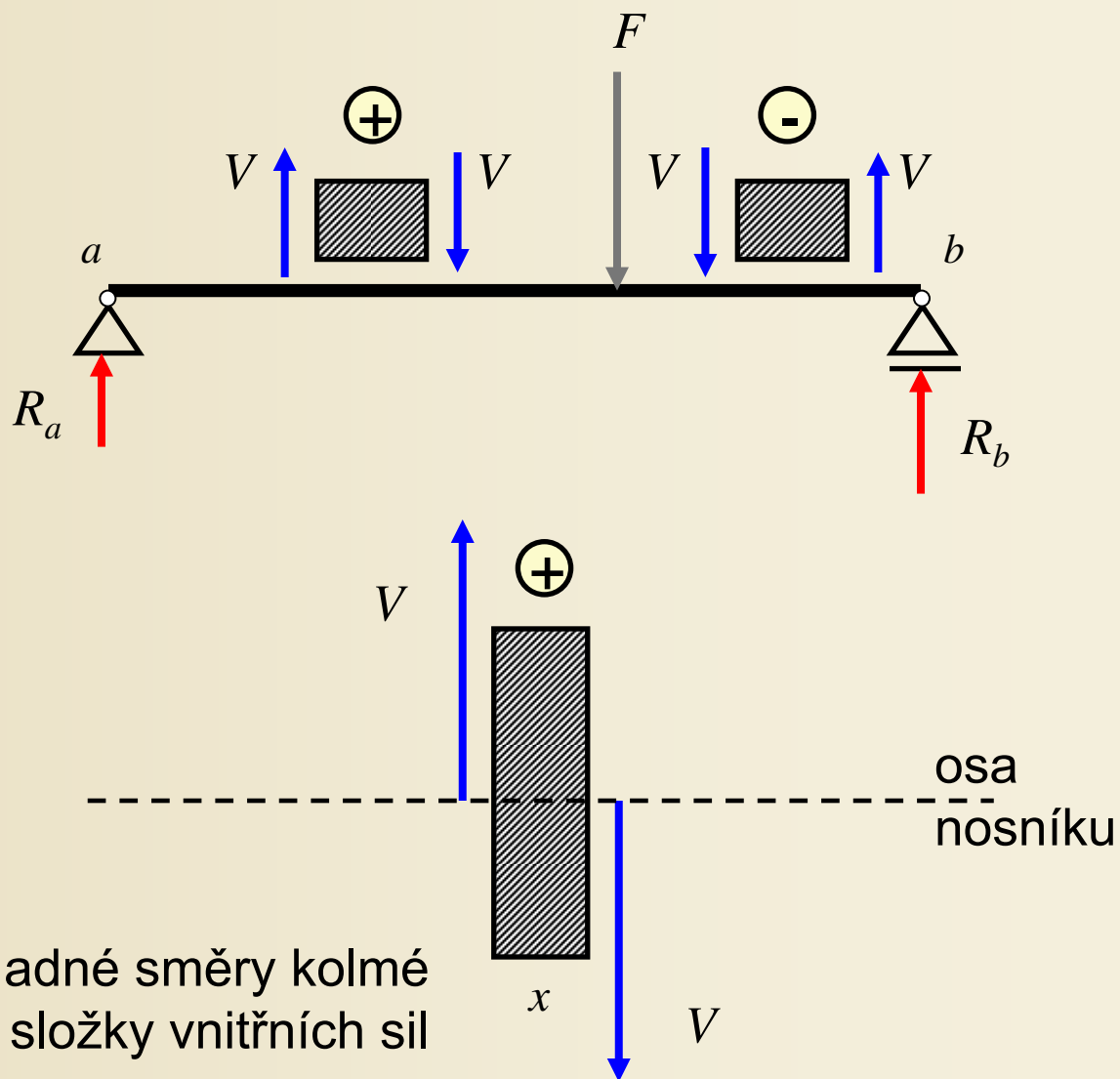


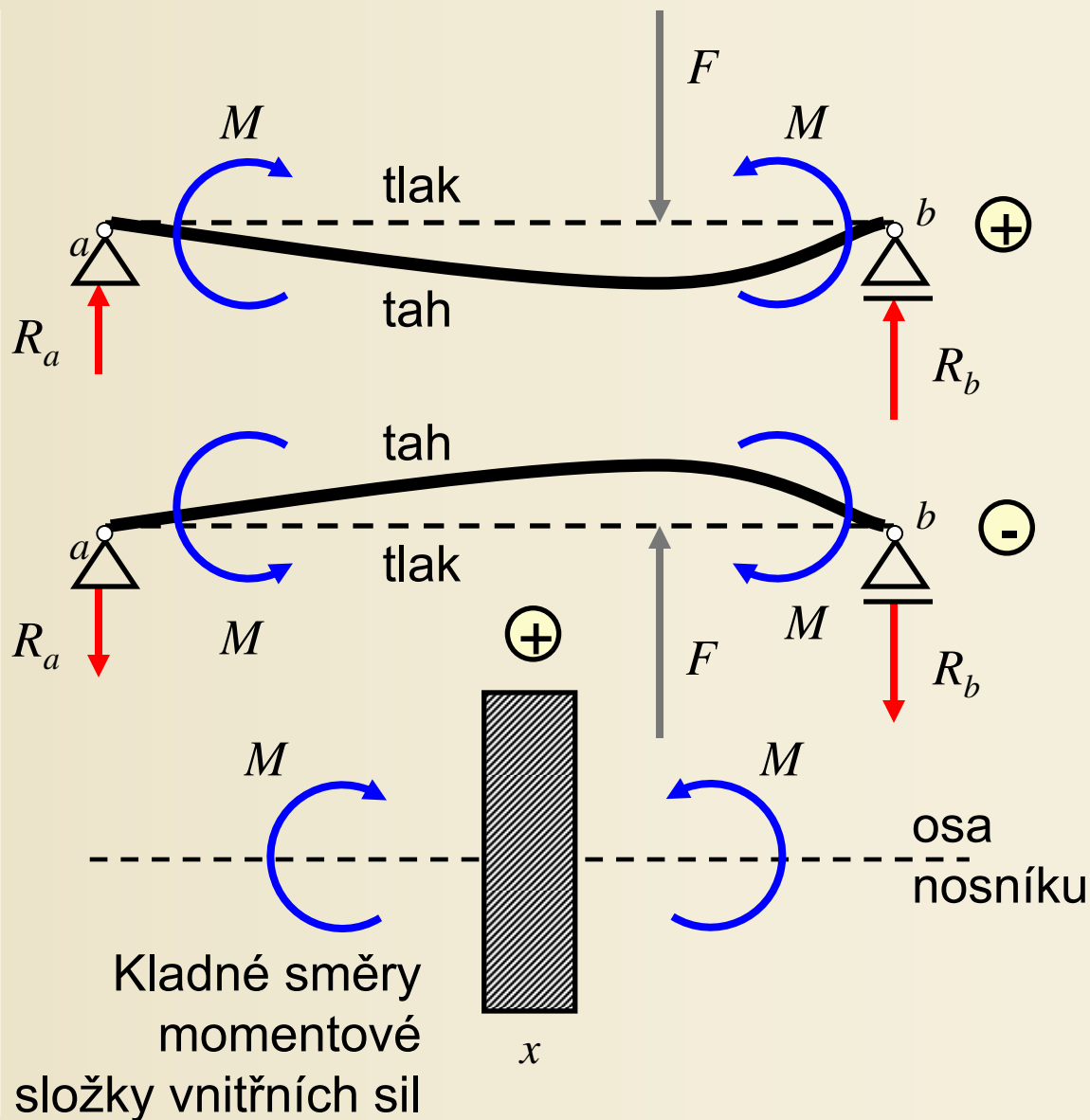
Posouvající síla V

Posouvající sílu V v zadaném průřezu c lze vypočítat jako algebraický součet všech svislých sil po jedné straně průřezu. Postupuje-li se z levé strany, do součtu se zahrnou kladně síly působící zdola nahoru, záporně síly působící shora dolů. Při postupu z pravé strany je to naopak: kladné jsou síly působící shora dolů, záporné směřují zdola nahoru.

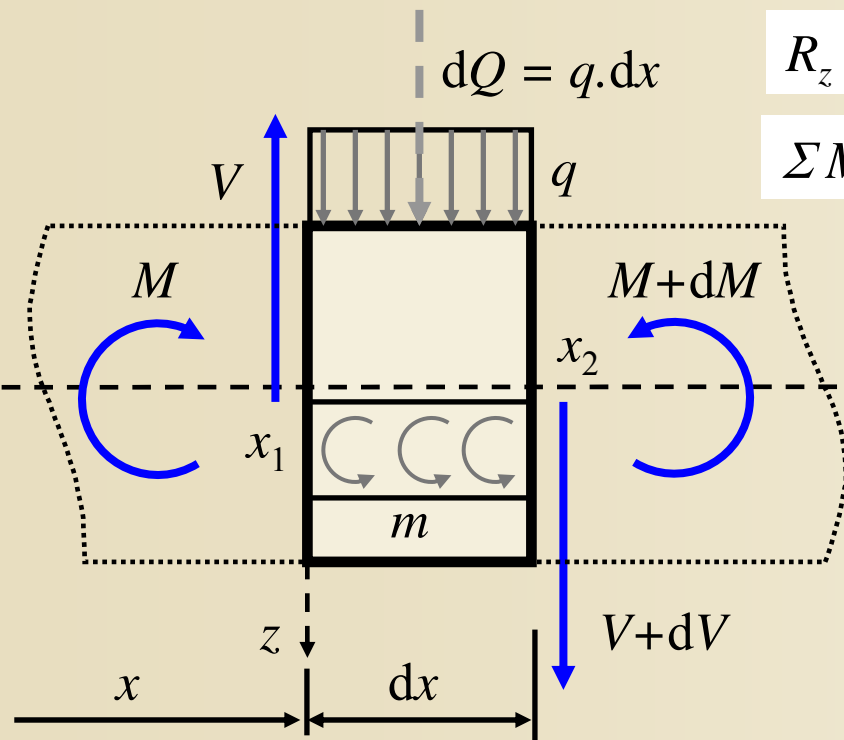


Ohybový moment M

Ohybový moment v zadaném průřezu c lze vypočítat jako algebraický součet statických momentů k bodu c všech sil a momentů působících po jedné straně průřezu. Postupuje-li se z levé strany, do součtu se zahrnou kladně momenty působící ve směru chodu hodinových ručiček, záporně momenty otáčející proti ručičkám. Při postupu z pravé strany je to naopak: kladné jsou momenty proti ručičkám, záporné po ručičkách.



Diferenciální podmínky rovnováhy elementu v příčné úloze



$$dQ = q \cdot dx$$

$$R_z = 0:$$

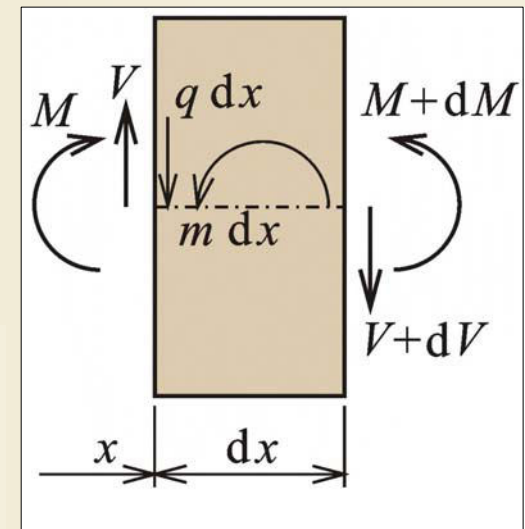
$$-V + (V + dV) + q \cdot dx = 0 \rightarrow \frac{dV}{dx} = -q$$

$$\Sigma M_{i,x2} = 0:$$

$$-M + (M + dM) - V \cdot dx + q \cdot dx \cdot dx/2 + m \cdot dx = 0$$

$$\rightarrow \frac{dM}{dx} = V - m$$

$$\frac{dM}{dx} = V \text{ pro } m = 0$$



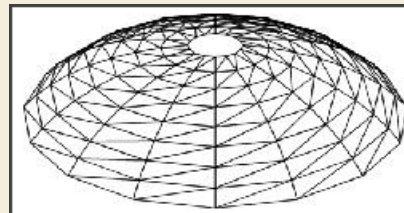
Rovnováha elementu
v příčné úloze

Obr. 7.22. / str. 102



Schwedlerovy vztahy
Johann Wilhelm Schwedler
(1823-1894)

významný německý inženýr,
např. Schwedlerova kupole



Diferenciální podmínky rovnováhy elementu v příčné úloze

Závěry:

$$\frac{dV}{dx} = -q = 0$$

→ Extrém V v průřezu, kde $q=0$

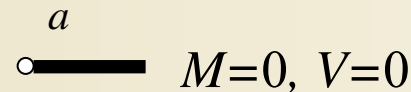
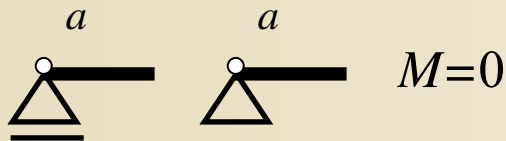
$$V(x) = -\int q(x)dx + C_1$$

$$\frac{dM}{dx} = V - m = 0$$

→ Extrém M v průřezu,
kde $V=0$, $V=m$, V mění znaménko

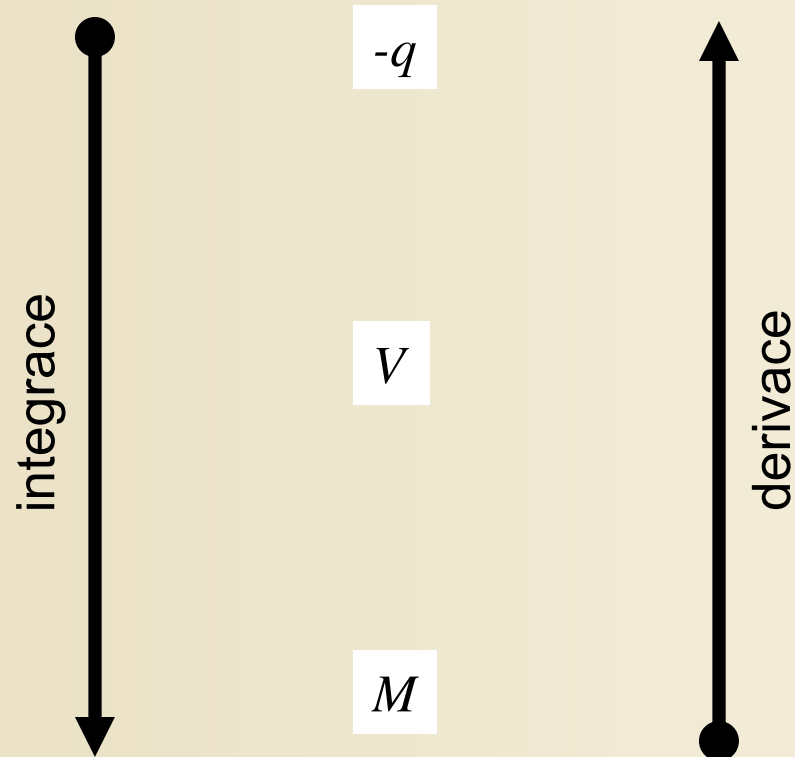
$$M(x) = \int V(x)dx + C_2, \quad m(x) = 0$$

C_1, C_2 z okrajových podmínek



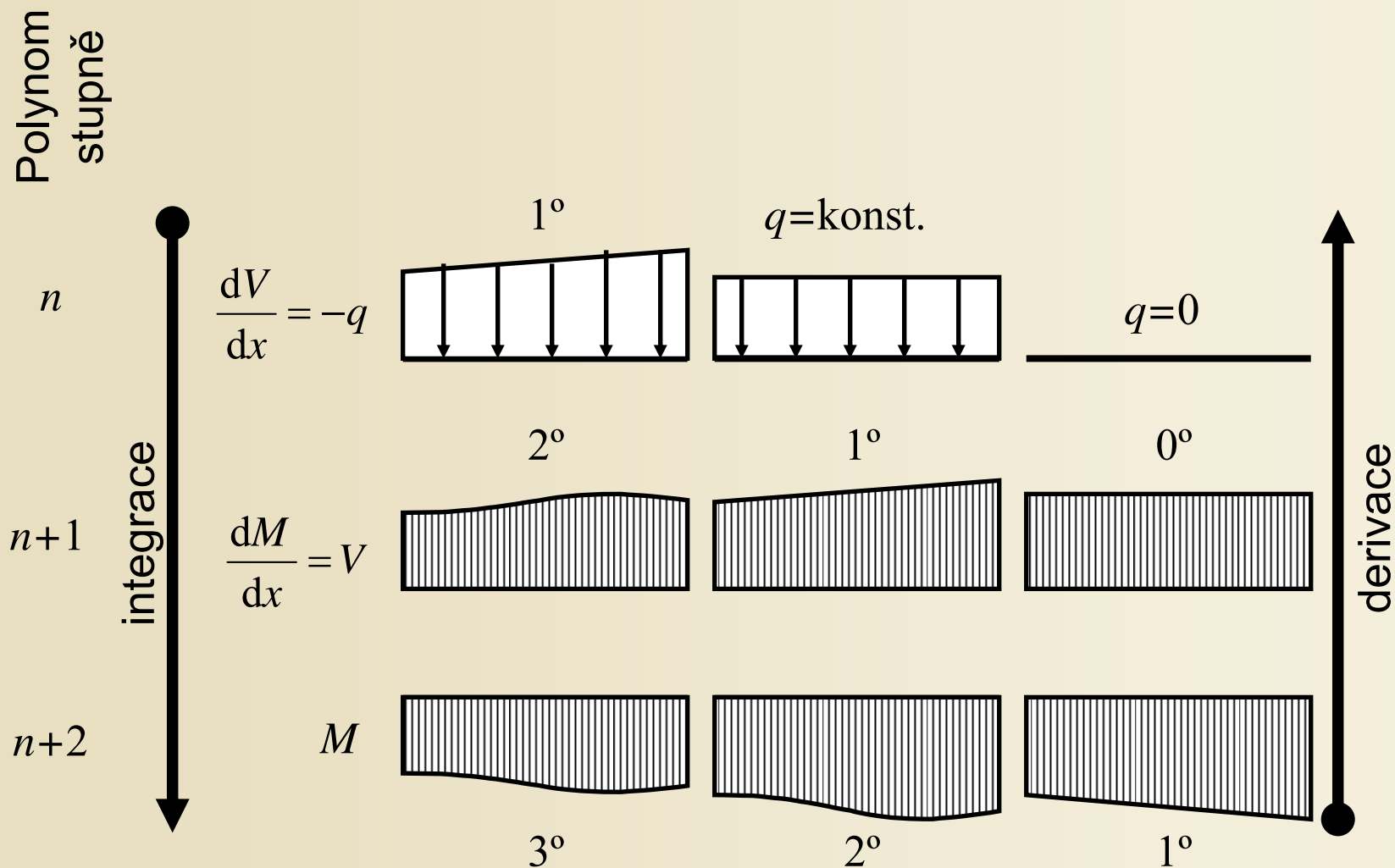
Diferenciální podmínky rovnováhy elementu v příčné úloze

Závěry:



Derivačně – integrační schéma

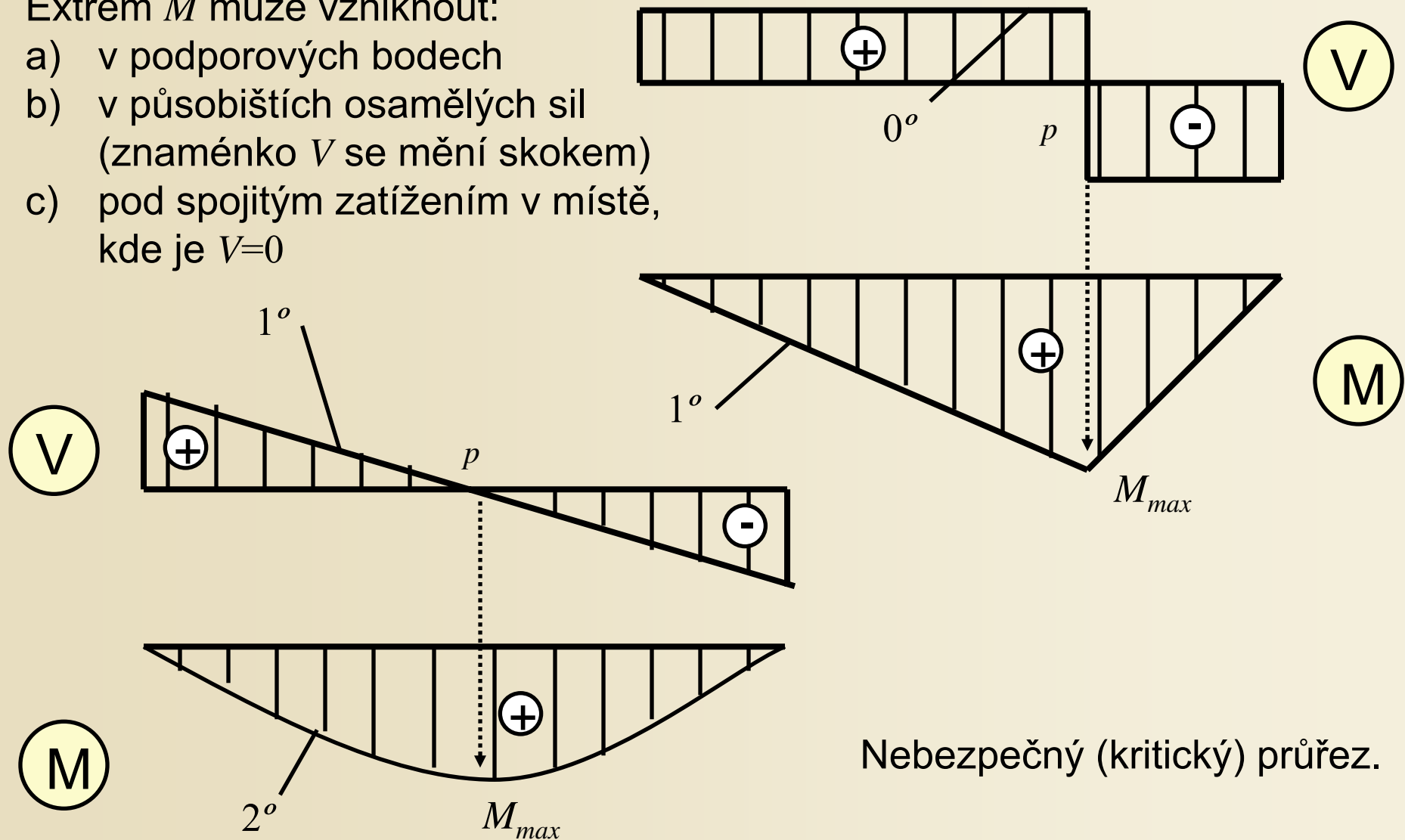
Diferenciální podmínky rovnováhy elementu v příčné úloze



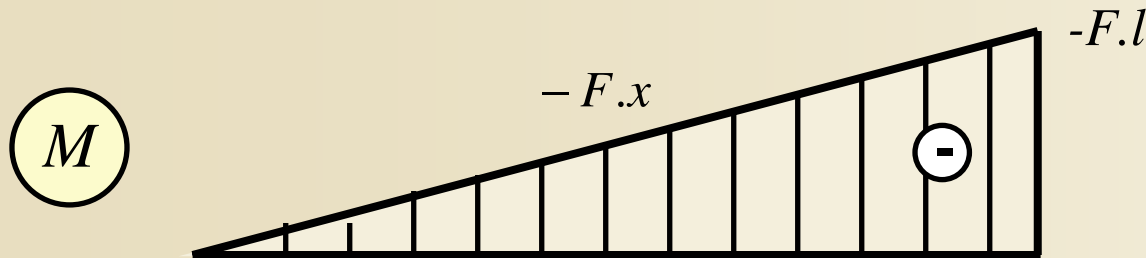
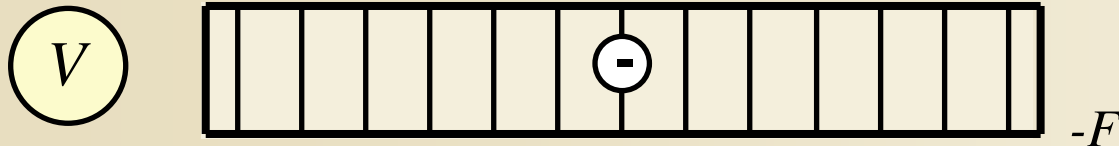
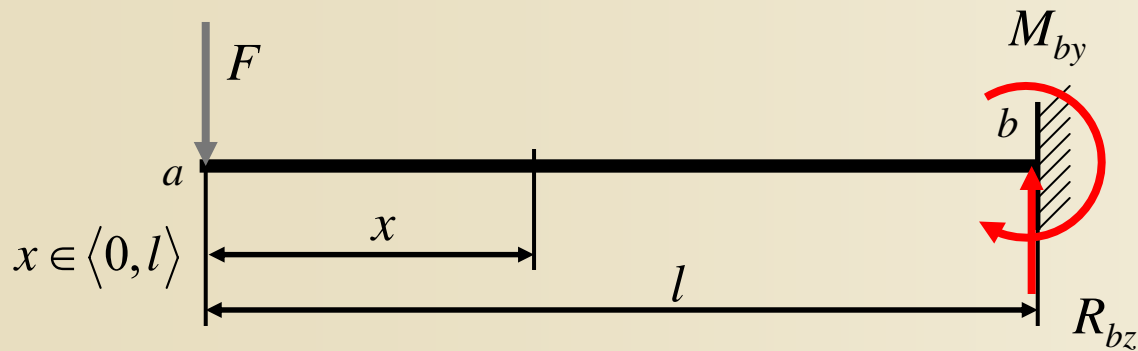
Určení extrémních hodnot vnitřních sil

Extrém M může vzniknout:

- a) v podporových bodech
- b) v působištích osamělých sil
(znaménko V se mění skokem)
- c) pod spojitým zatížením v místě,
kde je $V=0$



Nejjednodušší zatěžovací stavy konzoly



Výpočet reakcí

$$R_{bz} = F(\uparrow)$$
$$M_{by} = F.l(\curvearrowleft)$$

Posouvající síla

$$V_{(x)}^L = \text{konst.} = -F$$

$$V_{(a)} = V_{(x=0)} = -F$$

$$V_{(b)} = V_{(x=l)} = -F$$

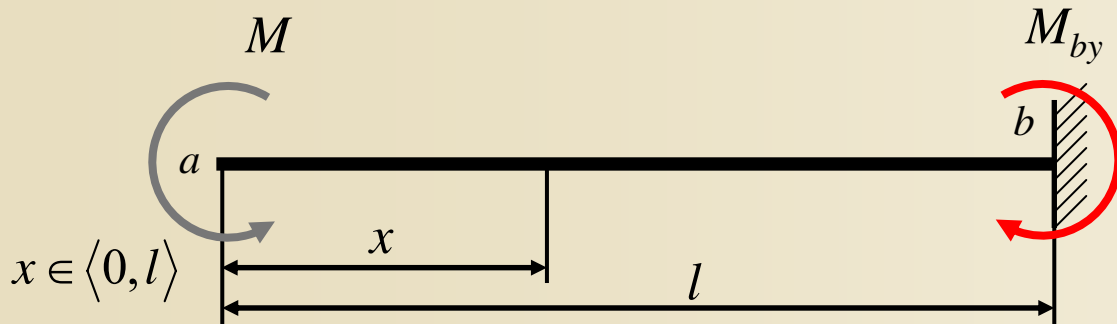
Ohybový moment

$$M_{(x)}^L = -F.x$$

$$M_{(a)} = M_{(x=0)} = 0$$

$$M_{(b)} = M_{(x=l)} = -F.l$$

Nejjednodušší zatěžovací stavy konzoly



Výpočet reakcí

$$R_{bz} = 0$$

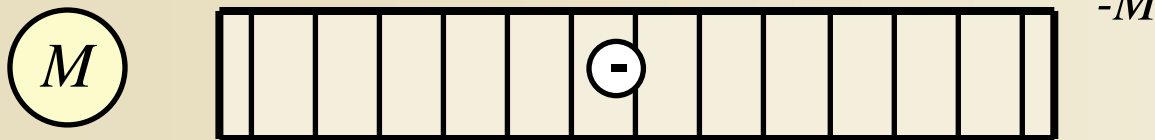
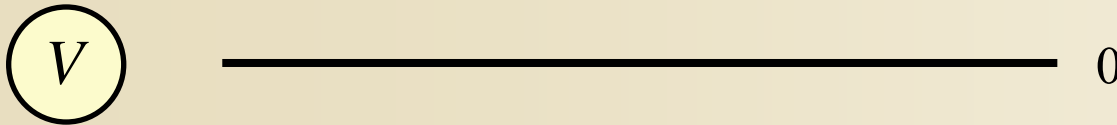
$$M_{by} = M (\curvearrowright)$$

Posouvající síla

$$V_{(x)}^L = 0$$

$$V_{(a)} = V_{(x=0)} = l$$

$$V_{(b)} = V_{(x=l)} = 0$$



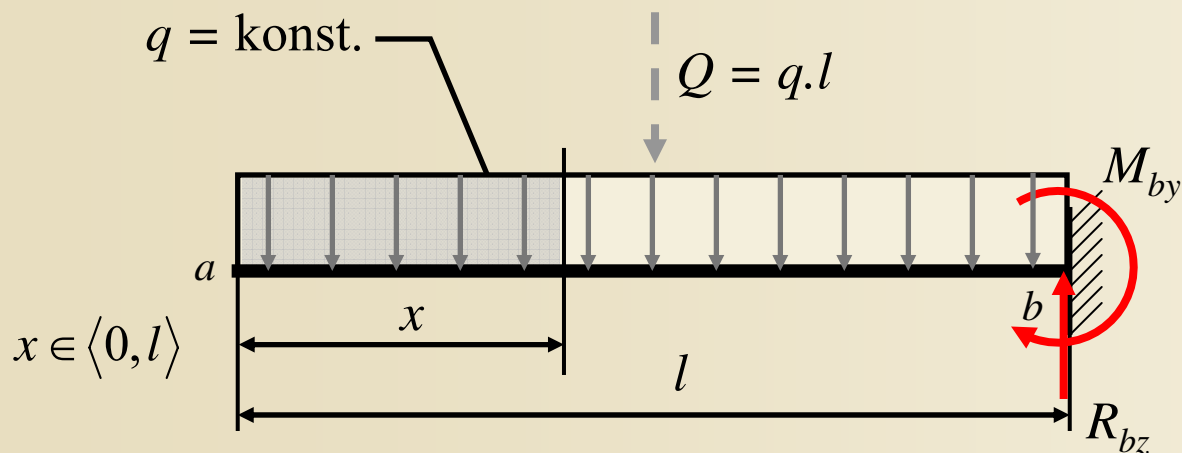
Ohybový moment

$$M_{(x)}^L = -M$$

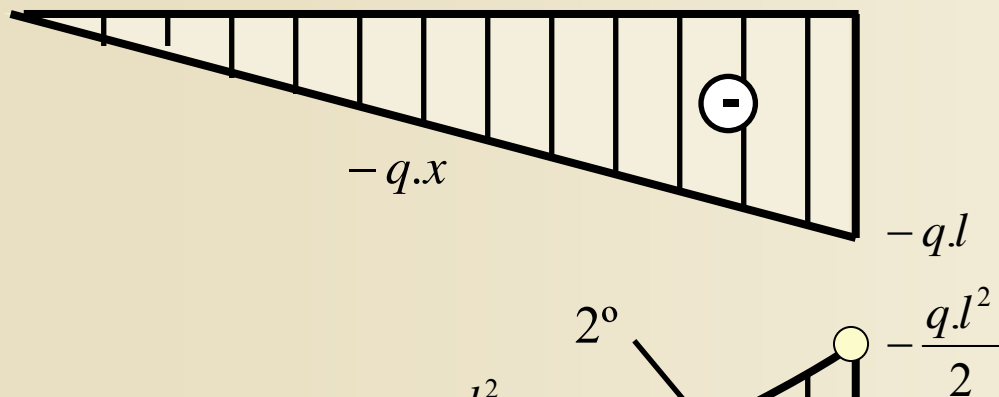
$$M_{(a)} = M_{(x=0)} = -M$$

$$M_{(b)} = M_{(x=l)} = -M$$

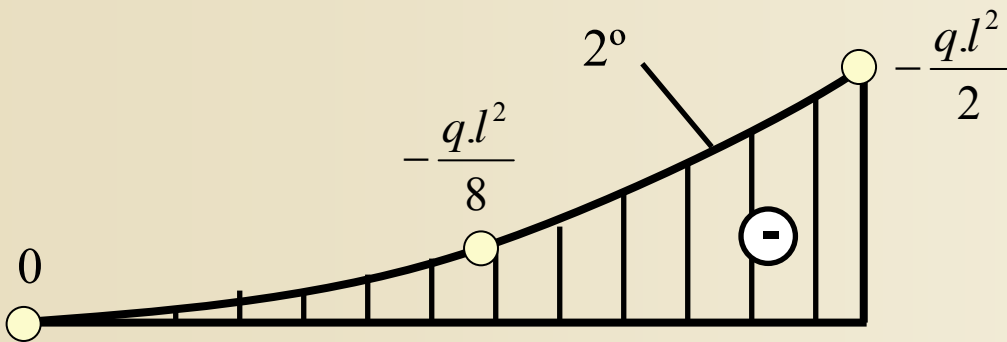
Nejjednodušší zatěžovací stavy konzoly



V



M



Výpočet reakcí

$$R_{bz} = Q = q.l (\uparrow)$$

$$M_{by} = Q \cdot \frac{l}{2} = \frac{q.l^2}{2} (\curvearrowright)$$

Posouvající síla

$$V_{(x)}^L = -q.x$$

$$V_{(a)} = V_{(x=0)} = 0$$

$$V_{(b)} = V_{(x=l)} = -q.l = -R_{bz}$$

Ohybový moment

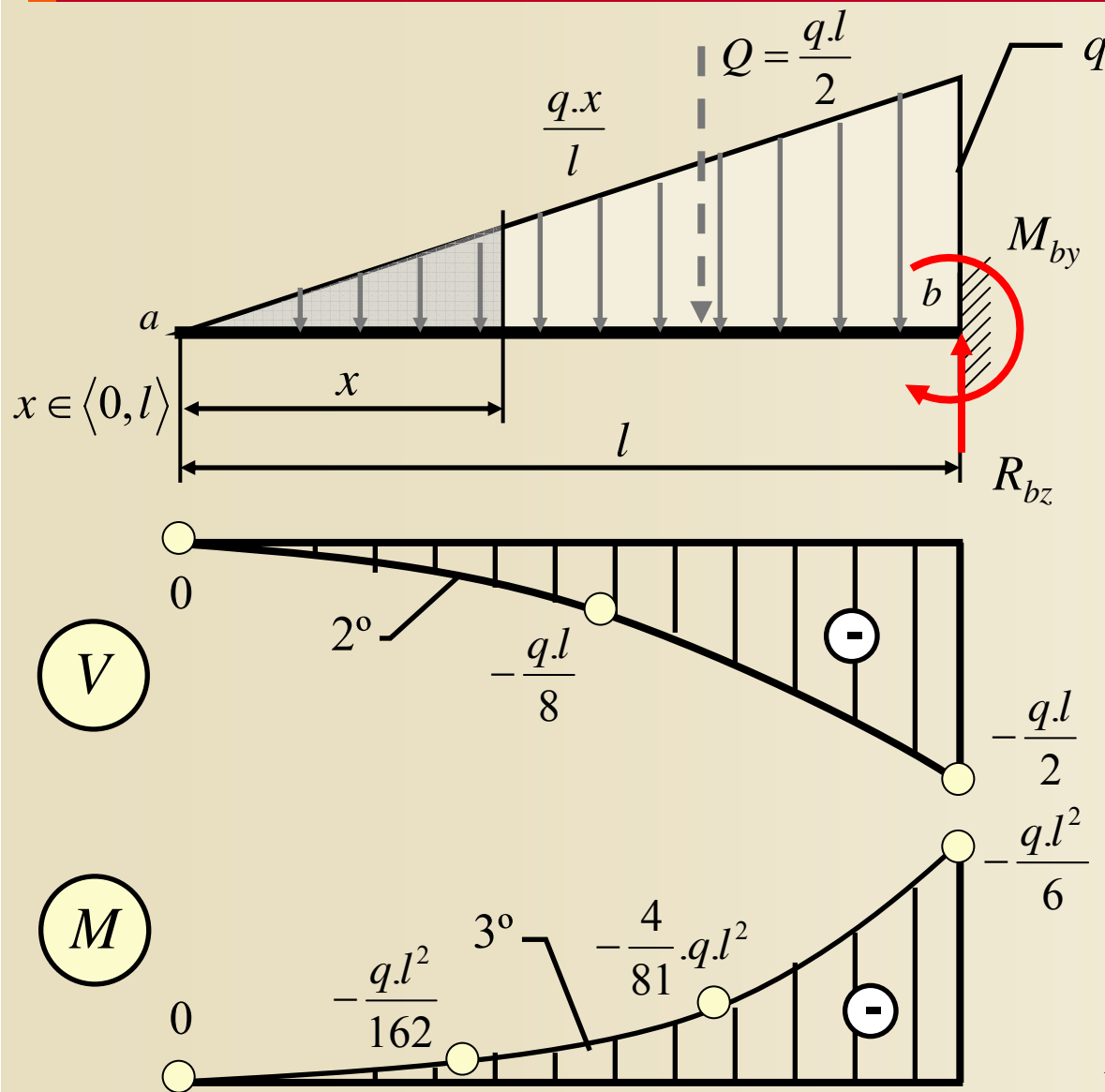
$$M_{(x)}^L = -q.x \cdot \frac{x}{2} = -\frac{q.x^2}{2}$$

$$M_{(a)} = M_{(x=0)} = 0$$

$$M_{(b)} = M_{(x=l)} = -\frac{q.l^2}{2} = -M_{by}$$

$$M_{(x=l/2)} = -\frac{q.l^2}{8}$$

Nejjednodušší zatěžovací stavy konzoly



Výpočet reakcí

$$R_{bz} = Q = \frac{q \cdot l}{2} (\uparrow)$$

$$M_{by} = Q \cdot \frac{l}{3} = \frac{q \cdot l^2}{6} (\curvearrowleft)$$

Posouvající síla

$$V_{(x)}^L = -\frac{q_x \cdot x}{2} = -\frac{q \cdot x \cdot x}{l \cdot 2} = -\frac{q \cdot x^2}{2 \cdot l}$$

$$V_{(a)} = V_{(x=0)} = 0$$

$$V_{(b)} = V_{(x=l)} = -\frac{q \cdot l}{2} = -R_{bz}$$

$$V_{(x=l/2)} = -\frac{q \cdot l}{8}$$

Ohybový moment

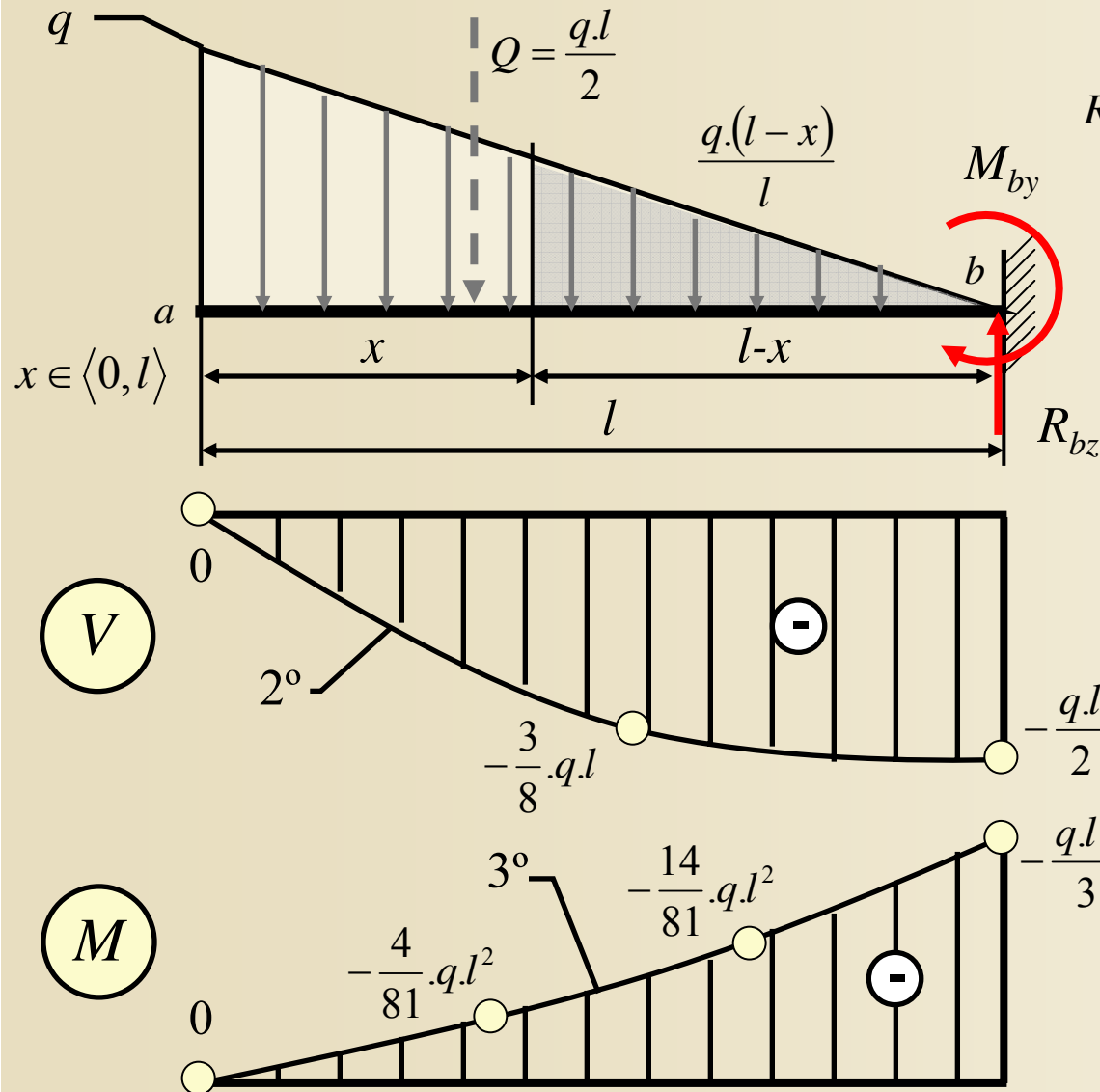
$$M_{(x)}^L = -\frac{q \cdot x^2}{2 \cdot l} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{q \cdot x^3}{6 \cdot l}$$

$$M_{(a)} = M_{(x=0)} = 0$$

$$M_{(b)} = M_{(x=l)} = -\frac{q \cdot l^2}{6} = -M_{by}$$

$$M_{(x=l/3)} = -\frac{q \cdot l^2}{162} \quad M_{(x=2/3 \cdot l)} = -\frac{4}{81} \cdot q \cdot l^2$$

Nejjednodušší zatěžovací stavy konzoly



Výpočet reakcí

$$R_{bz} = Q = \frac{q \cdot l}{2} (\uparrow) \quad M_{by} = Q \cdot \frac{2}{3} \cdot l = \frac{q \cdot l^2}{3} (\curvearrowright)$$

Posouvající síla

$$V_{(x)}^P = -R_{bz} + \frac{q_x \cdot (l - x)}{2} = -\frac{q \cdot l}{2} + \frac{q \cdot (l - x) \cdot (l - x)}{l \cdot 2} = \frac{q \cdot x \cdot (x - 2 \cdot l)}{2 \cdot l}$$

$$V_{(a)} = V_{(x=0)} = 0 \quad V_{(x=l/2)} = -\frac{3}{8} \cdot q \cdot l$$

$$V_{(b)} = V_{(x=l)} = -\frac{q \cdot l}{2} = -R_{bz}$$

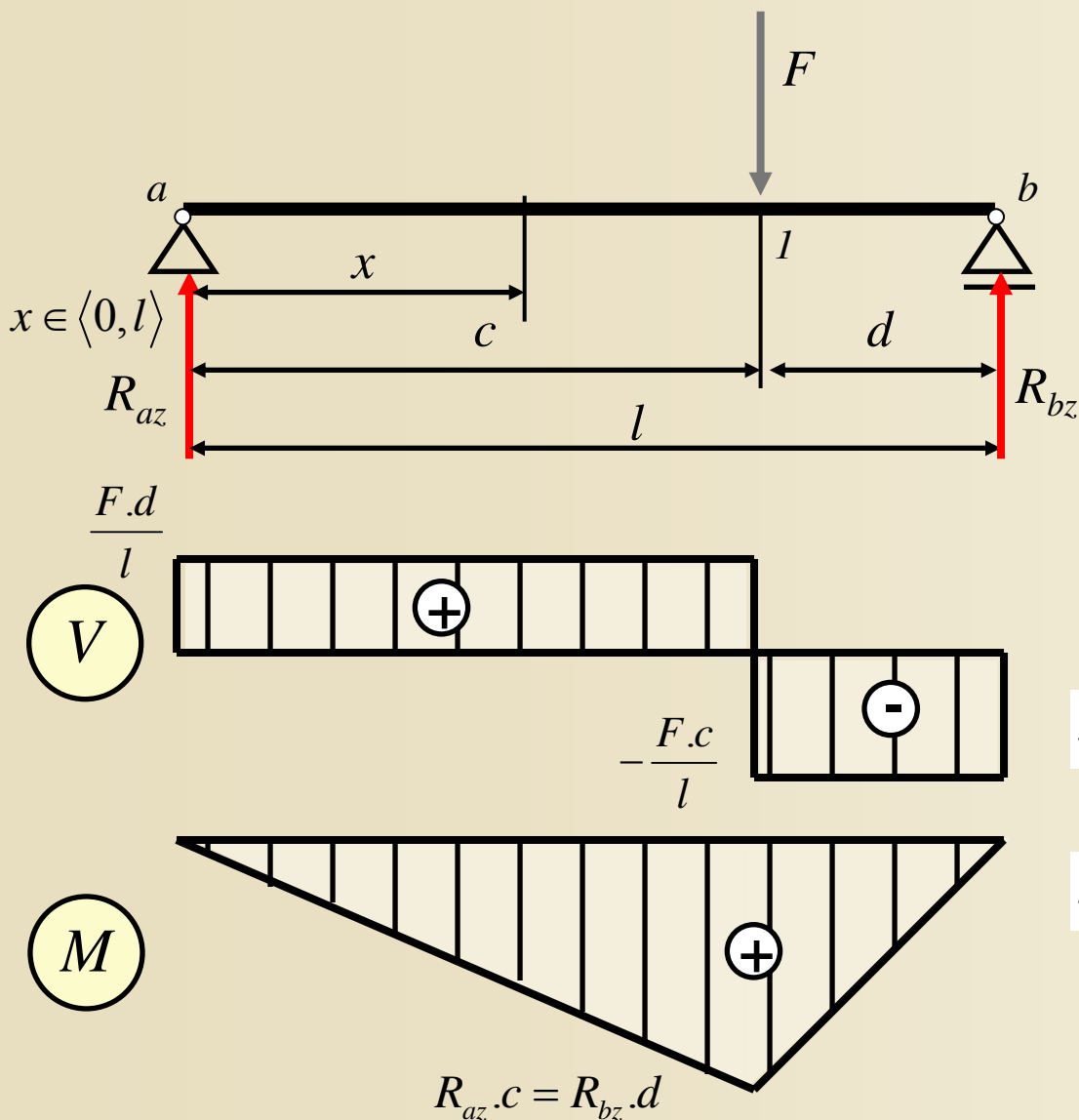
Ohybový moment

$$M_{(x)}^P = +R_{bz} \cdot (l - x) - M_{by} - \frac{q \cdot (l - x)^2}{l \cdot 2} \cdot \frac{(l - x)}{3} = +\frac{q \cdot l}{2} \cdot (l - x) - \frac{q \cdot l^2}{3} - \frac{q \cdot (l - x)^3}{6 \cdot l} = \frac{q \cdot x^2 \cdot (x - 3 \cdot l)}{6 \cdot l}$$

$$M_{(a)} = 0 \quad M_{(b)} = -\frac{q \cdot l^2}{3} = -M_{by}$$

$$M_{(x=l/3)} = -\frac{4}{81} \cdot q \cdot l^2 \quad M_{(x=2/3 \cdot l)} = -\frac{14}{81} \cdot q \cdot l^2$$

Nejjednodušší zatěžovací stavy prostých nosníků



Výpočet reakcí

$$R_{az} = \frac{F \cdot d}{l} (\uparrow) \quad R_{bz} = \frac{F \cdot c}{l} (\uparrow)$$

Posouvající síla

$$x \in \langle 0, c \rangle \quad V_{(x)}^L = R_{az} \quad V_{(a)} = V_{(x=0)} = R_{az}$$

$$x \in \langle c, l \rangle \quad V_{(x)}^L = R_{az} - F \quad V_{(b)} = V_{(x=l)} = R_{az} - F = -R_{bz}$$

Ohybový moment

$$x \in \langle 0, c \rangle \quad M_{(x)}^L = R_{az} \cdot x \quad M_{(a)} = M_{(x=0)} = 0$$

$$M_{(1)} = M_{(x=c)} = R_{az} \cdot c$$

$$x \in \langle c, l \rangle \quad M_{(x)}^L = R_{az} \cdot x - F \cdot (x - c)$$

$$M_{(b)} = M_{(x=l)} = 0 \quad M_{(1)} = M_{(x=c)} = R_{bz} \cdot d$$

$$M_{(x)}^P = R_{bz} \cdot (l - x)$$

Nejjednodušší zatěžovací stavy prostých nosníků

Výpočet reakcí

$$R_{az} = F(\uparrow) \quad R_{bz} = F(\uparrow)$$

Posouvající síla

$$x \in \langle 0, c \rangle \quad V_{(x)}^L = R_{az} \quad V_{(a)} = R_{az}$$

$$x \in \langle c, c + d \rangle \quad V_{(x)}^L = R_{az} - F = 0$$

$$x \in \langle c + d, l \rangle \quad V_{(x)}^L = R_{az} - 2.F = -R_{bz}$$

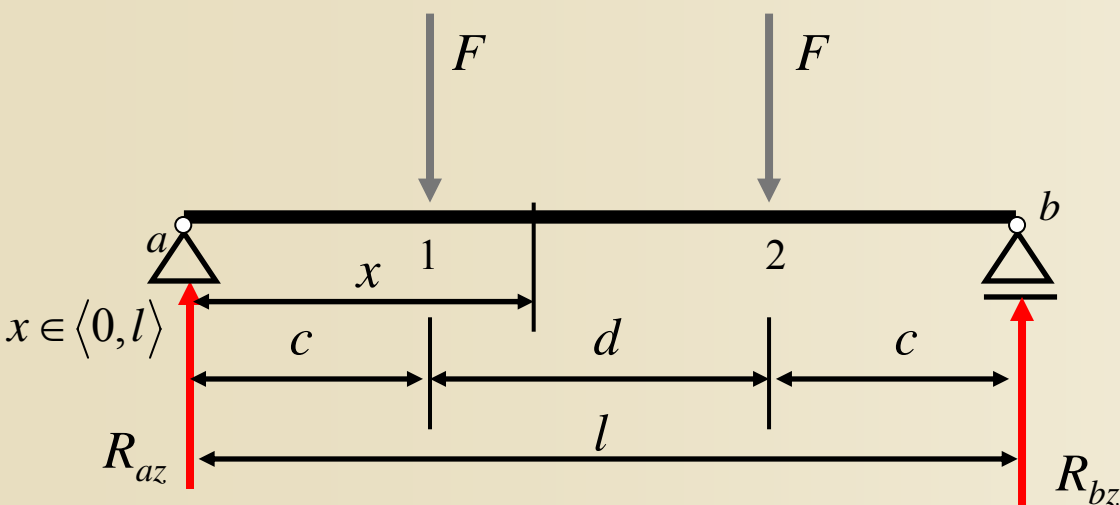
$$V_{(b)} = -R_{bz}$$

Ohybový moment

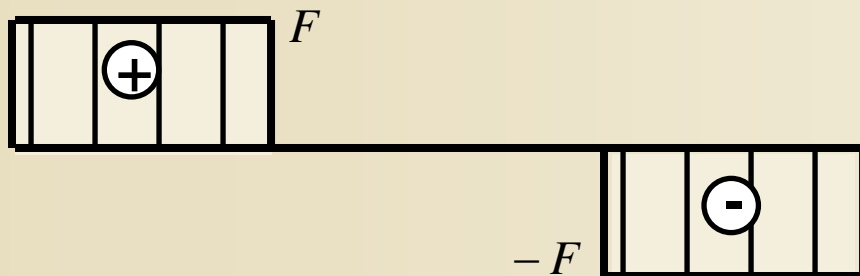
$$x \in \langle 0, c \rangle \quad M_{(x)}^L = R_{az} \cdot x \quad M_{(a)} = 0$$

$$x \in \langle c, c + d \rangle \quad M_{(x)}^L = R_{az} \cdot x - F \cdot (x - c) = F \cdot c$$

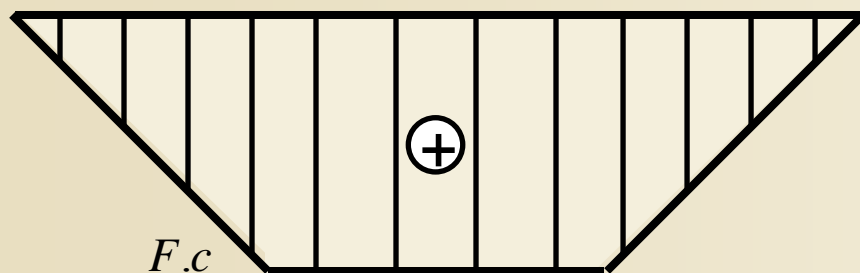
$$x \in \langle c + d, l \rangle \quad M_{(x)}^P = R_{bz} \cdot (l - x) \quad M_{(b)} = 0$$



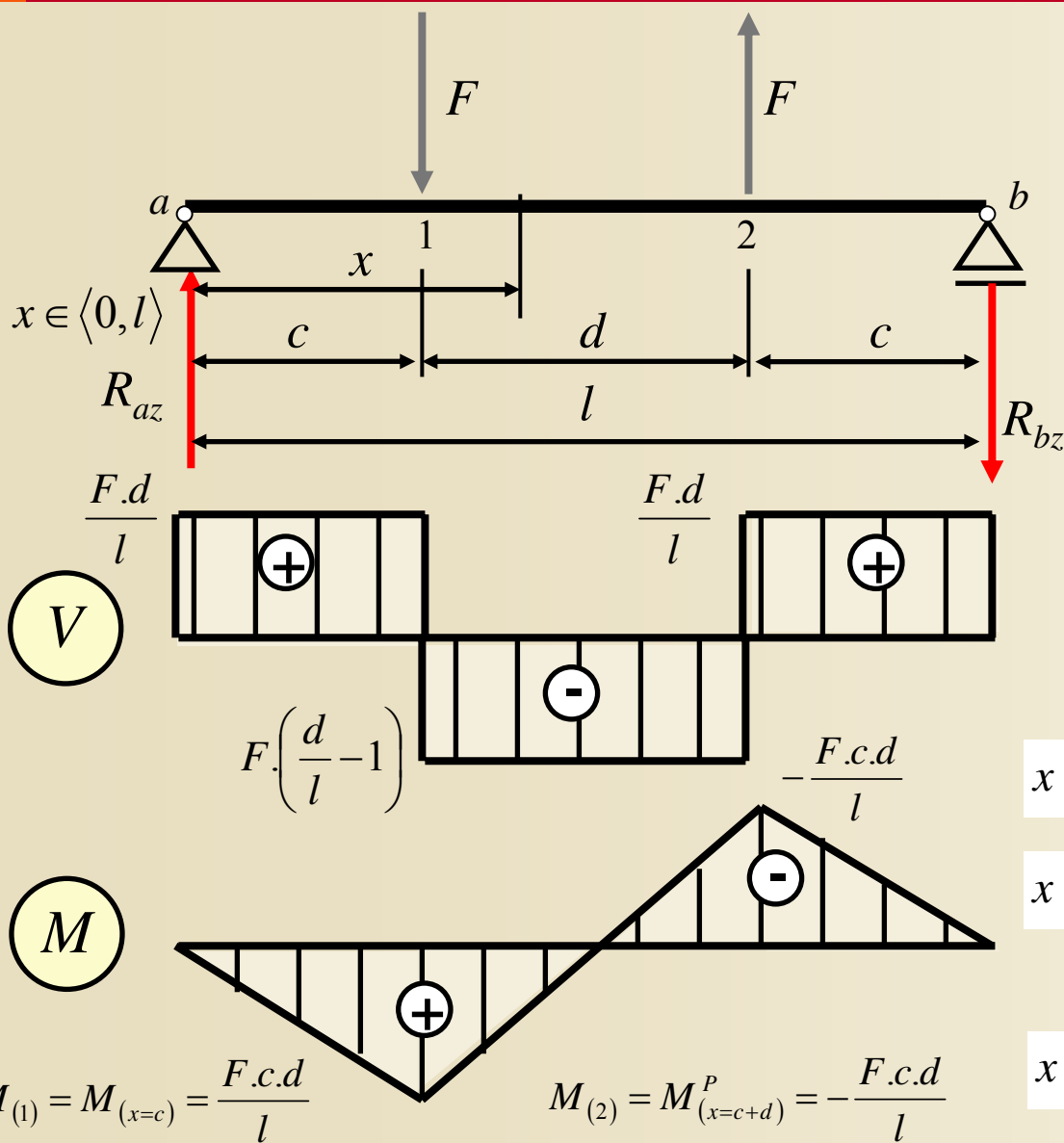
V



M



Nejjednodušší zatěžovací stavy prostých nosníků



Výpočet reakcí

$$R_{az} = \frac{F \cdot d}{l} (\uparrow) \quad R_{bz} = \frac{F \cdot d}{l} (\downarrow)$$

Posouvající síla

$$x \in \langle 0, c \rangle \quad V_{(x)}^L = R_{az} \quad V_{(a)} = R_{az}$$

$$x \in \langle c, c+d \rangle \quad V_{(x)}^L = R_{az} - F = F \cdot \left(\frac{d}{l} - 1 \right)$$

$$x \in \langle c+d, l \rangle \quad V_{(x)}^L = R_{az} \quad V_{(b)} = R_{az}$$

Ohybový moment

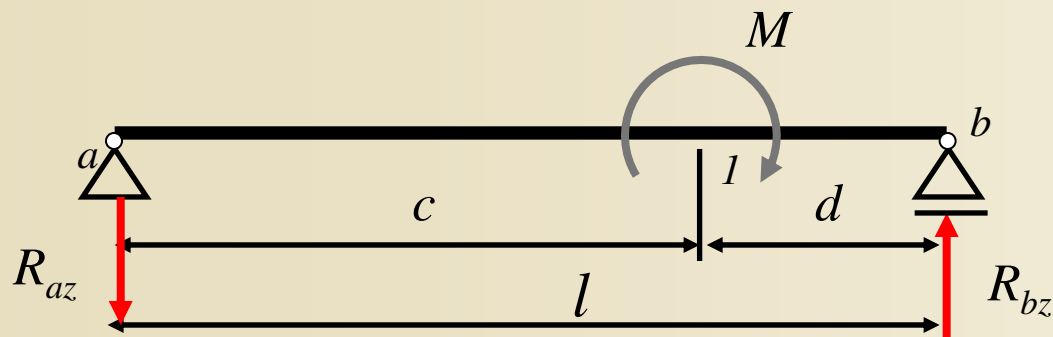
$$x \in \langle 0, c \rangle \quad M_{(x)}^L = R_{az} \cdot x \quad M_{(a)} = 0$$

$$x \in \langle c, c+d \rangle \quad M_{(x)}^L = R_{az} \cdot x - F \cdot (x - c) = \frac{F}{l} \cdot (d \cdot x - x \cdot l + c \cdot l)$$

$$x \in \langle c+d, l \rangle \quad M_{(x)}^P = -R_{bz} \cdot (l - x) \quad M_{(b)} = 0$$

Výpočet nosníku v příčné úloze (ve svislé hlavní rovině xz)

Nejjednodušší zatěžovací stavy prostých nosníků



Výpočet reakcí

$$R_{az} = \frac{M}{l} (\downarrow) \quad R_{bz} = \frac{M}{l} (\uparrow)$$

Posouvající síla

$$V_{(x)}^L = \text{konst.} = -R_{az} = -\frac{M}{l}$$

$$V_{(a)} = V_{(x=0)} = -\frac{M}{l}$$

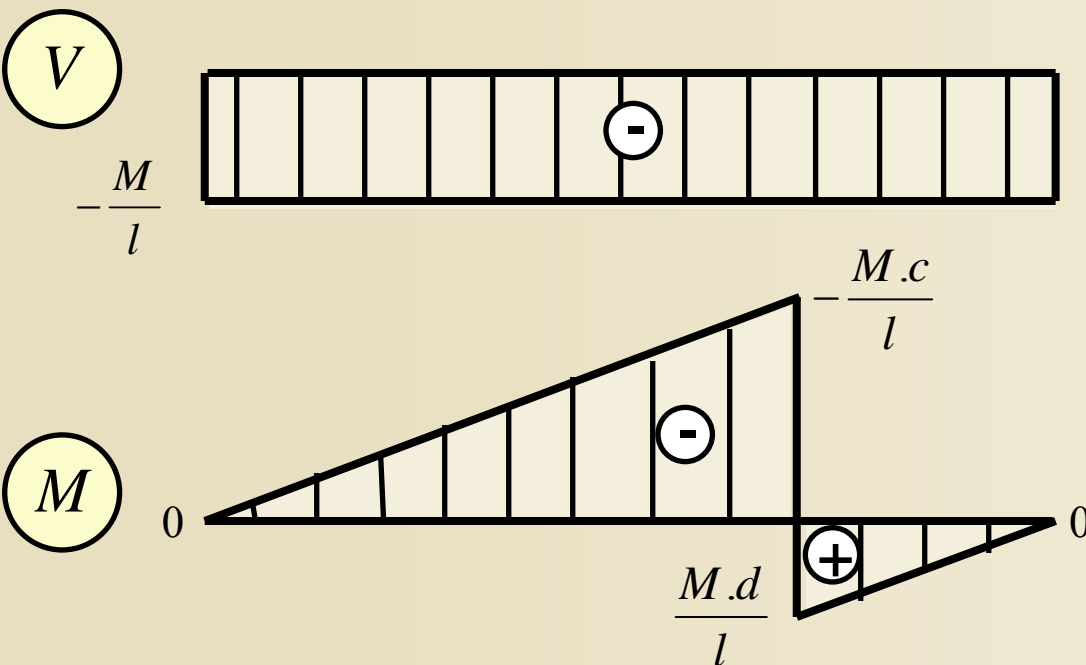
$$V_{(b)} = V_{(x=l)} = -\frac{M}{l}$$

Ohybový moment

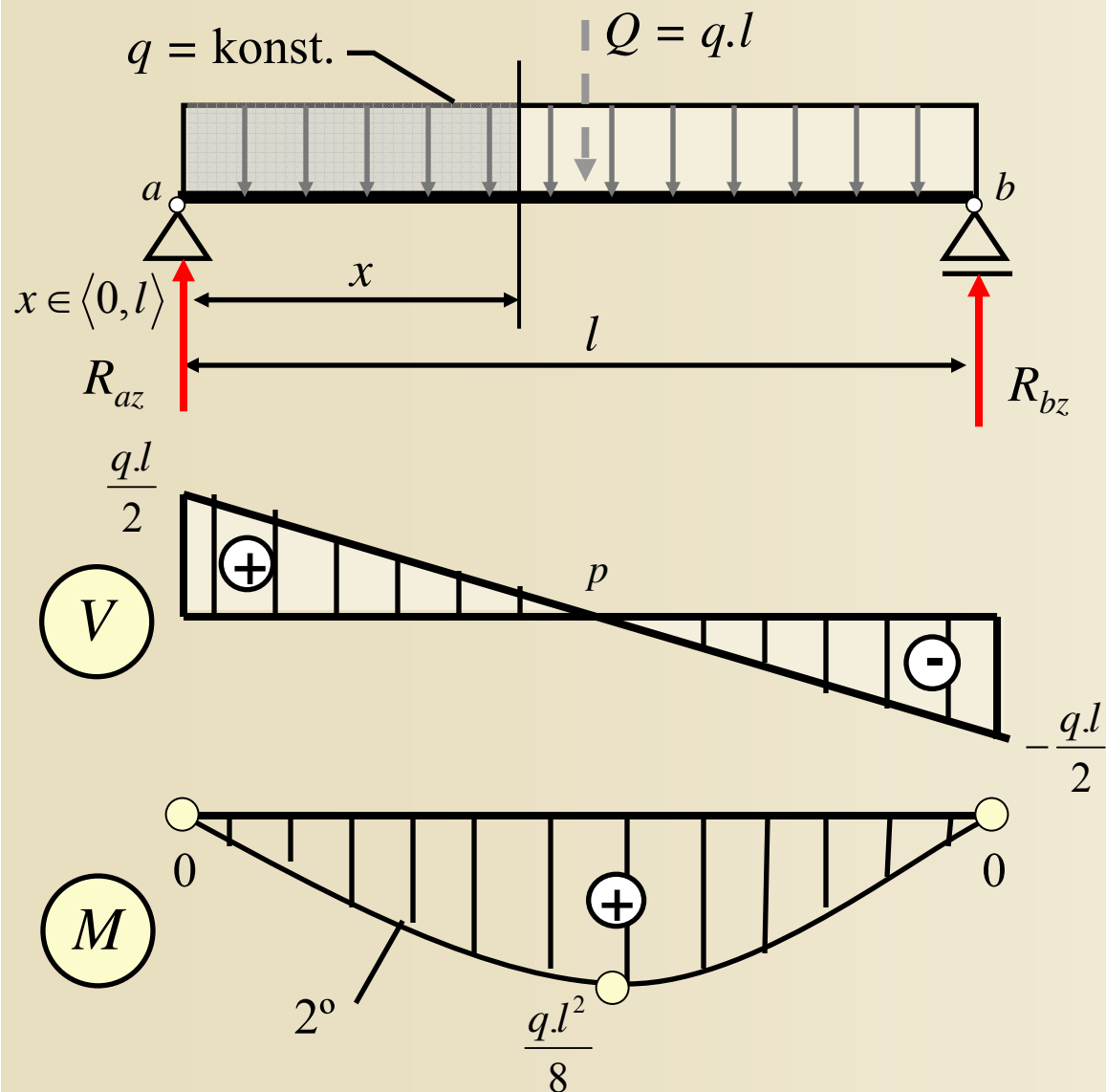
$$x \in \langle 0, c \rangle \quad M_{(x)}^L = -R_{az} \cdot x = -\frac{M \cdot x}{l}$$

$$x \in \langle c, l \rangle \quad M_{(x)}^L = -R_{az} \cdot x + M = \frac{M}{l} \cdot (l - x)$$

$$M_{(x=c1)} = -\frac{M \cdot c}{l} \quad M_{(x=c2)} = \frac{M \cdot d}{l}$$



Nejjednodušší zatěžovací stavy prostých nosníků



Výpočet reakcí

$$R_{az} = \frac{Q}{2} = \frac{q \cdot l}{2} (\uparrow) \quad R_{bz} = \frac{Q}{2} = \frac{q \cdot l}{2} (\uparrow)$$

Posouvající síla

$$V_{(x)}^L = R_{az} - q \cdot x = q \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right)$$

$$V_{(a)} = V_{(x=0)} = \frac{q \cdot l}{2}$$

$$V_{(b)} = V_{(x=l)} = -\frac{q \cdot l}{2} = -R_{bz}$$

$$q \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) = 0 \rightarrow x_{\max} = \frac{l}{2}$$

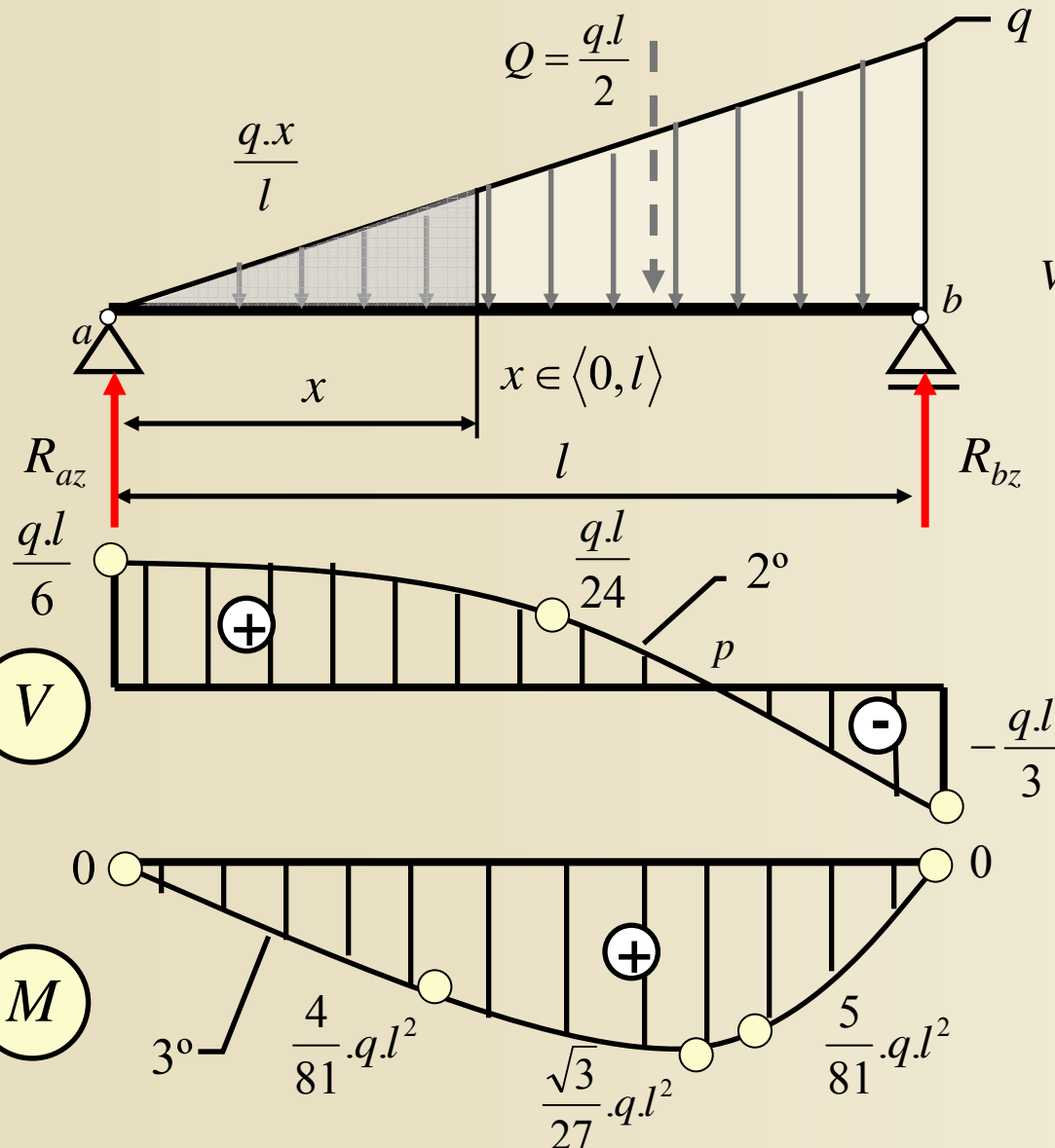
Ohybový moment

$$M_{(x)}^L = R_{az} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = \frac{q}{2} \cdot (l \cdot x - x^2)$$

$$M_{(a)} = M_{(x=0)} = 0 \quad M_{(b)} = M_{(x=l)} = 0$$

$$M_{(x=l/2)} = M_{(x_{\max})} = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

Nejjednodušší zatěžovací stavy prostých nosníků



Výpočet reakcí

$$R_{az} = \frac{Q}{3} = \frac{ql}{6} (\uparrow) \quad R_{bz} = \frac{2}{3} \cdot Q = \frac{ql}{3} (\uparrow)$$

Posouvající síla

$$V_{(x)}^L = R_{az} - \frac{q_x \cdot x}{2} = \frac{ql}{6} - \frac{q \cdot x^2}{2 \cdot l} = \frac{q}{6 \cdot l} \cdot (l^2 - 3 \cdot x^2)$$

$$V_{(a)} = V_{(x=0)} = \frac{ql}{6} \quad V_{(x=l/2)} = \frac{ql}{24}$$

$$V_{(b)} = V_{(x=l)} = -\frac{ql}{3} = -R_{bz}$$

$$\frac{q}{6 \cdot l} \cdot (l^2 - 3 \cdot x^2) = 0 \rightarrow x_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot l \doteq 0,577350 \cdot l$$

Ohybový moment

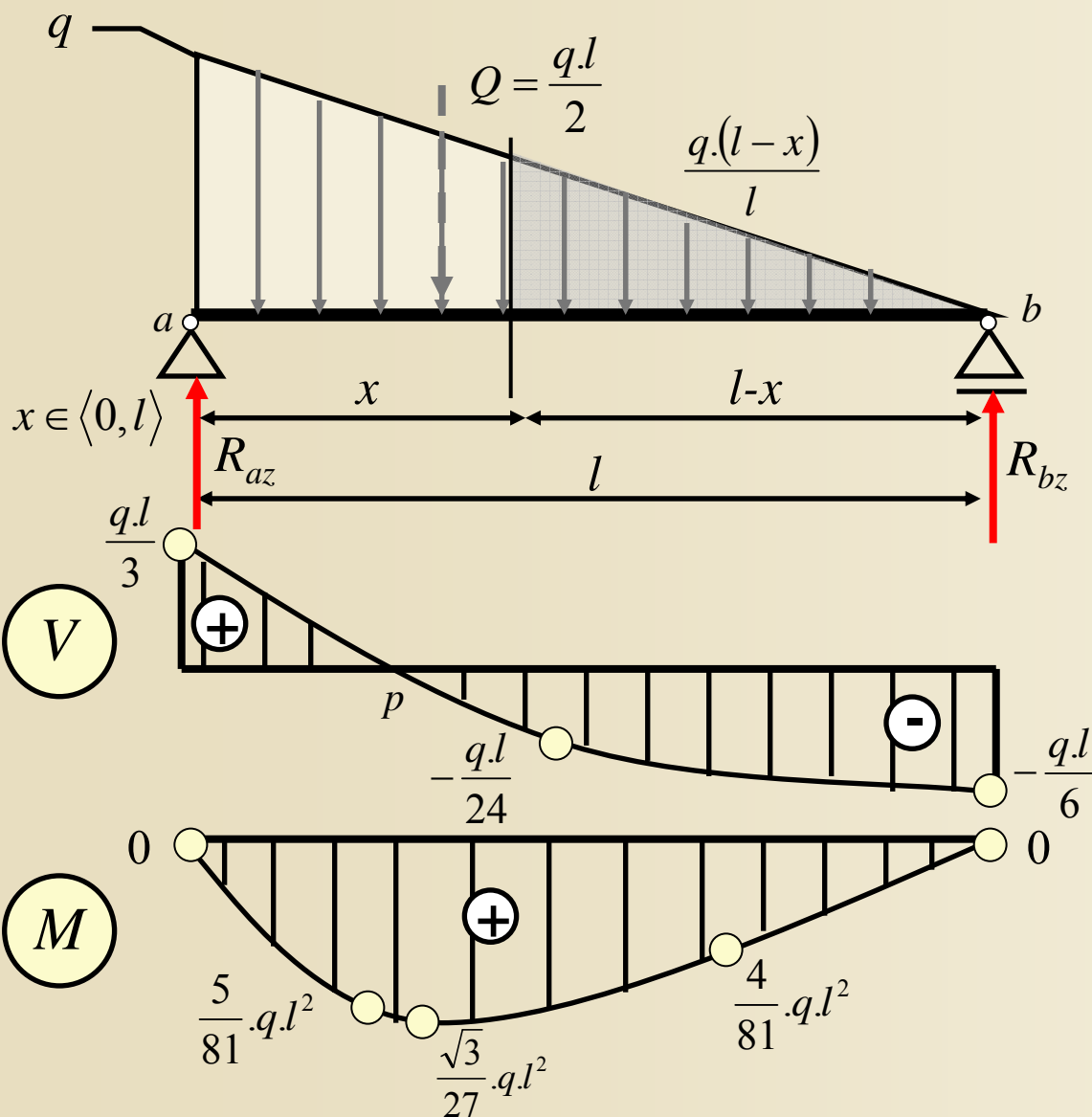
$$M_{(x)}^L = R_{az} \cdot x - \frac{q_x \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{ql \cdot x}{6} - \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot l} =$$

$$= \frac{q \cdot x}{6 \cdot l} \cdot (l^2 - x^2) \quad M_{(x=l/3)} = \frac{4}{81} \cdot ql^2$$

$$M_{(x_{\max})} = \frac{\sqrt{3}}{27} \cdot ql^2 \quad M_{(x=2/3 \cdot l)} = \frac{5}{81} \cdot ql^2$$

Výpočet nosníku v příčné úloze (ve svislé hlavní rovině xz)

Nejjednodušší zatěžovací stavy prostých nosníků



Výpočet reakcí

$$R_{az} = \frac{2}{3} \cdot Q = \frac{ql}{3} (\uparrow) \quad R_{bz} = \frac{Q}{3} = \frac{ql}{6} (\uparrow)$$

Posouvající síla

$$V_{(x)}^P = -R_{bz} + \frac{q_x \cdot (l-x)}{2} = -\frac{ql}{6} +$$

$$+ \frac{q \cdot (l-x) \cdot (l-x)}{l \cdot 2} = \frac{q}{6l} \cdot (3x^2 - 6lx + 2l^2)$$

$$V_{(a)} = V_{(x=0)} = \frac{ql}{3} \quad V_{(x=l/2)} = -\frac{ql}{24}$$

$$V_{(b)} = V_{(x=l)} = -\frac{ql}{6} = -R_{bz}$$

$$\frac{q}{6l} \cdot (3x^2 - 6lx + 2l^2) = 0$$

$$x_{\max} = l \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \doteq 0,422649 \cdot l$$

Ohybový moment

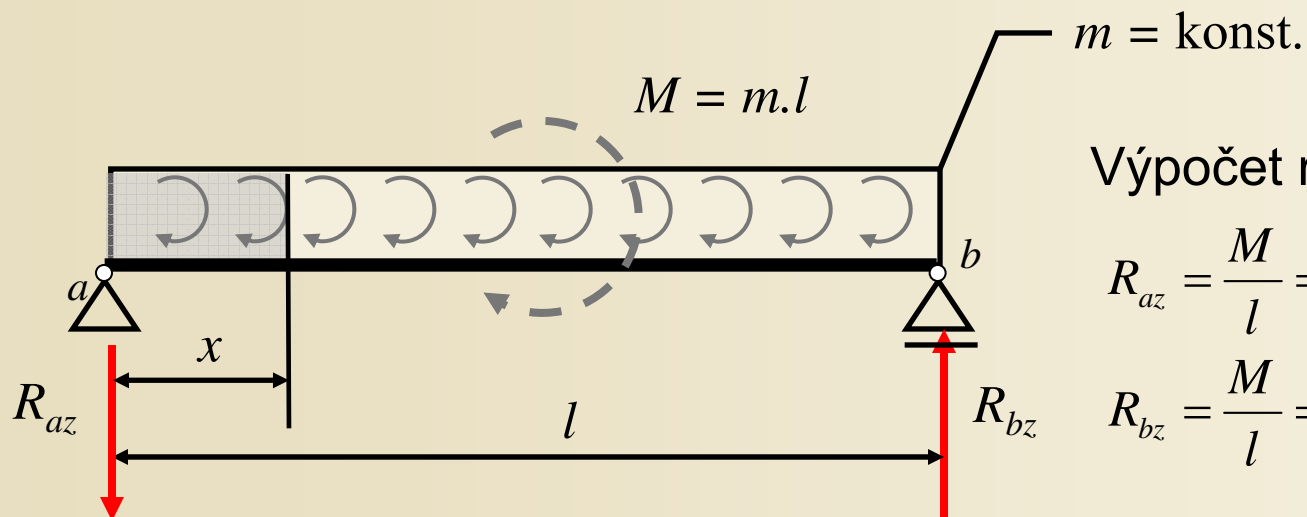
$$M_{(x)}^P = +R_{bz} \cdot (l-x) - \frac{q \cdot (l-x)^2}{2l} \cdot \frac{(l-x)}{3} =$$

$$= +\frac{ql}{6} \cdot (l-x) - \frac{q \cdot (l-x)^3}{6l} = \frac{q \cdot x}{6l} \cdot (x-l) \cdot (x-2l)$$

$$M_{(x_{\max})}^P = \frac{\sqrt{3}}{27} \cdot ql^2$$

Výpočet nosníku v příčné úloze (ve svislé hlavní rovině xz)

Nejjednodušší zatěžovací stavy prostých nosníků



Výpočet reakcí

$$R_{az} = \frac{M}{l} = m(\downarrow)$$

$$R_{bz} = \frac{M}{l} = m(\uparrow)$$

Posouvající síla

$$V_{(x)}^L = \text{konst.} = -R_{az} = -m$$

$$V_{(a)} = V_{(x=0)} = -m$$

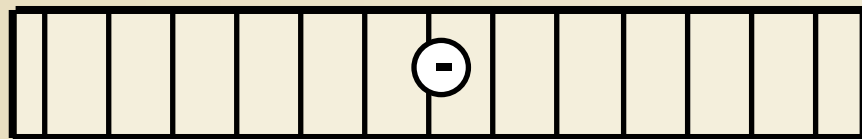
$$V_{(b)} = V_{(x=l)} = -m$$

Ohybový moment

$$M_{(x)}^L = -R_{az} \cdot x + m \cdot x = -m \cdot x + m \cdot x = 0$$

V

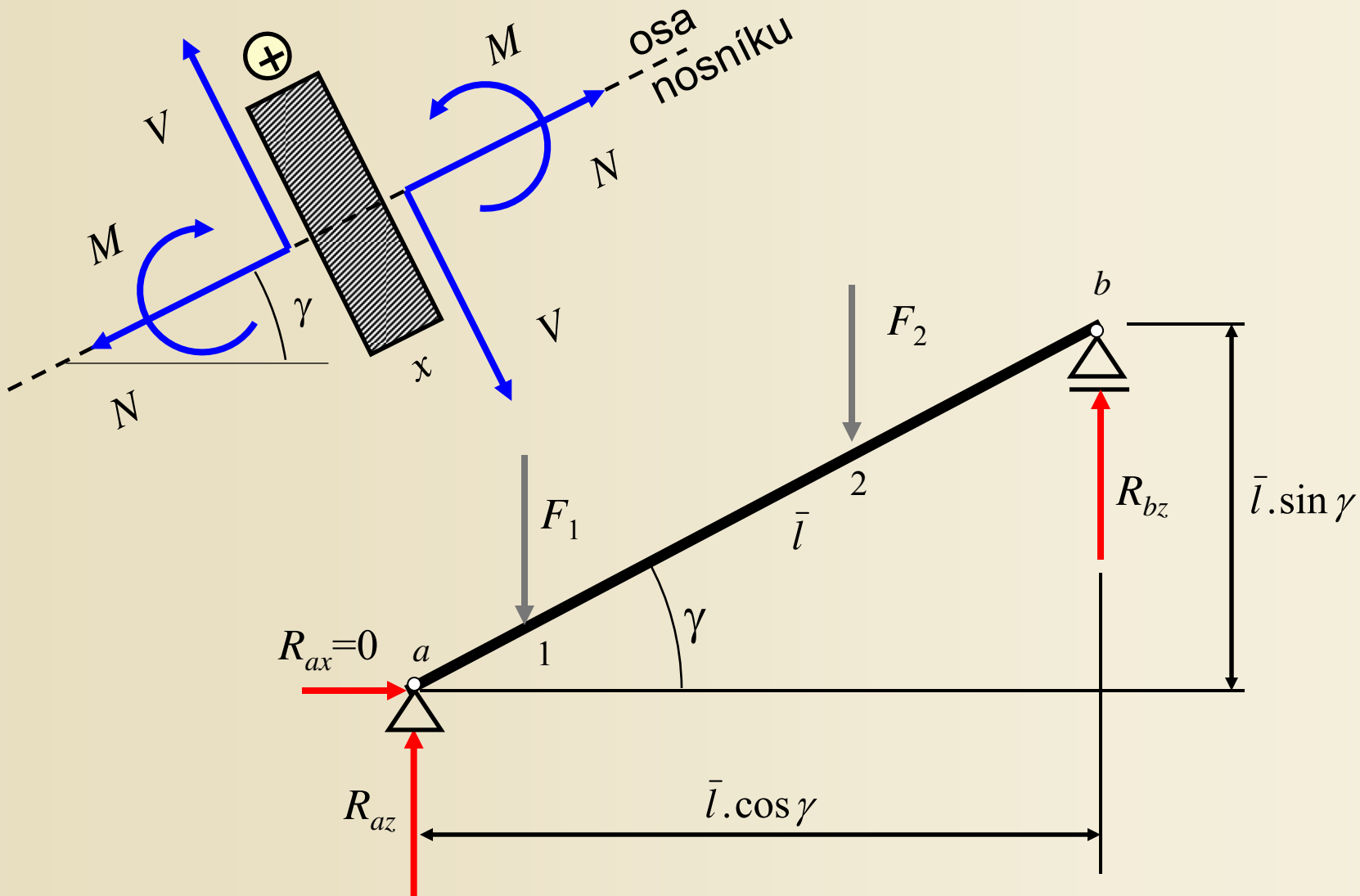
$-m$



M

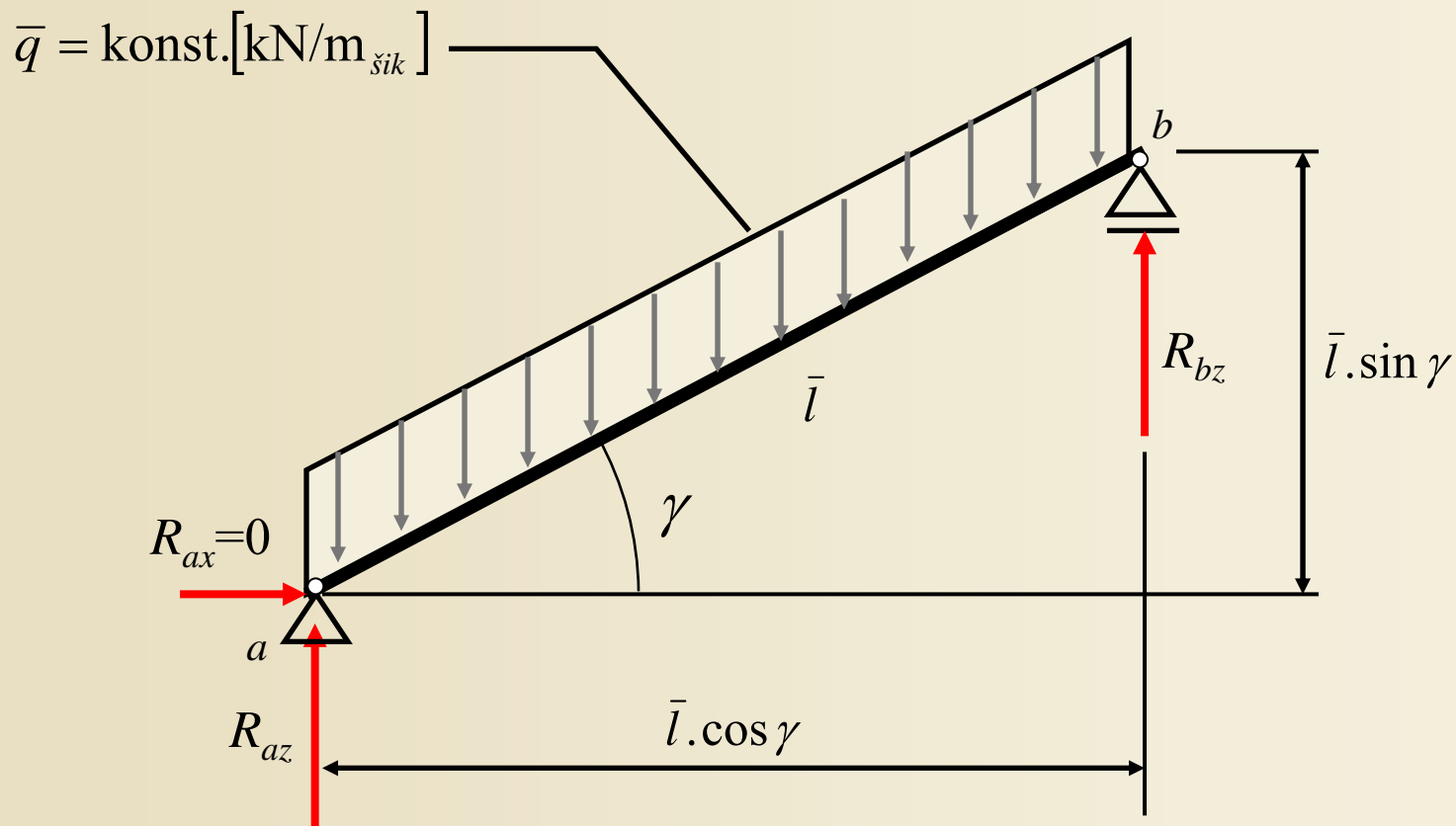


Šikmý nosník



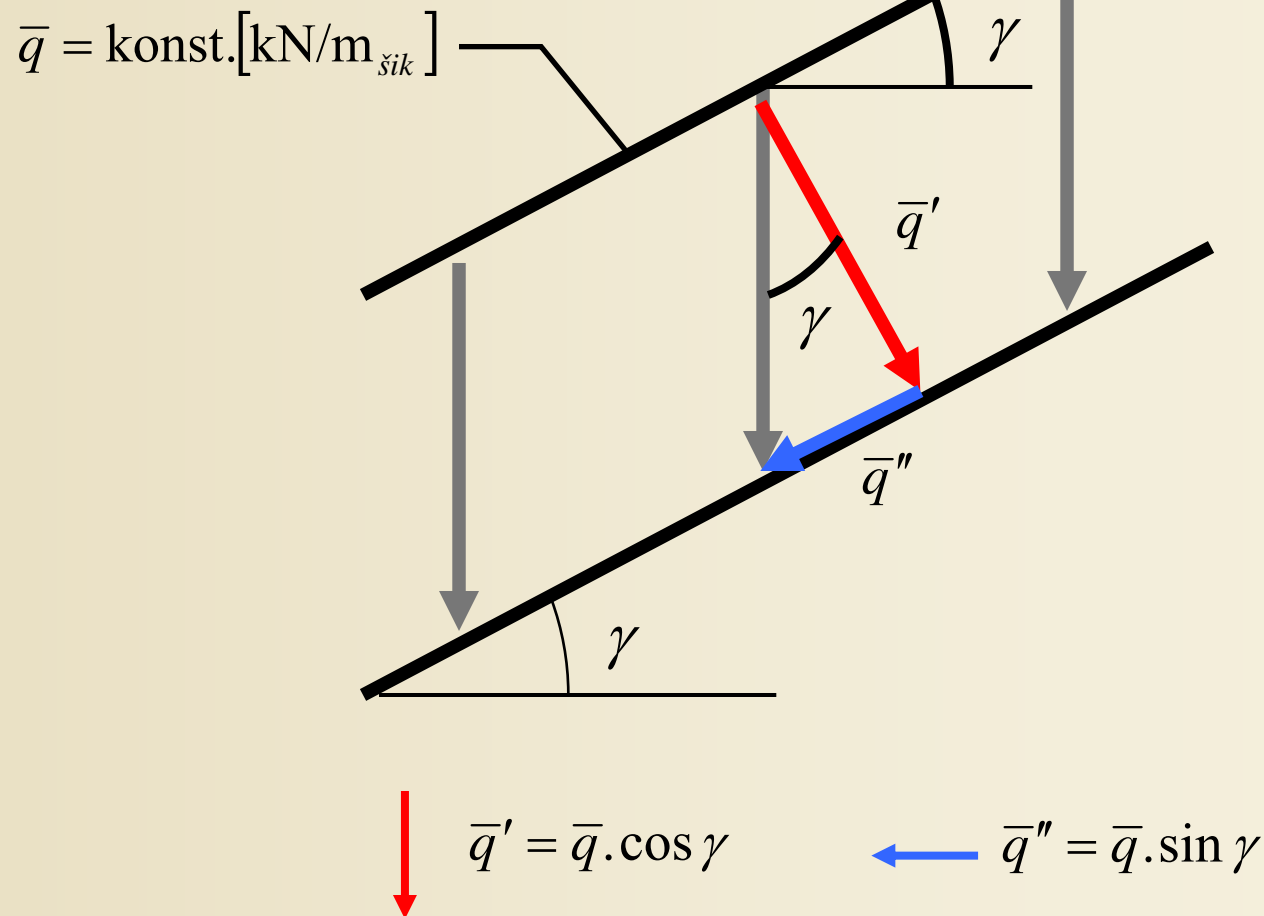
Šikmý nosník – zatížení vlastní tíhou

Spojité zatížení působící svisle podél střednice nosníku – na jednotku šikmé délky



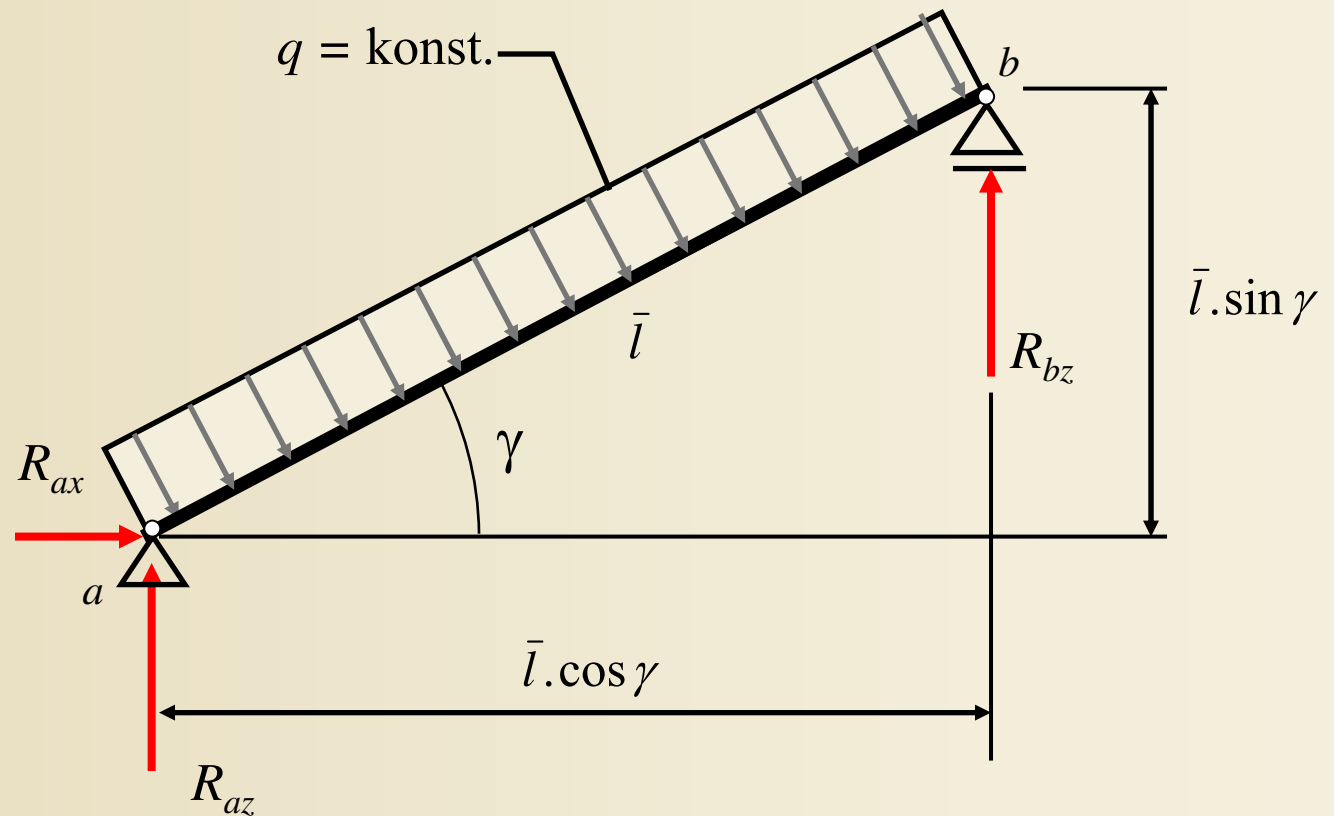
Šikmý nosník – zatížení vlastní tíhou

Rozklad zatížení na složku rovnoběžnou s osou nosníku a kolmou (příčnou) k ose nosníku



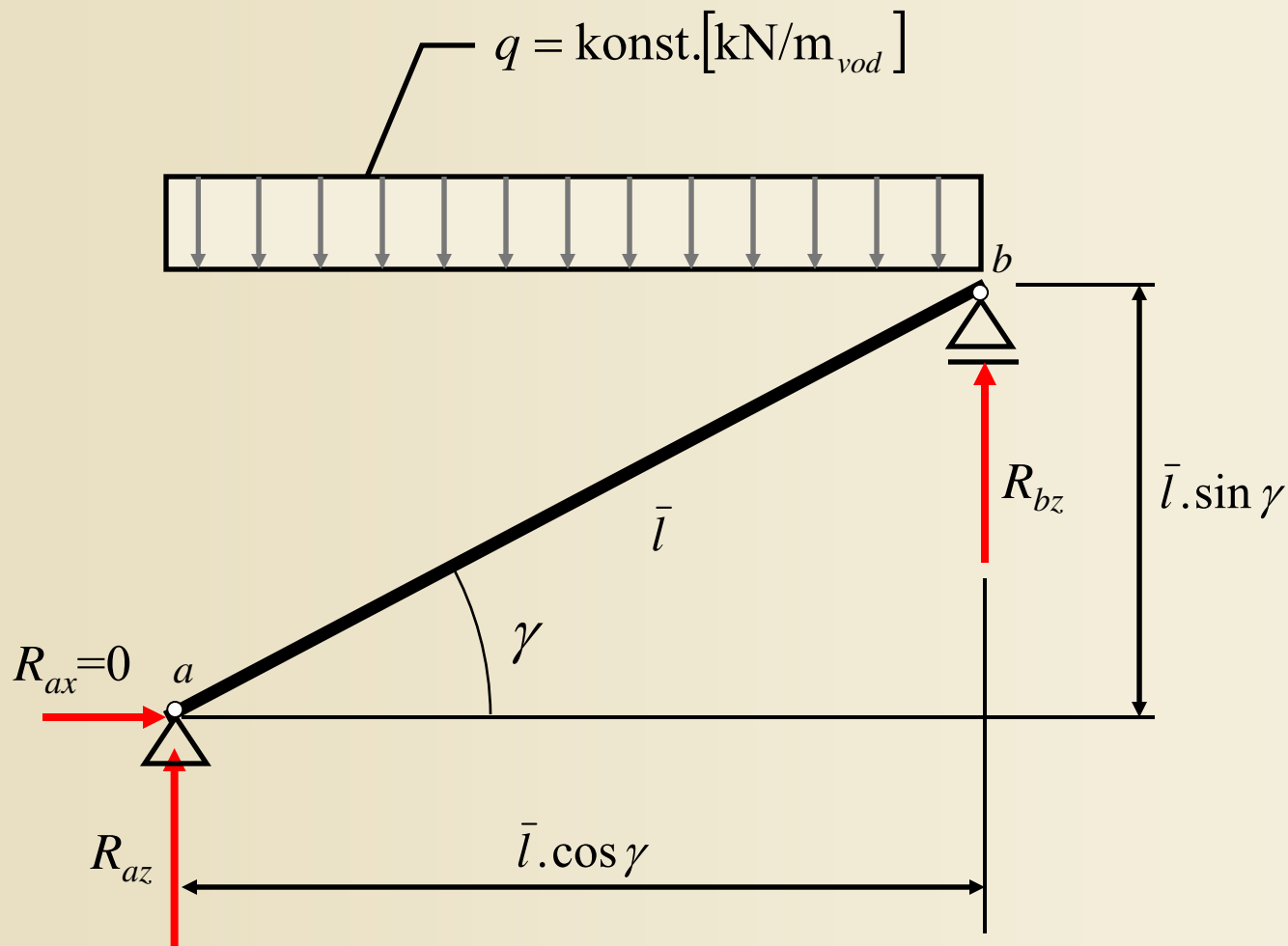
Šikmý nosník - zatížení větrem

Spojité zatížení působící kolmo na nosník



Šikmý nosník – zatížení sněhem

Spojité zatížení působící na vodorovný (půdorysný) průmět nosníku

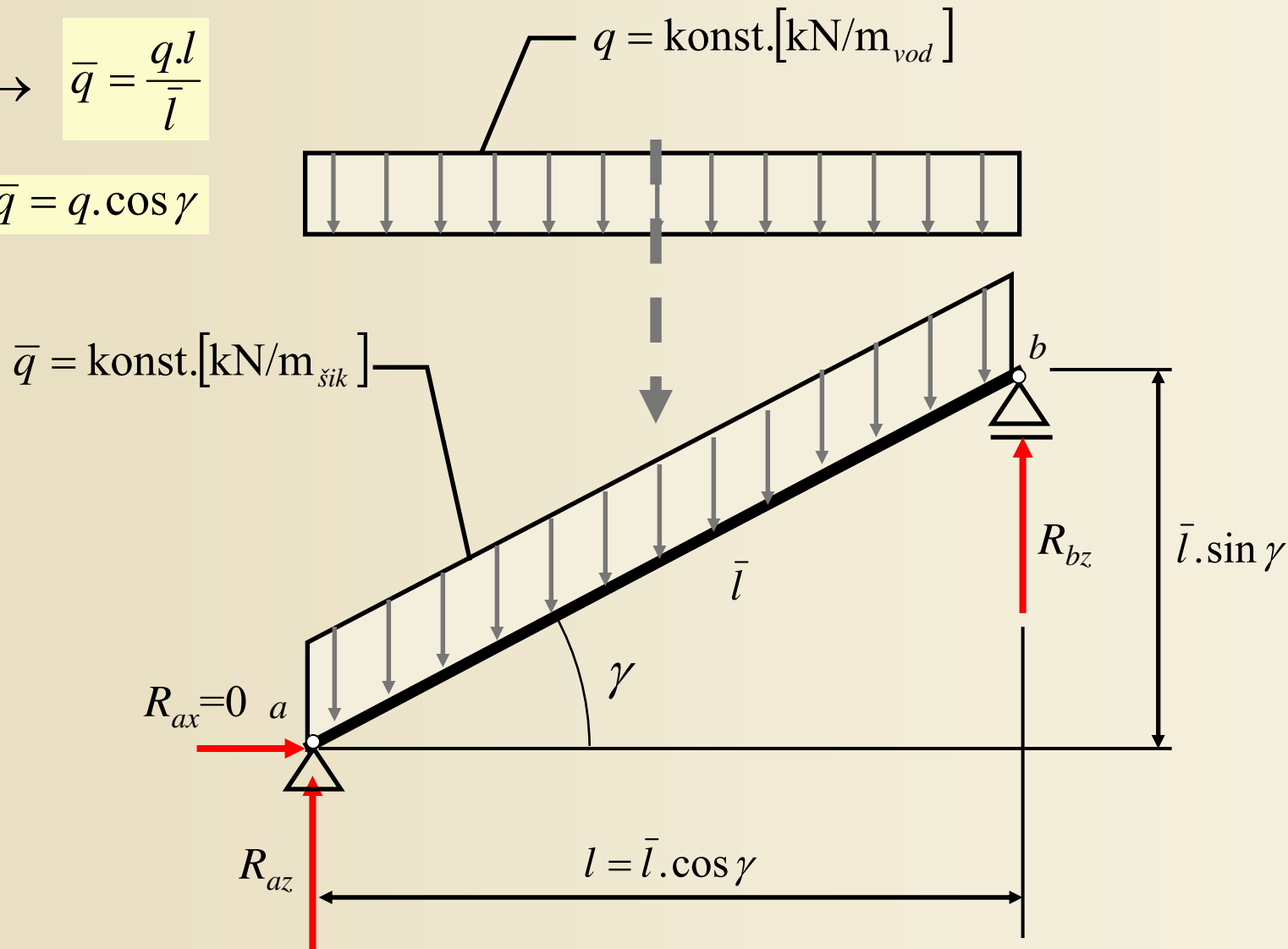


Šikmý nosník – úprava zatížení sněhem

$$q \cdot l = \bar{q} \cdot \bar{l} \rightarrow \bar{q} = \frac{q \cdot l}{\bar{l}}$$

nebo

$$\bar{q} = q \cdot \cos \gamma$$



Šikmý nosník

Postup řešení:

a) $\sum M_{ia} = 0 \Rightarrow R_{bz}$

b) $\sum M_{ib} = 0 \Rightarrow R_{az}$

c) $R_z = 0$ kontrola

d) Je-li zadáno q , pak $\bar{q} = q \cdot \cos \gamma$

e) Rozklad reakcí na příčné a osově složky

$$R''_a = R_{az} \cdot \sin \gamma \quad R''_b = R_{bz} \cdot \sin \gamma$$

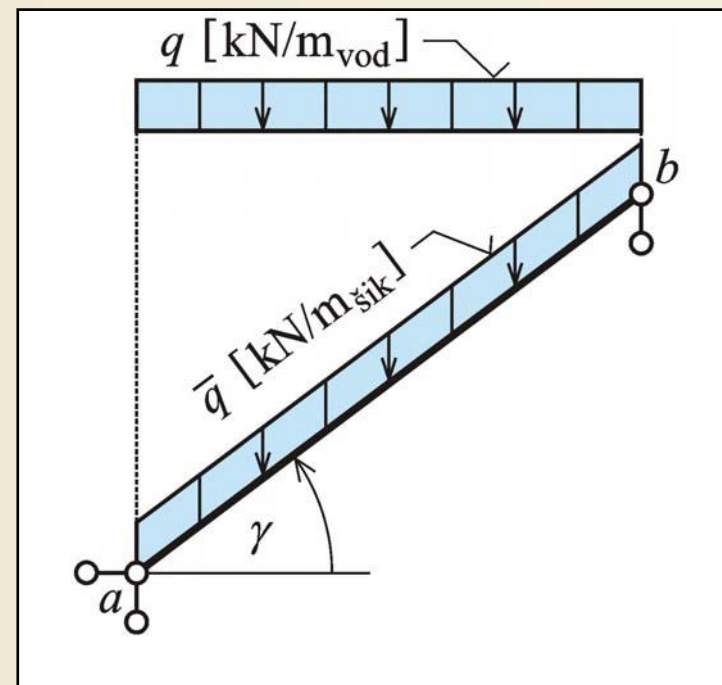
$$R'_a = R_{az} \cdot \cos \gamma \quad R'_b = R_{bz} \cdot \cos \gamma$$

f) Rozklad zatížení na příčné a osově složky

$$\bar{q}' = \bar{q} \cdot \cos \gamma \quad \bar{q}'' = \bar{q} \cdot \sin \gamma$$

$$P' = P \cdot \cos \gamma \quad P'' = P \cdot \sin \gamma$$

g) Dále řešení příčné a osově úlohy



Dva způsoby grafického znázornění intenzity spojitého zatížení na šikmém nosníku

Obr. 7.49. / str. 121

Příklad 4.20

Zadání: pro oba zatěžovací stavy téhož šikmého nosníku určit svislé reakce, rozložit rovinnou úlohu na příčnou a osovou a stanovit průběhy vnitřních sil.

Zadání a řešení příkladu 4.20
Obr. 7.50. / str. 122

