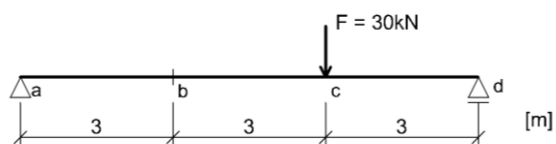


Obr.: Model konstrukce a zatížení

Zadání

Vypočtete svislý posun w_b a pootočení φ_b v bodě b na nosníku podle obrázku. Nosník je ocelový ($E = 210\text{ GPa}$), moment setrvačnosti je $21,4 \cdot 10^{-6}\text{ m}^4$ (I_{200}). Zanedbejte práci posouvajících sil.



Obr.: Model konstrukce a zatížení

Řešení

A) průběhy vnitřních sil od skutečného zatížení

V prvním kroku výpočtu se stanoví průběhy vnitřních sil (v tomto případě ohybových momentů M) od skutečného zatížení.

Určete svislé reakce (kladná nahoru):

$$R_a = (10) \text{ [kN]}$$

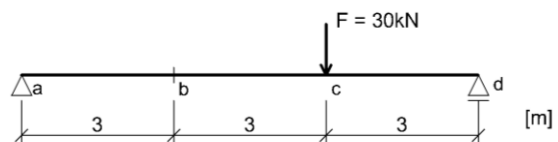
$$R_d = (20) \text{ [kN]}$$

Určete ohybové momenty:

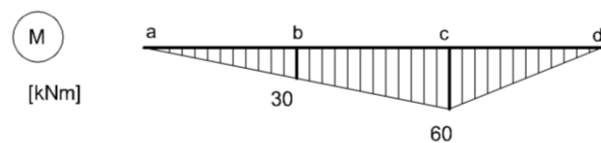
$$M_b = (30) \text{ [kNm]}$$

$$M_c = (60) \text{ [kNm]}$$

Nakreslete průběh ohybových momentů.



Obr.: Model konstrukce a zatížení



Obr.: Průběh ohybových momentů od původního zatížení

A) průběhy vnitřních sil od skutečného zatížení

Výpočet reakcí

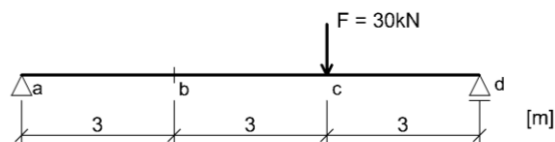
$$\sum M_{a,i} = 0 \quad -6F - 9R_d = 0 \quad R_d = 20 \text{ kN}$$

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad F - R_a - R_d = 0 \quad R_a = 10 \text{ kN}$$

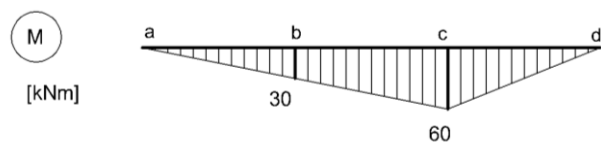
Ohybové momenty:

$$M_b = 3R_a = 30 \text{ kNm}$$

$$M_c = 3R_d = 60 \text{ kNm}$$



Obr.: Model konstrukce a zatížení



Obr.: Průběh Ohybových momentů od původního zatížení

B) průběhy vnitřních sil od fiktivního zatížení – výpočet přemístění

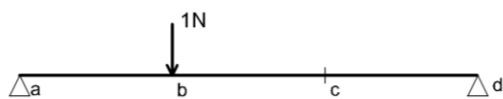
Ve druhé fázi se zatíží konstrukce jednotkovým impulsem v místě a směru hledaného přemístění. Volba kladných směrů impulsů určuje kladnou konvenci výsledných přemístění. Pro tyto impulsy se rovněž stanoví průběhy ohybových momentů $\bar{M}_w$ a $\bar{M}_\varphi$. Z Maxwell-Mohrova vzorce pro výpočet přemístění

$$\delta = \int_L \frac{N\bar{N}}{EA} ds + \int_L \frac{V\bar{V}}{GA_k} ds + \int_L \frac{M\bar{M}}{EI} ds + \int_L \bar{N}\alpha_t \Delta t_0 ds + \int_L \bar{M}\alpha_t \frac{\Delta t_1}{h} ds - \sum_r (\bar{R}_{rx} u_r + \bar{R}_{rz} w_r + \bar{M}_r \varphi_r)$$

se v obou případech použije pouze třetí integrál týkající ohybových momentů.

$$\delta = \int_L \frac{M\bar{M}}{EI} dx$$

Nakreslete nosník s fiktivním zatížením pro výpočet průhybu v bodě b .



Obr.: Jednotková svislá síla v bodě b

a) výpočet průhybu v bodě b

V prvním případě se hledá svislý posun bodu b – impuls tedy představuje svislá jednotková síla v bodě b .

Určete svislé reakce (kladná nahoru):

$$R_a = \frac{2}{3} \text{ [N]}$$

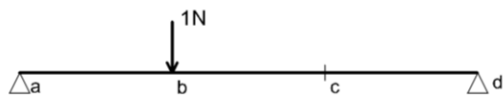
$$R_d = \frac{1}{3} \text{ [N]}$$

Určete ohybové momenty:

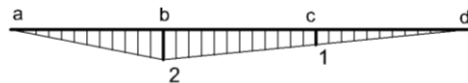
$$M_b = 2 \text{ [Nm]}$$

$$M_c = 1 \text{ [Nm]}$$

Nakreslete průběh ohybových momentů.



[Nm]



Obr.: Průběh ohybových momentů od jednotkové svislé síly v bodě *b*

Výpočet reakcí

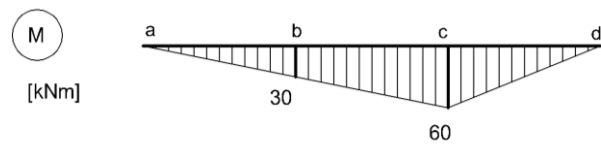
$$\sum M_{a,i} = 0 \quad -3 \cdot 1 - 9R_d = 0 \quad R_d = 2/3N$$

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad 1 - R_a - R_d = 0 \quad R_a = 1/3N$$

Ohybové momenty:

$$M_b = 3 \cdot R_a = 2Nm$$

$$M_c = 3 \cdot R_d = 1Nm$$



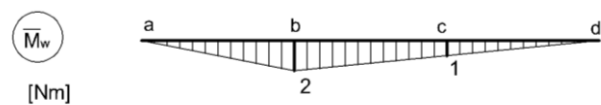
Obr.: Průběh Ohybových momentů od původního zatížení

Určete ohybovou tuhost:

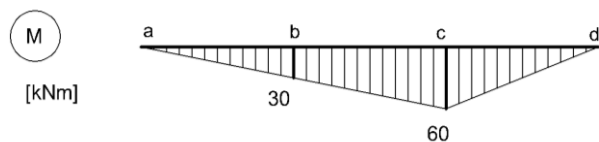
$$EI = (4,496 \cdot 10^6) \text{ Nm}^2$$

Určete průhyb v bodě b:

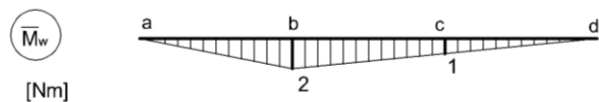
$$w_b = (0,070094) \text{ m}$$



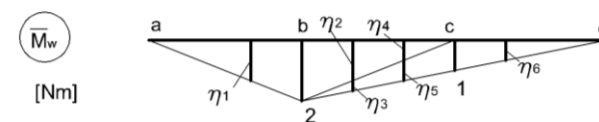
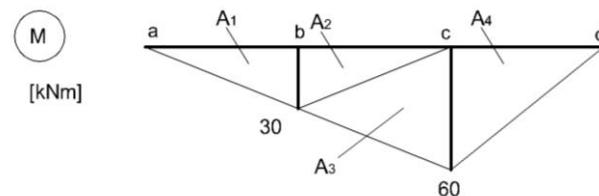
Obr.: Průběh ohybových momentů od jednotkové svislé síly v bodě b



Obr.: Průběh Ohybových momentů od původního zatížení



Obr.: Průběh ohybových momentů od jednotkové svislé síly v bodě b



Obr.: Schéma pro Vereščaginovo pravidlo

Ohybová tuhost:

$$EI = 210 \cdot 10^9 \cdot 21,4 \cdot 10^{-6} = 4,496 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2$$

Výpočet průhybu podle tabulek:

$$w_b = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} M_b \bar{M}_b L_{ab} + \frac{1}{6} (M_b (2\bar{M}_b + \bar{M}_c) + M_c (\bar{M}_b + 2\bar{M}_c)) L_{bc} + \frac{1}{3} M_c \bar{M}_c L_{cd} \right]$$

$$w_b = \frac{1}{4,496 \cdot 10^6} \cdot \left[\frac{1}{3} 30 \cdot 2 \cdot 3 + \frac{1}{6} (30 \cdot (2 \cdot 2 + 1) + 60 \cdot (2 + 2 \cdot 1)) \cdot 3 + \frac{1}{3} 60 \cdot 1 \cdot 3 \right] \cdot 10^3 = 0,070094 \text{ m}$$

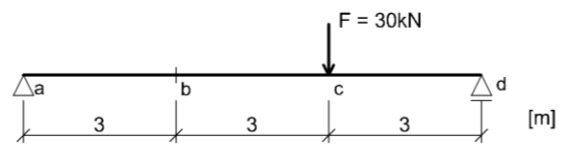
Alternativní výpočet podle Vereščaginova pravidla:

$$w_b = \frac{1}{EI} [A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + A_3 \eta_3 + A_4 \eta_4 + A_5 \eta_5 + A_6 \eta_6]$$

$$w_b = \frac{1}{4,496 \cdot 10^6} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} 30 \cdot 3 \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2 \right) + \left(\frac{1}{2} 30 \cdot 3 \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2 \right) + \left(\frac{1}{2} 30 \cdot 3 \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \left(\frac{1}{2} 60 \cdot 3 \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \left(\frac{1}{2} 60 \cdot 3 \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \left(\frac{1}{2} 60 \cdot 3 \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 \right) \right] \cdot 10^3 = 0,070062 \text{ m}$$

$$w_b = 0,070062 \text{ m} = 70,062 \text{ mm}$$

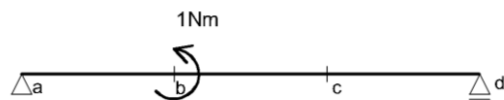
Svislý průhyb nosníku v bodě b je 70,062 mm. Nosník se prohne dolů.



Obr.: Model konstrukce a zatížení

b) výpočet pootočení osy prutu v bodě b

Nakreslete nosník zatížený fiktivním zatížením pro výpočet pootočení bodu b.



Obr.: Jednotkový moment v bodě b

b) výpočet pootočení osy prutu v bodě b

Ve druhém případě se hledá pootočení bodu b – impuls tedy představuje jednotkový moment v bodě b .

Určete svislé reakce (kladná nahoru):

$$R_a = (1/9) \text{ [kN]}$$

$$R_d = (-1/9) \text{ [kN]}$$

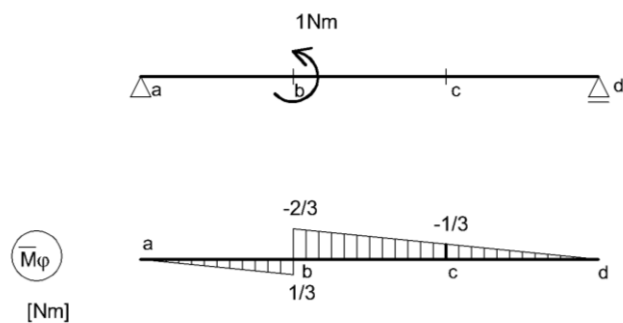
Určete ohybové momenty:

$$M_{b,L} = (1/3) \text{ [Nm]}$$

$$M_{b,P} = (-2/3) \text{ [Nm]}$$

$$M_c = (-1/3) \text{ [Nm]}$$

Nakreslete průběh ohybových momentů pro fiktivní zatížení.



Obr.: Průběh ohybových momentů od jednotkového momentu v bodě *b*

Výpočet reakcí

$$\sum M_{a,i} = 0 \quad -1 - 9R_d = 0 \quad R_d = -1/9N$$

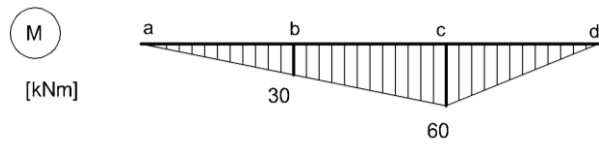
$$\sum F_{z,i} = 0 \quad -R_a - R_d = 0 \quad R_a = 1/9N$$

Ohybové momenty:

$$M_{b,L} = 3R_a = 1/3Nm$$

$$M_{b,P} = 6R_d = -2/3Nm$$

$$M_c = 3R_d = -1/3Nm$$



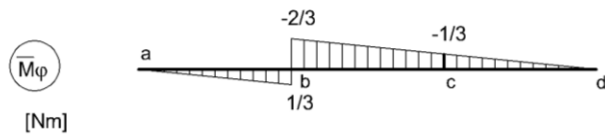
Obr.: Průběh Ohybových momentů od původního zatížení

Určete ohybovou tuhost

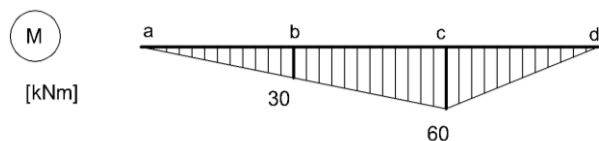
$$EI = (4,496 \cdot 10^6) \text{ Nm}^2$$

Určete pootočení v bodě b

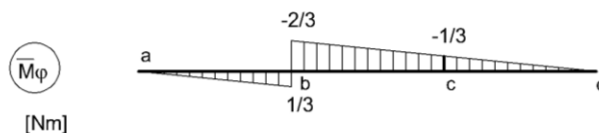
$$\varphi_b = (-0,01668) [-]$$



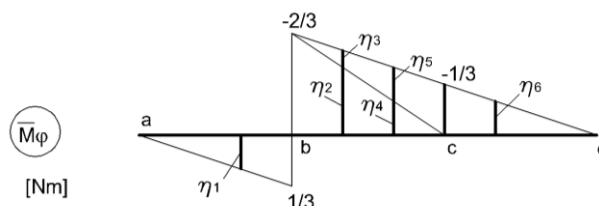
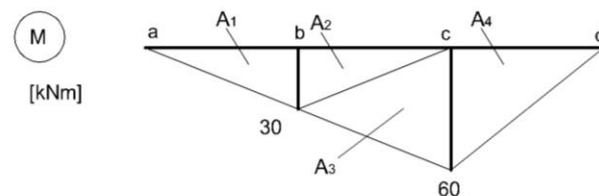
Obr.: Průběh ohybových momentů od jednotkového momentu v bodě b



Obr.: Průběh Ohybových momentů od původního zatížení



Obr.: Průběh ohybových momentů od jednotkového momentu v bodě b



Obr.: Schéma pro Vereščaginovo pravidlo

Ohybová tuhost

$$EI = 210 \cdot 10^9 \cdot 21,4 \cdot 10^{-6} = 4,496 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2$$

Pootočení v bodě b

Výpočet podle tabulek:

$$\begin{aligned} \varphi_b &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} M_b \bar{M}_b L_{ab} + \frac{1}{6} \left(M_b (2\bar{M}_b + \bar{M}_c) + M_c (\bar{M}_b + 2\bar{M}_c) \right) L_{bc} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} M_c \bar{M}_c L_{cd} \right] \\ \varphi_b &= \frac{1}{4,496 \cdot 10^6} \cdot \left[\frac{1}{3} 30 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \cdot \left(30 \cdot 10^3 \cdot \left(2 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) + \left(-\frac{1}{3} \right) \right) + 60 \cdot 10^3 \cdot \left(-\frac{2}{3} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \right) \right) \cdot 3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} 60 \cdot 10^3 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot 3 \right] = -0,01668 \end{aligned}$$

Alternativní výpočet podle Vereščaginova pravidla:

$$\begin{aligned} \varphi_b &= \frac{1}{EI} [A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + A_2 \eta_3 + A_3 \eta_4 + A_3 \eta_5 + A_4 \eta_6] \\ \varphi_b &= \frac{1}{4,496 \cdot 10^6} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} 30 \cdot 3 \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} 30 \cdot 3 \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) \right) + \left(\frac{1}{2} 30 \cdot 3 \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \right) + \left(\frac{1}{2} 60 \cdot 3 \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} 60 \cdot 3 \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \right) + \left(\frac{1}{2} 60 \cdot 3 \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \right) \right] \cdot 10^3 = -0,01668 \end{aligned}$$

Pootočení nosníku v bodě b je -0,01668. Vzhledem k předpokládanému kladnému pootočení proti směru hodinových ručiček, skutečné pootočení osy prutu je po směru hodinových ručiček.