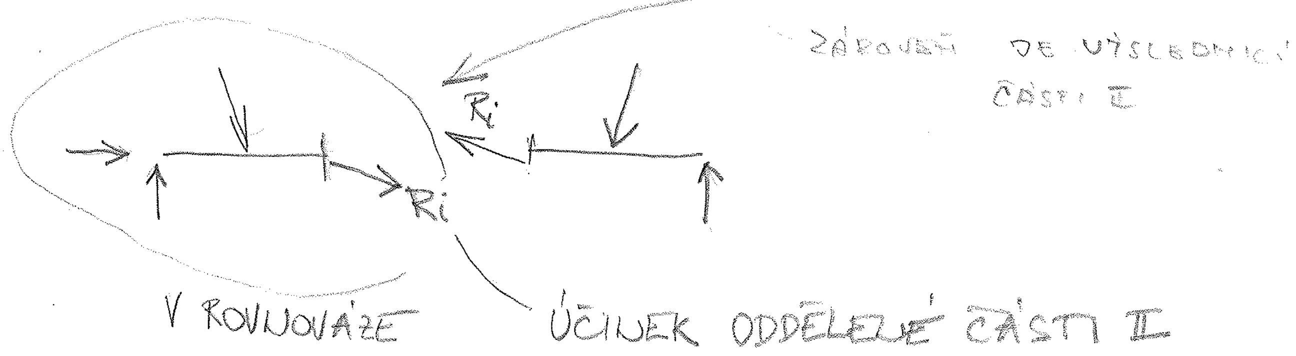
3. Přednáška

Vnitřní síly

Uvažujme rovinný prut obecně zatížený. Protože je v klidu, jsou vnější síly na něj působící v rovnováze. Rozdělme prut myšleným příčným řezem (tedy řezem kolmým k ose prutu).

Vnější síly na oddělené část konstrukce nejsou sami o sobě v rovnováze, přesto se jednotlivé části od sebe nepohybují. Musí tedy existovat další síly, které uvádějí každou část konstrukce do rovnováhy – vnitřní síly působící uvnitř průřezu vzniklého myšleným řezem.

Tyto vnitřní síly uvádí vnější síly na první části do rovnováhy, stejně jako to dělali vnější síly na oddělené druhé části – Tyto vnitřní síly působící na část první jsou tedy zároveň výslednicí vnějších sil z oddělené druhé části – jsou tedy účinkem oddělené části na průřez části stávající. Obdobná situace je i s druhou částí



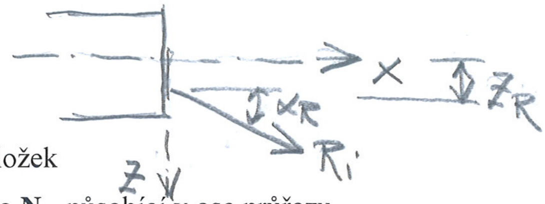
Nejenom celý nosník, ale i každá část nosníku, která je v klidu, je i v rovnováze. Platí pro ni podmínky rovnováhy. Síly působící na danou část nosníku tvoří vnější a vnitřní síly. Vnitřní síly lze tedy určit z podmínek rovnováhy pro všechny síly působící na dané části nosníku.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{zi} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{oi} = 0$$

Můžeme si tedy definovat :

- **Vnitřní síly nahrazují silový účinek části konstrukce oddělené myšleným řezem od části stávající**
- **Vnitřní síly uvádějí do rovnováhy síly na části konstrukce oddělené myšleným řezem**
- **Vnitřní síly vyjadřují vzájemnou akci a reakci částí konstrukce oddělených myšleným řezem**
- Vnitřní síly jsou síly působící ve vnitřních vazbách, tj. vazbách držících pohromadě jednotlivé části konstrukce

Vnitřní síly rovinného prutu mohou být vyjádřeny pomocí jedné **výslednice R** obecně působící vzhledem k rovině průřezu



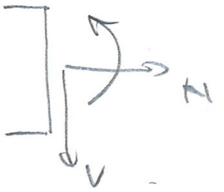
$R_i; \alpha_{Ri}; z_R$

nebo pomocí složek

Normálová síla N - působící v ose průřezu

Posouvající síla V - působící kolmo k ose průřezu

Ohybový moment M - definovaný k těžišti průřezu



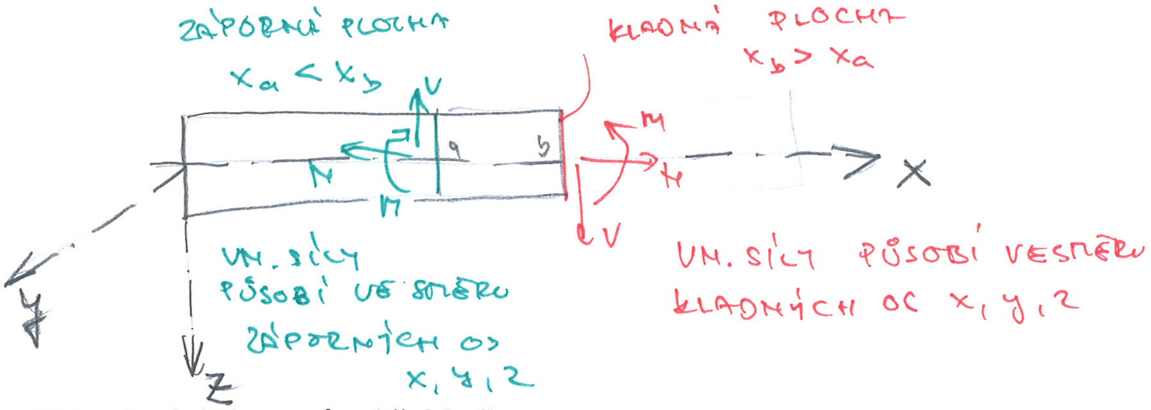
$N = R_i \cos\alpha_R$

$V = R_i \sin\alpha_R$

$M = N\, z_R$

Konvence

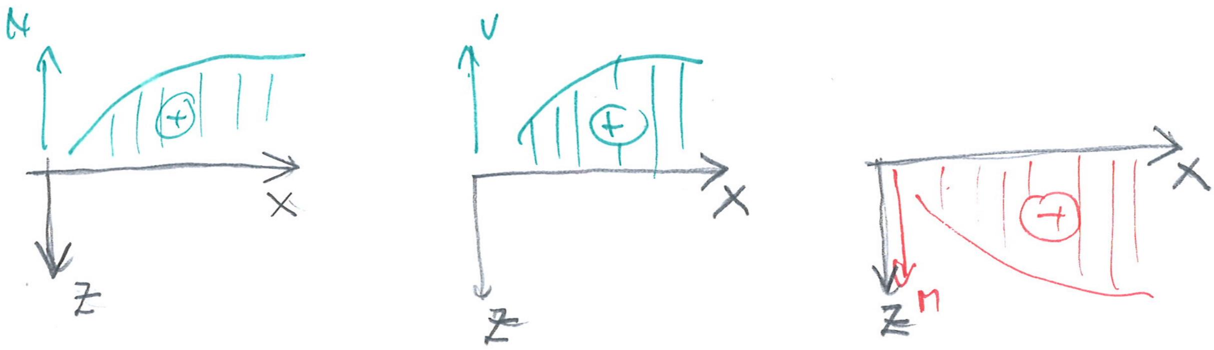
Mějme element prutu vydělený z celého prutu dvěma myšlenými řezy. Za tzv. kladnou plochu průřezu označíme tu , která má větší souřadnici x. Na tomto kladném průřezu působí kladné vnitřní síly ve směru kladných os xyz. Na druhou tzv. zápornou plochu (s menší souřadnicí x působí kladné vnitřní síly ve směru záporných os xyz.



Vykreslování diagramů vnitřních sil

Vnitřní síla je funkcí souřadnice x osy (pro danou polohu na ose x dostáváme hodnotu vnitřní síly. Velikosti vnitřních sil vynášíme do diagramů (grafů funkce) kolmo k ose prutu x.

Kladný směr osy N a V je totožný se záporným směrem osy z, Kladný směr osy M je totožný s kladným směrem osy z.

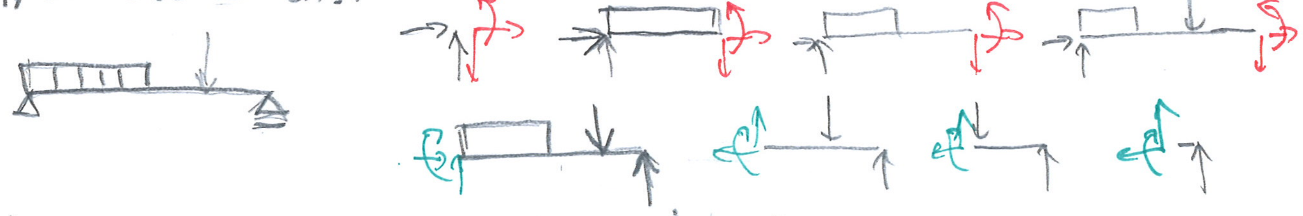


Postup výpočtu

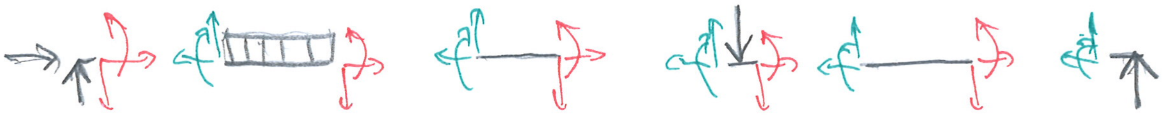
Pro výpočet vnitřních sil z podmínek rovnováhy je možno psát podmínky rovnováhy na části konstrukce oddělené myšleným řezem v místě, kde vnitřní síly vyšetřujeme. Můžeme vy užít jak levou, tak pravou část konstrukce. Můžeme ovšem využít i úsek konstrukce vydělený dvěma řezy, ovšem podmínkou je, že v jednom řezu známe vnitřní síly, proto že máme k dispozici jen tři podmínky rovnováhy.

Na vydělený úsek zakreslíme vnější zatížení a účinky oddělených částí nahradíme vnitřními silami. Spojitá zatížení na této části si nahradíme náhradními břemeny a pak píšeme silové a momentové podmínky rovnováhy

1) UVAŽUJEME ČÁST KONSTRUKCE OD KONCE K MYŠLENÉMU ŘEZU

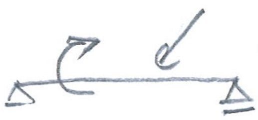


2) POSTUPUJEME OD PŘEDCHOZÍHO ŘEZU



Poznámky

1) POZN. 1 - Přímý nosník

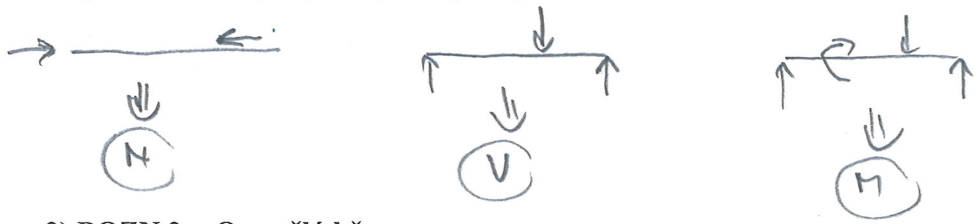


– lze oddělit výpočty jednotlivých vnitřních sil

Normálové síly – počítají se z osových složek sil

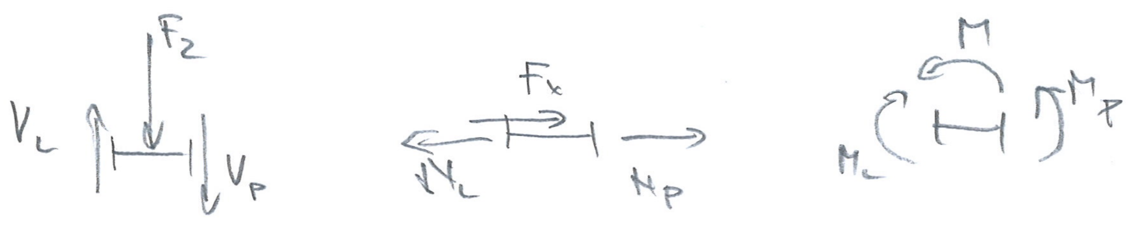
Posouvající síly – počítají se z příčných složek sil

Ohybové momenty – počítají se z příčných složek sil a z momentového zatížení



2) POZN.2 - Osamělá břemena

Osamělá břemena způsobují nespojitost funkce vnitřních sil, a proto je třeba v místě jejich působení počítat jim odpovídající vnitřní ve dvou hodnotách - zleva a zprava.



$$V_L - F_z - V_P = 0$$
$$V_P = V_L - F_z$$
$$V_P \neq V_L$$

$$N_L - F_x - N_P = 0$$
$$N_P = N_L - F_x$$
$$N_P \neq N_L$$

$$M_L - M - M_P = 0$$
$$M_P = M_L - M$$
$$M_P \neq M_L$$

3) POZN 3 - Volný konec bez osamělých břemen

$\emptyset \Rightarrow Q_N = Q_V = Q_M = 0$

$\Rightarrow N = V = M = 0$

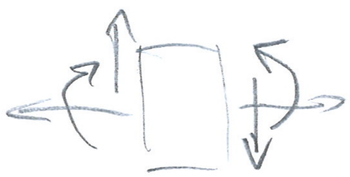
4) POZN 4 - Konvence

Při dodržení pravidel pro konvence vnitřních sil a jejich vykreslování

kladná normálová síla - táhne průřez

kladná posouvající síla – otáčí s částí konstrukce kolem osy y ve směru hodinových ručiček

kladný moment – táhne vlákna nosníku na té straně, na níž je vykreslen – je vykreslen na straně tažených vláken



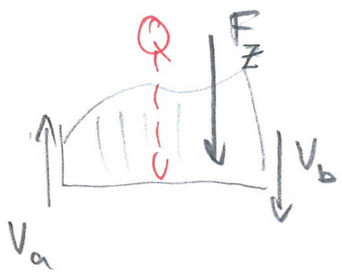
M

5) POZN. 5 – k vyčíslování vnitřních sil

Při postupu vyčíslování vnitřních sil ve směru lokální osy x

- **Posouvající síla se snižuje** o hodnotu příčné síly F_z, respektive náhradního břemene Q za daný úsek spojitého zatížení q.

- **Normálová síla se snižuje** o hodnotu osové síly F_x, respektive náhradního břemene Q_N za daný úsek spojitého zatížení n.



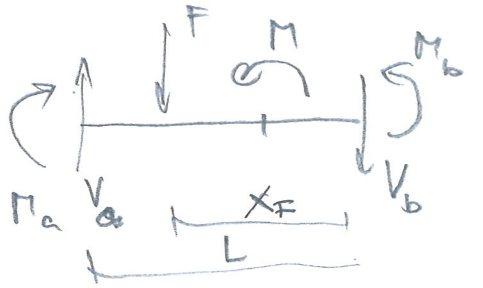
$V_a - Q - F_z - V_b = 0$

$$\boxed{V_b = V_a \underbrace{- Q - F_z}_{\text{KLADNÉ ZATÍŽENÍ}}}$$

$N_a - Q_N - F_x - N_b = 0$

$$\boxed{N_b = N_a \underbrace{- Q_N - F_x}_{\text{KLADNÉ ZATÍŽENÍ}}}$$

Pro ohybové momenty je situace složitější – na jejich velikost se projeví jak momentové zatížení, tak příčné včetně posouvajících sil



$$\Sigma M_{b,i} = 0$$

$$M_a + V_a L - F \cdot x - M - M_b = 0$$

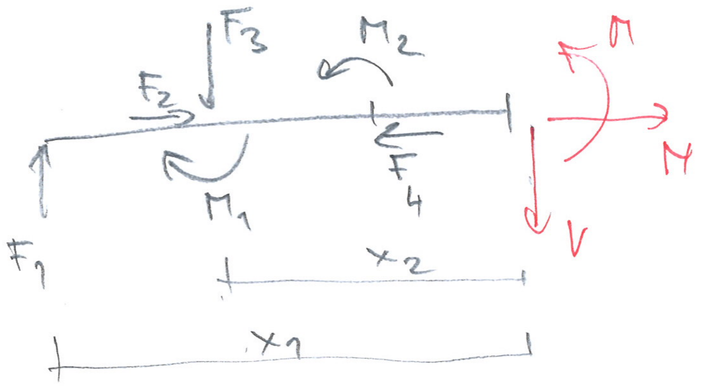
$$M_b = M_a + V_a L - F \cdot x - M$$

$$M_b = M_a + \underbrace{V_a \cdot L}_{\text{VLIV POS. SÍLY}} \underbrace{- F \cdot x_F - Q \cdot x_q - M - Q_M}_{\text{KLADNÉ ZATÍŽENÍ}}$$

6) POZN. 6 – k vyčíslování vnitřních sil

Síly (a jejich momenty) působící na vyjmutou část opačně jako řešená vnitřní síla, tuto vnitřní sílu zvyšují (jejich účinek se do vnitřní síly přičítá).

Síly (a jejich momenty) působící na vyjmutou část stejně jako řešená vnitřní síla, tuto vnitřní sílu snižují (jejich účinek se do vnitřní síly odečítá).



$$N = -F_2 + F_4$$

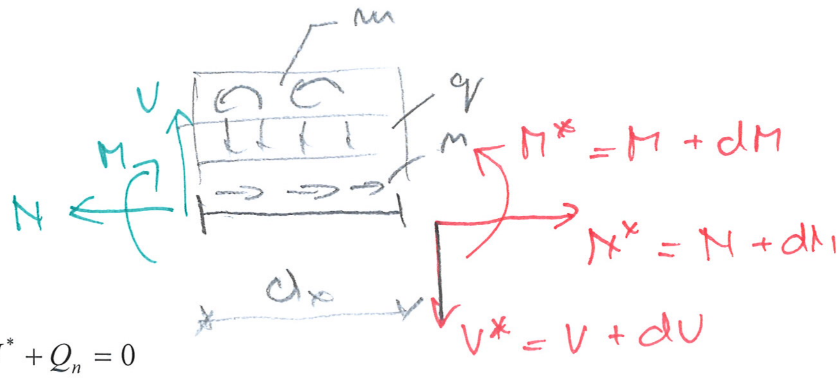
$$V = -F_3 + F_1$$

$$M = F_1 x_1 - F_3 x_2 + M_1 - M_2$$

Diferenciální podmínky rovnováhy

Vnitřní síly jsou funkcí souřadnice x. Hledejme tedy tuto funkční závislost.

Vydělme si tentokrát z prutu element o diferenciální délce dx. Na tento element působí v obou průřezech vnitřní síly, které se od sebe liší právě o diferenciál dané vnitřní síly. Předpokládejme spojitá rovnoměrná zatížení všech tří typů působící na tento diferenciální element. Kladné směry zatížení uvažujme ve shodě s kladnými osami xyz.



$$-N + N^* + Q_n = 0$$

$$-N + N + dN + ndx = 0$$

$$\frac{dN}{dx} = -n$$

$$N' = -n$$

$$-V + V^* + Q = 0$$

$$-V + V + dV + qdx = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = -q$$

$$V' = -q$$

$$-M + M^* - Vdx + Q_M + Q\frac{dx}{2} = 0$$

$$-M + M + dM - Vdx + mdx + qdx\frac{dx}{2} = 0$$

$dM - Vdx + mdx + qdx\dfrac{dx}{2} = 0$ člen s dx^2 lze zanedbat oproti dx

$$dM = (V - m)dx$$

$$\frac{dM}{dx} = V - m$$

$M' = V - m$ nebo $M' = V$ pro m=0

Diferenciální podmínky platí v úsecích, kde zatížení je popsáno spojitou hladkou funkcí. V rámci těchto úseků je možno vnitřní síly popsat spojitou funkcí. Tyto funkce získáme převedením diferenciálních podmínek na integrální.

$$\frac{dN}{dx} = -n$$

$$dN = -ndx$$

$$N = \int -ndx + C_1$$

obdobně získáme zbylé rovnice a dostaneme

$$N = \int -ndx + C_1$$

$$V = \int -qdx + C_2$$

$$M = \int (V - m)dx + C_3 \quad \text{nebo} \quad M = \int Vdx + C_3$$

kde integrální konstanty se určí z hodnoty vnitřní síly pro libovolné x klasickým způsobem z podmínek rovnováhy.

Diferenciální podmínky rovnováhy slouží

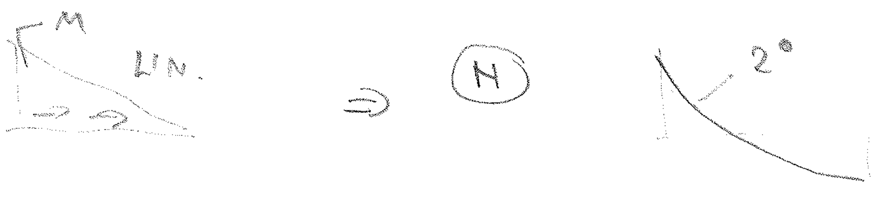
1) K funkčnímu popisu průběhu vnitřní síly po délce nosníku (zejména stupně polynomu funkce vnitřní síly

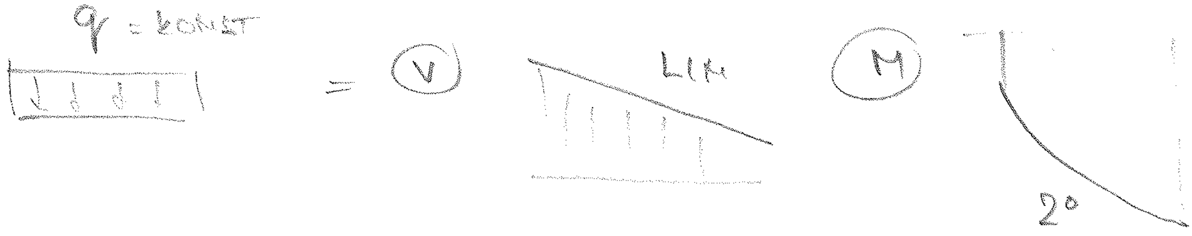
Diferenciální podmínky rovnováhy slouží nejen k funkčnímu popisu vnitřních sil, ale také k určení stupně polynomu dané funkce vnitřní síly (pokud se jedná o polynomiální vyjádření zatížení).

Pokud např. známe stupeň polynomu zatížení q, z integrálních vztahů plyne, že stupeň polynomu posouvající síly je o jedno vyšší a stupeň polynomu ohybového momentu je vyšší o dva stupně.

Obdobně stupeň polynomu normálové síly je o jedna větší než spojitého osového zatížení n.

Pokud se vyskytuje spojité momentové zatížení, rozhoduje o stupni polynomu ohybového momentu M vyšší stupeň polynomu z posouvající síly a momentu.





2) Definují tečny ke grafu vnitřní funkce

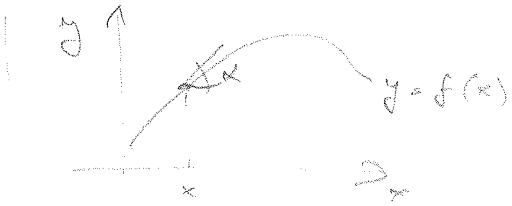
Dále nám diferenciální podmínky rovnováhy pomohou definovat tečny ke grafu vnitřních sil a najít lokální extrémy.

Derivace funkce obecně vyjadřuje tg úhlu tečny ke grafu. Hodnotu tg úhlu tečny ke grafu získáme pro

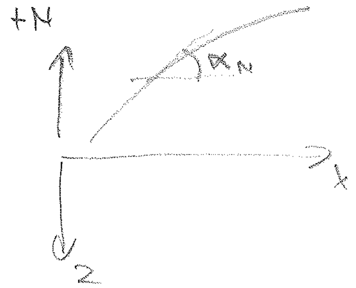
N z hodnoty n v daném bodě

V z hodnoty q v daném bodě

M z hodnoty V-m v daném bodě

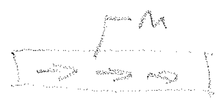


$tg\, \alpha = y'$

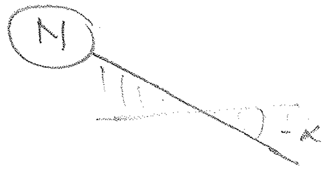


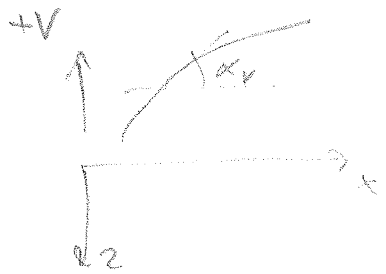
$tg\, \alpha_N = N' = -n$

NAPŘ.:



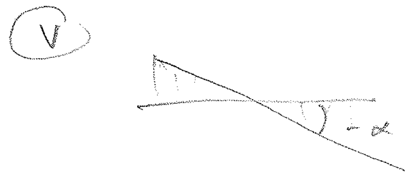
$\Rightarrow$

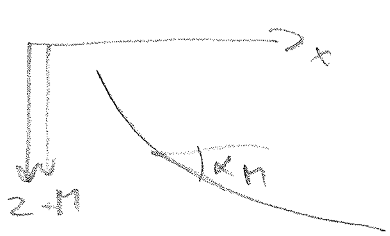




$tg\, \alpha_V = V' = -q$

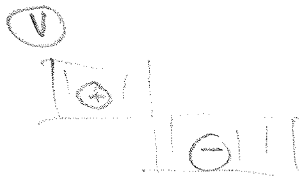
NAPŘ.:



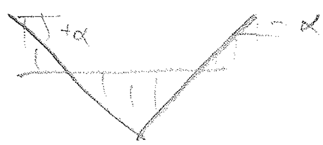


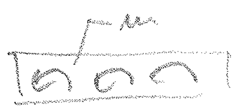
$tg\, \alpha_M = M' = V - m$

NAPŘ.:



$\Rightarrow$





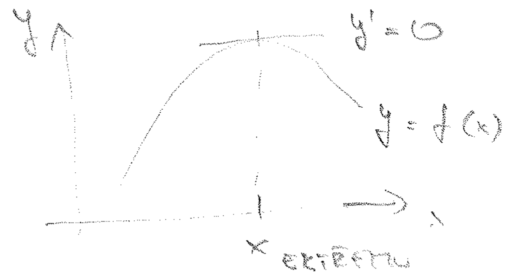
$\Rightarrow$

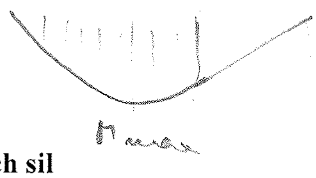
3) k určení polohy lokálního extrému funkce vnitřní síly

Lokání extrém se nachází v místě, kde je derivace funkce rovna 0. Pro nalezení polohy extrému tedy položíme příslušnou derivaci rovnu 0 a určíme x

n = 0	=>	N = extrém
q = 0	=>	V = extrém
V-m = 0	=>	M = extrém

Hodnotu extrému pak dopočítáme ze statických podmínek rovnováhy.



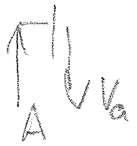


Postup výpočtu vnitřních sil

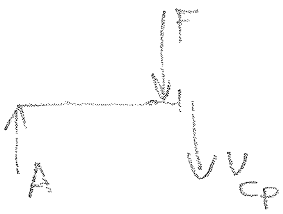
1) nahrazení vazeb neznámými reakcemi
2) výpočet reakcí ze statických podmínek rovnováhy pro celou konstrukci
3) výpočet vnitřních sil ve významných bodech ze statických podmínek rovnováhy pro části konstrukce
4) vynesení hodnot vnitřních sil
5) určení stupně polynomu vnitřních sil pro úseky pomocí integrálních vztahů
6) nalezení polohy lokálních extrémů z podmínek pro nulovou derivaci vnitřní síly
7) výpočet lokálních extrémů ze statických podmínek rovnováhy
8) určení tečen ke grafu z diferenciálních podmínek rovnováhy
9) vykreslení průběhů v jednotlivých úsecích

Významné body:

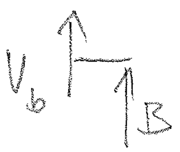
- osamělá břemena včetně reakcí (je nutno určovat hodnoty zleva a zprava)
- počátky a konce spojitých zatížení (popsaných hladkou křivkou)
- zlomy osy prutu v zalomených nosnících (je nutno určovat hodnoty zleva a zprava)



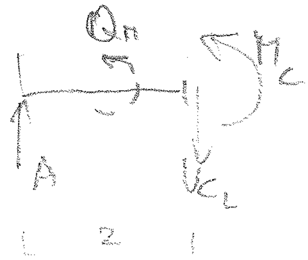
$V_a = A = 24\ kN$



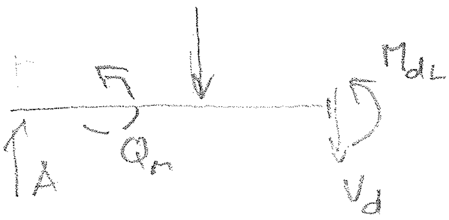
$V_{cp} = A - F = 24 - 14 = 10\ kN$



$V_b = -B = -26\ kN$

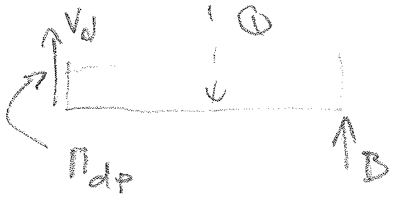


$M_c = A \cdot 2 - Q_m = 24 \cdot 2 - 12 = 36$



$M_{dL} = A \cdot 3{,}5 - Q_m - F \cdot 1{,}5 = 24 \cdot 3{,}5 - 12 - 14 \cdot 1{,}5$

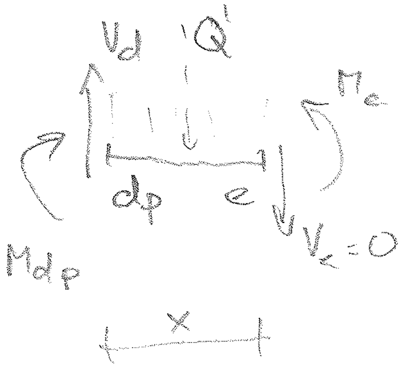
$= 51$



$M_{dp} = B \cdot 4{,}5 - Q \cdot 2{,}25$

$= 26 \cdot 4{,}5 - 36 \cdot 2{,}25 = 36$

EXTRÉM



$V_d - Q' = 0$

$V_d = q \cdot x$

$x = \frac{V_d}{q} = \frac{10}{8}$

$x = 1{,}25$

$M_e = M_{dp} + V_{dp} \cdot x - Q' \cdot \frac{x}{2}$

$M_e = 36 + 10 \cdot 1{,}25 - 10 \cdot \frac{1{,}25}{2}$

$M_e = 42{,}25\ kN..$