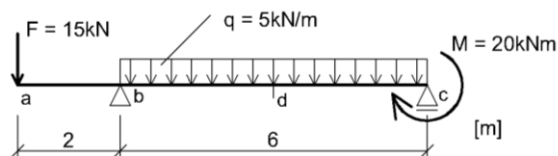


Obr.: Model konstrukce a zatížení

Zadání

Vypočtete svislý posun w_a v bodě a nosníku podle obrázku. Nosník je z ocelového válcovaného profilu I200 (modul pružnosti $E = 210 \text{ GPa}$, modul pružnosti ve smyku $G = 81 \text{ GPa}$, průřezová plocha je $A = 3,34 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, moment setrvačnosti $I = 21,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$, smyková plocha přibližně $A_k = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$). Uvažujte práci všech vnitřních sil.



Obr.: Model konstrukce a zatížení

Řešení

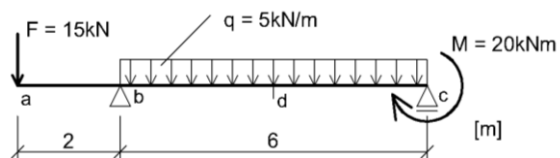
Z Maxwell-Mohrova vzorce pro výpočet přemístění

$$\delta = \int_L \frac{N\bar{N}}{EA} ds + \int_L \frac{V\bar{V}}{GA_\kappa} ds + \int_L \frac{M\bar{M}}{EI} ds + \int_L \bar{N}\alpha_t \Delta t_0 ds + \int_L \bar{M}\alpha_t \frac{\Delta t_1}{h} ds - \sum_r (\bar{R}_{rx}u_r + \bar{R}_{rz}w_r + \bar{M}_r\varphi_r)$$

se použije druhý a třetí integrál, protože normálové síly jsou nulové, stejně jako deformační zatížení. Je tedy třeba určit průběhy posouvajících V sil a ohybových momentů M od skutečného zatížení a průběhy posouvajících $\bar{V}$ sil a ohybových momentů $\bar{M}$ od jednotkového zatížení v místě a směru hledaného přemístění (tedy svislé jednotkové síly v bodě a).

V úseku $b-c$ se obrazec momentu M rozloží na lineární a parabolickou část. Vrchol paraboly určíme ze vztahu:

$$M_{d,2} = \frac{1}{8}ql_{bc}^2$$



Obr.: Model konstrukce a zatížení

A) průběhy vnitřních sil od skutečného zatížení

V prvním kroku výpočtu se stanoví průběhy vnitřních sil (v tomto případě ohybových momentů M) od skutečného zatížení.

Určete svislé reakce (kladná nahoru):

$$R_b = (13,333) \text{ [kN]}$$

$$R_c = (31,667) \text{ [kN]}$$

Určete posouvající síly:

$$V_a = (-15) \text{ [kN]}$$

$$V_{b,P} = (16,667) \text{ [kN]}$$

$$V_c = (-13,333) \text{ [kN]}$$

Vzdálenost průřezu s nulovou posouvající silou od konce nosníku:

$$x_e = (2,667) \text{ [m]}$$

Určete ohybové momenty:

$$M_b = (-30) \text{ [kNm]}$$

$$M_c = (-20) \text{ [kNm]}$$

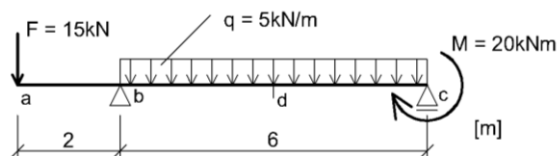
Extrémní moment v poli b-c

$$M_e = (-2,222) \text{ [kNm]}$$

Vrchol parabolické části průběhu momentu (po odečtení lineární části)

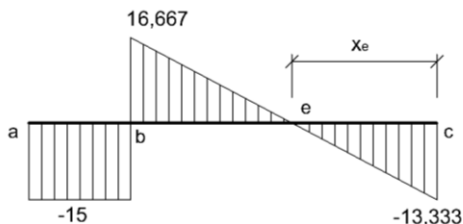
$$M_{d,2} = (22,5) \text{ [kNm]}$$

Nakreslete průběhy posouvajících sil a ohybových momentů.

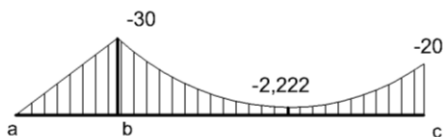


Obr.: Model konstrukce a zatížení

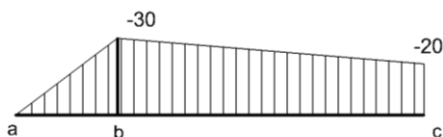
V
[Nm]



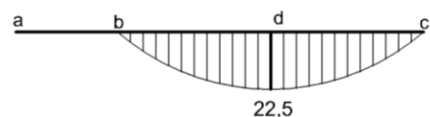
M
[kNm]



M₁
[kNm]



M₂
[kNm]



Obr.: Průběh posouvajících sil a ohybových momentů od původního zatížení

A) průběhy vnitřních sil od skutečného zatížení

Výpočet reakcí

$$Q = q \cdot L_{bc} = 5 \cdot 6 = 30 \text{ kN}$$

$$\sum M_{b,i} = 0 \quad -2F + 3Q + M - 6R_b = 0 \quad R_c = 13,333 \text{ kN}$$

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad F + Q - R_b - R_c = 0 \quad R_a = 31,667 \text{ kN}$$

Posouvající síly:

$$V_a = -F = -15 \text{ kN}$$

$$V_{b,P} = V_a + R_b = 16,667 \text{ kN}$$

$$V_c = -R_c = -13,333 \text{ kNm}$$

Vzdálenost průřezu s nulovou posouvající silou od konce nosníku:

$$x_e = \frac{V_c}{q} = 2,667 \text{ m}$$

Ohybové momenty:

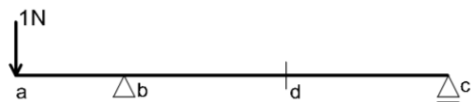
$$M_b = -2 \cdot F = -30 \text{ kNm}$$

$$M_c = -M = -20 \text{ kNm}$$

$$M_e = xR_c - M - qx \frac{x}{2} = 2,667 \cdot 13,333 - 20 - 5 \cdot 2,6667 \frac{2,667}{2} = -2,222 \text{ kNm}$$

$$M_{d,2} = \frac{1}{8} q \cdot L_{bc}^2 = \frac{1}{8} 5 \cdot 10^3 \cdot 6^2 = 22,5 \cdot 10^3 \text{ Nm}$$

Nakreslete fiktivní zatížení nosníku pro výpočet průhybu v bodě a.



Obr.: Zatížení nosníku jednotkovou silou

B) průběhy vnitřních sil od fiktivního zatížení

Jednotkový impuls, v místě a směru hledaného zatížení, představuje svislá síla v bodě a

Určete svislé reakce (kladná nahoru):

$$R_b = (4/3) \text{ [N]}$$

$$R_c = (-1/3) \text{ [N]}$$

Určete posouvající síly:

$$V_a = (-1) \text{ [N]}$$

$$V_{b,P} = (1/3) \text{ [N]}$$

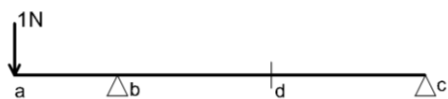
Určete ohybové momenty:

$$M_b = (-2) \text{ [Nm]}$$

uprostřed pole b-c

$$M_d = (-1) \text{ [Nm]}$$

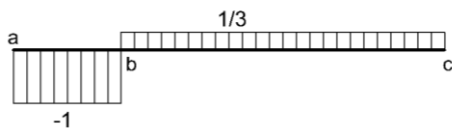
Nakreslete průběhy posouvajících sil a ohybových momentů.



Obr.: Zatížení nosníku jednotkovou silou

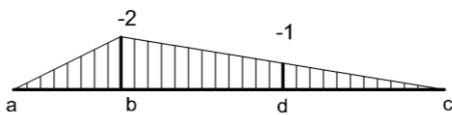
$\bar{V}$

[N]



$\bar{M}$

[Nm]



Obr.: Průběh posouvajících sil a ohybových momentů od jednotkové síly

B) průběhy vnitřních sil od fiktivního zatížení

Výpočet reakcí

$$\sum M_{b,i} = 0 \quad -2 \cdot 1 - 6R_c = 0 \quad R_c = -1/3N$$

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad 1 - R_b - R_c = 0 \quad R_b = 4/3N$$

Posouvající síly:

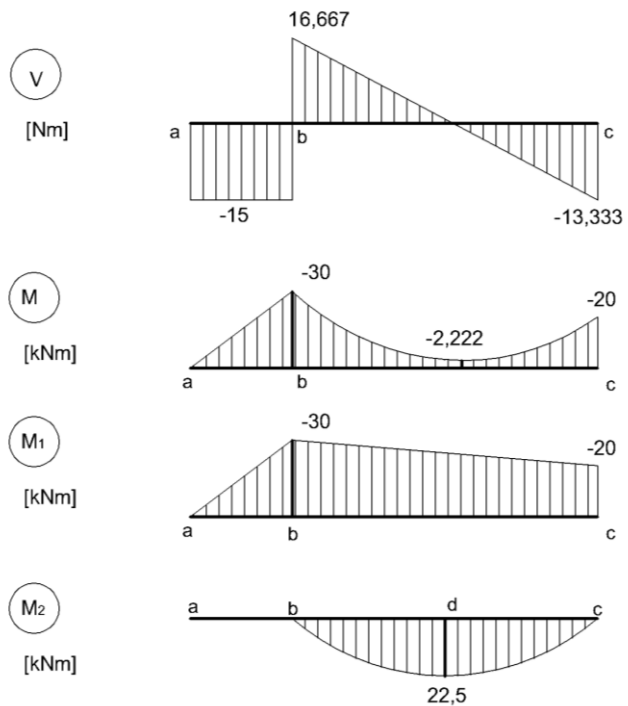
$$V_a = -1Nm$$

$$V_{b,P} = -R_c = 1/3Nm$$

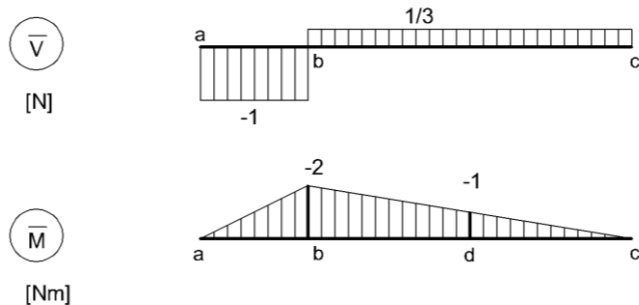
Ohybové momenty:

$$M_b = -2 \cdot 1 = -2Nm$$

$$M_d = 3 \cdot R_c = -1Nm$$



Obr.: Průběh vnitřních sil od původního zatížení



Obr.: Průběh vnitřních sil od jednotkové svislé síly v bodě a

C) Výpočet průhybu v bodě a

Určete tuhosti průřezu

$$EI = (4,496 \cdot 10^6) \text{ Nm}^2$$

$$GA_x = (101,25 \cdot 10^6) \text{ N}$$

Určete průhyb v bodě a

část průhybu způsobená ohybovými momenty:

$$w_{a(M)} = (0,024477) \text{ m}$$

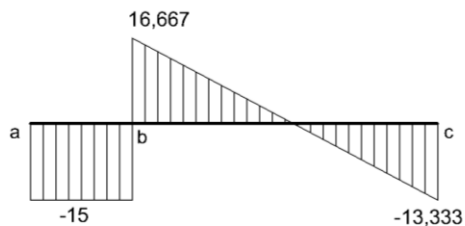
část průhybu způsobená posouvajícími silami:

$$w_{a(V)} = (0,000329) \text{ m}$$

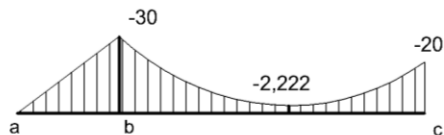
celkový průhyb:

$$w_a = (0,02481) \text{ m}$$

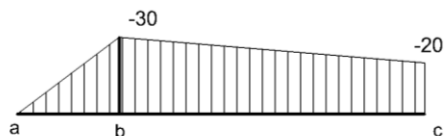
V
[Nm]



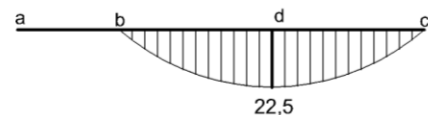
M
[kNm]



M₁
[kNm]

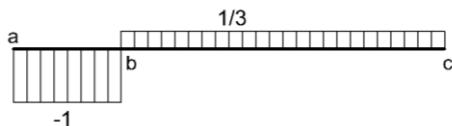


M₂
[kNm]

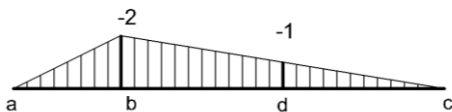


Obr.: Průběh vnitřních sil od původního zatížení

V̄
[N]



M̄
[Nm]



Obr.: Průběh vnitřních sil od jednotkové svislé síly v bodě a

C) Výpočet průhybu v bodě a

$$EI = 210 \cdot 10^9 \cdot 21,4 \cdot 10^{-6} = 4,496 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2$$

$$GA_x = 81 \cdot 10^9 \cdot 1,25 \cdot 10^{-3} = 101,25 \cdot 10^6 \text{ N}$$

Vliv ohybu a smyku na průhyb je možné řešit odděleně.

Část průhybu způsobená ohybovými momenty je:

$$w_{a(M)} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} M_{b,1} \bar{M}_b l_{ab} + \frac{1}{6} \bar{M}_b (2M_{b,1} + M_{c,1}) l_{bc} - \frac{1}{3} M_{d,2} \bar{M}_b l_{bc} \right]$$

$$w_{a(M)} = \frac{1}{4,496 \cdot 10^6} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (-30 \cdot 10^3) \cdot (-2) \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot (-2) \cdot (2 \cdot (-30 \cdot 10^3) + (-20 \cdot 10^3)) \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot (-22,5 \cdot 10^3) \cdot (-2) \cdot 6 \right]$$

$$w_{a(M)} = 0,024477 \text{ m} = 24,477 \text{ mm}$$

Část průhybu způsobená posouvajícími silami je:

$$w_{a(V)} = \frac{1}{GA_x} \left[V_a \bar{V}_a L_{ab} + \frac{1}{2} \bar{V}_{b,p} (V_{b,p} + V_c) L_{bc} \right]$$

$$w_{a(V)} = \frac{1}{101,25 \cdot 10^6} \cdot \left[(-15 \cdot 10^3) \cdot (-1) \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot ((16,667 \cdot 10^3) + (-13,333 \cdot 10^3)) \cdot 6 \right]$$

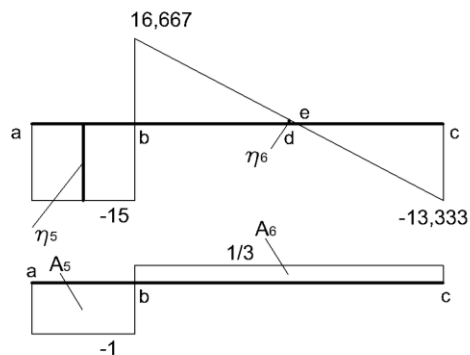
$$w_{a(V)} = 0,329 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,329 \text{ mm}$$

Nakonec se oba vlivy sečtou a získá se celkový průhyb.

$$w_a = w_{a(M)} + w_{a(V)} = 24,477 + 0,329 = 24,81 \text{ mm}$$

V

[N]

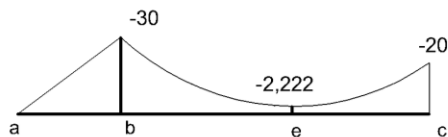


$\bar{V}$

[Nm]

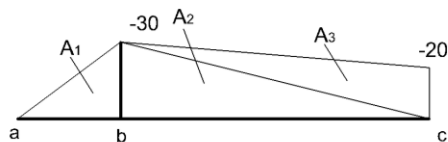
M

[kNm]



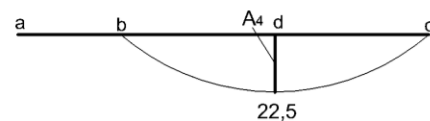
M₁

[kNm]



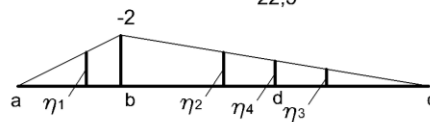
M₂

[kNm]



$\bar{M}$

[Nm]



Obr.: Schéma pro Vereščaginovo pravidlo

C) Výpočet průhybu v bodě a

Alternativní výpočet podle Vereščaginova pravidla:

$$\begin{aligned}
 w_a &= \frac{1}{EI} [A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + A_3 \eta_3 + A_4 \eta_4] + \frac{1}{GA_x} [A_5 \eta_5 + A_6 \eta_6] \\
 &= \frac{1}{4,496 \cdot 10^6} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot (-30) \cdot 2 \right) \left(\frac{2}{3} \cdot (-2) \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot (-30) \cdot 6 \right) + \left(\frac{2}{3} \cdot (-2) \right) \right] \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2} \cdot (-20) \cdot 6 \right) + \left(\frac{1}{3} \cdot (-2) \right) + \left(\frac{2}{3} \cdot 22,5 \cdot 6 \right) \left(\frac{1}{2} \cdot (-2) \right) \cdot 10^3 \\
 &\quad + \frac{1}{101,25 \cdot 10^6} \cdot \left[(-1) \cdot 2 \cdot (-15) + \left(\frac{1}{3} \cdot 6 \right) \cdot \left(\frac{16,667 + (-13,333)}{2} \right) \right] \cdot 10^3 \\
 &= 24,81 \cdot 10^3 \text{ m} = 24,81 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Svislý průhyb nosníku v bodě a je 24,81 mm. Vzhledem ke směru působení jednotkové síly odpovídá tento posunu směru dolů.