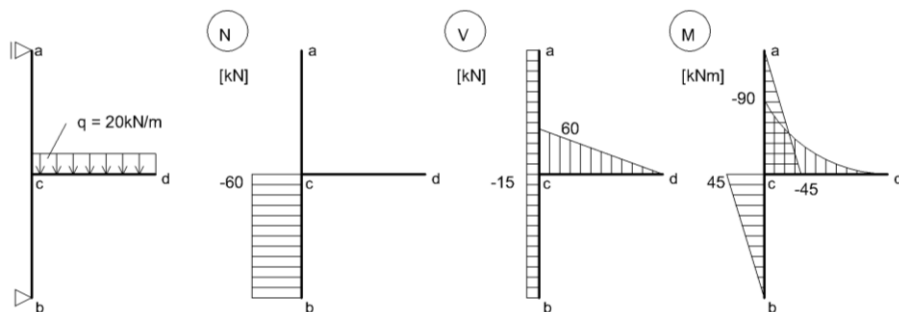
Moment setrvačnosti I

$$21,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

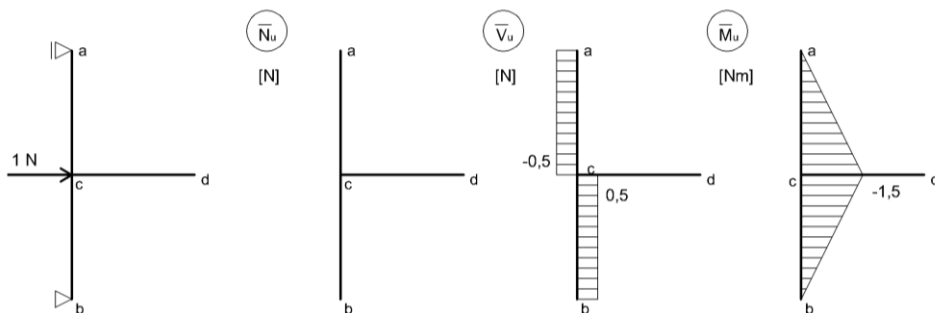
$$97,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

Určete vodorovný posun bodu c:

$$u_c = (0) \text{ m}$$



Obr.: Průběh vnitřních sil od původního zatížení



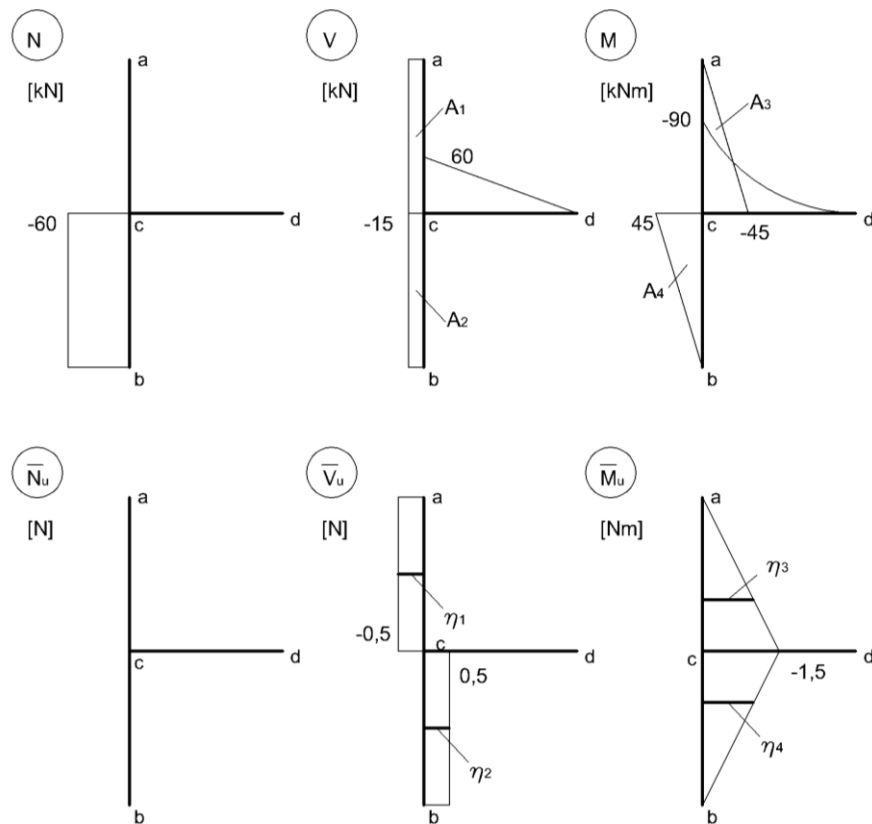
Obr.: Průběh vnitřních sil od jednotkové vodorovné síly v bodě c

I. Výpočet vodorovného posunu bodu c

C) Určení posunu – podle tabulek

$$u_c = \frac{1}{EI_{300}} \left[\frac{1}{3} M_{ca} \bar{M}_{ca} L_{ac} + \frac{1}{3} M_{cb} \bar{M}_{cb} L_{cb} \right] + \frac{1}{GA_{\kappa,300}} \left[\frac{1}{2} V_{ca} \bar{V}_{ca} L_{ac} + \frac{1}{2} V_{cb} \bar{V}_{cb} L_{cb} \right]$$

$$u_c = \frac{1}{210 \cdot 10^9 \cdot 97,910^{-6}} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (-45 \cdot 10^3) \cdot 1,5 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 45 \cdot 10^3 \cdot (-1,5) \cdot 3 \right] + \frac{1}{81 \cdot 10^9 \cdot 2,7 \cdot 10^{-3}} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (-15 \cdot 10^3) \cdot 0,5 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (-15 \cdot 10^3) \cdot (-0,5) \cdot 3 \right] = 0$$



Obr.: Schéma pro Vereščaginovo pravidlo

I. Výpočet vodorovného posunu bodu c

C) Určení posunu– alternativně podle Verščaginova pravidla

$$u_c = \frac{1}{GA_{\kappa,300}} [A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2] + \frac{1}{EI_{300}} [A_3 \eta_3 + A_4 \eta_4]$$

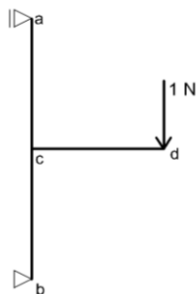
$$u_c = \frac{1}{81 \cdot 10^9 \cdot 2,7 \cdot 10^{-3}} \cdot \left[\left(-15 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot (-0,5) + \left(-15 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot (0,5) \right]$$

$$\frac{1}{210 \cdot 10^9 \cdot 97,910^{-6}} \cdot \left[\left(-45 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \left(-1,5 \cdot \frac{2}{3} \right) + \left(45 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \left(-1,5 \cdot \frac{2}{3} \right) \right]$$

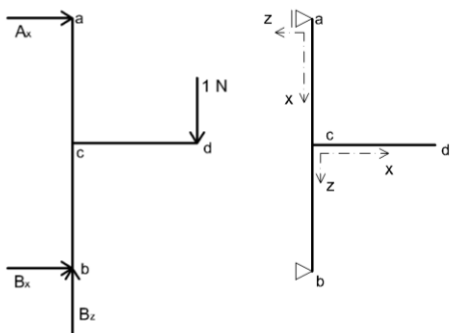
$$= 0$$

II. Výpočet svislého průhybu bodu d

Nakreslete fiktivní zatížení nosníku pro výpočet svislého průhybu bodu d.



Obr.: Zatížení nosníku jednotkovou silou



Obr.: Schéma reakcí a lokálních souřadných systémů

II. Výpočet svislého průhybu bodu d

B) průběhy vnitřních sil od fiktivního zatížení

Jednotkový impuls, v místě a směru hledaného zatížení, představuje svislá síla v bodě c

Určete reakce:

$$A_x = (-0,5) \text{ [N]}$$

$$B_x = (0,5) \text{ [N]}$$

$$B_z = (1) \text{ [N]}$$

Určete vnitřní síly:

$$V_a = (-0,5) \text{ [N]}$$

$$V_b = (-0,5) \text{ [N]}$$

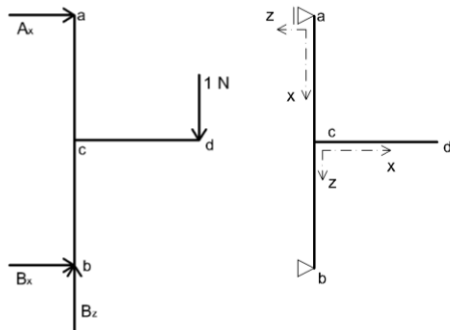
$$V_d = (1) \text{ [N]}$$

$$M_{c,a} = (-1,5) \text{ [Nm]}$$

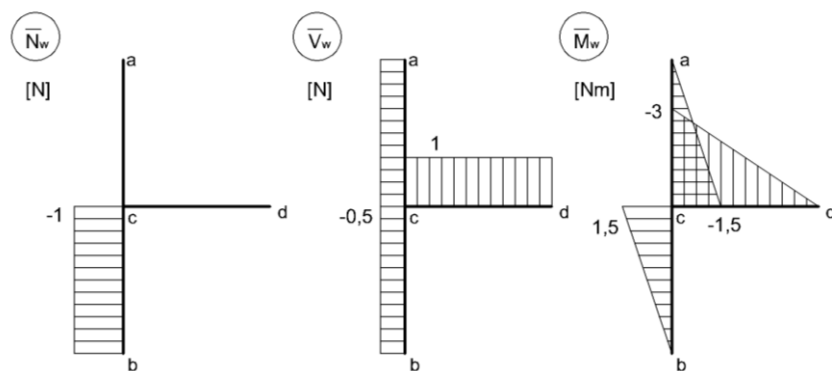
$$M_{c,b} = (1,5) \text{ [Nm]}$$

$$M_{c,d} = (-3) \text{ [Nm]}$$

Nakreslete průběhy vnitřních sil.



Obr.: Schéma reakcí a lokálních souřadných systémů



Obr.: Průběh vnitřních sil od jednotkové svislé síly v bodě d

II. Výpočet svislého průhybu bodu d

B) průběhy vnitřních sil od fiktivního zatížení

Reakce

$$\sum M_{b,i} = 0 \quad + 6A_x + 3 \cdot 1 = 0 \quad A_x = -0,5N$$

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad A_x + B_x = 0 \quad B_x = 0,5N$$

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad 1 - B_z = 0 \quad B_z = 1N$$

Vnitřní síly:

$$V_a = A_x = -0,5N$$

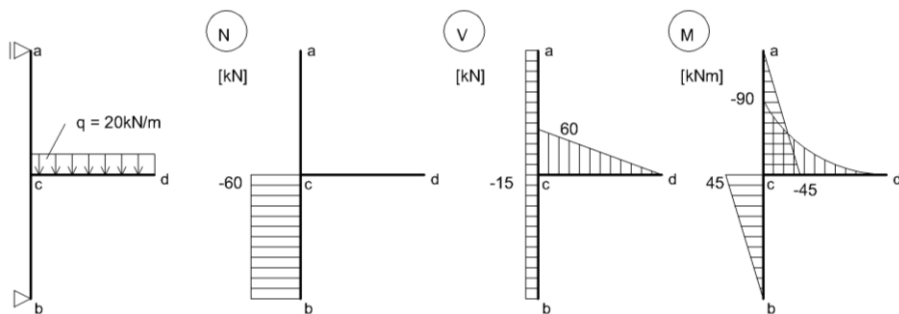
$$V_b = -B_x = 0,5N$$

$$V_d = 1N$$

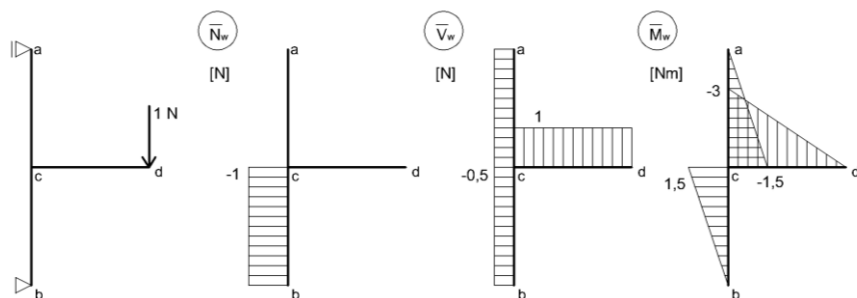
$$M_{c,a} = 3A_x = -1,5Nm$$

$$M_{c,b} = 3B_x = 1,5Nm$$

$$M_{c,d} = -3 \cdot 1 = -3Nm$$



Obr.: Průběh vnitřních sil od původního zatížení



Obr.: Průběh vnitřních sil od jednotkové svislé síly v bodě d

II. Výpočet svislého průhybu bodu d

C) Výpočet průhybu v bodě a

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$G = 81 \text{ GPa}$$

Průřezová charakteristika

I200 (a-b)

I300 (c-d)

Průřezová plocha A

$$3,34 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$6,90 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

Smyková plocha A_k (přibližně)

$$1,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$2,70 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

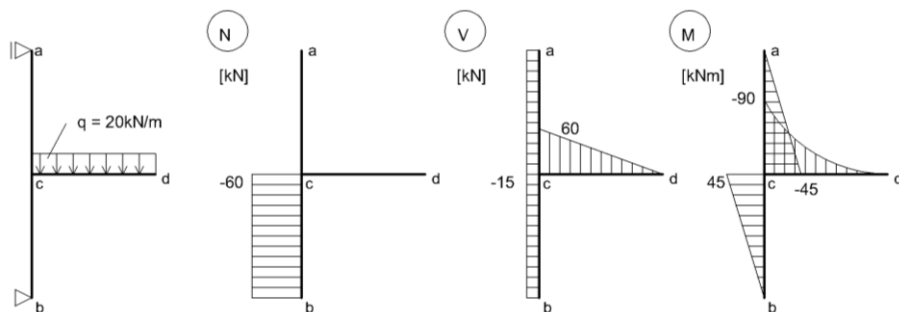
Moment setrvačnosti I

$$21,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

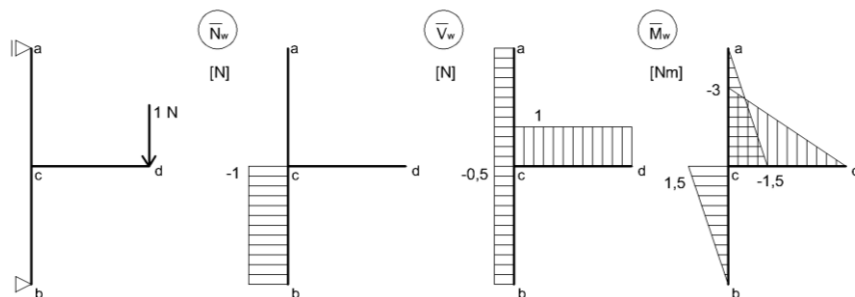
$$97,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

Určete vodorovný posun bodu c

$$w_d = (0,05285) \text{ m}$$



Obr.: Průběh vnitřních sil od původního zatížení



Obr.: Průběh vnitřních sil od jednotkové svislé síly v bodě d

II. Výpočet svislého průhybu bodu d

C) Určení posunu – podle tabulek

$$w_d = \frac{1}{EI_{300}} \left[\frac{1}{3} M_{ca} \bar{M}_{ca} L_{ac} + \frac{1}{3} M_{cb} \bar{M}_{cb} L_{cb} \right] + \frac{1}{EI_{200}} \left[\frac{1}{4} M_{cd} \bar{M}_{cd} L_{cd} \right] + \frac{1}{GA_{\kappa,300}} [V_a \bar{V}_a L_{ab}] + \frac{1}{GA_{\kappa,200}} \left[\frac{1}{2} V_{cd} \bar{V}_{cd} L_{cd} \right] + \frac{1}{EA_{300}} [N_c \bar{N}_c L_{cb}]$$

$$w_d = \frac{1}{210 \cdot 10^9 \cdot 97,910^{-6}} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (-45 \cdot 10^3) \cdot (-1,5) \cdot 3 + \frac{1}{3} 45 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 3 \right]$$

$$+ \frac{1}{210 \cdot 10^9 \cdot 21,4 \cdot 10^{-6}} \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot (-90 \cdot 10^3) \cdot 3 \cdot 3 \right]$$

$$+ \frac{1}{81 \cdot 10^9 \cdot 2,7 \cdot 10^{-3}} \cdot [(-15 \cdot 10^3) \cdot (-0,5) \cdot 6]$$

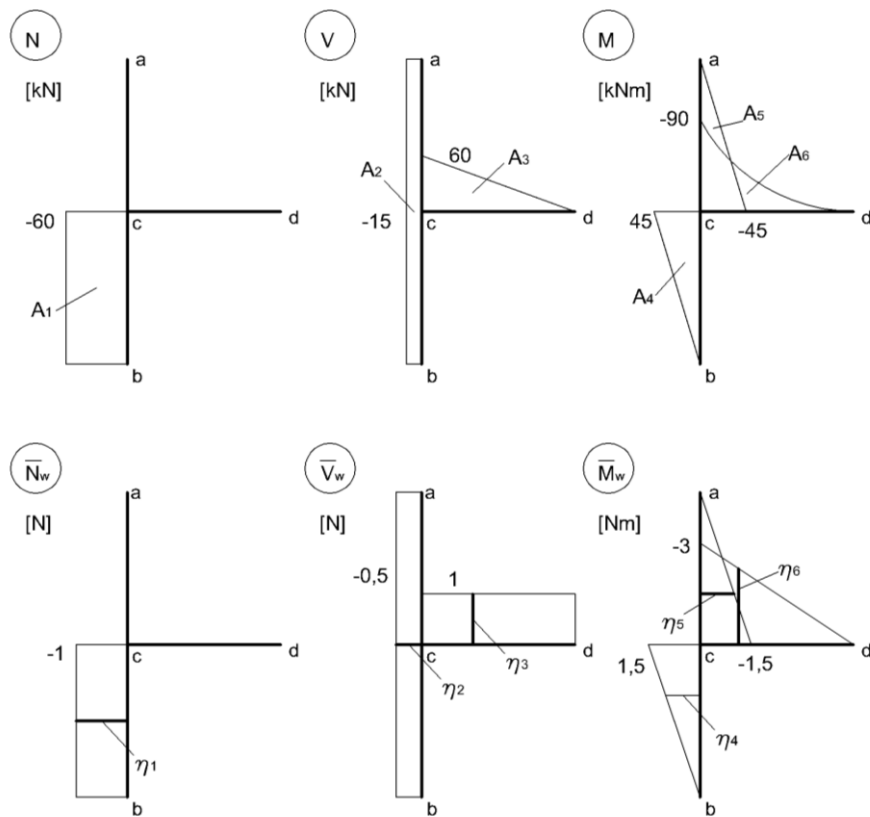
$$+ \frac{1}{81 \cdot 10^9 \cdot 1,25 \cdot 10^{-3}} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (-60 \cdot 10^3) \cdot 1 \cdot 3 \right]$$

$$+ \frac{1}{210 \cdot 10^9 \cdot 6,9 \cdot 10^{-3}} \cdot [(-60 \cdot 10^3) \cdot (-1) \cdot 3]$$

$$= w_{d(M)} + w_{d(V)} + w_{d(N)}$$

$$= 0,05163 + 0,00109465 + 0,0001242 = 0,05285 \text{ m} = 52,85 \text{ mm}$$

Svislý posun bodu d je 52,85 mm směrem dolů.



Obr.: Schéma pro Vereščaginovo pravidlo

II. Výpočet svislého průhybu bodu d

C) Určení posunu – alternativně podle Verščaginova pravidla

$$w_d = \frac{1}{EA_{300}} [A_1 \eta_1] + \frac{1}{GA_{\kappa, 300}} [A_2 \eta_2] + \frac{1}{GA_{\kappa, 200}} [A_3 \eta_3]$$

$$\frac{1}{EI_{300}} [A_4 \eta_4 + A_5 \eta_5] + \frac{1}{EI_{200}} [A_6 \eta_6]$$

$$w_d = + \frac{1}{210 \cdot 10^9 \cdot 6,9 \cdot 10^{-3}} \cdot [(-60 \cdot 10^3 \cdot 3) \cdot (-1)]$$

$$+ \frac{1}{81 \cdot 10^9 \cdot 2,7 \cdot 10^{-3}} \cdot [(-15 \cdot 10^3 \cdot 6) \cdot (-0,5)]$$

$$+ \frac{1}{81 \cdot 10^9 \cdot 1,25 \cdot 10^{-3}} \cdot \left[\left(60 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot 1 \right]$$

$$+ \frac{1}{210 \cdot 10^9 \cdot 97,910^{-6}} \cdot \left[\left(45 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1,5 \right) \right]$$

$$+ \left(-45 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \left(-1,5 \cdot \frac{2}{3} \right)$$

$$+ \frac{1}{210 \cdot 10^9 \cdot 21,4 \cdot 10^{-6}} \cdot \left[\left(\frac{-90 \cdot 10^3 \cdot 3}{3} \right) \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot (-3) \right) \right]$$

$$= w_{d(N)} + w_{d(V)} + w_{d(M)}$$

$$= 0,0001242 + 0,00109465 + 0,05163 = 0,05285m = 52,85mm$$

Svislý posun bodu d je 52,85 mm směrem dolů.