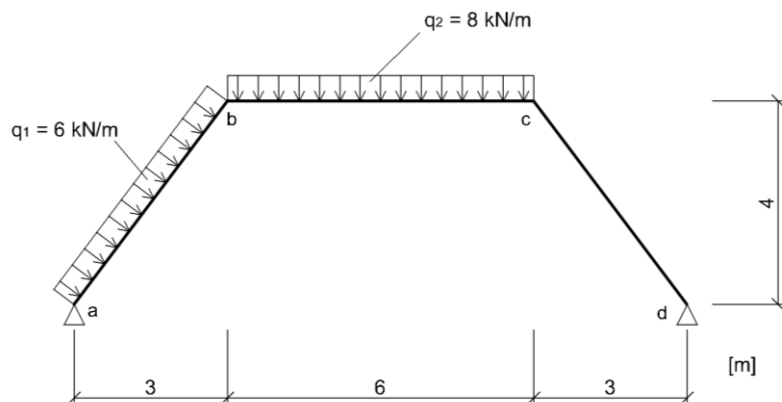




Obr.: Model konstrukce a zatížení

Příklad č. 10 – Staticky neurčitý rám

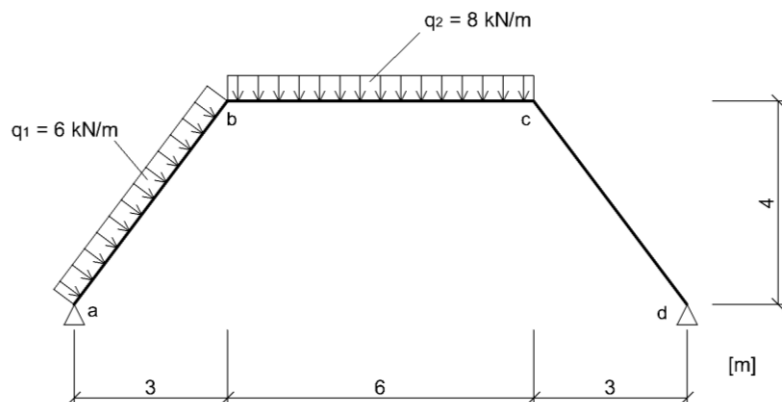
Zadání

Vykreslete průběhy vnitřních sil na staticky neurčité konstrukci podle obrázku. Pro řešení použijte silovou metodu. Zanedbejte práci normálových a posouvajících sil.

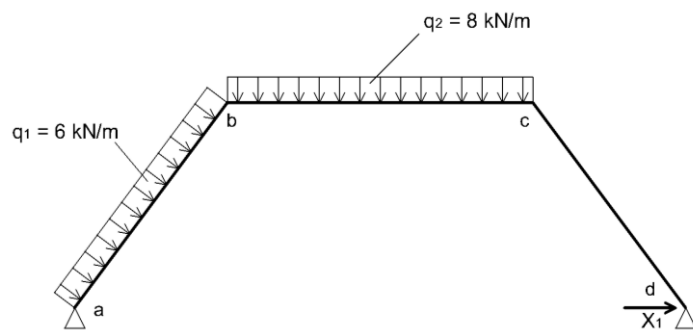
Řešení

Konstrukce bude řešena silovou metodou. Je jedenkrát staticky neurčitá. Základní soustava se vytvoří odebráním jedné vazby. Bude odebrána vazba proti vodorovnému posunu v bodě d .

Nakreslete základní staticky určitou soustavu a napište deformační podmínku.



Obr.: Model konstrukce a zatížení



Obr.: Základní staticky určitá soustava

Konstrukce bude řešena silovou metodou. Je jedenkrát staticky neurčitá. Základní soustava se vytvoří odebráním jedné vazby. Bude to vazba proti vodorovnému posunu v bodě d .

Deformační podmínka bude předepisovat nulový vodorovný posun v bodě d .

$$u_d = \delta_1 = 0$$

Základní soustava se zatíží dvěma zatěžovacími stavy.

Nultý zatěžovací stav bude odpovídat původnímu zatížení konstrukce.

První zatěžovací stav bude tvořit jednotková síla ve směru první neznámé síly – vodorovné reakce v bodě d .

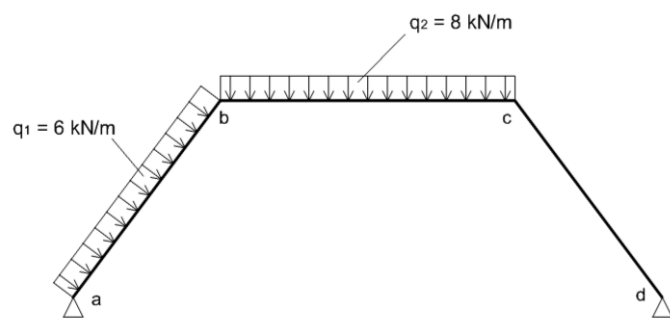
Postup:

Určení průběhů ohybových momentů pro jednotlivé zatěžovací stavy.

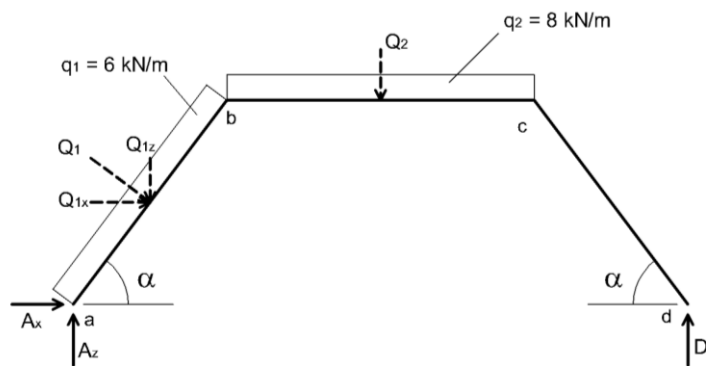
Výpočet přemístění pro deformační podmínku.

Řešením neznámé síly X_1 z deformační podmínky.

Základní staticky určitá soustava se zatíží původním zatížením a známou reakcí X_1 a vyřeší se průběhy vnitřních sil.



Obr.: Původní zatížení základní soustavy



Zatěžovací stav 0 – Původní zatížení

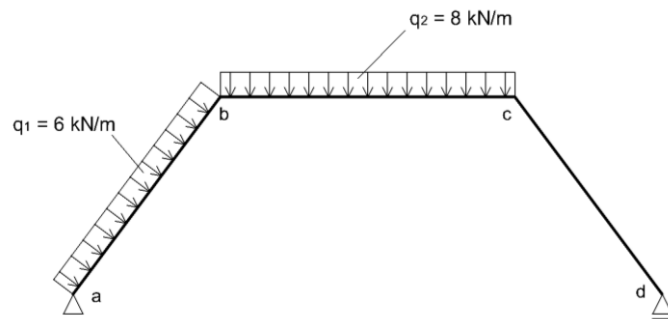
Určete náhradní břemena:

$$Q_1 = (30) \text{ [kN]}$$

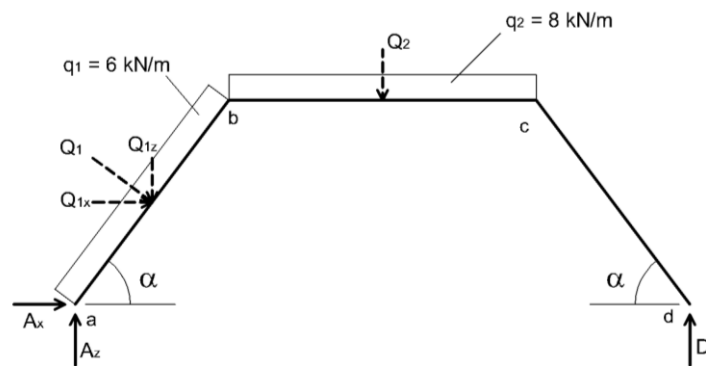
$$Q_{1x} = (24) \text{ [kN]}$$

$$Q_{1z} = (18) \text{ [kN]}$$

$$Q_2 = (48) \text{ [kN]}$$



Obr.: Původní zatížení základní soustavy



Zatěžovací stav 0 – Původní zatížení

$$L_{ab} = L_{cd} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5m$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8$$

Náhradní břemena:

$$Q_1 = 5 \cdot q_1 = 5 \cdot 6 = 30 \text{ kN}$$

$$Q_{1x} = Q_1 \cdot \cos \alpha = 30 \cdot 0,8 = 24 \text{ kN}$$

$$Q_{1z} = Q_1 \cdot \sin \alpha = 30 \cdot 0,6 = 18 \text{ kN}$$

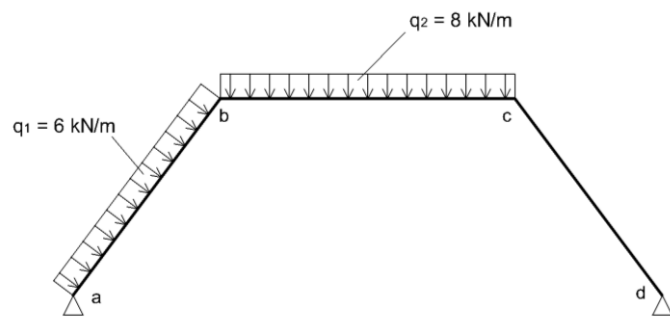
$$Q_2 = 6 \cdot q_2 = 6 \cdot 8 = 48 \text{ kN}$$

Určete reakce:

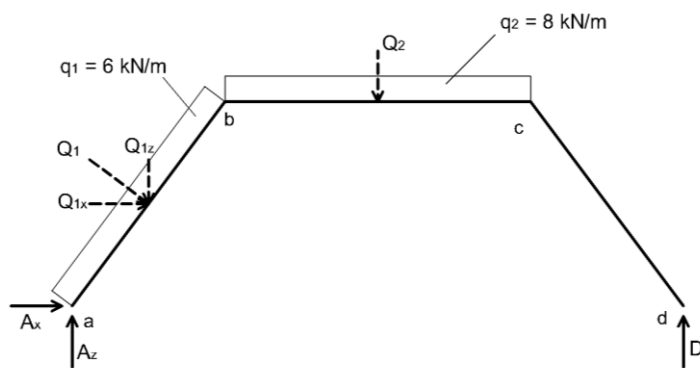
$$A_x = (-24) \text{ [kN]}$$

$$A_z = (35,75) \text{ [kN]}$$

$$D = (30,25) \text{ [kN]}$$



Obr.: Původní zatížení základní soustavy



Obr.: Schéma s náhradními břemeny

Zatěžovací stav 0: Původní zatížení

Náhradní břemena:

$$Q_1 = 5 \cdot q_1 = 5 \cdot 6 = 30 \text{ kN}$$

$$Q_{1x} = Q_1 \cdot \cos \alpha = 30 \cdot 0,8 = 24 \text{ kN}$$

$$Q_{1z} = Q_1 \cdot \sin \alpha = 30 \cdot 0,6 = 18 \text{ kN}$$

$$Q_2 = 6 \cdot q_2 = 6 \cdot 8 = 48 \text{ kN}$$

Výpočet reakcí:

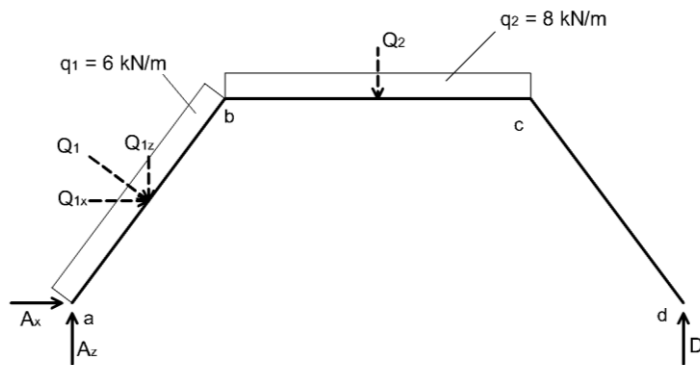
$$\sum F_{x,i} = 0 \quad A_x + Q_{1x} = 0 \quad A_x = -24 \text{ kN}$$

$$\sum M_{d,i} = 0 \quad -12A_z + 10,5Q_{1z} - 2Q_{2x} + 6Q_2 = 0 \quad A_z = 35,75 \text{ kN}$$

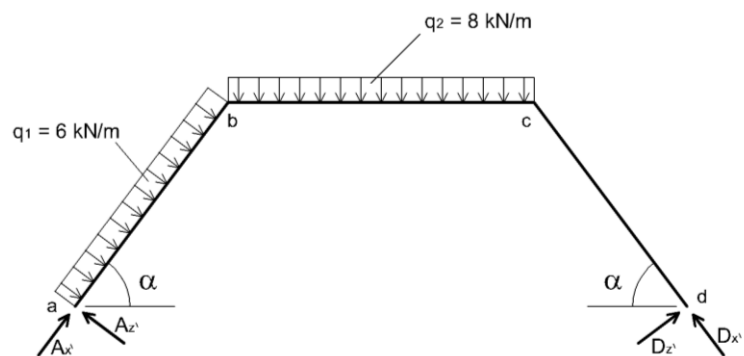
$$\sum M_{a,i} = 0 \quad -1,5Q_{1z} - 2Q_{1x} - 6Q_2 + 12D = 0 \quad D = 30,25 \text{ kN}$$

Kontrola:

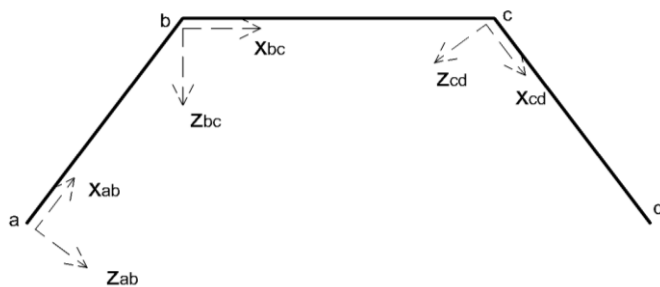
$$\sum F_{z,i} = 0 \quad Q_{1z} + Q_2 - A_z - D = 0$$



Obr.: Schéma s náhradními břemeny



Obr.: Reakce v lokálním souřadném systému prutů



Obr.: Lokální systémy prutů

Zatěžovací stav 0: Původní zatížení

Pro výpočet vnitřních sil je vhodné transformovat reakce do lokálního souřadného systému prutů.

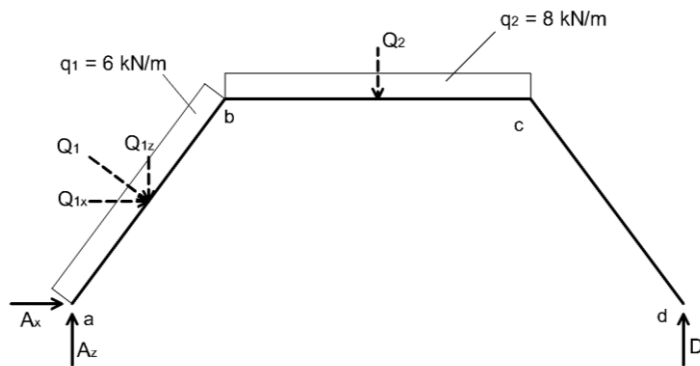
Určete:

$$A'_x = (15,8) \text{ [kN]}$$

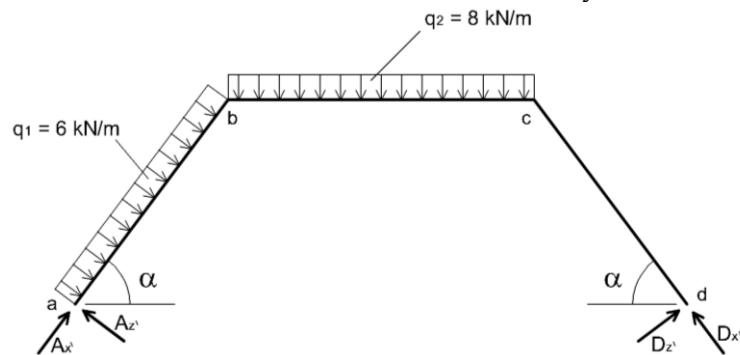
$$A'_z = (41,85) \text{ [kN]}$$

$$D'_x = (-24,2) \text{ [kN]}$$

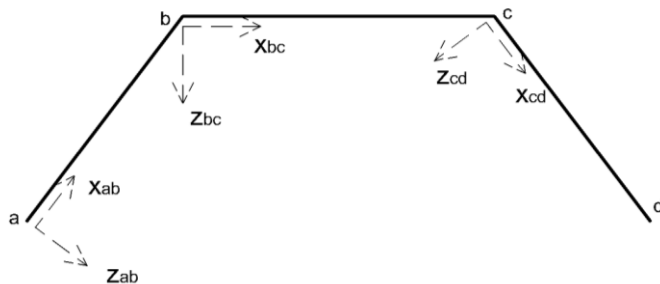
$$D'_z = (18,15) \text{ [kN]}$$



Obr.: Schéma s náhradními břemeny



Obr.: Reakce v lokálním souřadném systému prutů



Obr.: Lokální systémy prutů

Zatěžovací stav 0: Původní zatížení

Pro výpočet vnitřních sil je vhodné transformovat reakce do lokálního souřadného systému prutů.

Transformace reakcí:

$$A'_x = A_x \cos \alpha + A_z \sin \alpha = -24 \cdot 0,6 + 37,75 \cdot 0,8 = 15,8 \text{ kN}$$

$$A'_z = -A_x \sin \alpha + A_z \cos \alpha = -(-24) \cdot 0,8 + 37,75 \cdot 0,6 = 41,85 \text{ kN}$$

$$D'_x = D \sin \alpha = 30,25 \cdot 0,8 = 24,2 \text{ kN}$$

$$D'_z = D \cos \alpha = 30,25 \cdot 0,6 = 18,15 \text{ kN}$$

Určete posouvající síly:

$$V_a = (40,65) \text{ [kN]}$$

$$V_{ba} = (10,65) \text{ [kN]}$$

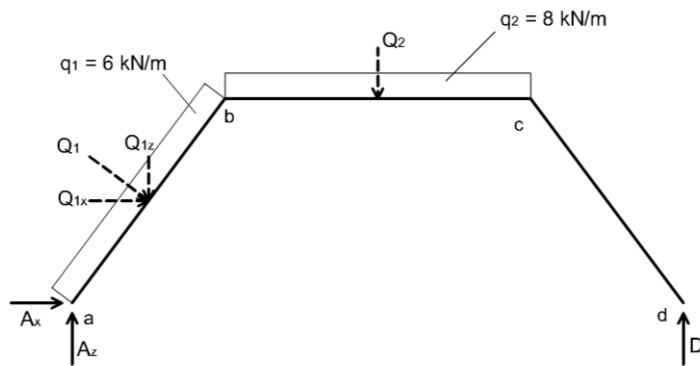
$$V_{bc} = (17,75) \text{ [kN]}$$

$$V_{cb} = (-30,25) \text{ [kN]}$$

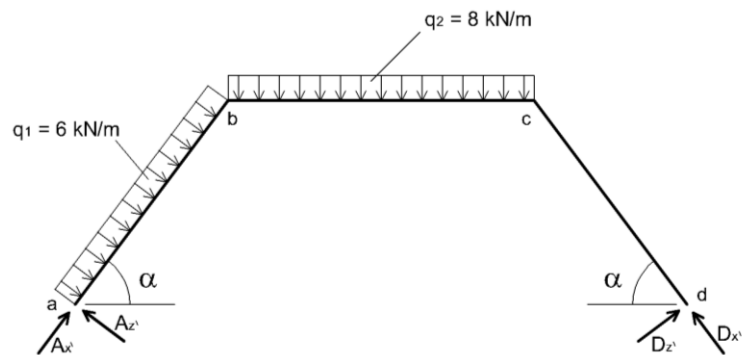
$$V_{cd} = (-18,15) \text{ [kN]}$$

$$V_d = (-18,15) \text{ [kN]}$$

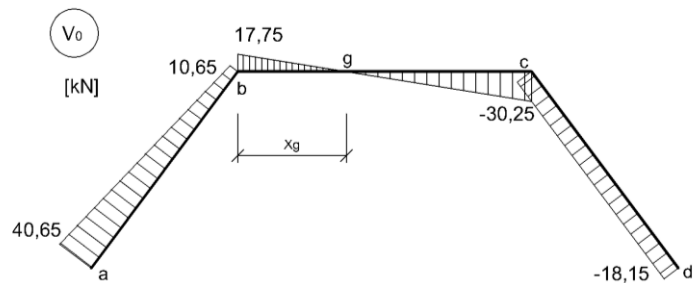
Vykreslete průběh posouvajících sil.



Obr.: Schéma s náhradními břemeny



Obr.: Reakce v lokálním souřadném systému prutů



Obr.: Průběhy posouvajících sil pro ZS 0

Zatěžovací stav 0: Původní zatížení

Polohy průřezu s nulovou posouvající silou:

$$x_g = (2,22) \text{ [m]}$$

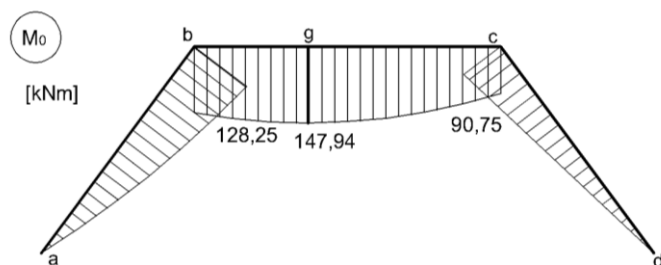
Určete ohybové momenty:

$$M_b = (128,25) \text{ [kNm]}$$

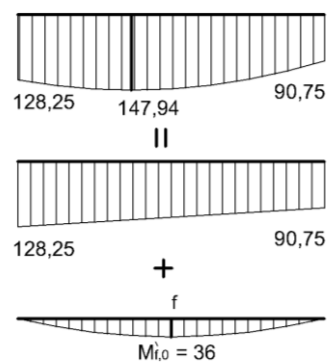
$$M_c = (90,75) \text{ [kNm]}$$

$$M_g = (147,94) \text{ [kNm]}$$

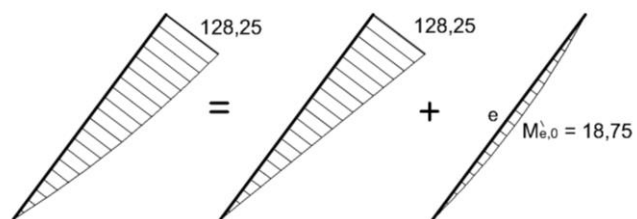
Vykreslete průběh ohybových momentů.



Obr.: Ohybové momenty pro ZS 0



Obr.: Rozklad ohybových momentů na prostředním prutu

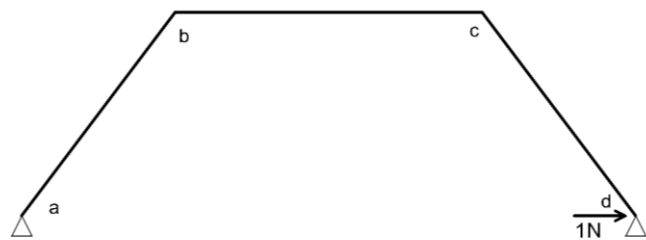


Obr.: Rozklad ohybových momentů na levém prutu

Zatěžovací stav 0: Původní zatížení

Parabolické křivky je vhodné rozložit na lineární a kvadratickou část. Vrchol kvadratické části je možné určit ze vztahu:

$$M' = \frac{1}{8} qL^2$$



Obr.: Zatěžovací stav 1

Zatěžovací stav 1 – Jednotková síla ve směru neznámé síly X_1

Určete ohybové momenty:

$$M_b = (4) \text{ [Nm]}$$

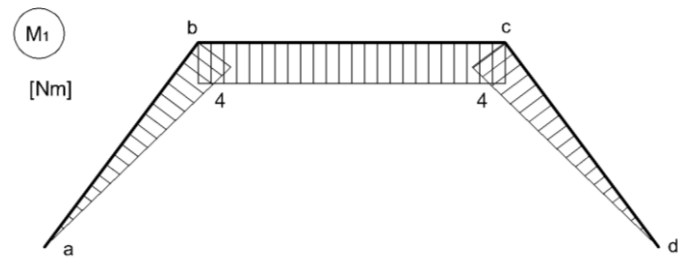
$$M_c = (4) \text{ [Nm]}$$

Vykreslete průběh ohybových momentů.

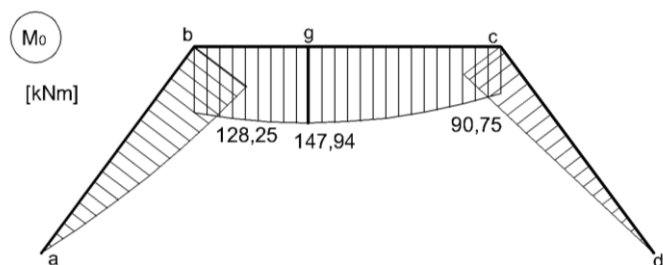
Zatěžovací stav 1 – Jednotková síla ve směru neznámé síly X_1



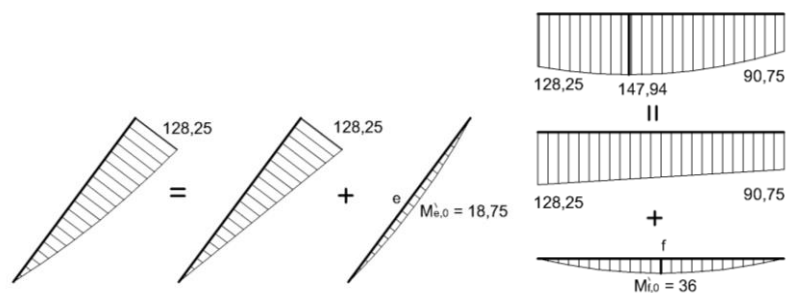
Obr.: Zatěžovací stav 1



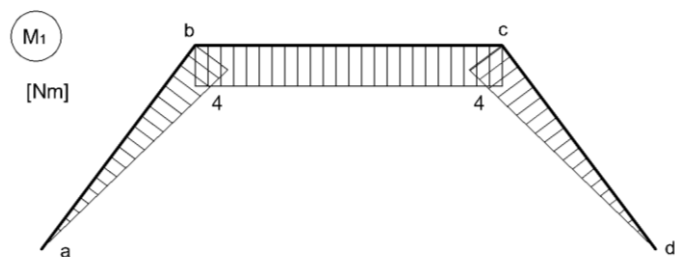
Obr. Ohybové momenty pro ZS 1



Obr.: Ohybové momenty pro ZS 0



Obr.: Rozklad ohybových momentů pro ZS 0



Obr. Ohybové momenty pro ZS 1

Výpočet přemístění:

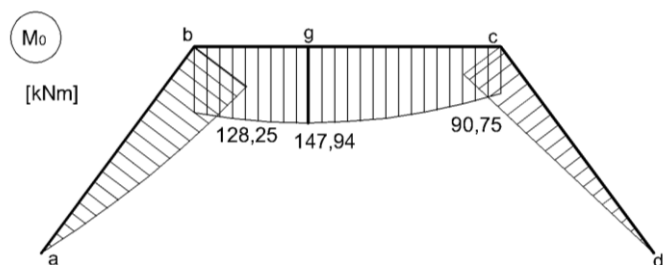
S použitím Maxwell-Mohrova vzorce určete přemístění:

Vodorovný posun bodu d způsobený původním zatížením:

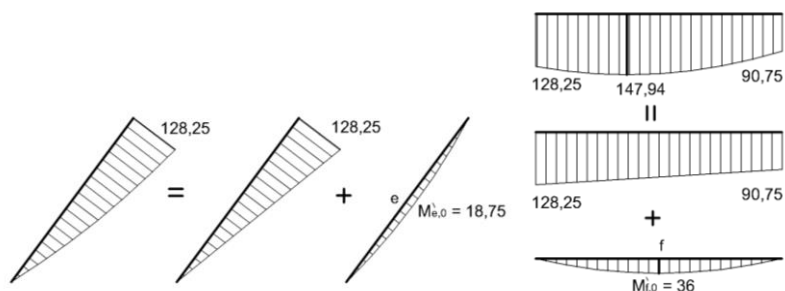
$$\delta_{10} = (4789000) / EI$$

Vodorovný posun bodu d způsobený jednotkovým zatížením ve směru neznámé síly X:

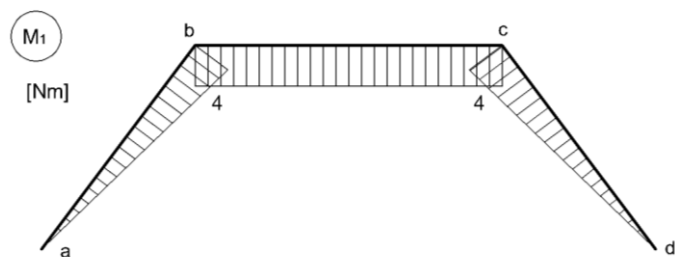
$$\delta_{11} = (149,333) / EI$$



Obr.: Ohybové momenty pro ZS 0



Obr.: Rozklad ohybových momentů pro ZS 0



Obr. Ohybové momenty pro ZS 1

Výpočet přemístění:

Vodorovný posun bodu d způsobený původním zatížením:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{3} M_{ba,0} \cdot M_{ba,1} \cdot L_{ab} + \frac{1}{3} M'_{e,0} \cdot M_{ba,1} \cdot L_{ab} + \frac{1}{2} M_{bc,1} (M_{bc,0} + M_{cb,0}) \cdot L_{bc} + \frac{2}{3} M'_{f,0} \cdot M_{bc,1} \cdot L_{bc} + \frac{1}{3} M_{cd,0} \cdot M_{cd,1} \cdot L_{cd} \right\}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{3} \cdot 128250 \cdot 4 \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 1875 \cdot 4 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (128250 + 90750) \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 36000 \cdot 4 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 90750 \cdot 4 \cdot 5 \right\}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \{ 855000 + 125000 + 2628000 + 576000 + 605000 \} = \frac{4789000}{EI}$$

Vodorovný posun bodu d způsobený jednotkovým zatížením ve směru neznámé síly X:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{3} M_{ba,1} \cdot M_{ba,1} \cdot L_{ab} + M_{bc,1} \cdot M_{bc,1} \cdot L_{bc} + \frac{1}{3} M_{cd,1} \cdot M_{cd,1} \cdot L_{cd} \right\}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \right\}$$

$$\delta_{11} = \frac{149,333}{EI}$$

Kanonická rovnice - deformační podmínka:

Sestavte deformační podmínku a vyřešte neznámou reakci :

$$X_1 = (-32,0692) \text{ [kN]}$$

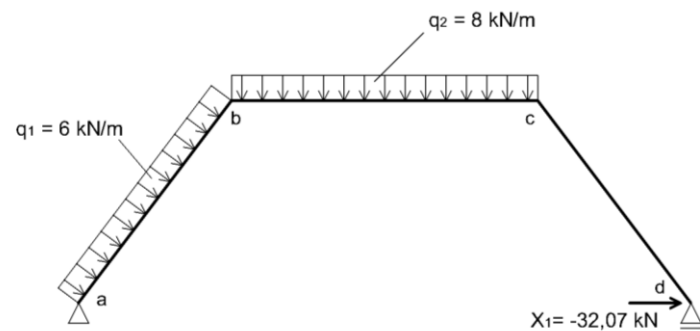
Kanonická rovnice - deformační podmínka:

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$$

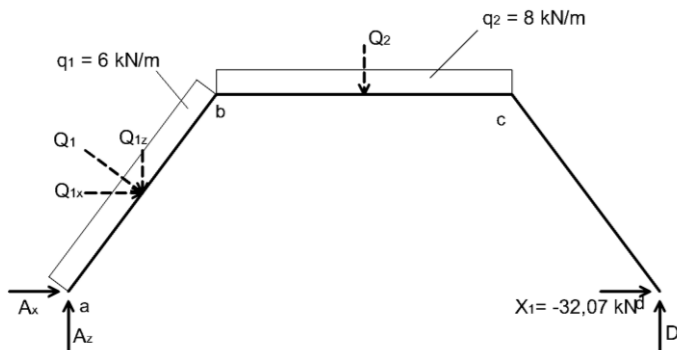
$$\frac{1}{EI} 4789000 + \frac{1}{EI} 149,333 X_1 = 0$$

Řešení

$$X_1 = -32,0692 kN$$



Obr.: Výsledné zatížení základní staticky určité soustavy



Obr.: Schéma reakcí a náhradních břemen

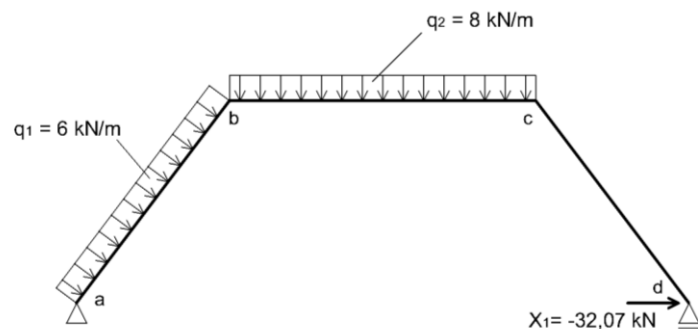
Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1

Určete reakce:

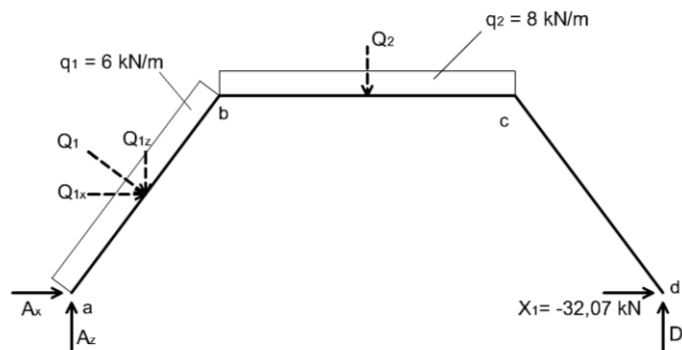
$$A_x = (8,069) \text{ [kN]}$$

$$A_z = (35,75) \text{ [kN]}$$

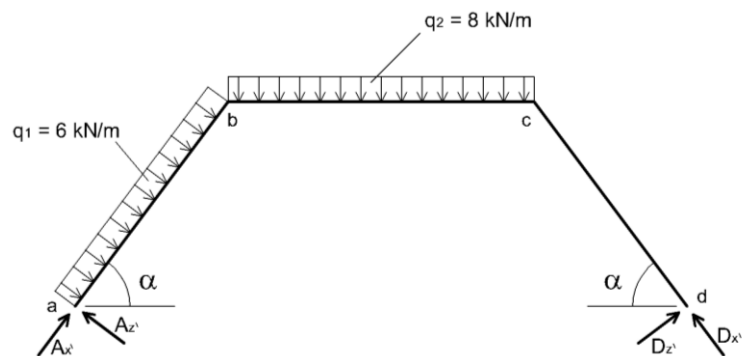
$$D = (30,25) \text{ [kN]}$$



Obr.: Výsledné zatížení základní staticky určité soustavy



Obr.: Schéma reakcí a náhradních břemen



Obr.: Reakce v lokálním souřadném systému prutů

Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1

Výpočet reakcí:

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad A_x + Q_{1x} + X_1 = 0 \quad A_x = 8,069 \text{ kN}$$

$$\sum M_{a,i} = 0 \quad -1,5Q_{1z} - 2Q_{1x} - 6Q_2 + 12D = 0 \quad D = 30,25 \text{ kN}$$

$$\sum M_{d,i} = 0 \quad -12A_z + 10,5Q_{1z} - 2Q_{2x} + 6Q_2 = 0 \quad A_z = 35,75 \text{ kN}$$

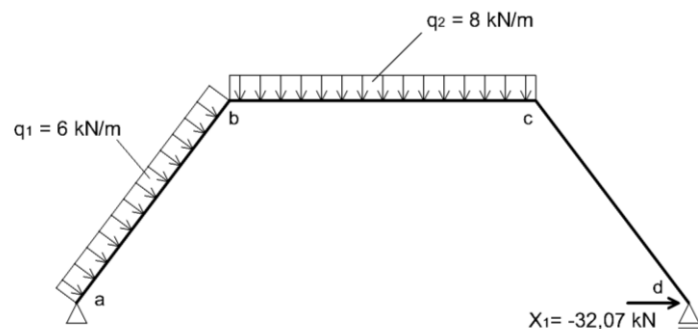
Transformujte reakce do lokálního souřadného systému prutů (se silou X_1 pracujte jako s reakcí D_x):

$$A'_x = (15,8) \text{ [kN]}$$

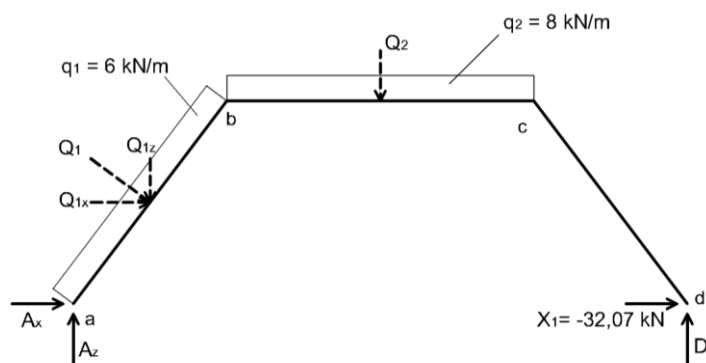
$$A'_z = (41,85) \text{ [kN]}$$

$$D'_x = (-24,2) \text{ [kN]}$$

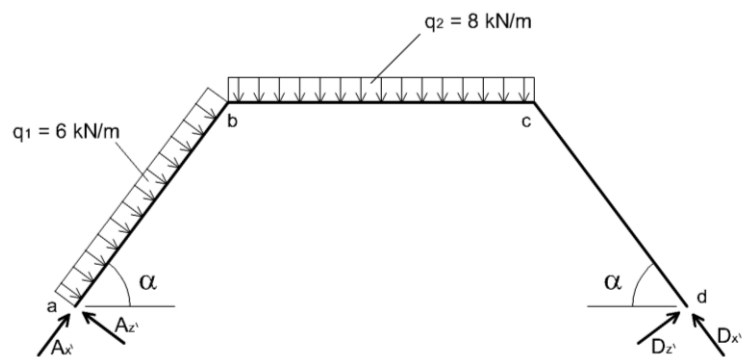
$$D'_z = (18,15) \text{ [kN]}$$



Obr.: Výsledné zatížení základní staticky určité soustavy



Obr.: Schéma reakcí a náhradních břemen



Obr.: Reakce v lokálním souřadném systému prutů

Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1

Reakce:

$$A_x = 8,069 \text{ kN}$$

$$D = 30,25 \text{ kN}$$

$$A_z = 35,75 \text{ kN}$$

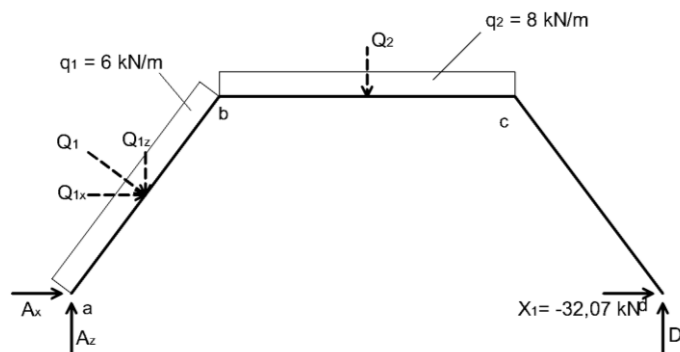
Transformace reakcí do lokálního souřadného systému prutů:

$$A'_x = A_x \cos \alpha + A_z \sin \alpha = 8,069 \cdot 0,6 + 35,75 \cdot 0,8 = 33,44 \text{ kN}$$

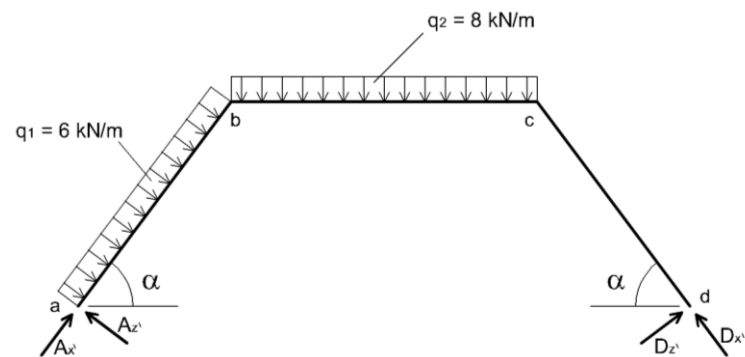
$$A'_z = -A_x \sin \alpha + A_z \cos \alpha = -8,069 \cdot 0,8 + 35,75 \cdot 0,6 = 14,99 \text{ kN}$$

$$D'_x = -X \cos \alpha + D \sin \alpha = -(-32,07) \cdot 0,6 + 30,25 \cdot 0,8 = 43,44 \text{ kN}$$

$$D'_z = X \sin \alpha + D \cos \alpha = -32,07 \cdot 0,8 + 30,25 \cdot 0,6 = -7,51 \text{ kN}$$



Obr.: Schéma reakcí a náhradních břemen



Obr.: Reakce v lokálním souřadném systému prutů

Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1

Reakce:

$$A_x = 8,069 \text{ kN}$$

$$D = 30,25 \text{ kN}$$

$$A_z = 35,75 \text{ kN}$$

Reakce v lokálním souřadném systému prutů:

$$A'_x = 33,44 \text{ kN}$$

$$A'_z = 14,99 \text{ kN}$$

$$D'_x = 43,44 \text{ kN}$$

$$D'_z = -7,51 \text{ kN}$$

Určete normálové síly:

$$N_a = (-33,44) \text{ [kN]}$$

$$N_{ba} = (-33,44) \text{ [kN]}$$

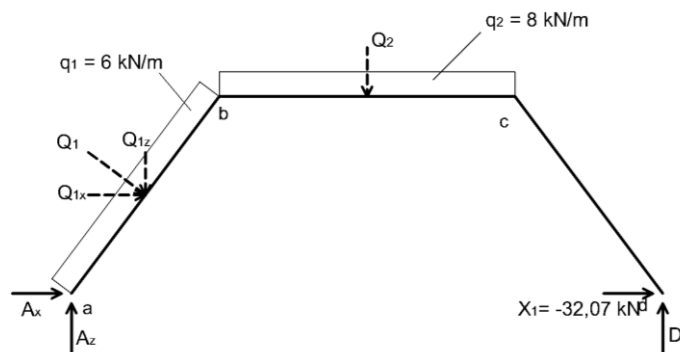
$$N_{bc} = (-32,07) \text{ [kN]}$$

$$N_{cb} = (-32,07) \text{ [kN]}$$

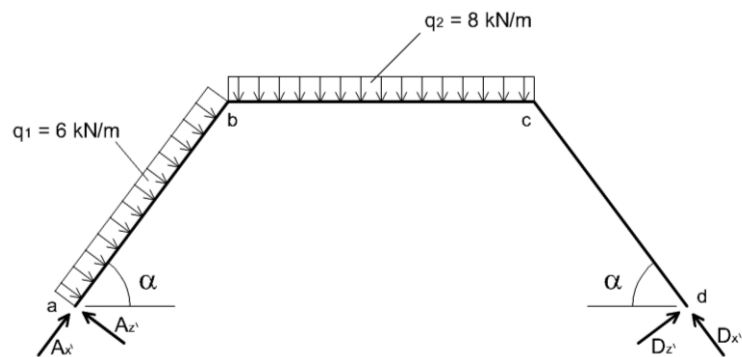
$$N_{cd} = (-43,44) \text{ [kN]}$$

$$N_d = (-43,44) \text{ [kN]}$$

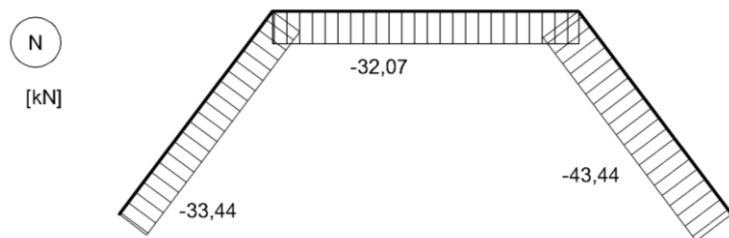
Vykreslete průběhy normálových sil.



Obr.: Schéma reakcí a náhradních břemen



Obr.: Reakce v lokálním souřadném systému prutů



Obr.: Průběhy normálových sil

Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1

Reakce:

$$A_x = 8,069 \text{ kN}$$

$$D = 30,25 \text{ kN}$$

$$A_z = 35,75 \text{ kN}$$

Reakce v lokálním souřadném systému prutů:

$$A'_x = 33,44 \text{ kN}$$

$$A'_z = 14,99 \text{ kN}$$

$$D'_x = 43,44 \text{ kN}$$

$$D'_z = -7,51 \text{ kN}$$

Určete posouvající síly:

$$V_a = (14,99) \text{ [kN]}$$

$$V_{ba} = (-15,01) \text{ [kN]}$$

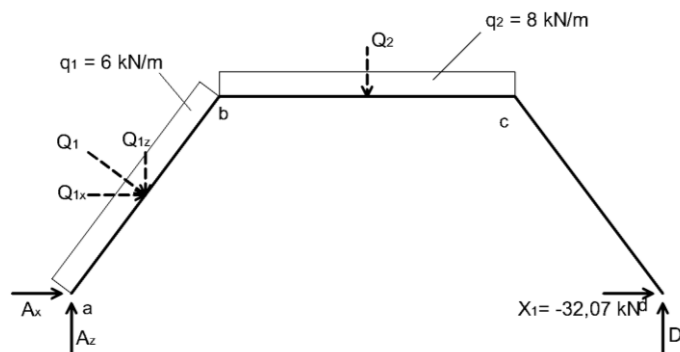
$$V_{bc} = (17,75) \text{ [kN]}$$

$$V_{cb} = (-30,25) \text{ [kN]}$$

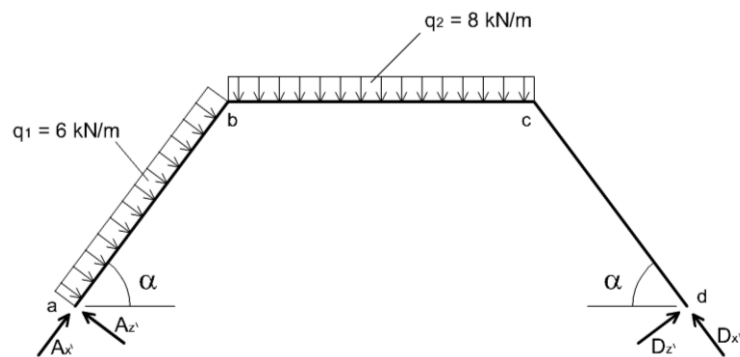
$$V_{cd} = (7,5) \text{ [kN]}$$

$$V_d = (7,5) \text{ [kN]}$$

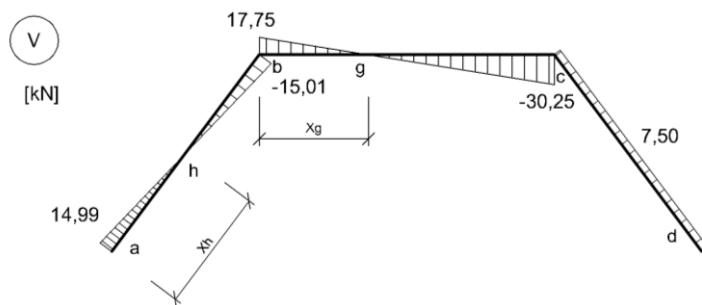
Vykreslete průběhy posouvajících sil.



Obr.: Schéma reakcí a náhradních břemen



Obr.: Reakce v lokálním souřadném systému prutů



Obr.: Průběhy posouvajících sil

Základní soustava zatížená původním zatížením a silou X_1

Reakce:

$$A_x = 8,069 \text{ kN}$$

$$D = 30,25 \text{ kN}$$

$$A_z = 35,75 \text{ kN}$$

Reakce v lokálním souřadném systému prutů:

$$A'_{x'} = 33,44 \text{ kN}$$

$$A'_{z'} = 14,99 \text{ kN}$$

$$D'_{x'} = 43,44 \text{ kN}$$

$$D'_{z'} = -7,51 \text{ kN}$$

Určete polohu průřezů s nulovou posouvající silou:

$$x_h = (2,50) \text{ [m]}$$

$$x_g = (2,22) \text{ [m]}$$

Určete velikost momentů:

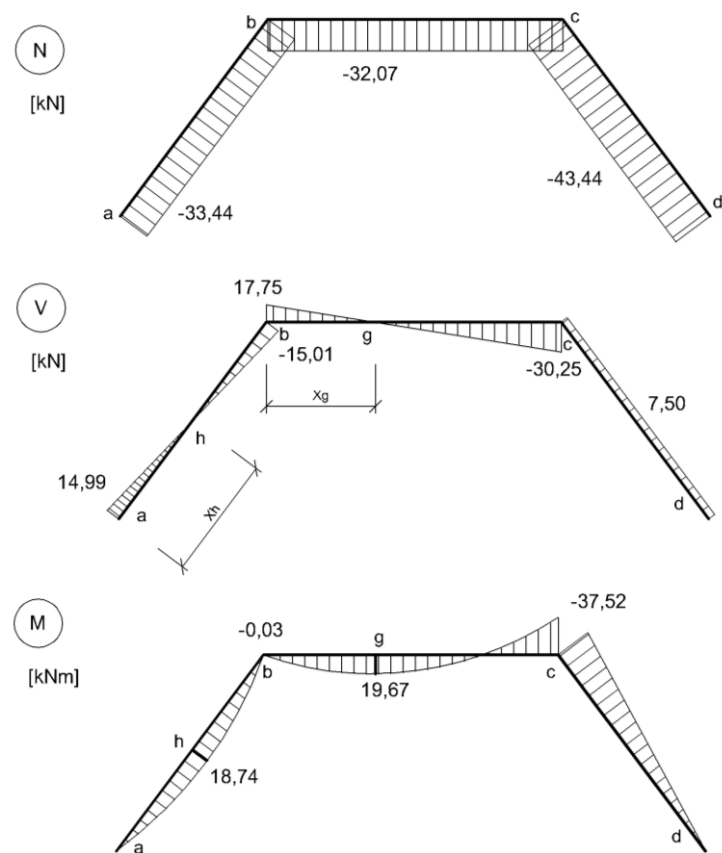
$$M_h = (-15,01) \text{ [kNm]}$$

$$M_b = (17,75) \text{ [kNm]}$$

$$M_g = (-30,25) \text{ [kNm]}$$

$$M_c = (7,5) \text{ [kNm]}$$

Vykreslete průběhy ohybových momentů.



Obr. 10.12: Výsledné průběhy vnitřních sil