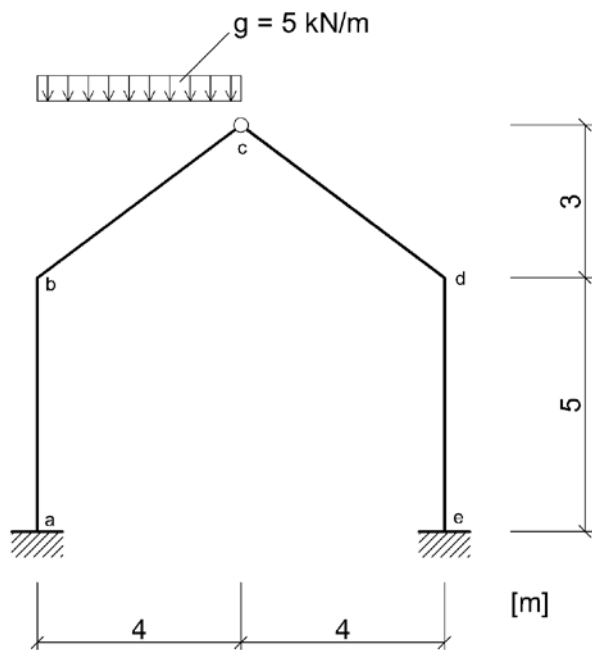




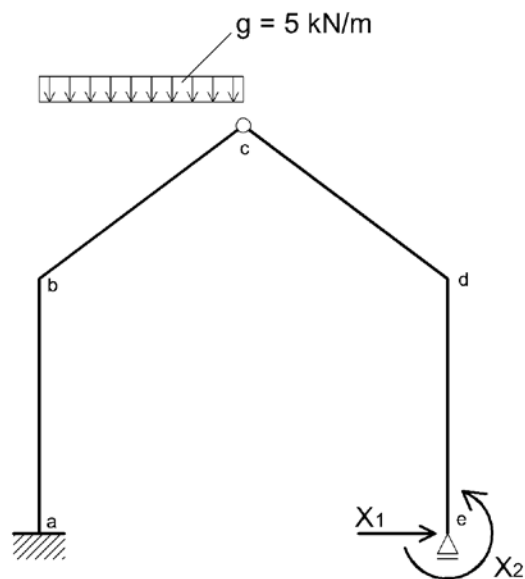
Obr.: Model konstrukce a zatížení

### Zadání

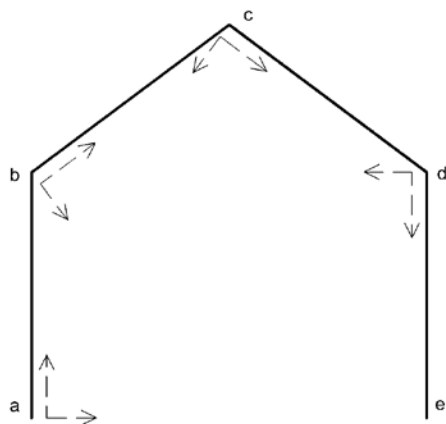
Vykreslete průběhy vnitřních sil na staticky neurčité konstrukci podle obrázku. Použijte silovou metodu. Zanedbejte práci normálových a posouvajících sil. Průřezové charakteristiky jsou konstantní na celé konstrukci.

### Řešení

Konstrukce bude řešena silovou metodou. Konstrukce je dvakrát staticky neurčitá.



Obr.: Základní staticky určitá soustava



Obr.: Lokální souřadné systémy prutů

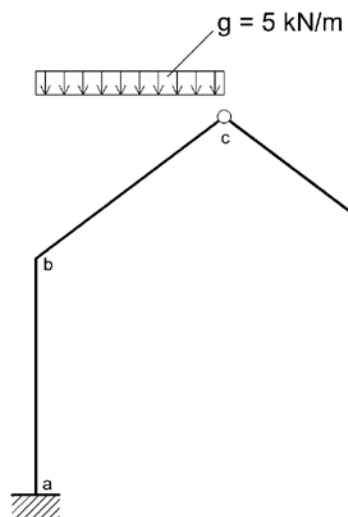
#### a) základní soustava vznikne odebráním vnějších vazeb

Základní soustava se vytvoří odebráním vazby proti vodorovnému posunu v bodě  $e$  a vazby proti pootočení v bodě  $e$ . Neznámá síla  $X_1$  bude představovat vodorovnou reakci v bodě  $e$  a neznámá síla  $X_2$  bude představovat momentovou reakci v bodě  $e$ . Deformační podmínky budou předepisovat nulový vodorovný posun v bodě  $e$  a nulové pootočení v bodě  $e$ .

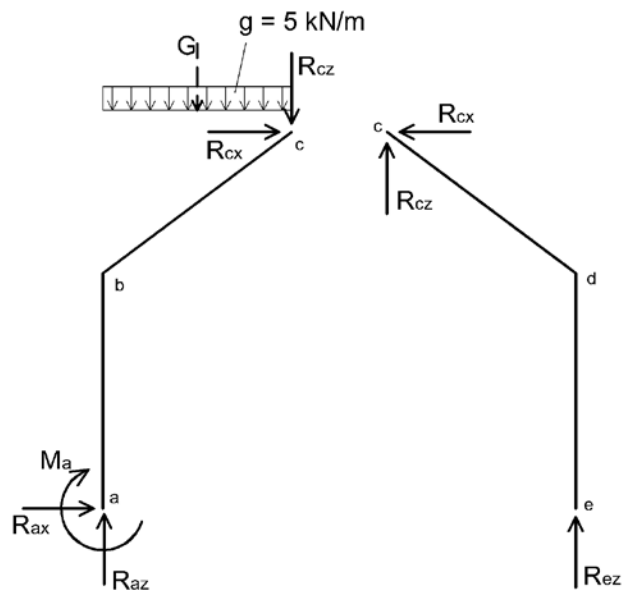
$$u_e = \delta_1 = 0$$

$$\varphi_e = \delta_2 = 0$$

Základní soustava se zatíží třemi zatěžovacími stavy.



Obr.: Původní zatížení základní soustavy



Obr.: Původní zatížení základní soustavy – reakce vnitřních a vnějších vazeb

### Zatěžovací stav 0: Původní zatížení

Určete náhradní břemeno:

$$G = g \cdot 4 = 20 \text{ kN } (20) [\text{kN}]$$

Určete reakce vazeb:

$$R_{cx} = 0 \text{ kN } (0) [\text{kN}]$$

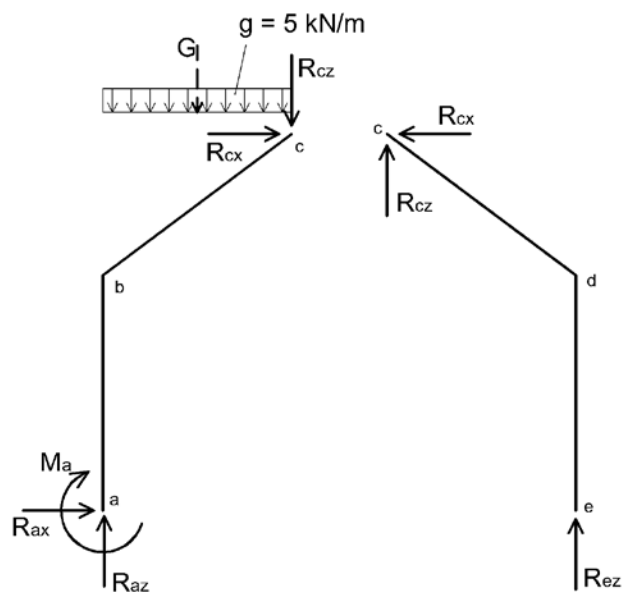
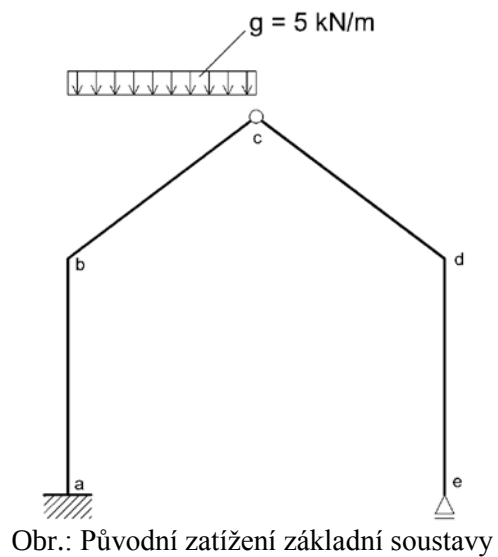
$$R_{ez} = 0 \text{ kN } (0) [\text{kN}]$$

$$R_{cz} = 0 \text{ kN } (0) [\text{kN}]$$

$$R_{ax} = 0 \text{ kN } (0) [\text{kN}]$$

$$R_{az} = 20 \text{ kN } (20) [\text{kN}]$$

$$M_a = -40 \text{ kNm } (-40) [\text{kN}]$$



Obr.: Původní zatížení základní soustavy – reakce vnitřních a vnějších vazeb

### Zatěžovací stav 0: Původní zatížení

Náhradní břemeno:

$$G = g \cdot 4 = 20 \text{ kN}$$

Reakce vazeb

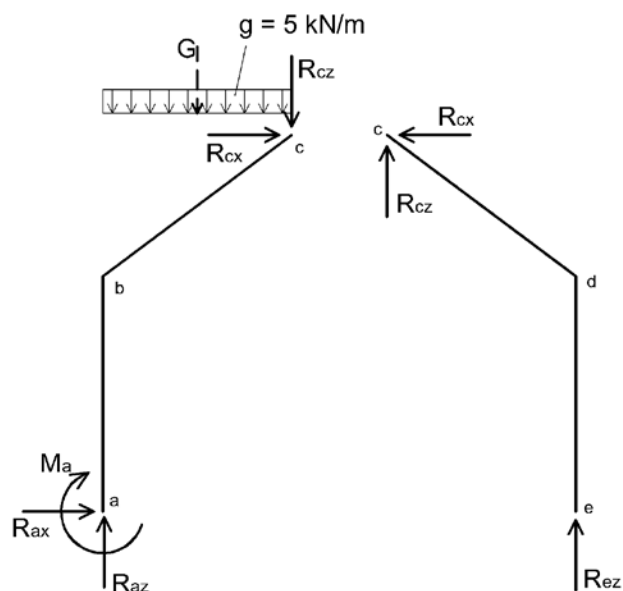
Podmínky rovnováhy se napíší nejdříve na pravé části konstrukce, která je nesená a pak se pokračuje na levé-nesoucí části.

$$\begin{aligned} \sum F_{x,i}^P &= 0 & R_{cx} &= 0 & R_{cx} &= 0 \text{ kN} \\ \sum M_{c,i}^P &= 0 & R_{ez} \cdot 4 &= 0 & R_{ez} &= 0 \text{ kN} \\ \sum F_{z,i}^P &= 0 & R_{ez} + R_{cz} &= 0 & R_{cz} &= 0 \text{ kN} \\ \sum F_{x,i}^L &= 0 & R_{cx} + R_{ax} &= 0 & R_{ax} &= 0 \text{ kN} \\ \sum F_{z,i}^L &= 0 & R_{az} - R_{cz} - G &= 0 & R_{az} &= 20 \text{ kN} \\ \sum M_{a,i}^L &= 0 & M_a + R_{cz} \cdot 4 + R_{cx} \cdot 8 + G \cdot 2 &= 0 & M_a &= -40 \text{ kNm} \end{aligned}$$

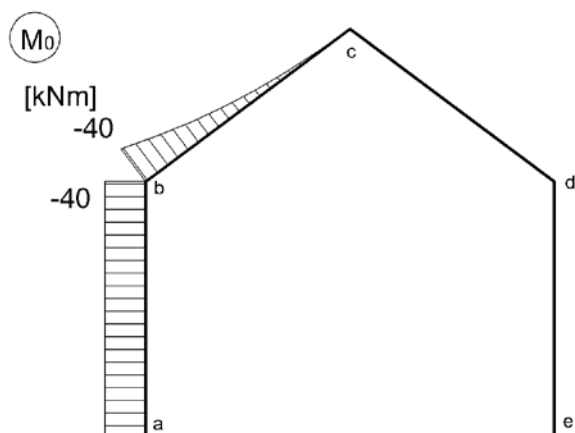
Určete ohybový moment:

$$M_b = (-40) [\text{kNm}]$$

Vykreslete průběhy ohybových momentů.



Obr.: Původní zatížení základní soustavy – reakce vnitřních a vnějších vazeb



Obr.: Původní zatížení základní soustavy – ohybové momenty

### Zatěžovací stav 0: Původní zatížení

Náhradní břemeno:

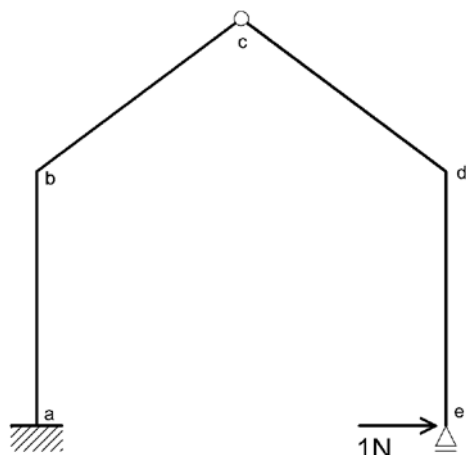
$$G = g \cdot 4 = 20 \text{ kN}$$

Reakce vazeb

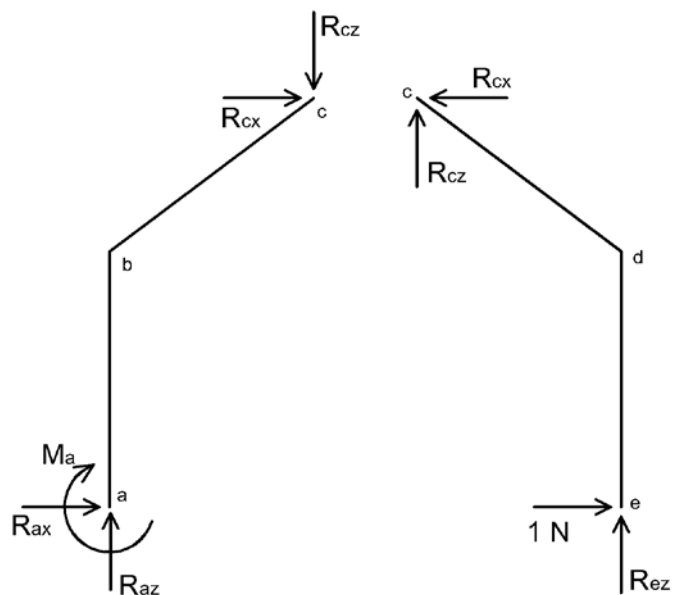
$$\begin{aligned} \sum F_{x,i}^P &= 0 & R_{cx} &= 0 & R_{cx} &= 0 \text{ kN} \\ \sum M_{c,i}^P &= 0 & R_{ez} \cdot 4 &= 0 & R_{ez} &= 0 \text{ kN} \\ \sum F_{z,i}^P &= 0 & R_{ez} + R_{cz} &= 0 & R_{cz} &= 0 \text{ kN} \\ \sum F_{x,i}^L &= 0 & R_{cx} + R_{ax} &= 0 & R_{ax} &= 0 \text{ kN} \\ \sum F_{z,i}^L &= 0 & R_{az} - R_{cz} - G &= 0 & R_{az} &= 20 \text{ kN} \\ \sum M_{a,i}^P &= 0 & M_a + R_{cz} \cdot 4 + R_{cx} \cdot 8 + G \cdot 2 &= 0 & M_a &= -40 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Ohybový moment:

$$M_b = M_a - 5 \cdot R_{ax} = -40 \text{ kNm}$$



Obr: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru  $X_1$



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru  $X_1$  – reakce vnějších a vnitřních vazeb

Zatěžovací stav 1: Jednotková síla ve směru neznámé síly  $X_1$

Určete reakce vazeb:

$$R_{cx} = (1)[N]$$

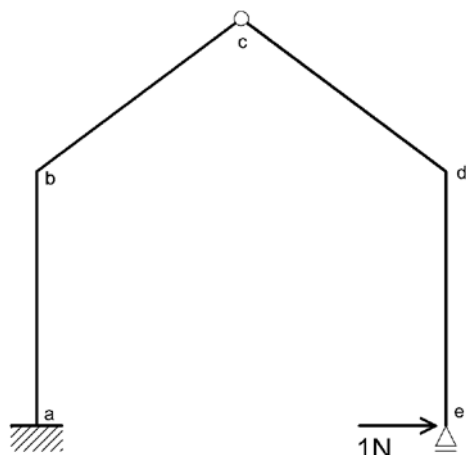
$$R_{ez} = (-2)[N]$$

$$R_{cz} = (2)[N]$$

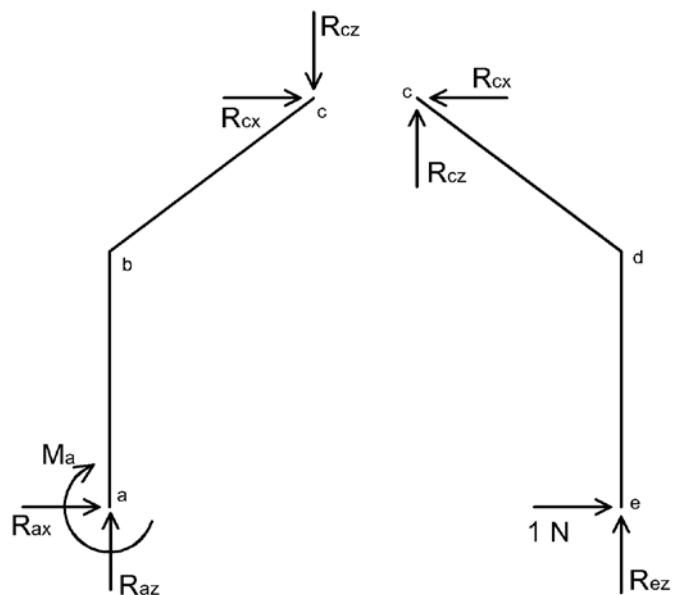
$$R_{ax} = (-1)[N]$$

$$R_{az} = (2)[N]$$

$$M_a = (-16)[Nm]$$



Obr: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru  $X_1$



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru  $X_1$  – reakce vnějších a vnitřních vazeb

### Zatěžovací stav 1: Jednotková síla ve směru neznámé síly $X_1$

Reakce vazeb:

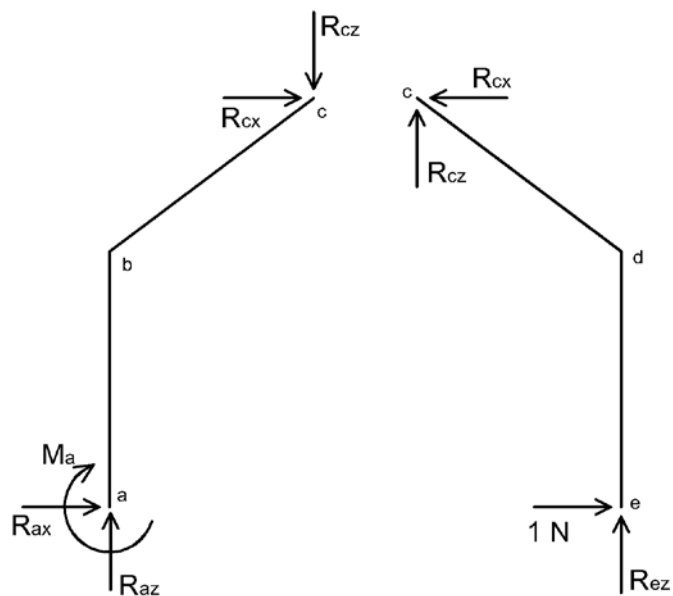
$$\begin{aligned} \sum F_{x,i}^P &= 0 & R_{cx} - 1 &= 0 & R_{cx} &= 1N \\ \sum M_{c,i}^P &= 0 & 1 \cdot 8 + R_{ez} \cdot 4 &= 0 & R_{ez} &= -2N \\ \sum F_{z,i}^P &= 0 & R_{ez} + R_{cz} &= 0 & R_{cz} &= 2N \\ \sum F_{x,i}^L &= 0 & R_{cx} + R_{ax} &= 0 & R_{ax} &= -1N \\ \sum F_{z,i}^L &= 0 & R_{az} - R_{cz} &= 0 & R_{az} &= 2N \\ \sum M_{a,i}^P &= 0 & M_a + R_{cz} \cdot 4 + R_{cx} \cdot 8 &= 0 & M_a &= -16Nm \end{aligned}$$

Určete ohybové momenty:

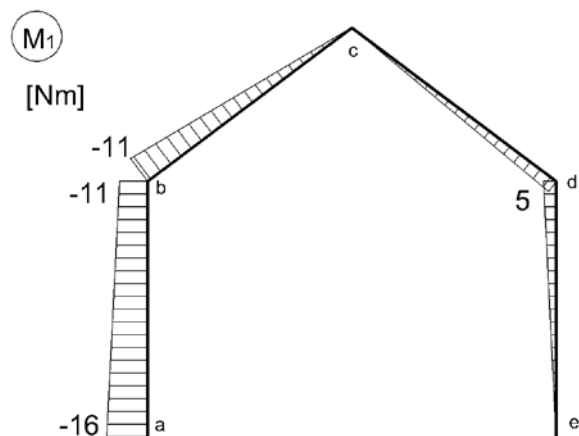
$$M_b = (-11)[Nm]$$

$$M_d = (5)[Nm]$$

Vykreslete průběhy ohybových momentů.



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru  $X_1$  – reakce vnějších a vnitřních vazeb



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru  $X_1$  - ohybové momenty

### Zatěžovací stav 1: Jednotková síla ve směru neznámé síly $X_1$

Reakce vazeb:

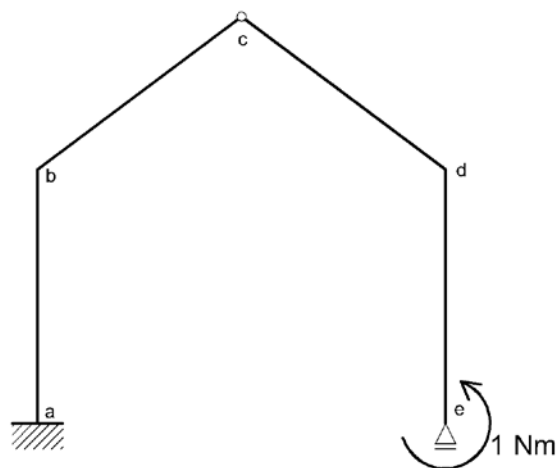
$$\begin{aligned} \sum F_{x,i}^P &= 0 & R_{cx} + 1 &= 0 & R_{cx} &= 1N \\ \sum M_{c,i}^P &= 0 & 1 \cdot 8 - R_{ez} \cdot 4 &= 0 & R_{ez} &= -2N \\ \sum F_{z,i}^P &= 0 & R_{ez} + R_{cz} &= 0 & R_{cz} &= 2N \\ \sum F_{x,i}^L &= 0 & R_{cx} + R_{ax} &= 0 & R_{ax} &= -1N \\ \sum F_{z,i}^L &= 0 & R_{az} - R_{cz} &= 0 & R_{az} &= 2N \\ \sum M_{a,i}^P &= 0 & M_a + R_{cz} \cdot 4 + R_{cx} \cdot 8 &= 0 & M_a &= -16Nm \end{aligned}$$

Ohybové momenty:

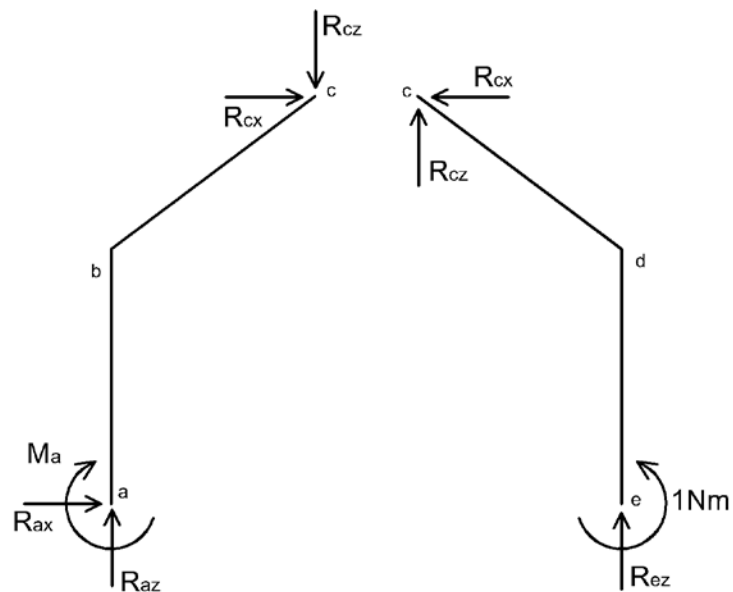
$$M_b = M_a - 5 \cdot R_{ax} = -11Nm$$

$$M_d = 5 \cdot 1 = 5Nm$$





Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovým momentem ve směru  $X_2$



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovým momentem ve směru  $X_2$  – reakce vnějších a vnitřních vazeb

### Zatěžovací stav 2: Jednotkový moment ve směru neznámého momentu $X_2$

Určete reakce vazeb:

$$R_{cx} = (0)[N]$$

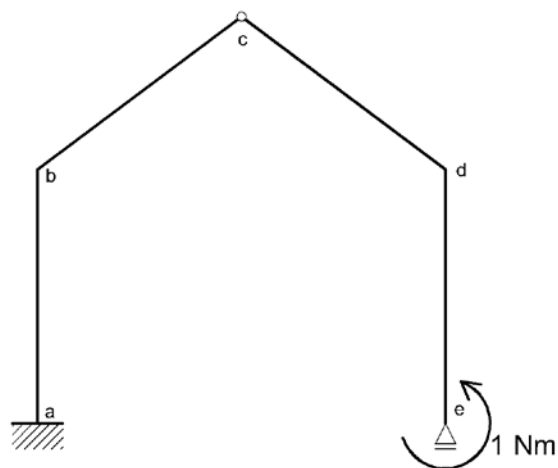
$$R_{ez} = (-0,25)[N]$$

$$R_{cz} = (0,25)[N]$$

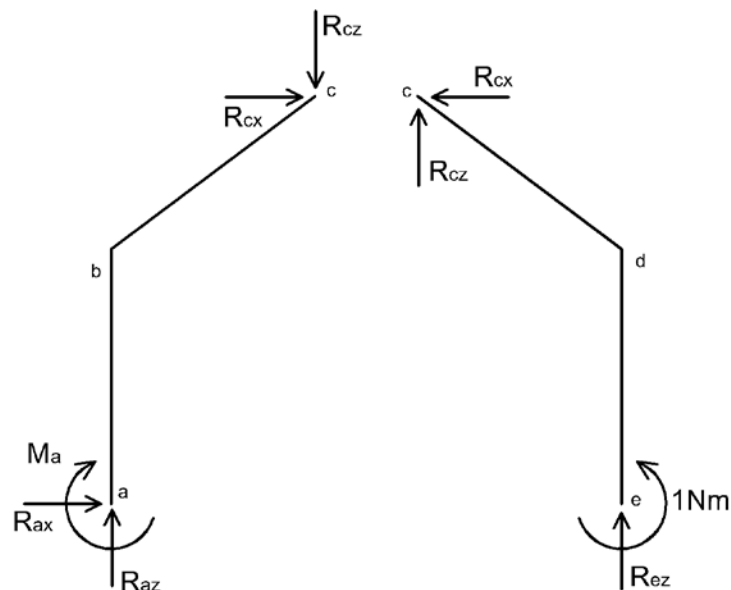
$$R_{ax} = (0)[N]$$

$$R_{az} = (0,25)[N]$$

$$M_a = (-1)[N]$$



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovým momentem ve směru  $X_2$



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovým momentem ve směru  $X_2$  – reakce vnějších a vnitřních vazeb

### Zatěžovací stav 2: Jednotkový moment ve směru neznámého momentu $X_2$

Reakce vazeb:

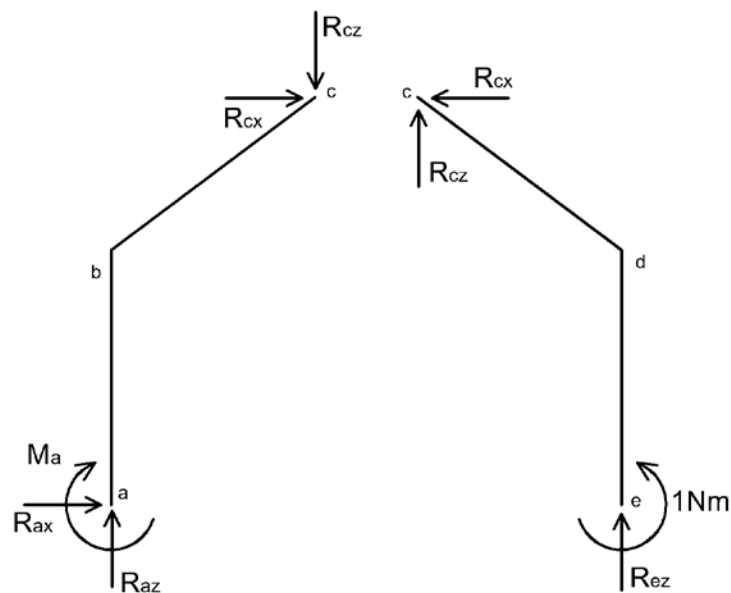
$$\begin{aligned} \sum F_{x,i}^P &= 0 & R_{cx} &= 0 & R_{cx} &= 0N \\ \sum M_{c,i}^P &= 0 & 1 + R_{ez} \cdot 4 &= 0 & R_{ez} &= -0,25N \\ \sum F_{z,i}^P &= 0 & R_{ez} + R_{cz} &= 0 & R_{cz} &= 0,25N \\ \sum F_{x,i}^L &= 0 & R_{cx} + R_{ax} &= 0 & R_{ax} &= 0N \\ \sum F_{z,i}^L &= 0 & R_{az} - R_{cz} &= 0 & R_{az} &= 0,25N \\ \sum M_{a,i}^P &= 0 & M_a + R_{cz} \cdot 4 + R_{cx} \cdot 8 &= 0 & M_a &= -1Nm \end{aligned}$$

Určete ohybové momenty:

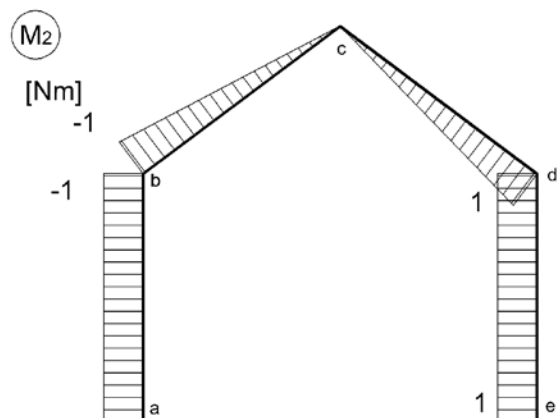
$$M_b = (-1)[Nm]$$

$$M_d = (1)[Nm]$$

Vykreslete průběhy ohybových momentů.



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovým momentem ve směru  $X_2$  – reakce vnějších a vnitřních vazeb



Obr: Zatížení základní soustavy jednotkovým momentem ve směru  $X_2$  – ohybové momenty

### Zatěžovací stav 2: Jednotkový moment ve směru neznámého momentu $X_2$

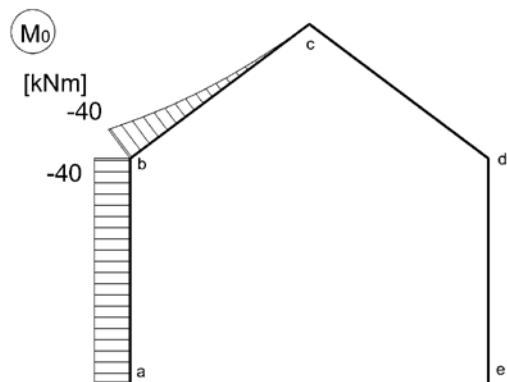
Reakce vazeb:

$$\begin{aligned} \sum F_{x,i}^P &= 0 & R_{cx} &= 0 & R_{cx} &= 0N \\ \sum M_{c,i}^P &= 0 & 1 + R_{ez} \cdot 4 &= 0 & R_{ez} &= -0,25N \\ \sum F_{z,i}^P &= 0 & R_{ez} + R_{cz} &= 0 & R_{cz} &= 0,25N \\ \sum F_{x,i}^L &= 0 & R_{cx} + R_{ax} &= 0 & R_{ax} &= 0N \\ \sum F_{z,i}^L &= 0 & R_{az} - R_{cz} &= 0 & R_{az} &= 0,25N \\ \sum M_{a,i}^P &= 0 & M_a + R_{cz} \cdot 4 + R_{cx} \cdot 8 &= 0 & M_a &= -1Nm \end{aligned}$$

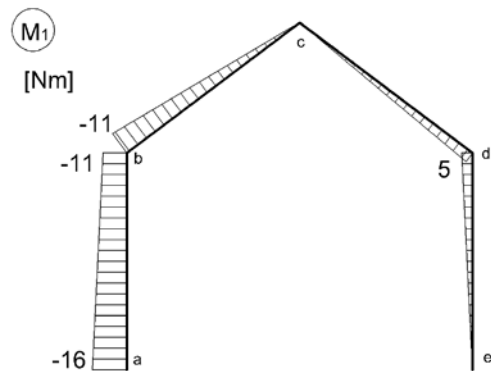
Ohybové momenty:

$$M_b = M_a - 5 \cdot R_{ax} = -1Nm$$

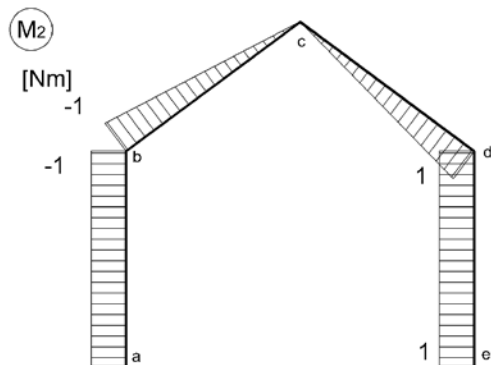
$$M_d = 1Nm$$



Obr.: Původní zatížení základní soustavy – ohybové momenty



Obr.: Zatížení ZS jednotkovou silou ve směru  $X_1$  - ohybové momenty



Obr: Zatížení ZS jednotkovým momentem ve směru  $X_2$  – ohybové momenty

### Výpočet přemístění

Určete přemístění:

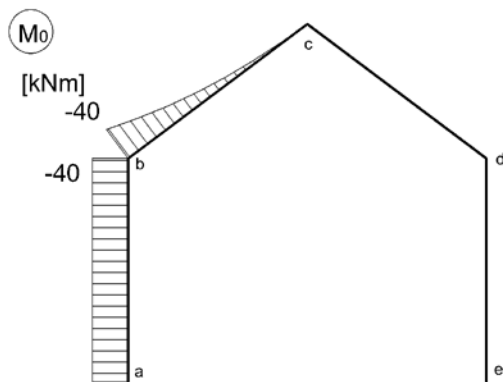
$$\delta_{10} = (3250) \frac{10^3}{EI}$$

$$\delta_{20} = (250) \frac{10^3}{EI}$$

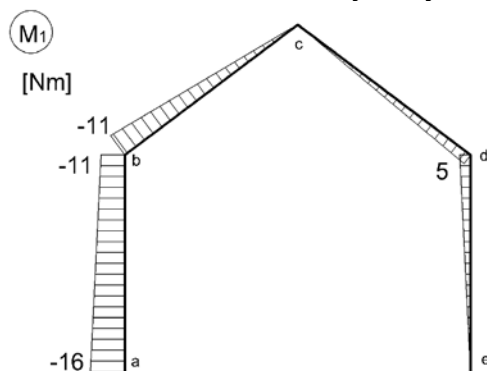
$$\delta_{11} = (1206,667) \frac{1}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (106,667) \frac{1}{EI}$$

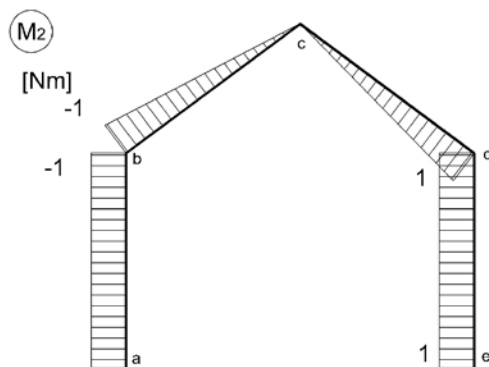
$$\delta_{22} = (13,333) \frac{1}{EI}$$



Obr.: Původní zatížení základní soustavy – ohybové momenty



Obr.: Zatížení ZS jednotkovou silou ve směru X<sub>1</sub> - ohybové momenty



Obr: Zatížení ZS jednotkovým momentem ve směru X<sub>2</sub> – ohybové momenty

### Výpočet přemístění

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} (M_{a,1} + M_{ba,1}) \cdot M_{a,0} \cdot L_{ab} + \frac{1}{4} \cdot M_{bc,0} \cdot M_{bc,1} \cdot L_{bc} \right\}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \cdot ((-11) + (-16)) \cdot (-40) \cdot 10^3 \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot (-40) \cdot 10^3 \cdot (-11) \cdot 5 \right\}$$

$$= \frac{1}{EI} 3250 \cdot 10^3$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \left\{ M_{a,1} \cdot M_{a,0} \cdot L_{ab} + \frac{1}{4} \cdot M_{bc,0} \cdot M_{bc,1} \cdot L_{bc} \right\}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \left\{ 1 \cdot (-40) \cdot 10^3 \cdot (-5) + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot (-40) \cdot 10^3 \cdot (-5) \right\} = \frac{1}{EI} 250 \cdot 10^3$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{6} M_{a,1} (2M_{a,1} + M_{ba,1}) \cdot L_{ab} + \frac{1}{6} M_{ba,1} (2M_{ba,1} + M_{a,1}) \cdot L_{ab} \right.$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot M_{bc,1} \cdot M_{bc,1} \cdot L_{bc} + \frac{1}{3} \cdot M_{dc,1} \cdot M_{dc,1} \cdot L_{cd} + \frac{1}{3} \cdot M_{de,1} \cdot M_{de,1} \cdot L_{de} \left. \right\}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{6} \cdot (-16) \cdot (2 \cdot (-16) + (-11)) \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot (-11) \cdot (2 \cdot (-11) + (-16)) \cdot 5 \right.$$

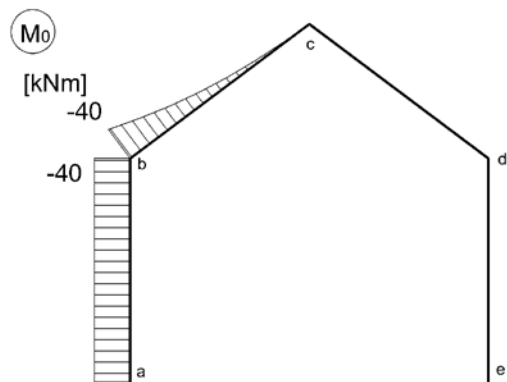
$$+ \frac{1}{3} \cdot (-11) \cdot (-11) \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot 5 \left. \right\} = \frac{1}{EI} 1206,667$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} (M_{a,1} + M_{ba,1}) M_{a,2} \cdot L_{ab} + \frac{1}{3} \cdot M_{bc,1} \cdot M_{bc,2} \cdot L_{bc} \right.$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot M_{dc,1} \cdot M_{dc,2} \cdot L_{cd} + \frac{1}{2} \cdot M_{de,1} \cdot M_{de,2} \cdot L_{de} \left. \right\}$$

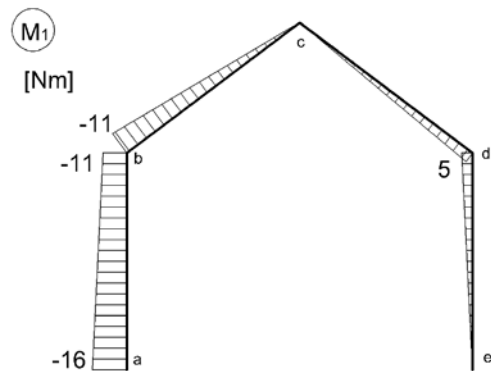
$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \cdot ((-16) + (-11)) \cdot 1 \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot (-11) \cdot (-1) \cdot 5 \right.$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot (-5) \cdot (-1) \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (-5) \cdot 5 \left. \right\} = \frac{1}{EI} 106,667$$

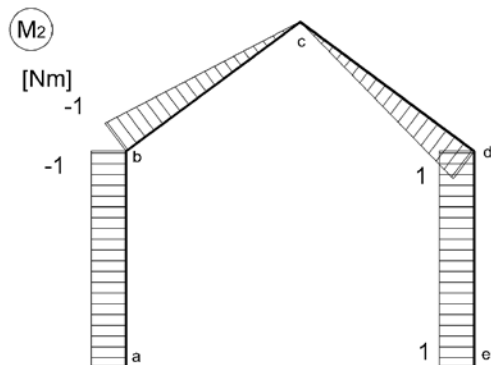


Obr.: Původní zatížení základní soustavy – ohybové momenty

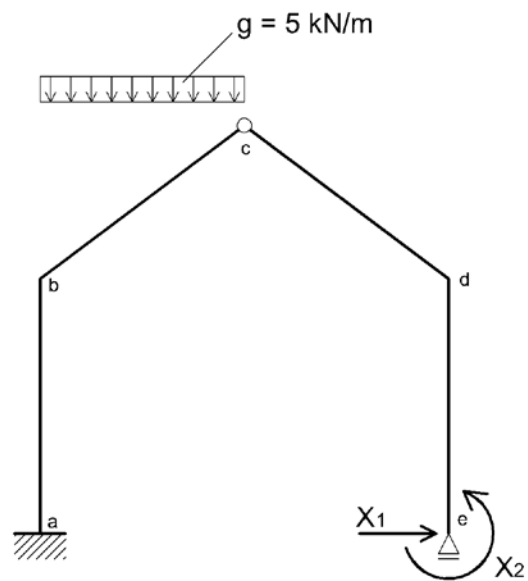
$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left\{ M_{a,2} \cdot M_{a,2} \cdot L_{ab} + \frac{1}{3} \cdot M_{bc,2} \cdot M_{bc,2} \cdot L_{bc} \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \cdot M_{dc,2} \cdot M_{dc,2} \cdot L_{cd} + M_{de,2} \cdot M_{de,2} \cdot L_{de} \right\} \\ \delta_{22} = \frac{1}{EI} \left\{ 1 \cdot 1 \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 5 \right\} = \frac{1}{EI} 13,333$$



Obr.: Zatížení ZS jednotkovou silou ve směru X<sub>1</sub> - ohybové momenty



Obr: Zatížení ZS jednotkovým momentem ve směru X<sub>2</sub> – ohybové momenty



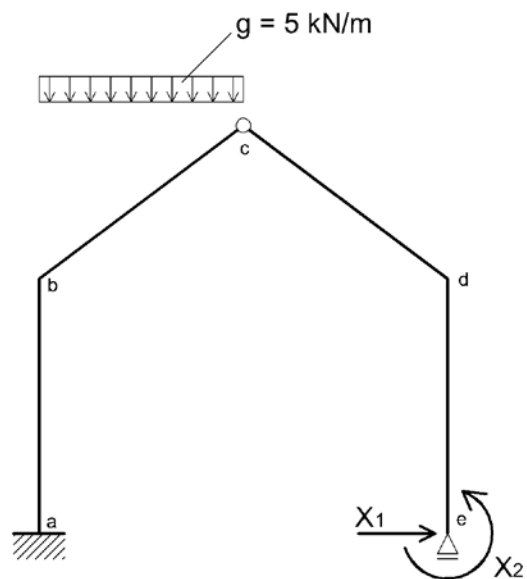
Obr.: Základní staticky určitá soustava

### Kanonické rovnice – deformační podmínky

Sestavte kanonické rovnice a určete síly

$$X_1 = (-3,538) [\text{kN}]$$

$$X_2 = (9,553) [\text{kN}]$$



Obr.: Základní staticky určitá soustava

### Kanonické rovnice – deformační podmínky

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0$$

$$\delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0$$

$$1206,667 \cdot X_1 + 106,667 \cdot X_2 = -3250 \cdot 10^3$$

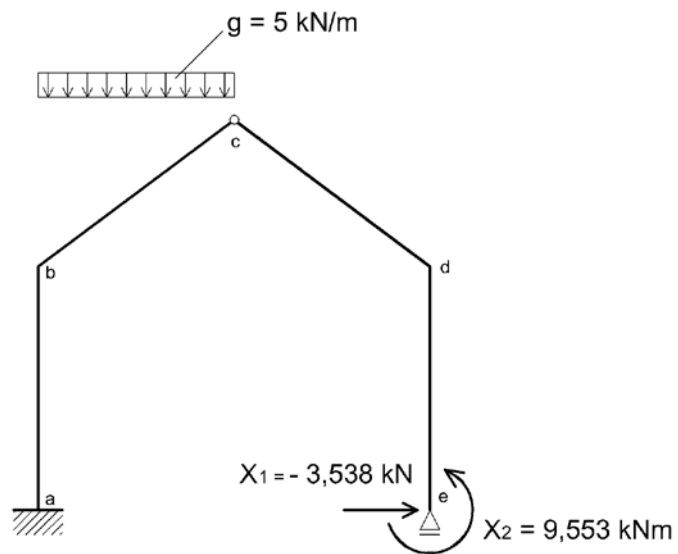
$$106,667 \cdot X_1 + 13,333 \cdot X_2 = -250 \cdot 10^3$$

Řešení

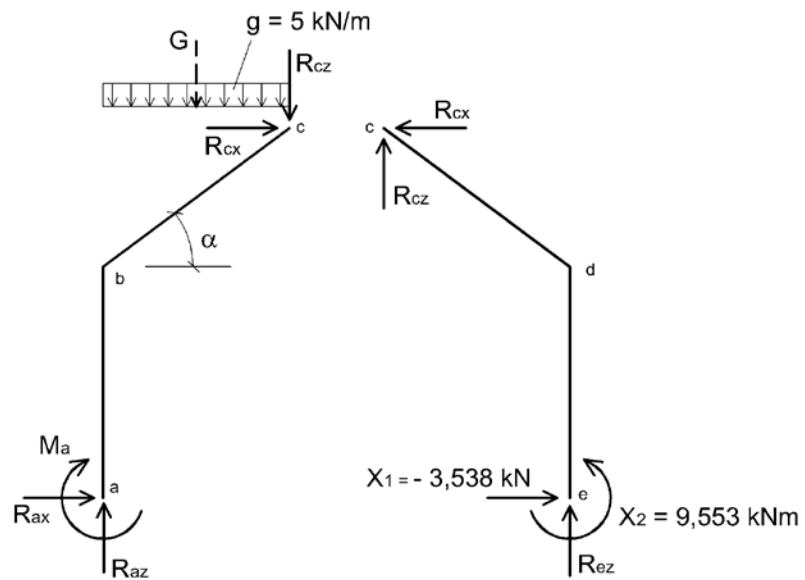
$$X_1 = -3,538 \cdot 10^3 = -3,538 \text{ kN}$$

$$X_2 = 9,553 \cdot 10^3 = 9,553 \text{ kN}$$





Obr.: Výsledné zatížení základní staticky určité soustavy



Obr.: Výsledné zatížení základní staticky určité soustavy – reakce

### Výsledné průběhy vnitřních sil

Určete reakce vazeb:

$$R_{cx} = (-3,538) [\text{kN}]$$

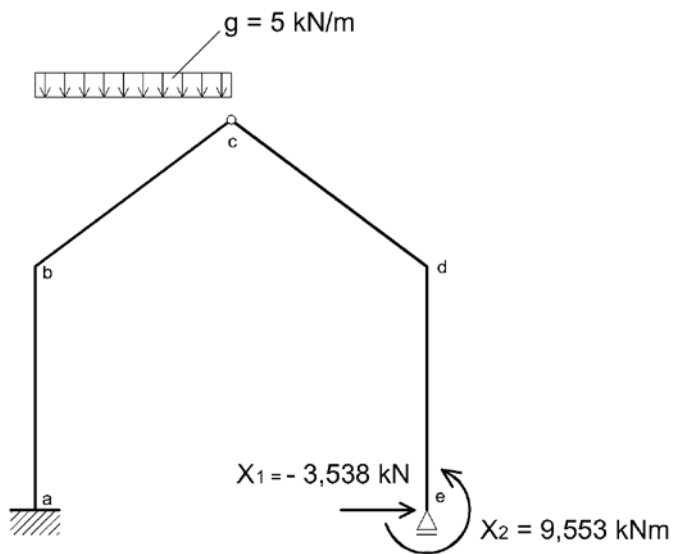
$$R_{ez} = (4,688) [\text{kN}]$$

$$R_{cz} = (-4,688) [\text{kN}]$$

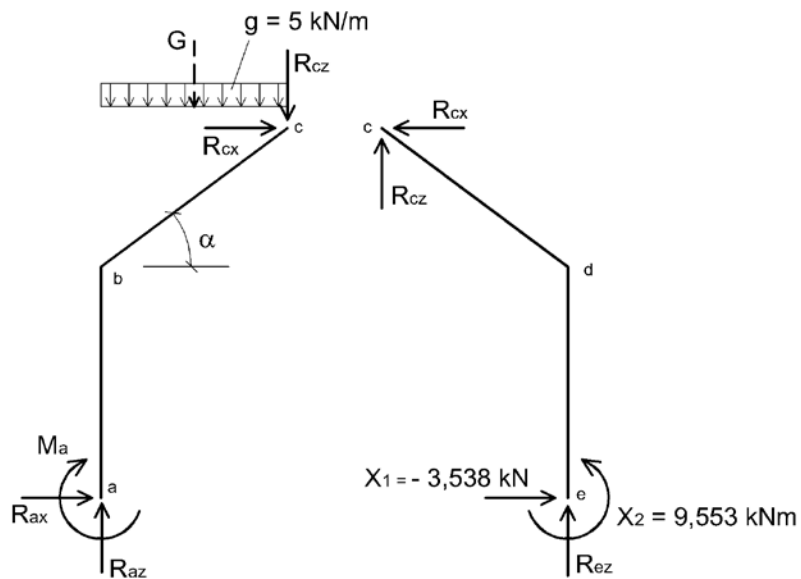
$$R_{ax} = (3,538) [\text{kN}]$$

$$R_{az} = (15,312) [\text{kN}]$$

$$M_a = (7,056) [\text{kNm}]$$



Obr.: Výsledné zatížení základní staticky určité soustavy



Obr.: Výsledné zatížení základní staticky určité soustavy – reakce

### Výsledné průběhy vnitřních sil

Výpočet reakcí vazeb

$$\begin{aligned} \sum F_{x,i}^P &= 0 & R_{cx} - X_1 &= 0 & R_{cx} &= -3,538 \text{ kN} \\ \sum M_{c,i}^P &= 0 & X_1 \cdot 8 + X_2 + R_{ez} \cdot 4 &= 0 & R_{ez} &= 4,688 \text{ kN} \\ \sum F_{z,i}^P &= 0 & R_{ez} + R_{cz} &= 0 & R_{cz} &= -4,688 \text{ kN} \\ \sum F_{x,i}^L &= 0 & R_{cx} + R_{ax} &= 0 & R_{ax} &= 3,538 \text{ kN} \\ \sum F_{z,i}^L &= 0 & R_{az} - R_{cz} - G &= 0 & R_{az} &= 15,312 \text{ kN} \\ \sum M_{a,i}^P &= 0 & M_a + R_{cz} \cdot 4 + R_{cx} \cdot 8 + G \cdot 2 &= 0 & M_a &= 7,056 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Určete normálové a posouvající síly:

$$N_a = (-15,312) [\text{kN}]$$

$$V_a = (-3,538) [\text{kN}]$$

$$N_{bc} = (-12,018) [\text{kN}]$$

$$V_{bc} = (10,127) [\text{kN}]$$

$$N_{cb} = (-0,017) [\text{kN}]$$

$$V_{cb} = (-5,873) [\text{kN}]$$

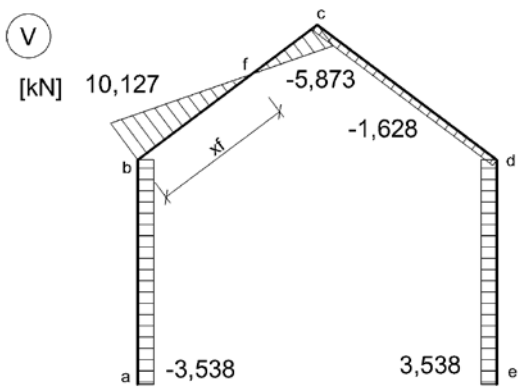
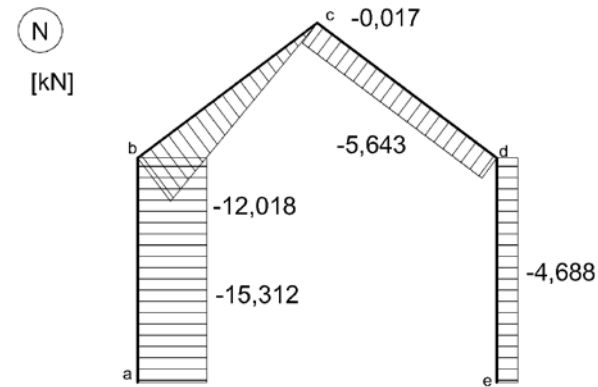
$$N_{cd} = (-5,643) [\text{kN}]$$

$$V_{cd} = (-1,628) [\text{kN}]$$

$$N_e = (-4,688) [\text{kN}]$$

$$V_e = (3,538) [\text{kN}]$$

Vykreslete průběhy normálových a posouvajících sil.



Obr.: Výsledné průběhy vnitřních sil

Normálové a posouvající síly:

$$N_a = -R_{az} = -15,312 \text{ kN}$$

$$V_a = -R_{ax} = -3,538 \text{ kN}$$

$$N_{bc} = -R_{ax} \cdot \cos \alpha - R_{az} \cdot \sin \alpha = -12,018 \text{ kN}$$

$$V_{bc} = -R_{ax} \cdot \sin \alpha + R_{az} \cdot \cos \alpha = 10,127 \text{ kN}$$

$$N_{cb} = R_{cx} \cdot \cos \alpha - R_{cz} \cdot \sin \alpha = -0,017 \text{ kN}$$

$$V_{cb} = R_{cx} \cdot \sin \alpha + R_{cz} \cdot \cos \alpha = -5,873 \text{ kN}$$

$$N_{cd} = R_{cx} \cdot \cos \alpha + R_{cz} \cdot \sin \alpha = -5,643 \text{ kN}$$

$$V_{cb} = -R_{cx} \cdot \sin \alpha + R_{cz} \cdot \cos \alpha = -1,628 \text{ kN}$$

$$N_e = -R_{ez} = -4,688 \text{ kN}$$

$$V_e = -X_1 = 3,538 \text{ kN}$$

Určete polohu průřezu s nulovou posouvající silou:

$$x_f = (3,165) \text{ [m]}$$

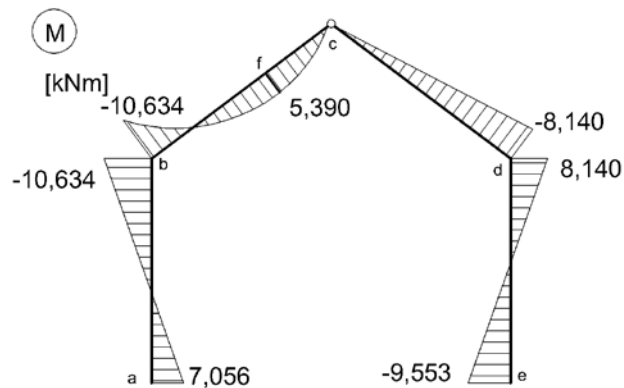
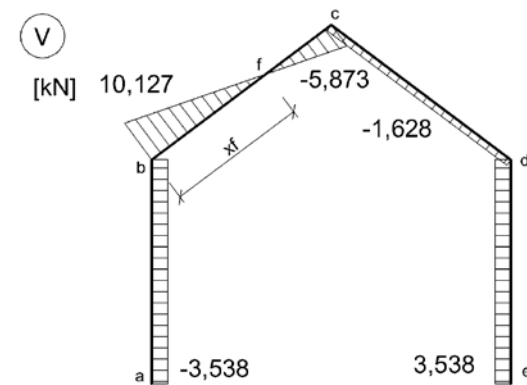
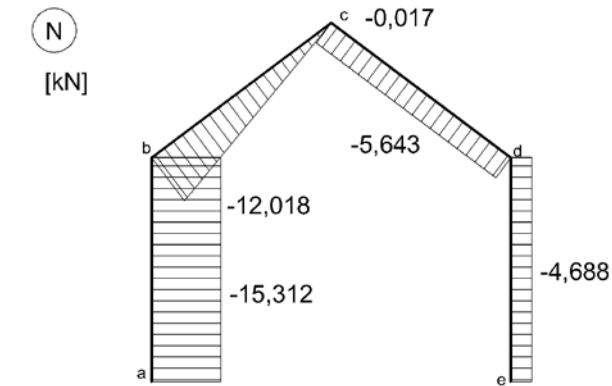
Určete ohybové momenty:

$$M_b = (-10,634) \text{ [kNm]}$$

$$M_f = (5,39) \text{ [kNm]}$$

$$M_d = (-8,14) \text{ [kNm]}$$

Vykreslete průběh ohybových momentů.



Obr.: Výsledné průběhy vnitřních sil

Normálové a posouvající síly:

$$N_a = -R_{az} = -15,312 \text{ kN}$$

$$V_a = -R_{ax} = -3,538 \text{ kN}$$

$$N_{bc} = -R_{ax} \cdot \cos \alpha - R_{az} \cdot \sin \alpha = -12,018 \text{ kN}$$

$$V_{bc} = -R_{ax} \cdot \sin \alpha + R_{az} \cdot \cos \alpha = 10,127 \text{ kN}$$

$$N_{cb} = R_{cx} \cdot \cos \alpha - R_{cz} \cdot \sin \alpha = -0,017 \text{ kN}$$

$$V_{cb} = R_{cx} \cdot \sin \alpha + R_{cz} \cdot \cos \alpha = -5,873 \text{ kN}$$

$$N_{cd} = R_{cx} \cdot \cos \alpha + R_{cz} \cdot \sin \alpha = -5,643 \text{ kN}$$

$$V_{cb} = -R_{cx} \cdot \sin \alpha + R_{cz} \cdot \cos \alpha = -1,628 \text{ kN}$$

$$N_e = -R_{ez} = -4,688 \text{ kN}$$

$$V_e = -X_1 = 3,538 \text{ kN}$$

příčné spojitě zatížení prutu b-c (získá se přepočtem zatížení  $g$  na šikmou délku a rozkladem do lokálního souřadného systému prutu)

$$q = g \cdot \cos^2 \alpha = 3,2 \text{ kN / m}$$

Poloha průřezu s nulovou posouvající silou:

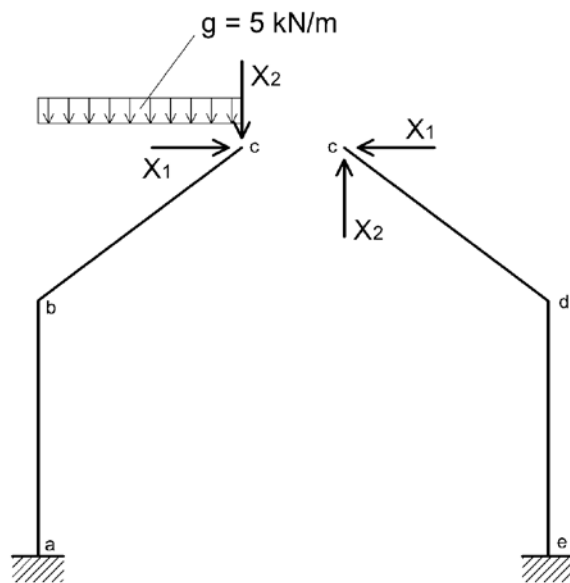
$$x_f = \frac{V_{bc}}{q} = \frac{10,127}{3,2} = 3,165 \text{ m}$$

Ohybové momenty

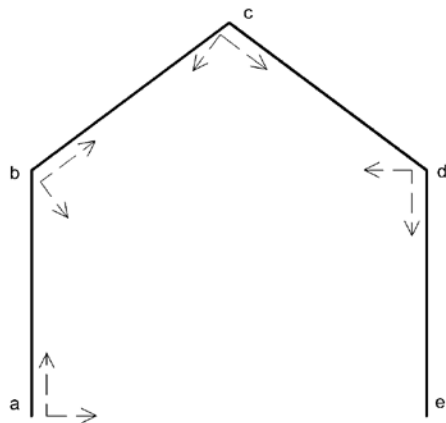
$$M_b = M_a - 5 \cdot R_{ax} = -10,634 \text{ kNm}$$

$$M_f = M_b + x_f \cdot V_{bc} - \frac{q \cdot x_f^2}{2} = 5,39 \text{ kNm}$$

$$M_d = 5 \cdot V_{cd} = -8,14 \text{ kNm}$$



Obr.: Základní staticky určitá soustava



Obr.: Lokální souřadné systémy prutů

## b) základní soustava vznikne odebráním vnitřních vazeb

Základní soustava: konstrukce je rozdělena v kloubu na dvě části.

Deformační podmínky: vzájemné posuny obou konců jsou nulové.

Základní staticky určitá soustava se vytvoří odebráním vazeb zajišťujících nulový vzájemný posun konců prutů v kloubu c. Vazby se nahradí reakcí vnitřních vazeb silami  $X_1$  a  $X_2$ , které působí opačně na oba konce prutů, podobně jako vnitřní síly.

Deformační podmínky představují rovnost přemístění (vodorovný posun  $u$  a svislý posun  $w$ ) v levé a pravé části v místě kloubu.

$$u_c^L = u_c^P$$

$$w_c^L = w_c^P$$

Vzhledem k opačnému působení reakcí na oba konce prutů svislé posuny zleva a zprava bodu  $b$  můžeme vyjádřit

$$\delta_1^L = u^L \quad \dots \text{směřuje doprava}$$

$$\delta_1^P = -u^P \quad \dots \text{směřuje doleva}$$

$$\delta_2^L = w^L \quad \dots \text{směřuje dolů}$$

$$\delta_2^P = -w^P \quad \dots \text{směřuje nahoru}$$

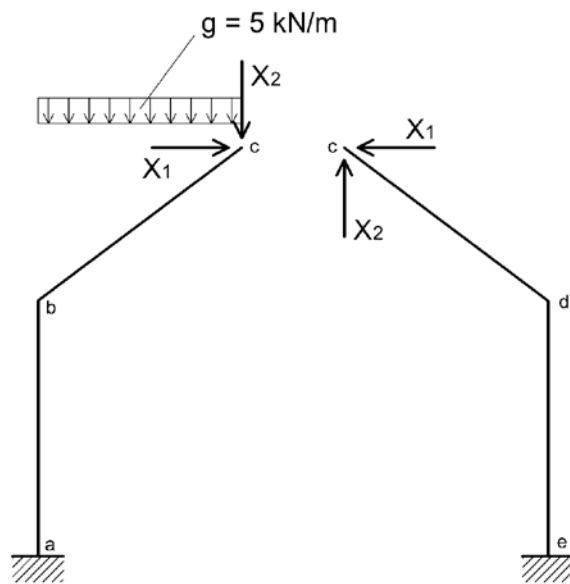
po dosažení se dostane

$$\delta_1^L + \delta_1^P = \delta_1 = 0$$

$$\delta_2^L + \delta_2^P = \delta_2 = 0$$

Rovnice vyjadřují, že vzájemný posun obou konců prutů je nulový a není nutné rozdělovat konstrukci na levou a pravou část při integraci přemístění.

Pro názornost toto rozdělení bude provedeno.



Obr.: Základní staticky určitá soustava

Posuny na levé části jsou dány vlivem zatížení a reakcí  $X_1$  a  $X_2$ .

$$\delta_1^L = \delta_{1,0}^L + \delta_{1,1}^L X_1 + \delta_{1,2}^L X_2$$

$$\delta_2^L = \delta_{2,0}^L + \delta_{2,1}^L X_1 + \delta_{2,2}^L X_2$$

Obdobně posuny na pravé části

$$\delta_1^P = \delta_{1,0}^P + \delta_{1,1}^P X_1 + \delta_{1,2}^P X_2$$

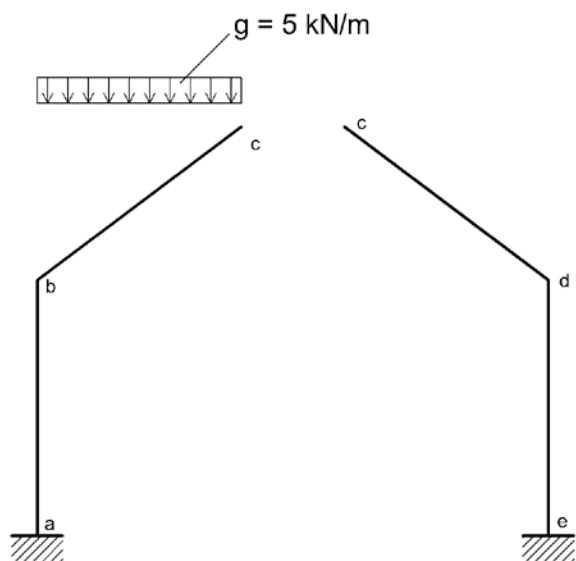
$$\delta_2^P = \delta_{2,0}^P + \delta_{2,1}^P X_1 + \delta_{2,2}^P X_2$$

Po dosazení se získají kanonické rovnice pro určení neznámých sil  $X_1$  a  $X_2$ .

$$(\delta_{10}^L + \delta_{10}^P) + (\delta_{11}^L + \delta_{11}^P)X_1 + (\delta_{12}^L + \delta_{12}^P)X_2 = 0$$

$$(\delta_{20}^L + \delta_{20}^P) + (\delta_{21}^L + \delta_{21}^P)X_1 + (\delta_{22}^L + \delta_{22}^P)X_2 = 0$$

Základní soustava se zatíží třemi zatěžovacími stavy.



Obr.: Původní zatížení základní soustavy

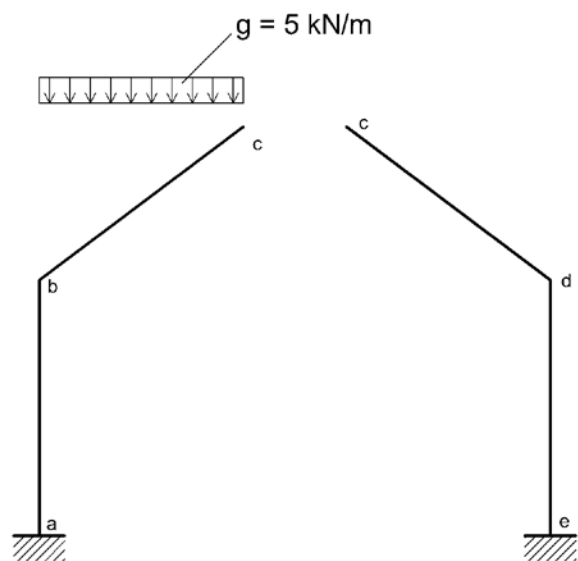
# Zatěžovací stav 0: Původní zatížení

Určete ohybové momenty

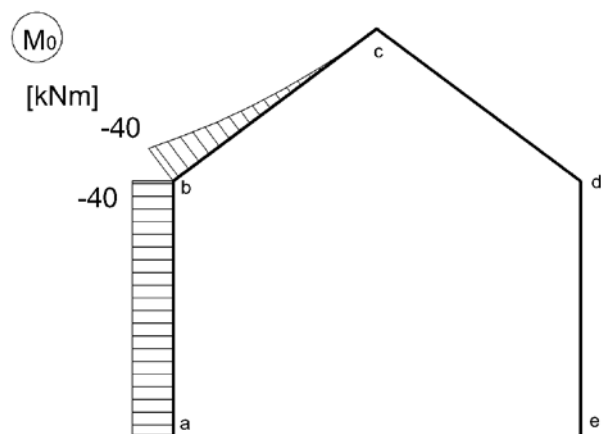
$$M_b = (-40) [\text{kNm}]$$

$$M_a = (-40) [\text{kNm}]$$

Vykreslete průběhy ohybových momentů.



Obr.: Původní zatížení základní soustavy



Obr.: Původní zatížení základní soustavy – ohybové momenty

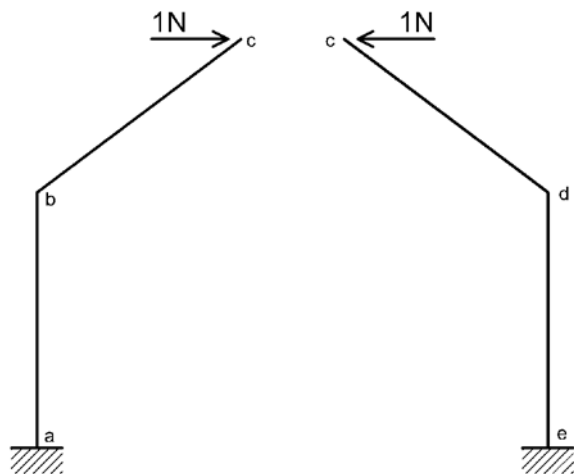
### Zatěžovací stav 0: Původní zatížení

Ohybové momenty

$$M_b = -2 \cdot 4 \cdot g = -40 \text{ kNm}$$

$$M_a = M_e = -40 \text{ kNm}$$





Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru  $X_1$

Zatěžovací stav 1: Jednotková síla ve směru neznámé síly  $X_1$

Určete ohybové momenty:

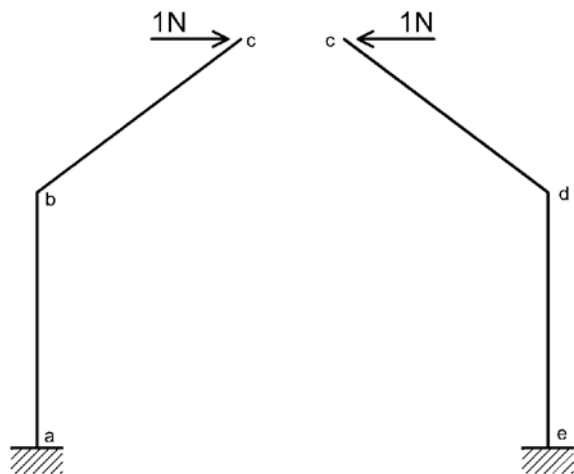
$$M_b = (-3) [\text{Nm}]$$

$$M_a = (-8) [\text{Nm}]$$

$$M_d = (-3) [\text{Nm}]$$

$$M_e = (-8) [\text{Nm}]$$

Vykreslete průběhy ohybových momentů.



Zatěžovací stav 1: Jednotková síla ve směru neznámé síly  $X_1$

Ohybové momenty:

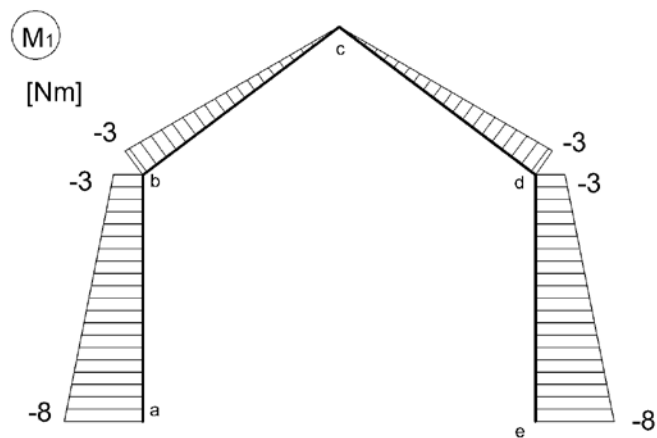
$$M_b = -3 \cdot 1 = -3Nm$$

$$M_a = -8 \cdot 1 = -8Nm$$

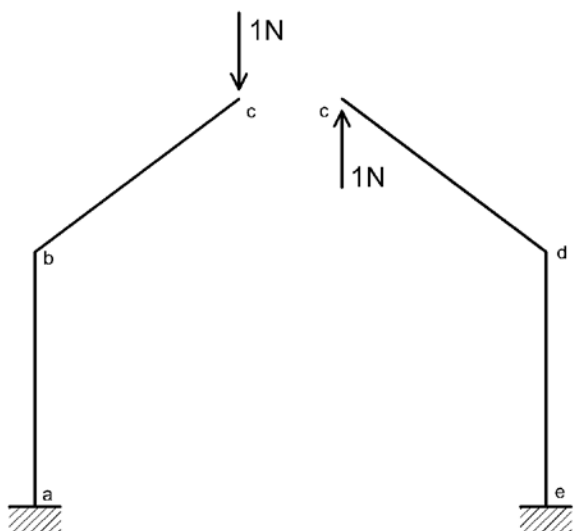
$$M_d = -3 \cdot 1 = -3Nm$$

$$M_e = -8 \cdot 1 = -8Nm$$

Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru  $X_1$



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru  $X_1$  - ohybové momenty



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru  $X_2$

Zatěžovací stav 2: Jednotková síla ve směru neznámé síly  $X_2$

Ohybové momenty:

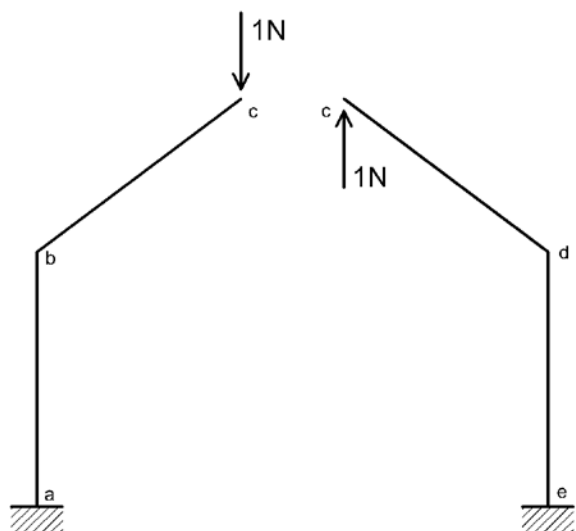
$$M_b = (-4) [\text{Nm}]$$

$$M_a = (-4) [\text{Nm}]$$

$$M_d = (4) [\text{Nm}]$$

$$M_e = (4) [\text{Nm}]$$

Vykreslete průběhy ohybových momentů.



Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru  $X_2$

Zatěžovací stav 2: Jednotková síla ve směru neznámé síly  $X_2$

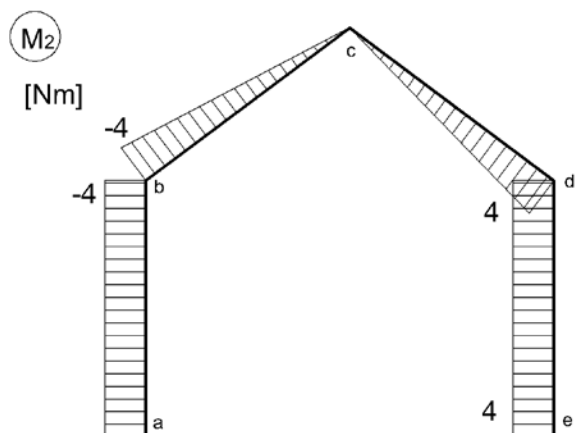
Ohybové momenty:

$$M_b = -4 \cdot 1 = -4 Nm$$

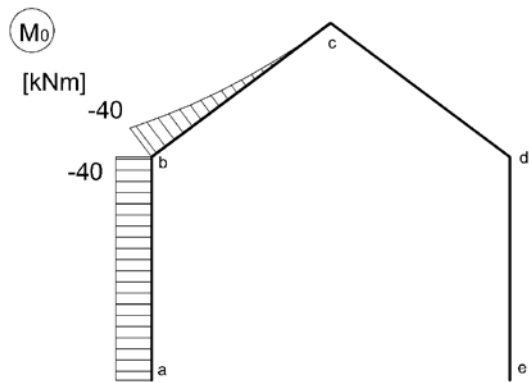
$$M_a = -4 \cdot 1 = -4 Nm$$

$$M_d = 4 \cdot 1 = 4 Nm$$

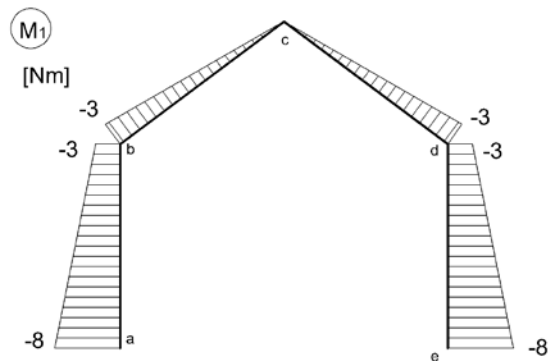
$$M_e = 4 \cdot 1 = 4 Nm$$



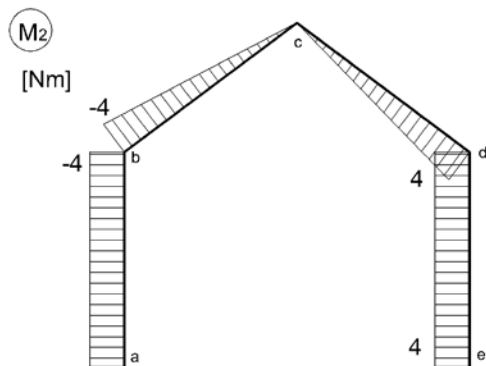
Obr.: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru  $X_2$  - ohybové momenty



Obr.: Původní zatížení základní soustavy – ohybové momenty



Obr.: Zatížení ZS jednotkovou silou ve směru  $X_1$  - ohybové momenty



Obr.: Zatížení ZS jednotkovou silou ve směru  $X_2$  - ohybové momenty

### Výpočet přemístění

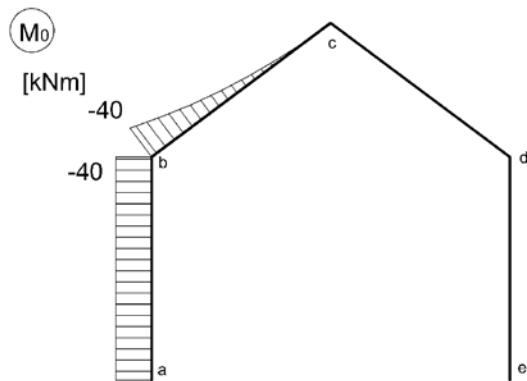
$$\delta_{10}^L = (1250) \frac{10^3}{EI}$$

$$\delta_{11}^L = (176,667) \frac{1}{EI}$$

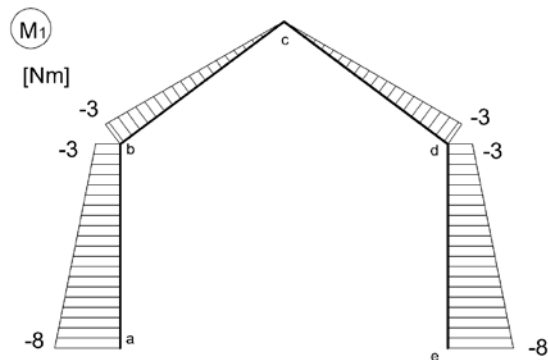
$$\delta_{12}^L = (130) \frac{1}{EI}$$

$$\delta_{20}^L = (1000) \frac{10^3}{EI}$$

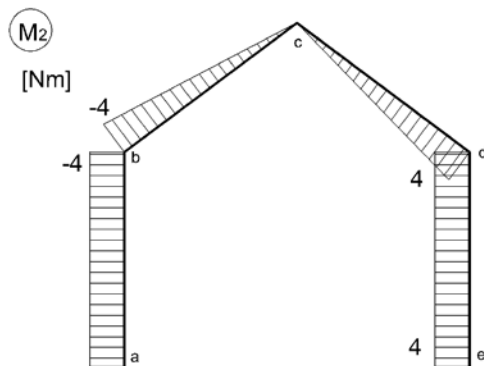
$$\delta_{22}^L = (106,667) \frac{1}{EI}$$



Obr.: Původní zatížení základní soustavy – ohybové momenty



Obr.: Zatížení ZS jednotkovou silou ve směru X<sub>1</sub> - ohybové momenty



Obr.: Zatížení ZS jednotkovou silou ve směru X<sub>2</sub> - ohybové momenty

### Výpočet přemístění

$$\delta_{10}^L = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} M_{a,0} \cdot (M_{a,1} + M_{ba,1}) \cdot L_{ab} + \frac{1}{4} \cdot M_{bc,0} \cdot M_{bc,1} \cdot L_{bc} \right\}$$

$$\delta_{10}^L = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \cdot (-40 \cdot 10^3) \cdot ((-3) + (-8)) \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot (-40 \cdot 10^3) \cdot (-3) \cdot 5 \right\} = \frac{1250 \cdot 10^3}{EI}$$

$$\delta_{11}^L = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{6} M_{ba,1} \cdot (2 \cdot M_{ba,1} + M_{a,1}) \cdot L_{ab} + \frac{1}{6} M_{a,1} \cdot (2 M_{a,1} + M_{ba,1}) \cdot L_{ab} + \frac{1}{3} \cdot M_{bc,1} \cdot M_{bc,1} \cdot L_{bc} \right\}$$

$$\delta_{11}^L = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{6} \cdot (-3) \cdot ((2 \cdot (-3)) + (-8)) \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot (-8) \cdot ((2 \cdot (-8)) + (-3)) \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot 5 \right\} = \frac{176,667}{EI}$$

$$\delta_{12}^L = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{3} M_{a,2} \cdot (M_{a,1} + M_{ba,1}) \cdot L_{ab} + \frac{1}{2} \cdot M_{bc,2} \cdot M_{bc,1} \cdot L_{bc} \right\}$$

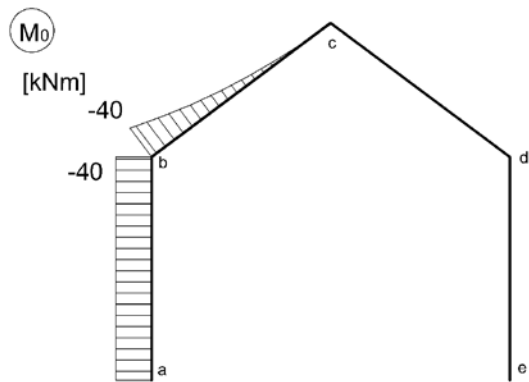
$$\delta_{12}^L = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{3} \cdot (-4) \cdot ((-8) + (-3)) \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot 5 \right\} = \frac{130}{EI}$$

$$\delta_{20}^L = \frac{1}{EI} \left\{ M_{a,2} \cdot M_{a,0} \cdot L_{ab} + \frac{1}{4} \cdot M_{bc,2} \cdot M_{bc,0} \cdot L_{bc} \right\}$$

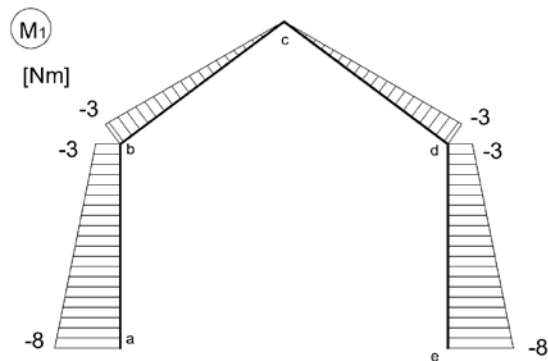
$$\delta_{20}^L = \frac{1}{EI} \left\{ (-4) \cdot (-40 \cdot 10^3) \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot (-4) \cdot (-40 \cdot 10^3) \cdot 5 \right\} = \frac{1000 \cdot 10^3}{EI}$$

$$\delta_{22}^L = \frac{1}{EI} \left\{ M_{a,2} \cdot M_{a,2} \cdot L_{ab} + \frac{1}{3} M_{bc,2} \cdot M_{bc,2} \cdot L_{bc} \right\}$$

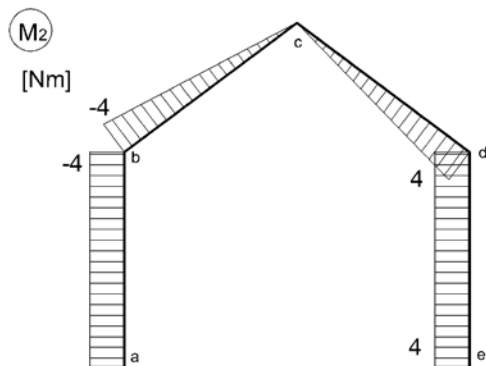
$$\delta_{22}^L = \frac{1}{EI} \left\{ (-4) \cdot (-4) \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot 5 \right\} = \frac{106,667}{EI}$$



Obr.: Původní zatížení základní soustavy – ohybové momenty



Obr.: Zatížení ZS jednotkovou silou ve směru  $X_1$  - ohybové momenty



Obr.: Zatížení ZS jednotkovou silou ve směru  $X_2$  - ohybové momenty

### Výpočet přemístění

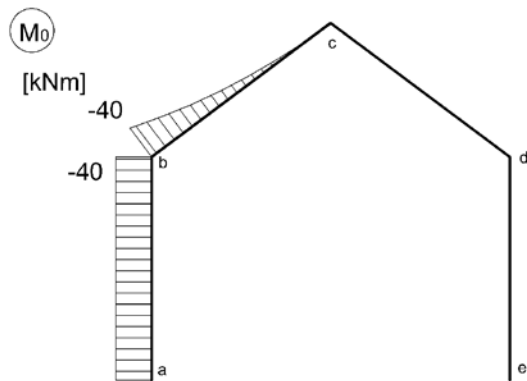
$$\delta_{10}^P = (0) \frac{10^3}{EI}$$

$$\delta_{11}^P = (176,667) \frac{1}{EI}$$

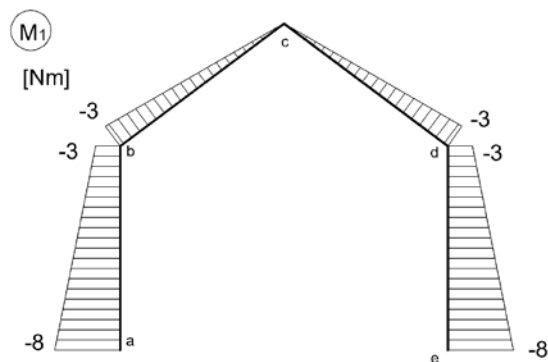
$$\delta_{12}^P = (-130) \frac{1}{EI}$$

$$\delta_{20}^P = (0) \frac{10^3}{EI}$$

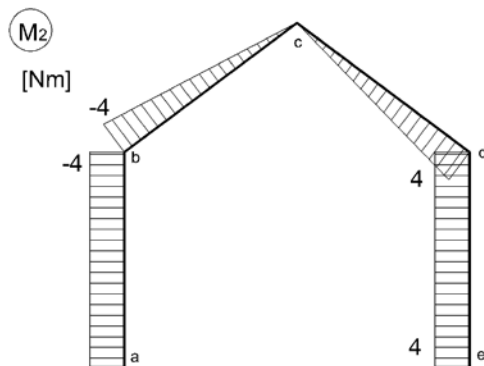
$$\delta_{22}^L = (106,667) \frac{1}{EI}$$



Obr.: Původní zatížení základní soustavy – ohybové momenty



Obr.: Zatížení ZS jednotkovou silou ve směru  $X_1$  - ohybové momenty



Obr.: Zatížení ZS jednotkovou silou ve směru  $X_2$  - ohybové momenty

$$\delta_{10}^P = 0$$

$$\delta_{11}^P = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{3} \cdot M_{dc,1} \cdot M_{dc,1} \cdot L_{cd} + \frac{1}{6} M_{de,1} (2M_{de,1} + M_{e,1}) \cdot L_{de} + \frac{1}{6} M_{e,1} (2M_{e,1} + M_{de,1}) \cdot L_{de} \right\}$$

$$\delta_{11}^P = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot (-3) \cdot ((2 \cdot (-3)) + (-8)) \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot (-8) \cdot ((2 \cdot (-8)) + (-3)) \cdot 5 \right\} = \frac{176,667}{EI}$$

$$\delta_{12}^P = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{3} M_{dc,2} \cdot M_{dc,1} \cdot L_{bc} + \frac{1}{2} M_{de,2} (M_{de,1} + M_{e,1}) \cdot L_{ab} \right\}$$

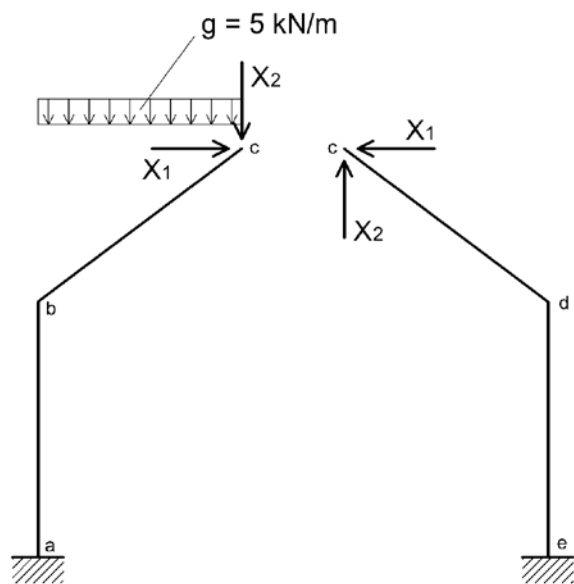
$$\delta_{12}^P = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot (-3) \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot ((-3) + (-8)) \cdot 5 \right\} = \frac{-130}{EI}$$

$$\delta_{20}^P = 0$$

$$\delta_{22}^P = \frac{1}{EI} \left\{ M_{dc,2} \cdot M_{dc,2} \cdot L_{bc} + \frac{1}{3} M_{de,2} \cdot M_{de,2} \cdot L_{de} \right\}$$

$$\delta_{22}^P = \frac{1}{EI} \left\{ 4 \cdot 4 \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \right\} = \frac{106,667}{EI}$$





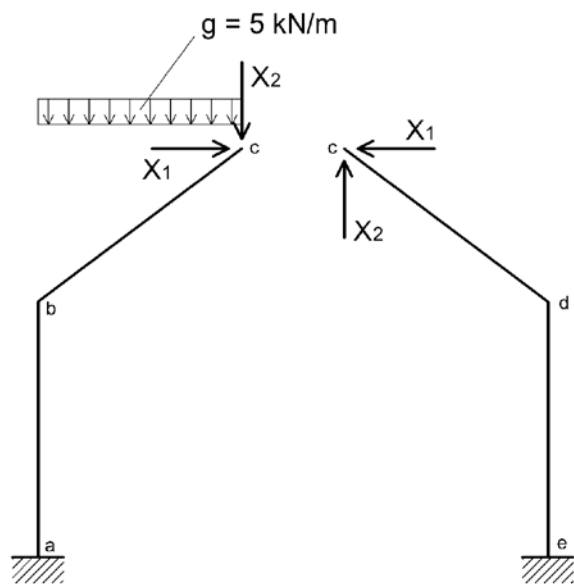
Obr.: Základní staticky určitá soustava

### Kanonické rovnice – deformační podmínky

Sestavte kanonické rovnice a určete velikost neznámých sil:

$$X_1 = (-3,538) [\text{kN}]$$

$$X_2 = (-4,6875) [\text{kN}]$$



Obr.: Základní staticky určitá soustava

#### Kanonické rovnice – deformační podmínky

$$(\delta_{10}^L + \delta_{10}^P) + (\delta_{11}^L + \delta_{11}^P)X_1 + (\delta_{12}^L + \delta_{12}^P)X_2 = 0$$

$$(\delta_{20}^L + \delta_{20}^P) + (\delta_{21}^L + \delta_{21}^P)X_1 + (\delta_{22}^L + \delta_{22}^P)X_2 = 0$$

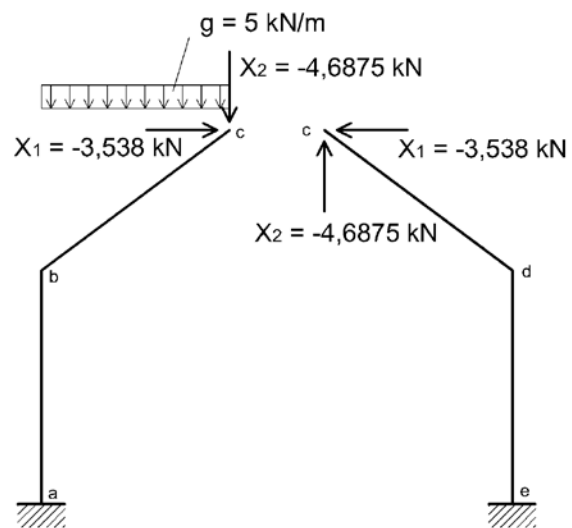
$$(1250 \cdot 10^3 + 0) + (176,667 + 176,667)X_1 + (130 - 130)X_2 = 0$$

$$(1000 \cdot 10^3 + 0) + (130 - 130)X_1 + (106,667 + 106,667)X_2 = 0$$

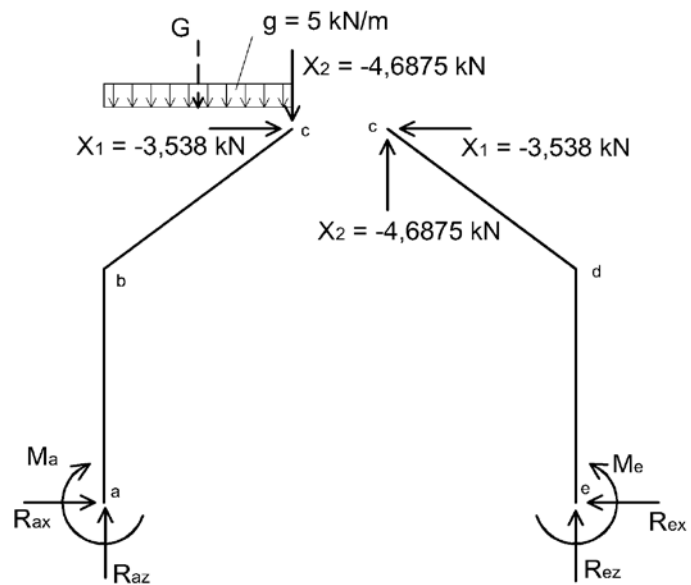
#### Řešení

$$X_1 = -3,538 \text{ kN}$$

$$X_2 = -4,6875 \text{ kN}$$



Obr.: Výsledné zatížení základní soustavy



Obr.: Výsledné zatížení základní soustavy – reakce

### Výsledné průběhy vnitřních sil

Určete reakce:

$$R_{ex} = (3,538) [\text{kN}]$$

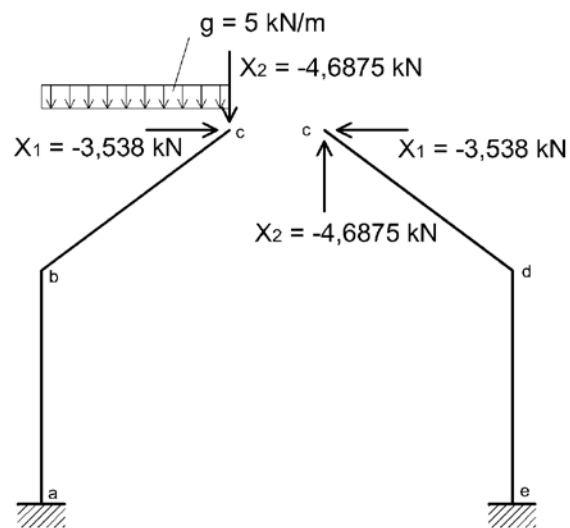
$$R_{ez} = (4,688) [\text{kN}]$$

$$M_e = (-9,553) [\text{kNm}]$$

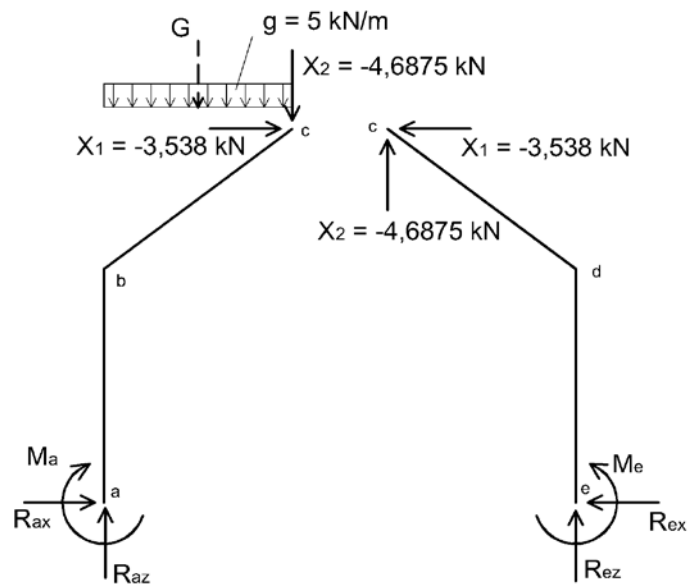
$$R_{ax} = (3,538) [\text{kN}]$$

$$R_{az} = (15,312) [\text{kN}]$$

$$M_a = (7,056) [\text{kNm}]$$



Obr.: Výsledné zatížení základní soustavy



Obr.: Výsledné zatížení základní soustavy – reakce

### Výsledné průběhy vnitřních sil

Reakce

$$\begin{aligned}
 \sum F_{x,i}^P &= 0 & R_{ex} + X_1 &= 0 & R_{ex} &= 3,538 \text{ kN} \\
 \sum F_{z,i}^P &= 0 & R_{ez} + X_2 &= 0 & R_{ez} &= 4,688 \text{ kN} \\
 \sum M_{e,i}^P &= 0 & X_1 \cdot 8 + M_e - X_2 \cdot 4 &= 0 & M_e &= -9,553 \text{ kNm} \\
 \sum F_{x,i}^L &= 0 & X_1 + R_{ax} &= 0 & R_{ax} &= 3,538 \text{ kN} \\
 \sum F_{z,i}^L &= 0 & R_{az} - X_2 - G &= 0 & R_{az} &= 15,312 \text{ kN} \\
 \sum M_{a,i}^L &= 0 & M_a + X_2 \cdot 4 + X_1 \cdot 8 + G \cdot 2 &= 0 & M_a &= 7,056 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

Určete normálové a posouvající síly:

$$N_a = (-15,312) [\text{kN}]$$

$$V_a = (-3,538) [\text{kN}]$$

$$N_{bc} = (-12,018) [\text{kN}]$$

$$V_{bc} = (10,127) [\text{kN}]$$

$$N_{cb} = (-0,017) [\text{kN}]$$

$$V_{cb} = (-5,873) [\text{kN}]$$

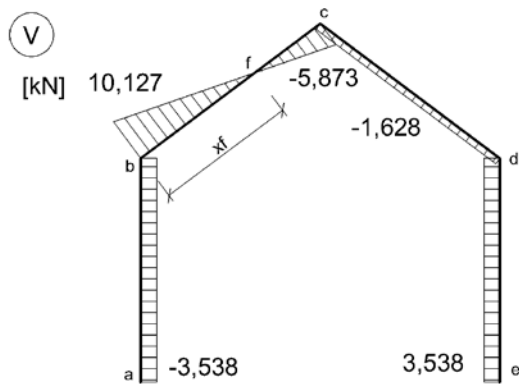
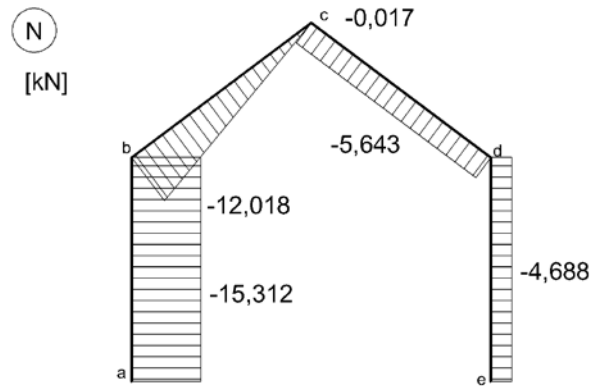
$$N_{cd} = (-5,643) [\text{kN}]$$

$$V_{cd} = (-1,628) [\text{kN}]$$

$$N_e = (-4,688) [\text{kN}]$$

$$V_e = (3,538) [\text{kN}]$$

Vykreslete průběhy normálových a posouvajících sil.



Obr.: Výsledné průběhy vnitřních sil

### Výsledné průběhy vnitřních sil

Normálové a posouvající síly:

$$N_a = -R_{az} = -15,312 \text{ kN}$$

$$V_a = -R_{ax} = -3,538 \text{ kN}$$

$$N_{bc} = -R_{ax} \cdot \cos \alpha - R_{az} \cdot \sin \alpha = -12,018 \text{ kN}$$

$$V_{bc} = -R_{ax} \cdot \sin \alpha + R_{az} \cdot \cos \alpha = 10,127 \text{ kN}$$

$$N_{cb} = X_1 \cdot \cos \alpha - X_2 \cdot \sin \alpha = -0,017 \text{ kN}$$

$$V_{cb} = X_1 \cdot \sin \alpha + X_2 \cdot \cos \alpha = -5,873 \text{ kN}$$

$$N_{cd} = X_1 \cdot \cos \alpha + X_2 \cdot \sin \alpha = -5,643 \text{ kN}$$

$$N_e = -R_{ez} = -4,688 \text{ kN}$$

$$V_e = R_{ex} = 3,538 \text{ kN}$$

Určete polohu průřezu s nulovou posouvající silou:

$$x_f = (3,165) \text{ [m]}$$

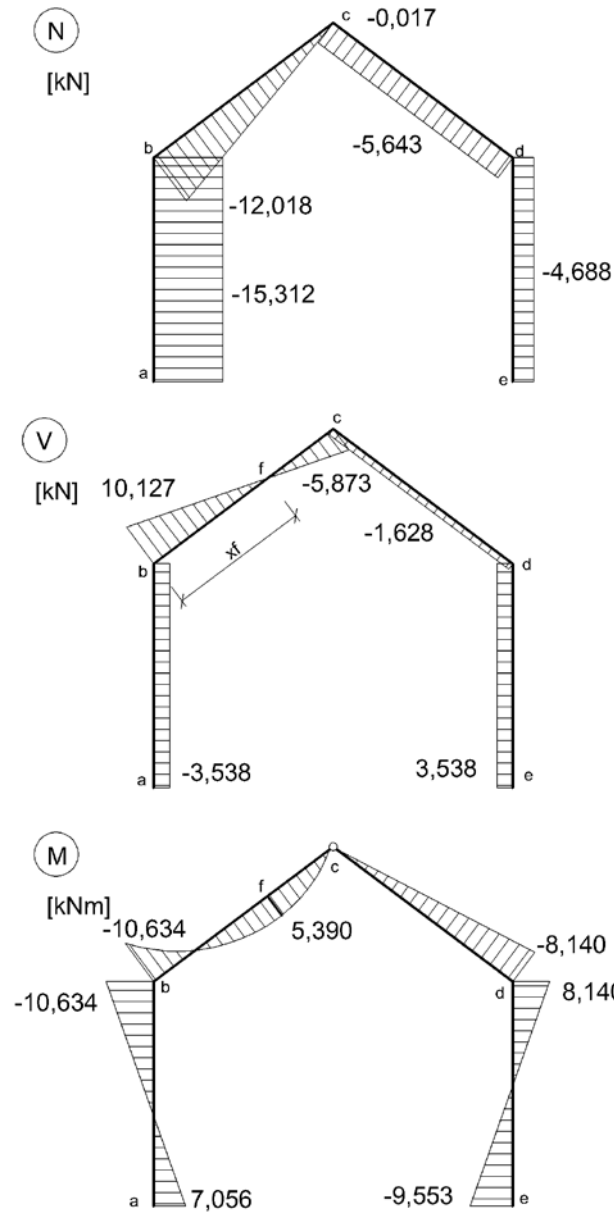
Určete ohybové momenty:

$$M_b = (-10,634) \text{ [kNm]}$$

$$M_f = (5,39) \text{ [kNm]}$$

$$M_d = (-8,14) \text{ [kNm]}$$

Vykreslete průběh ohybových momentů.



Obr.: Výsledné průběhy vnitřních sil

### Výsledné průběhy vnitřních sil

Normálové a posouvající síly:

$$N_a = -R_{az} = -15,312 \text{ kN}$$

$$V_a = -R_{ax} = -3,538 \text{ kN}$$

$$N_{bc} = -R_{ax} \cdot \cos \alpha - R_{az} \cdot \sin \alpha = -12,018 \text{ kN}$$

$$V_{bc} = -R_{ax} \cdot \sin \alpha + R_{az} \cdot \cos \alpha = 10,127 \text{ kN}$$

$$N_{cb} = X_1 \cdot \cos \alpha - X_2 \cdot \sin \alpha = -0,017 \text{ kN}$$

$$V_{cb} = X_1 \cdot \sin \alpha + X_2 \cdot \cos \alpha = -5,873 \text{ kN}$$

$$N_{cd} = X_1 \cdot \cos \alpha + X_2 \cdot \sin \alpha = -5,643 \text{ kN}$$

$$N_e = -R_{ez} = -4,688 \text{ kN}$$

$$V_e = R_{ex} = 3,538 \text{ kN}$$

Příčné spojité zatížení prutu b-c

$$q = g \cdot \cos^2 \alpha = 3,2 \text{ kN / m}$$

Poloha průřezu s nulovou posouvající silou:

$$x_f = \frac{V_{bc}}{q} = \frac{10,127}{3,2} = 3,165 \text{ m}$$

Ohybové momenty

$$M_b = M_a - 5 \cdot R_{ax} = -10,634 \text{ kNm}$$

$$M_f = M_b + x_f \cdot V_{bc} - \frac{q \cdot x_f^2}{2} = 5,39 \text{ kNm}$$

$$M_d = 5 \cdot V_{cd} = -8,14 \text{ kNm}$$