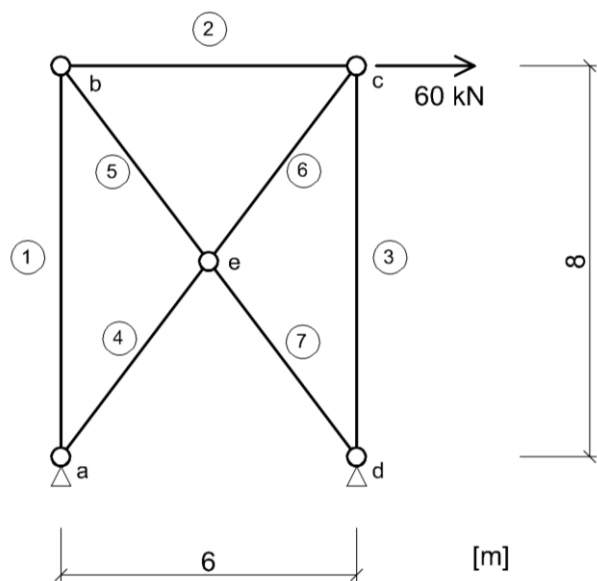




Obr.: Model konstrukce a zatížení

Příklad č. 14 – Staticky neurčitá příhradová konstrukce

Zadání

Vypočtěte normálové síly na staticky neurčitě příhradové konstrukci podle obrázku. Použijte silovou metodu. Průřezové charakteristiky jsou konstantní po celé konstrukci.

Řešení

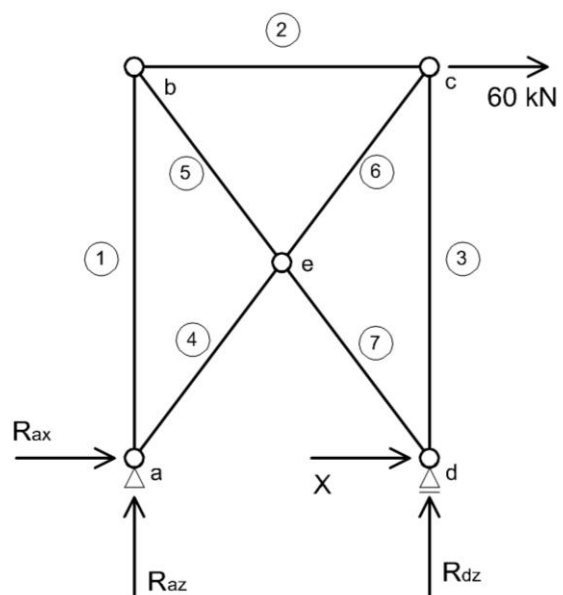
Směrové sinu a kosinu odklonu šikmých prutů od vodorovné osy x:

$$\sin \alpha = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$\cos \alpha = \frac{6}{10} = 0,6$$

Základní staticky určitá soustava vznikne odebráním vazby proti vodorovnému posunu v pravé podpoře.

Nakreslete základní staticky určitou soustavu, s jejím zatížením a doplňkovou podmínkou.



Obr. : Základní staticky určitá soustava - reakce

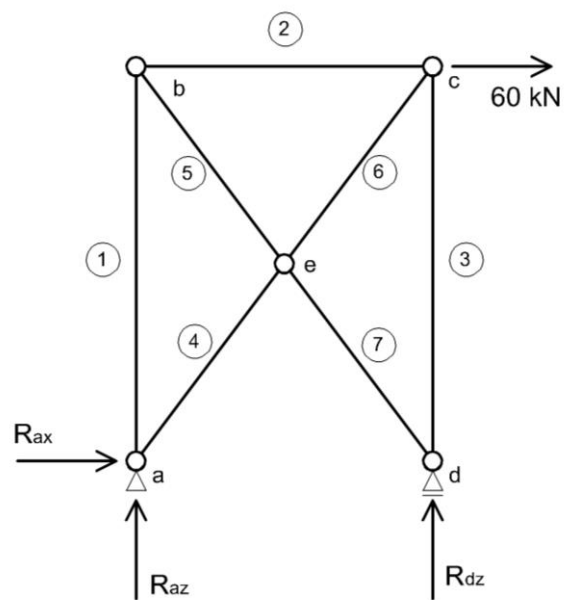
Doplňková podmínka pro základní staticky určitou soustavu předepisuje nulový vodorovný posun pravé podpory:

$$u_d = \delta_1 = 0$$

Zatížení základní soustavy se rozdělí do dvou zatěžovacích stavů.

Nultý zatěžovací stav bude představovat původní zatížení konstrukce a první zatěžovací stav zatížení neznámou silou X.

Nakreslete konstrukci zatíženou nultým zatěžovacím stavem.



Zatěžovací stav 0: Původní zatížení

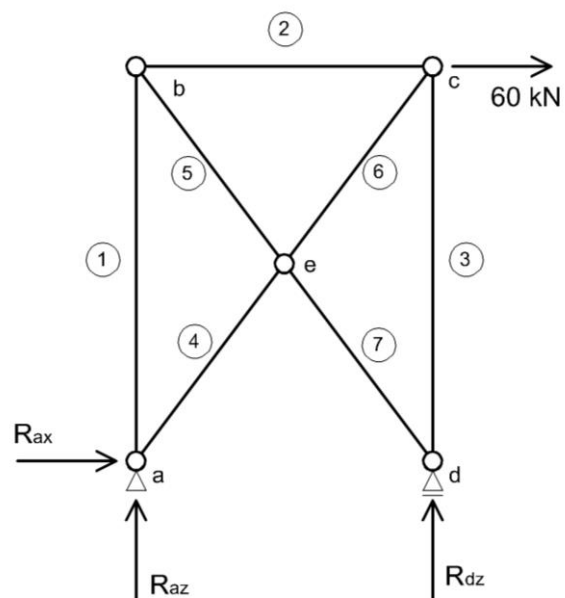
Určete reakce:

$$R_{a,x} = (-60)[\text{kN}]$$

$$R_{a,z} = (-80)[\text{kN}]$$

$$R_{d,z} = (80)[\text{kN}]$$

Obr.: Původní zatížení základní soustavy - reakce



Obr.: Původní zatížení základní soustavy - reakce

Zatěžovací stav 0: Původní zatížení

Reakce:

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad F + R_{a,x} = 0 \quad 60 + R_{a,x} = 0$$

$$R_{a,x} = -60 \text{ kN}$$

$$\sum M_{a,i} = 0 \quad F \cdot 8 - 6 \cdot R_{d,z} = 0 \quad 60 \cdot 8 - 6 \cdot R_{d,z} = 0$$

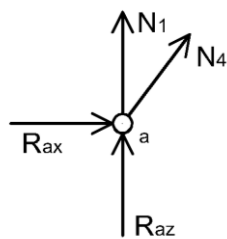
$$R_{d,z} = 80 \text{ kN}$$

$$\sum M_{d,i} = 0 \quad -F \cdot 8 + 6 \cdot R_{a,z} = 0 \quad -60 \cdot 8 + 6 \cdot R_{a,z} = 0$$

$$R_{a,z} = -80 \text{ kN}$$

V dalším kroku se budou řešit vnitřní síly v prutech konstrukce styčnickovou metodou.

Nakreslete statické schéma pro styčník a.



Obr.: Statické schéma pro styčník a

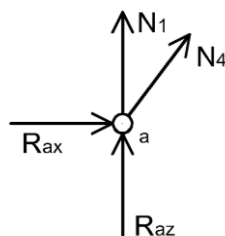
Styčník a

Určete síly v prutech:

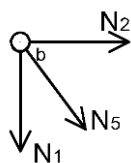
$$N_4 = (100) [\text{kN}]$$

$$N_1 = (0) [\text{kN}]$$

Nakreslete statické schéma styčníku b.



Obr.: Statické schéma pro styčník a



Obr.: Statické schéma pro styčník b

Styčník a

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad R_{a,x} + N_4 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$-60 + N_4 \cdot 0,6 = 0 \quad N_4 = 100 \text{ kN}$$

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad -R_{a,z} - N_1 - N_4 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$80 - N_1 - 100 \cdot 0,8 = 0 \quad N_1 = 0 \text{ kN}$$

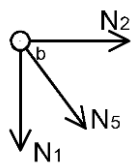
Styčník b

Určete síly v prutech:

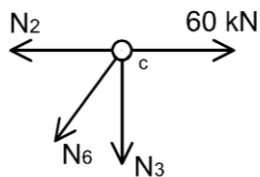
$$N_5 = (0) [\text{kN}]$$

$$N_2 = (0) [\text{kN}]$$

Nakreslete statické schéma styčníku c.



Obr.: Statické schéma pro styčník b



Obr.: Statické schéma pro styčník c

Styčník b

$$\sum F_{z,i} = 0$$

$$N_1 + N_5 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$0 + N_5 \cdot 0,8 = 0$$

$$N_5 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_{x,i} = 0$$

$$N_2 + N_5 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$N_2 + 0,6 = 0$$

$$N_2 = 0 \text{ kN}$$

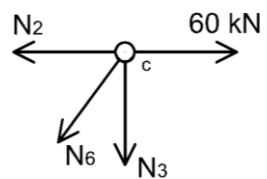
Styčník c

Určete síly v prutech:

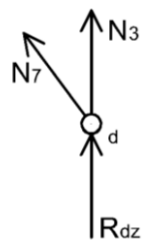
$$N_6 = (100) \text{ [kN]}$$

$$N_3 = (-80) \text{ [kN]}$$

Nakreslete statické schéma styčníku d.



Obr.: Statické schéma pro styčník c



Obr.: Statické schéma pro styčník d

Styčník c

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad F_2 - N_2 - N_6 \cdot \cos \alpha = 0 \quad 60 + 0 - N_6 \cdot 0,6 = 0$$

$$N_6 = 100 \text{ kN}$$

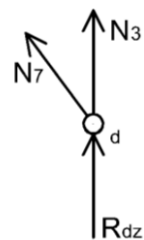
$$\sum F_{z,i} = 0 \quad N_3 + N_6 \cdot \sin \alpha = 0 \quad N_3 + 100 \cdot 0,8 = 0$$

$$N_3 = -80 \text{ kN}$$

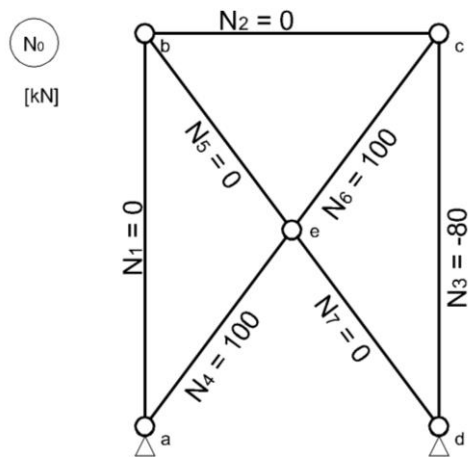
Styčník d

Určete síly v prutech:

$$N_7 = \textcolor{teal}{0} [\text{kN}]$$



Obr.: Statické schéma pro styčník d

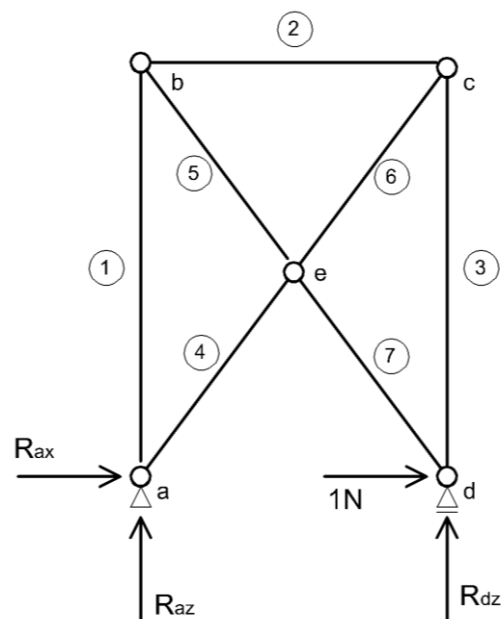


Obr.: Původní zatížení základní soustavy – normálové síly

Styčník d

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad N_7 \cdot \cos \alpha = 0 \quad N_7 = 0 \text{ kN}$$

Nakreslete konstrukci zatíženou prvním zatěžovacím stavem - zatížení jednotkovou silou ve směru X.



Zatěžovací stav 1: Jednotková síla ve směru neznámé síly X

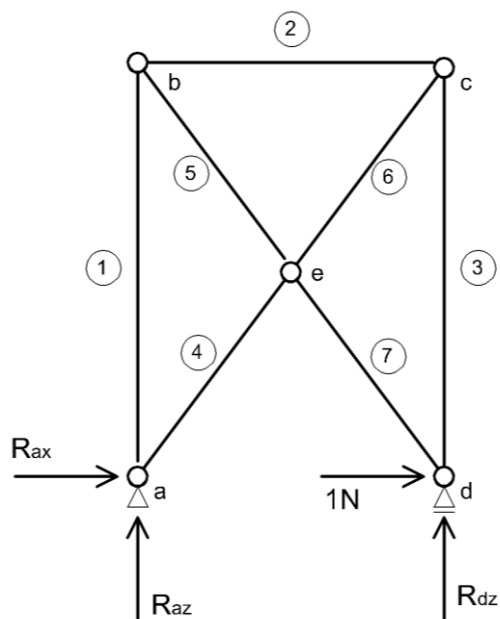
Určete reakce:

$$R_{a,x} = (-1)[N]$$

$$R_{a,z} = (0)[N]$$

$$R_{d,z} = (0)[N]$$

Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X

Zatěžovací stav 1 – Jednotková síla ve směru neznámé síly X

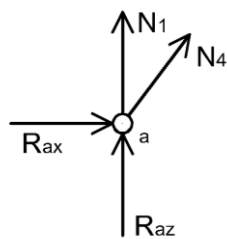
Reakce:

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad 1 + R_{a,x} = 0 \quad R_{a,x} = -1N$$

$$\sum M_{a,i} = 0 \quad -6R_{d,z} = 0 \quad R_{d,z} = 0N$$

$$\sum M_{d,i} = 0 \quad 0 + 6R_{a,z} = 0 \quad R_{a,z} = 0kN$$

Nakreslete statické schéma pro styčník a.



Obr.: Statické schéma pro styčník a

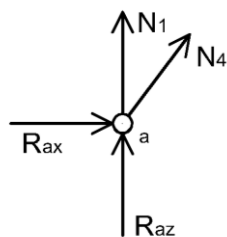
Styčník a

Určete síly v prutech:

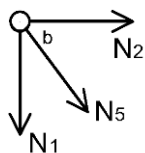
$$N_4 = (1,667)[\text{N}]$$

$$N_1 = (-1,3333)[\text{N}]$$

Nakreslete statické schéma styčníku b.



Obr.: Statické schéma pro styčník a



Obr.: Statické schéma pro styčník b

Styčník a

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad R_{a,x} + N_4 \cdot \cos \alpha = 0 \quad -1 + N_4 \cdot 0,6 = 0$$

$$N_4 = 1,6667N$$

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad -R_{a,z} - N_1 - N_4 \cdot \sin \alpha = 0 \quad 0 - N_1 - 1,6667 \cdot 0,8 = 0$$

$$N_1 = -1,3333N$$

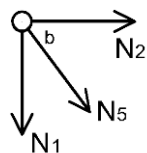
Styčník b

Určete síly v prutech:

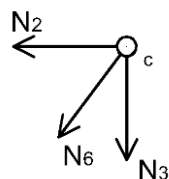
$$N_5 = (1,667)[N]$$

$$N_2 = (-1)[N]$$

Nakreslete statické schéma styčníku c.



Obr.: Statické schéma pro styčník b



Obr.: Statické schéma pro styčník c

Styčník b

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad N_1 + N_5 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$-1,3333 + N_5 \cdot 0,8 = 0$$

$$N_5 = 1,6667N$$

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad N_2 + N_5 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$N_2 + 1,6667 \cdot 0,6 = 0$$

$$N_2 = -1N$$

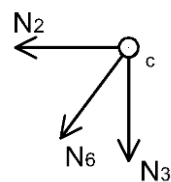
Styčník c

Určete síly v prutech:

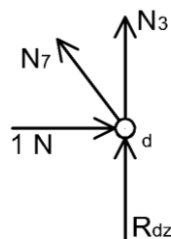
$$N_6 = (1,6667)[N]$$

$$N_3 = (-1,3333)[N]$$

Nakreslete statické schéma styčníku d.



Obr.: Statické schéma pro styčník c



Obr.: Statické schéma pro styčník d

Styčník c

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad -N_2 - N_6 \cdot \cos \alpha = 0 \quad 1 - N_6 \cdot 0,6 = 0$$

$$N_6 = 1,6667N$$

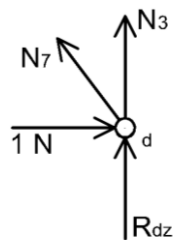
$$\sum F_{z,i} = 0 \quad N_3 + N_6 \cdot \sin \alpha = 0 \quad N_3 + 1,6667 \cdot 0,8 = 0$$

$$N_3 = -1,3333N$$

Styčník d

Určete síly v prutech:

$$N_7 = (1,6667)[N]$$

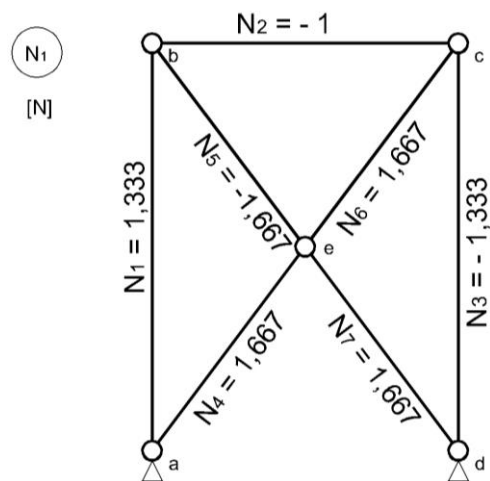


Styčnick d

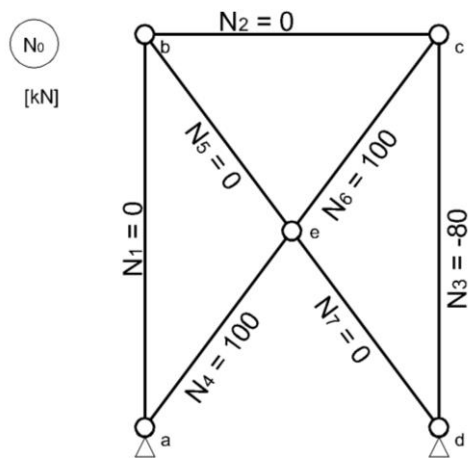
$$\sum F_{x,i} = 0 \quad 1 - N_7 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$1 - N_7 \cdot 0,8 = 0 \quad N_7 = 1,6667$$

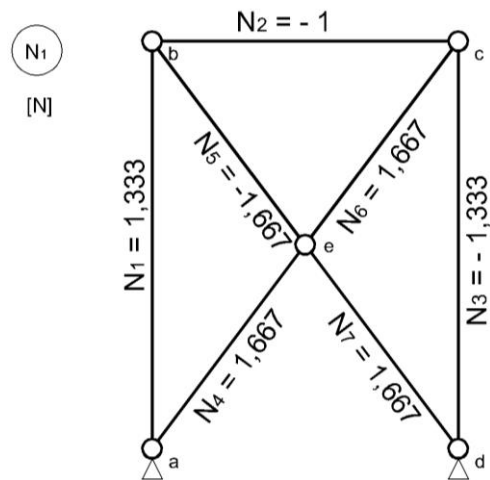
Obr.: Statické schéma pro styčnick d



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X – normálové síly



Obr.: Původní zatížení základní soustavy – normálové síly



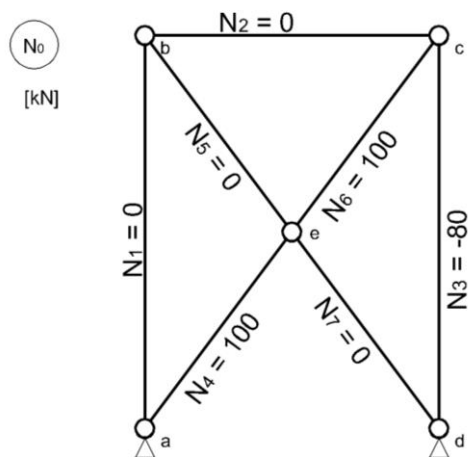
Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X – normálové síly

Výpočet vodorovného posunu v bodě d

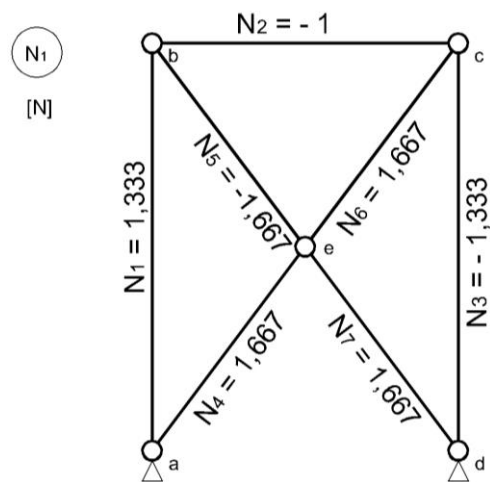
Určete vodorovný posun bodu d způsobený původním zatížením a jednotkovou silou ve směru X :

$$\delta_{10} = (2520000) EA$$

$$\delta_{11} = (90) EA$$



Obr.: Původní zatížení základní soustavy – normálové síly



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X – normálové síly

Výpočet vodorovného posunu v bodě d

Posuny se budou počítat metodou jednotkových sil podle vzorce

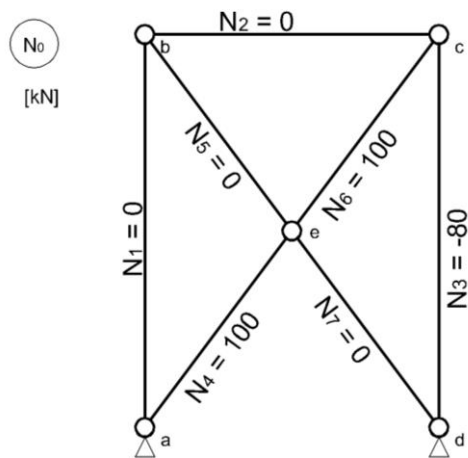
$$\delta = \int_0^s \frac{N \bar{N}}{EA} ds = \sum \frac{1}{E_i A_i} N_i N'_i L_i$$

Výpočet je provedena následující tabulkou

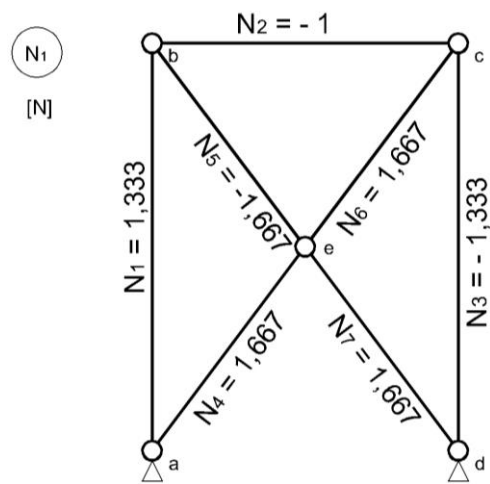
Přut číslo	N ₀	N ₁	Délka	E.A.δ ₁₀	E.A.δ ₁₁
1	0	-1,333	8	0	14,222
2	0	-1	6	0	6,000
3	-80000	-1,333	8	853333	14,222
4	100000	1,667	5	833333	13,889
5	0	1,667	5	0	13,889
6	100000	1,667	5	833333	13,889
7	0	1,667	5	0	13,889
Σ				2520000	90,000

Sestavte kanonickou rovnici – deformační podmínku pro vodorovný posun bodu d a určete velikost síly X.

$$X = (-28) [\text{kN}]$$



Obr.: Původní zatížení základní soustavy – normálové síly



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X – normálové síly

Kanonická rovnice – deformační podmínka pro vodorovný posun bodu d

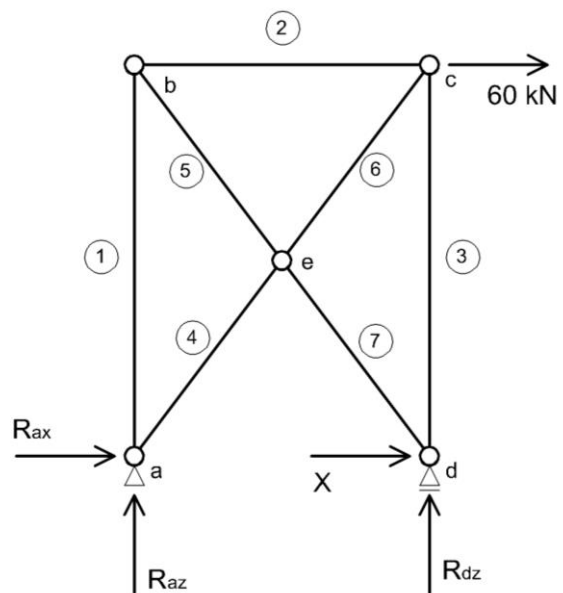
$$\delta_{10} + \delta_{11}X = 0$$

$$2520000 + 90 \cdot X_1 = 0$$

Řešení

$$X = -28000N = -28kN$$

Nakreslete základní soustavu zatíženou původním zatížením a silou X .



Obr.: Výsledné zatížení základní soustavy – reakce

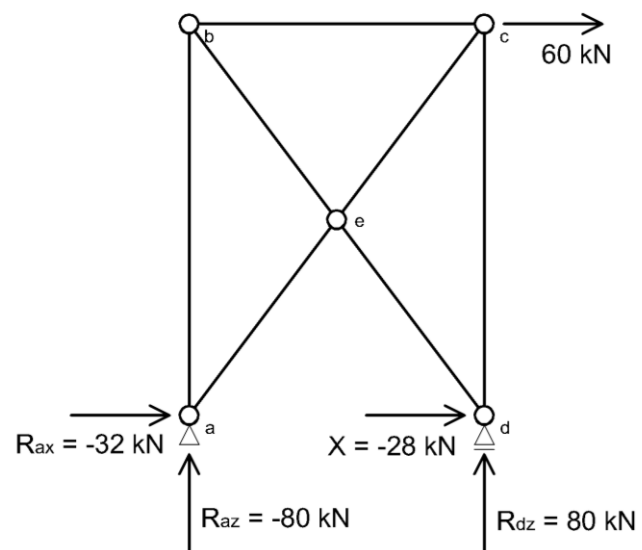
Výpočet výsledných vnitřních sil na konstrukci: základní soustava je zatížena původním zatížením a silou X

Určete reakce:

$$R_{a,x} = (-32)[\text{kN}]$$

$$R_{a,z} = (-80)[\text{kN}]$$

$$R_{d,z} = (80)[\text{kN}]$$



Obr.: Výsledné zatížení základní soustavy – reakce

Reakce:

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad F + R_{a,x} + X_1 = 0 \quad 60 + R_{a,x} - 28 = 0$$

$$R_{a,x} = -32 \text{ kN}$$

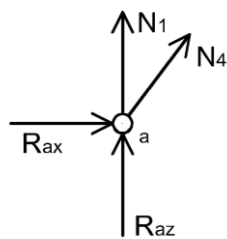
$$\sum M_{a,i} = 0 \quad -F \cdot 8 - 6 \cdot R_{d,z} = 0 \quad -60 \cdot 8 - 6 \cdot R_{d,z} = 0$$

$$R_{d,z} = 80 \text{ kN}$$

$$\sum M_{d,i} = 0 \quad -F_1 \cdot 8 - F_2 \cdot 0.8 + 6R_{a,z} = 0 \quad -50 \cdot 8 - 60 \cdot 0.8 + 6R_{a,z} = 0$$

$$R_{a,z} = -80 \text{ kN}$$

Nakreslete statické schéma pro styčník a.



Obr.: Statické schéma pro styčník a

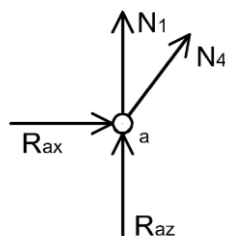
Styčník a

Určete síly v prutech:

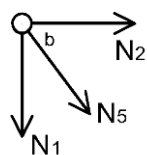
$$N_4 = (53,333) [\text{kN}]$$

$$N_1 = (37,333) [\text{kN}]$$

Nakreslete statické schéma styčníku b.



Obr.: Statické schéma pro styčník a



Obr.: Statické schéma pro styčník b

Styčník a

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad R_{a,x} + N_4 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$-32 + N_4 \cdot 0,6 = 0 \quad N_4 = 53,333 \text{ kN}$$

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad -R_{a,z} - N_1 - N_4 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$80 - N_1 - 53,333 \cdot 0,8 = 0 \quad N_1 = 37,333 \text{ kN}$$

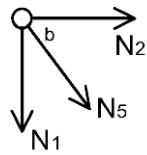
Styčník b

Určete síly v prutech:

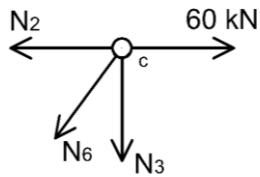
$$N_5 = (-46,667) \text{ [kN]}$$

$$N_2 = (28) \text{ [kN]}$$

Nakreslete statické schéma styčníku c.



Obr.: Statické schéma pro styčník b



Obr.: Statické schéma pro styčník c

Styčník b

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad N_1 + N_5 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$37,333 + N_5 \cdot 0,8 = 0$$

$$N_5 = -46,667 \text{ kN}$$

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad N_2 + N_5 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$N_2 - 46,667 \cdot 0,6 = 0$$

$$N_2 = 28 \text{ kN}$$

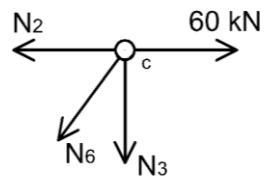
Styčník c

Určete síly v prutech:

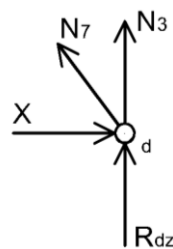
$$N_6 = (53,333) [\text{kN}]$$

$$N_3 = (-42,667) [\text{kN}]$$

Nakreslete statické schéma styčníku d.



Obr.: Statické schéma pro styčník c



Obr.: Statické schéma pro styčník d

Styčník c

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad F - N_2 - N_6 \cdot \cos \alpha = 0 \quad 60 - 28 - N_6 \cdot 0,6 = 0$$

$$N_6 = 53,333 \text{ kN}$$

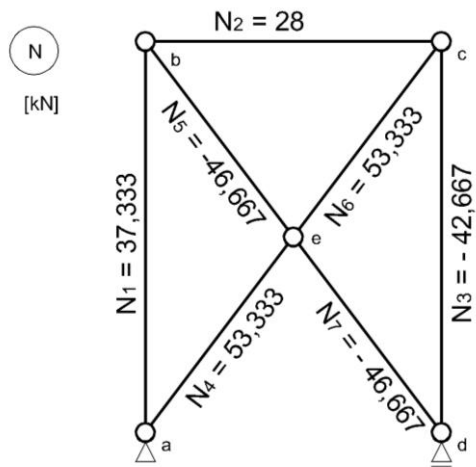
$$\sum F_{z,i} = 0 \quad N_3 + N_6 \cdot \sin \alpha = 0 \quad N_3 + 53,333 \cdot 0,8 = 0$$

$$N_3 = -42,667 \text{ kN}$$

Styčník d

Určete síly v prutech:

$$N_7 = (-46,667) [\text{kN}]$$



Obr.: Výsledné normálové síly v konstrukci

Styčnick d

$$\sum F_{z,i} = 0 \quad N_3 + R_{d,z} + N_7 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$-42,667 + 80 + N_7 \cdot 0,8 = 0 \quad N_7 = -46,667 \text{ kN}$$