

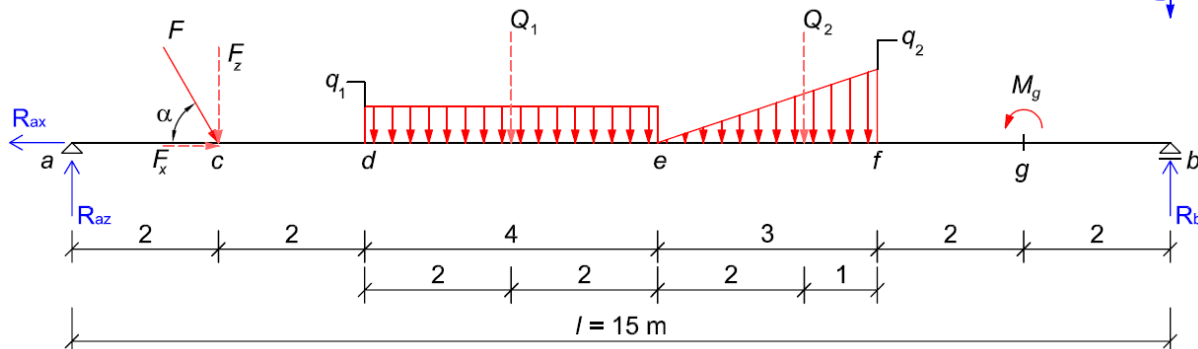
Zadání příkladu:

(převzato z: Kytýr, J., Kadlčák, J.: Statika stavebních konstrukcí I., Nakladatelství VUTUM, 2001.)

Vypočítejte reakce a vykreslete průběhy vnitřních sil na nosníku zatíženém dle obrázku.

$$F = 2 \text{ kN}, \alpha = 60^\circ, M_g = 2 \text{ kNm}, q_1 = 0,5 \text{ kNm}^{-1}, q_2 = 1 \text{ kNm}^{-1}.$$

Zvolená konvence pro výpočet reakcí:

**Řešení:****Osová F_x a příčná F_z složka síly F :**

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \cos 60^\circ = 1,00 \text{ kN}, F_z = F \cdot \sin \alpha = 2 \cdot \sin 60^\circ = 1,73 \text{ kN}.$$

Náhradní břemena:

$$Q_1 = q_1 \cdot 4 = 0,5 \cdot 4 = 2,00 \text{ kN}, Q_2 = \frac{1}{2} \cdot q_2 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = 1,50 \text{ kN}.$$

Reakce vazeb z podmínek rovnováhy:

POZN: na obrázku modře zvolené směry reakcí a konvence pro jejich výpočet.

$$\Sigma F_{ix} = 0: -R_{ax} + F_x = 0 \Rightarrow R_{ax} = F_x = 1,00 \text{ kN} (\leftarrow),$$

$$\Sigma M_{ib} = 0: -R_{az} \cdot 15 + F_z \cdot 13 + Q_1 \cdot 9 + Q_2 \cdot 5 + M_g = 0 \Rightarrow R_{az} = 3,33 \text{ kN} (\uparrow),$$

$$\Sigma M_{ia} = 0: R_b \cdot 15 - F_z \cdot 2 - Q_1 \cdot 6 - Q_2 \cdot 10 + M_g = 0 \Rightarrow R_b = 1,90 \text{ kN} (\uparrow).$$

Skutečné směry reakcí tedy odpovídají obrázku.

Kontrola:

$$\Sigma F_{iz} = 0: -R_{az} + F_z + Q_1 + Q_2 - R_b = 0 \Rightarrow -3,33 + 1,73 + 2,00 + 1,50 - 1,90 = 0.$$

Složky vnitřních sil:Normálové síly N

a) řešení zleva:

$$N_{ac} = R_{ax} = 1,00 \text{ kN},$$

$$N_{ca} = N_{ac} = 1,00 \text{ kN},$$

$$N_{cb} = R_{ax} - F_x = 1,00 - 1,00 = 0.$$

b) řešení zprava:

$$N_{cb} = N_{bc} = 0,$$

$$N_{ca} = F_x = 1,00 \text{ kN},$$

$$N_{ac} = N_{ca} = 1,00 \text{ kN},$$

$$N_a = N_{ac} - R_{ax} = 1,00 - 1,00 = 0.$$



Posouvající síly V

a) řešení zleva:

$$V_{ac} = R_{az} = 3,33 \text{ kN},$$

$$V_{ca} = V_{ac} = 3,33 \text{ kN},$$

$$V_{cd} = V_{ca} - F_z = 3,33 - 1,73 = 1,60 \text{ kN},$$

$$V_d = V_{cd} = 1,60 \text{ kN},$$

$$V_e = V_d - Q_1 = 1,60 - 2,00 = -0,40 \text{ kN},$$

$$V_f = V_e - Q_2 = -0,4 - 1,50 = -1,90 \text{ kN},$$

$$V_{bf} = V_f = -1,90 \text{ kN},$$

$$V_b = V_{bf} + R_b = -1,90 + 1,90 = 0.$$

b) řešení zprava:

$$V_{bf} = -R_b = -1,90 \text{ kN},$$

$$V_f = V_{bf} = -1,90 \text{ kN},$$

$$V_e = V_f + Q_2 = -1,90 + 1,50 = -0,40 \text{ kN}$$

$$V_d = V_e + Q_1 = -0,40 + 2,00 = 1,60 \text{ kN},$$

$$V_{cd} = V_d = 1,60 \text{ kN},$$

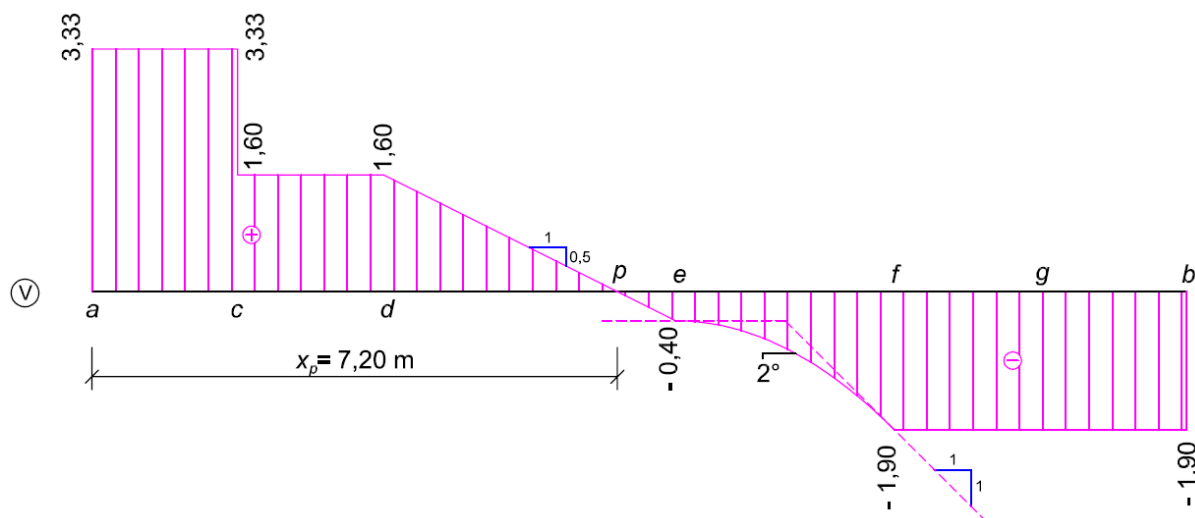
$$V_{ca} = V_{cd} + F_z = 1,60 + 1,73 = 3,33 \text{ kN},$$

$$V_{ac} = V_{ca} = 3,33 \text{ kN},$$

$$V_a = V_{ac} - R_{az} = 3,33 - 3,33 = 0.$$

Poloha přechodového průřezu:

$$V_p = V_d - q_1 \cdot (x_p - 4) = 0 \Rightarrow x_p = \frac{V_d + q_1 \cdot 4}{q_1} = \frac{V_d}{q_1} + 4 = \frac{1,60}{0,5} + 4 = 7,20 \text{ m}$$



Průběh posouvajících sil V je v částech $a-c$, $c-d$, $f-b$ nosníku konstantní, neboť v těchto částech se nenachází žádné příčné zatížení q ; v části $d-e$ je průběh lineární, neboť příčné spojitě zatížení má v této části konstantní hodnotu $q_{d-e} = q_1$, a v části $e-f$ podle kvadratické paraboly, neboť v této části je průběh spojitěho příčného zatížení lineární.

$$\text{OBECNĚ TEDY: } \frac{dV}{dx} = -q \Rightarrow V(x) = -\int q(x) dx + C$$

Směrnice přímky je v celé části $d-e$ rovna záporné hodnotě spojitěho rovnoměrného zatížení q_1 , tedy $\tan \varphi_{V_{d-e}} = -0,5$, neboť $q_{d-e} = 0,5 \text{ kNm}^{-1}$.

V místě e je vodorovná tečna, protože intenzita zatížení q_e je v tomto místě nulová; v místě f je směrnice tečny rovna intenzitě zatížení v tomto bodě, tedy $\tan \varphi_{V_f} = -1$, neboť $q_f = 1 \text{ kNm}^{-1}$.

$$\text{OBECNĚ TEDY: } \frac{dV}{dx} = -q = \tan \varphi_V$$

Ohybové momenty M

a) řešení zleva:

$$M_a = 0$$

$$M_c = R_{az} \cdot 2 = 3,33 \cdot 2 = 6,67 \text{ kNm}$$

$$M_d = R_{az} \cdot 4 - F_z \cdot 2 = 3,33 \cdot 4 - 1,73 \cdot 2 = 9,87 \text{ kNm}$$

$$M_e = R_{az} \cdot 8 - F_z \cdot 6 - Q_1 \cdot 2 = 3,33 \cdot 8 - 1,73 \cdot 6 - 2,00 \cdot 2 = 12,28 \text{ kNm}$$

$$M_f = R_{az} \cdot 11 - F_z \cdot 9 - Q_1 \cdot 5 - Q_2 \cdot 1 = 3,33 \cdot 11 - 1,73 \cdot 9 - 2,00 \cdot 5 - 1,50 \cdot 1 = 9,59 \text{ kNm}$$

$$M_{gf} = R_{az} \cdot 13 - F_z \cdot 11 - Q_1 \cdot 7 - Q_2 \cdot 3 = 3,33 \cdot 13 - 1,73 \cdot 11 - 2,00 \cdot 7 - 1,50 \cdot 3 = 5,80 \text{ kNm}$$

$$M_{gb} = R_{az} \cdot 13 - F_z \cdot 11 - Q_1 \cdot 7 - Q_2 \cdot 3 - M_g = 3,33 \cdot 13 - 1,73 \cdot 11 - 2,00 \cdot 7 - 1,50 \cdot 3 - 2 = 3,80 \text{ kNm}$$

$$M_b = R_{az} \cdot 15 - F_z \cdot 13 - Q_1 \cdot 9 - Q_2 \cdot 5 - M_g = 3,33 \cdot 15 - 1,73 \cdot 13 - 2,00 \cdot 9 - 1,50 \cdot 5 - 2 = 0$$

$$M_p = R_{az} \cdot x_p - F_z \cdot (x_p - 2) - q_1 (x_p - 4)^2 \cdot \frac{1}{2} = 3,33 \cdot 7,20 - 1,73 \cdot (7,20 - 2) - 0,5 \cdot (7,20 - 4)^2 \cdot \frac{1}{2} = 12,44 \text{ kNm}$$

b) Řešení zprava:

$$M_b = 0$$

$$M_{gb} = R_b \cdot 2 = 1,90 \cdot 2 = 3,80 \text{ kNm}$$

$$M_{gf} = R_b \cdot 2 + M_g = 1,90 \cdot 2 + 2 = 5,80 \text{ kNm}$$

$$M_f = R_b \cdot 4 + M_g = 1,90 \cdot 4 + 2 = 9,59 \text{ kNm}$$

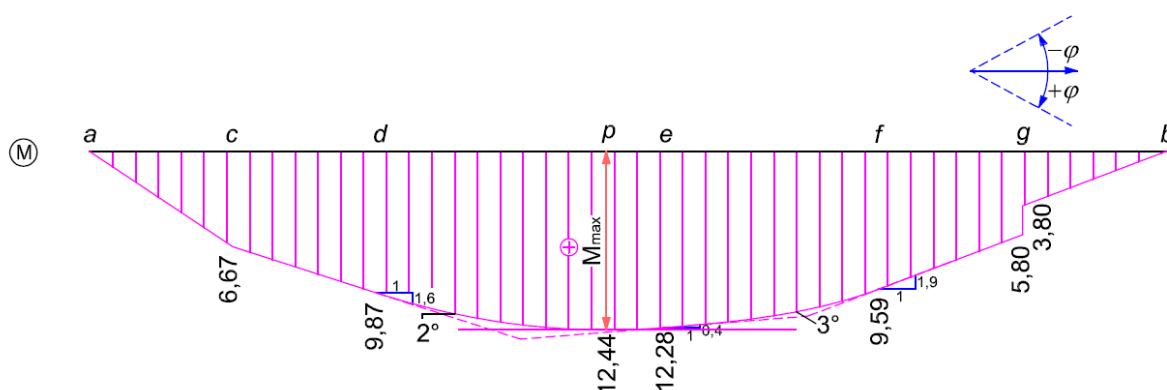
$$M_e = R_b \cdot 7 + M_g - Q_2 \cdot 2 = 1,90 \cdot 7 + 2 - 1,50 \cdot 2 = 12,28 \text{ kNm}$$

$$M_d = R_b \cdot 11 + M_g - Q_2 \cdot 6 - Q_1 \cdot 2 = 1,90 \cdot 11 + 2 - 1,50 \cdot 6 - 2,00 \cdot 2 = 9,87 \text{ kNm}$$

$$M_c = R_b \cdot 13 + M_g - Q_2 \cdot 8 - Q_1 \cdot 4 = 1,90 \cdot 13 + 2 - 1,50 \cdot 8 - 2,00 \cdot 4 = 6,67 \text{ kNm}^{-1}$$

$$M_a = R_b \cdot 15 + M_g - Q_2 \cdot 10 - Q_1 \cdot 6 - F_z \cdot 2 = 1,90 \cdot 15 + 2 - 1,50 \cdot 10 - 2,00 \cdot 6 - 1,73 \cdot 2 = 0$$

$$M_p = R_b \cdot (15 - x_p) + M_g - Q_2 \cdot (10 - x_p) - q_1 (15 - x_p - 7)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1,90 \cdot (15 - 7,20) + 2 - 1,50 \cdot (10 - 7,20) - 0,5 (15 - 7,20 - 7)^2 \cdot \frac{1}{2} = 12,44 \text{ kNm}$$



Průběh ohybových momentů M je v částech nosníku $a-c$, $c-d$, $f-b$ lineární, neboť v těchto je průběh posouvajících sil konstantní; v úseku rovnoměrného spojitého zatížení $d-e$ je průběh podle kvadratické paraboly a v úseku příčného trojúhelníkového zatížení $e-f$ podle kubické paraboly.

V místě g působení osamělého momentu M_g je v čáře ohybových momentů skok o velikosti M_g .

OBECEŇ Tedy: $\frac{dM}{dx} = V \Rightarrow M(x) = \int V(x) dx + C$ (při $m(x) = 0$)

Pro směrnice tečen v čáře ohybových momentů platí, že jejich hodnota odpovídá hodnotě posouvající síly v daném bodě.

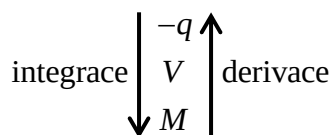
OBECEŇ TEDY: $\frac{dM}{dx} = V = \operatorname{tg} \varphi_M$

V průřezu e je společná tečna pro rovnoměrné i trojúhelníkové zatížení.

!!! SHRNUŤI:

- $\frac{dN}{dx} = -n \Rightarrow N(x) = -\int n(x) dx + C_1$
- $\frac{dV}{dx} = -q \Rightarrow V(x) = -\int q(x) dx + C_2$
- $\frac{dM}{dx} = V \Rightarrow M(x) = \int V(x) dx + C_3$ (při $m(x) = 0$)

→ derivačně – integrační schéma:



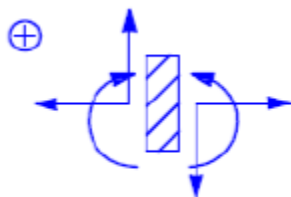
Čára normálových sil N resp. posouvajících sil V nebo ohybových momentů M je integrální (součtovou) čarou osového zatížení n resp. příčného zatížení q nebo posouvajících sil V .

Čára posouvajících sil V resp. příčného zatížení q nebo osového zatížení n je diferenciální čarou ohybových momentů M resp. posouvajících sil V nebo normálových sil N .

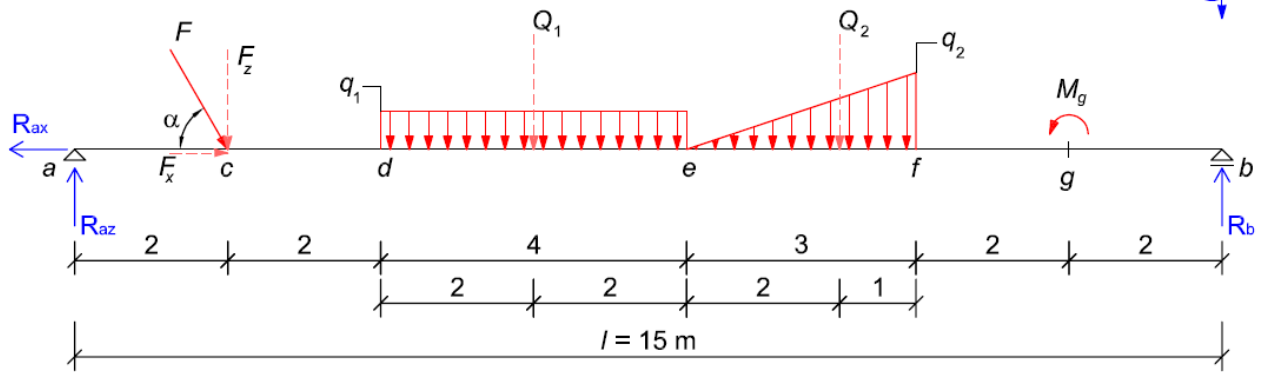
- $\frac{dV}{dx} = -q = \operatorname{tg} \varphi_V$
- $\frac{dM}{dx} = V = \operatorname{tg} \varphi_M$

Diagram příčného zatížení q resp. posouvajících sil V zobrazuje průběh směrnice tečny v obrazi posouvajících sil V resp. ohybových momentů M (při $m = 0$).

- Znaménková konvence pro vykreslování průběhů vnitřních sil:



Libovolně zvolená konvence pro výpočet reakcí:



Znaménková konvence pro vykreslení průběhů vnitřních sil:

