VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

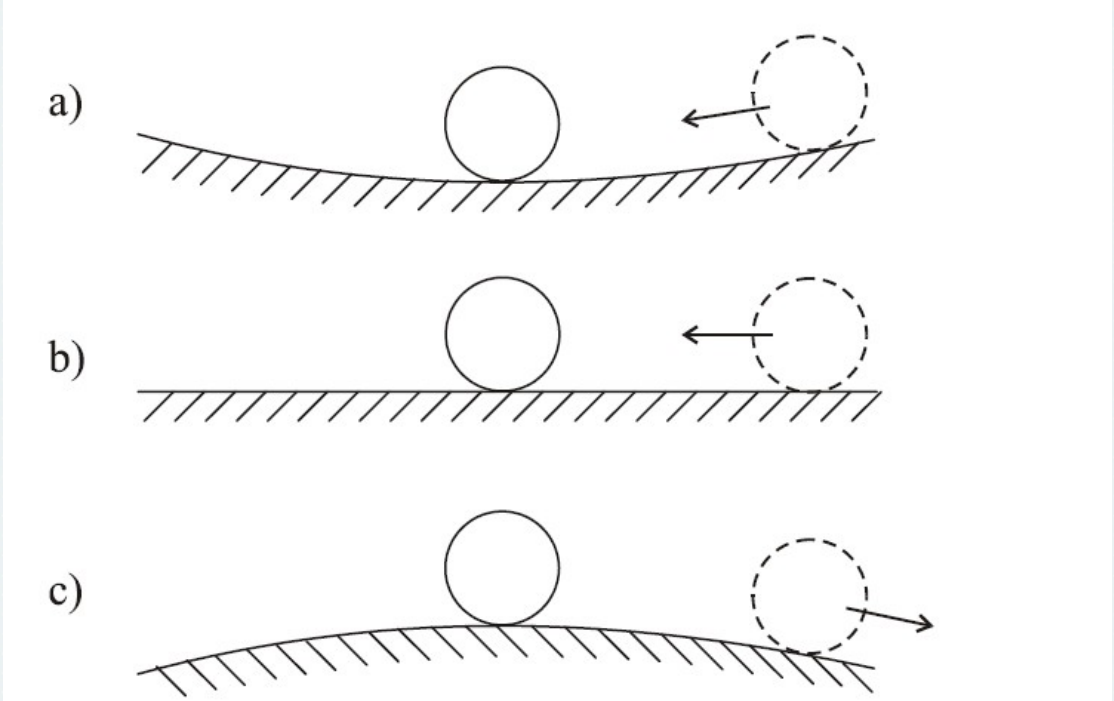
Pružnost a pevnost

Přednášející: Doc. Ing. Lukáš Novák, Ph.D.

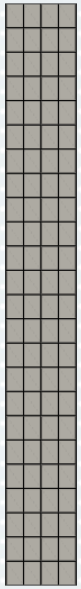
Autoři: Drahomír Novák, Lukáš Novák

Ústav stavební mechaniky

Vzpěrná pevnost a stabilita tlačených prutů



Stav stabilní rovnováhy (a), indiferentní (b) a nestabilní rovnováhy (c)

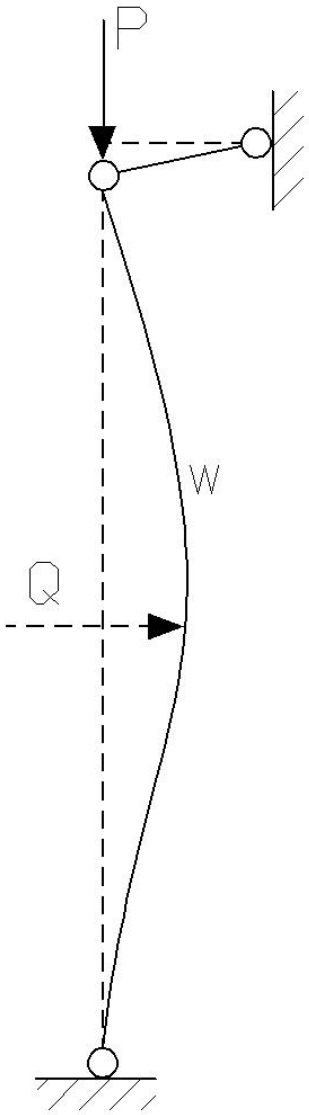


Základní pojmy

Vzpěrný tlak – štíhlý prut se neporuší prostým tlakem (rozdrcením), ale ztratí svou nosnou funkci vybočením

Teorie II. řádu – vnáší nelinearitu do řešení a omezuje užití principu superpozice

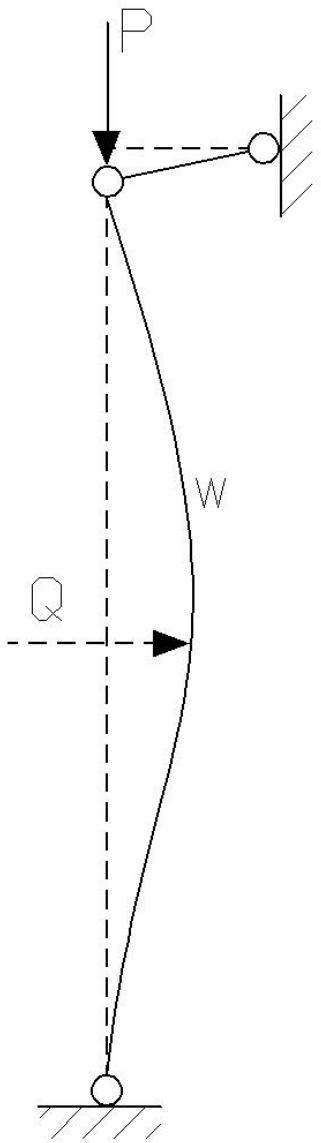
Vzpěrná pevnost (únosnost) – odolnost prutu proti účinkům vzpěrného tlaku



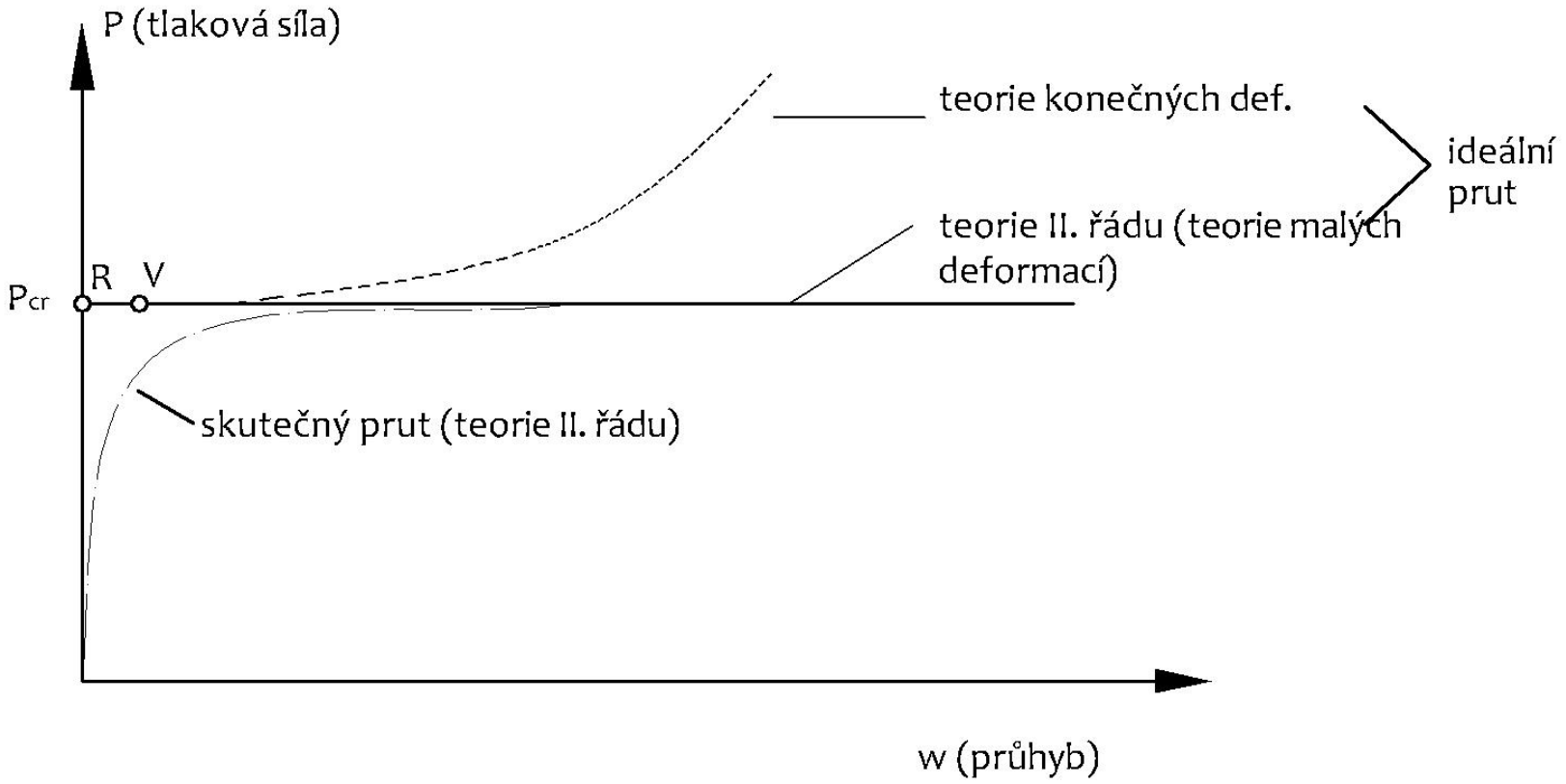
Základní pojmy

Kritické tlakové zatížení – při jeho dosažení rostou prudce průhyby, prut vybočuje

Stabilita – schopnost zatížené soustavy vracet se po malém vychýlení do původního stavu (po pominutí zatížení)



Ztráta stability ideálního a skutečného prutu (stabilita v nepružném oboru)



Eulerovo řešení stability

Pojetí:

- ideálně přímý prut dokonale centricky zatížený silou P,
- hledáme kritickou sílu P – rozdvojení rovnováhy
- EI=konst.



Prut kloubově podepřený

respektujeme účinky II. řádu

$$M = P \cdot w$$

$$w'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI} \cdot w$$

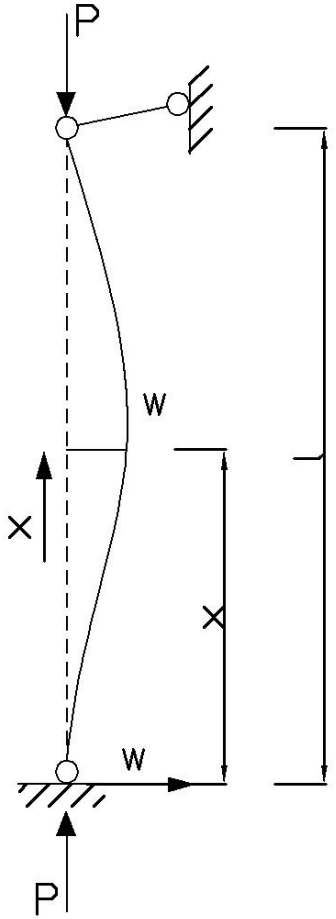
$$\alpha^2 = \frac{P}{EI} \qquad \alpha\left[m^{-1}\right]$$

$$w'' + \alpha^2 \, w = 0$$

$$\Downarrow$$

řešení. dif. rovnice:

$$w = c_1 \cdot \sin\alpha x + c_2 \cdot \cos\alpha x$$



Prut kloubově podepřený

$w(0) = 0 \qquad c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \; c_2 = 0$

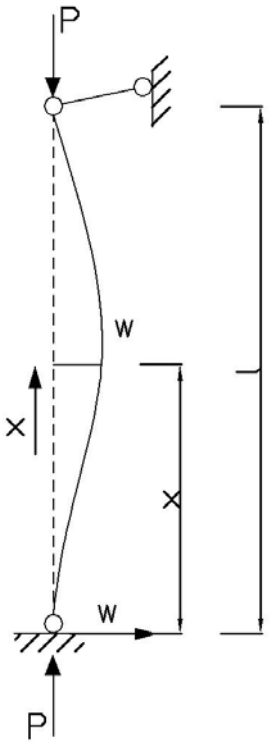
$w(l) = 0 \qquad c_1 \cdot \sin\alpha\, l + c_2 \cos\alpha\, l = 0 \Rightarrow c_1 \cdot \sin\alpha\, l = 0$

stabilitní podmínka

$\sin\alpha\, l = 0$

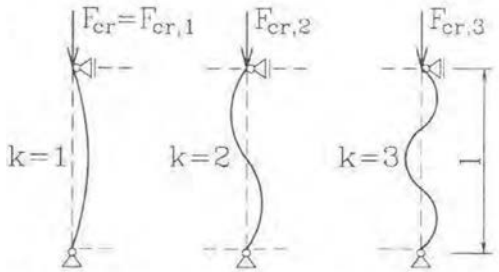
$\alpha\, l = 0;\ \pi;\ 2\pi;\ldots..k\pi \quad \rightarrow w = c_1 \cdot \sin\frac{k\pi x}{l}$

$\alpha^2 = \frac{P}{EI} \rightarrow F_{cr} = k^2\, \pi^2\, \frac{EI}{l^2}$

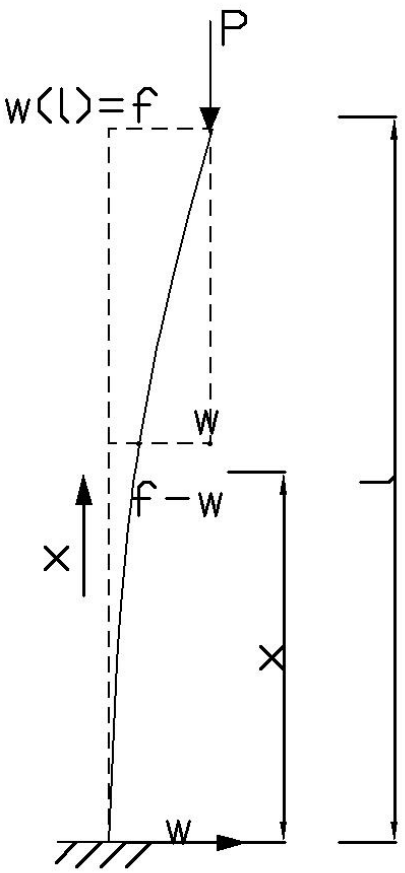


pro $\alpha l = \pi$ $\boxed{P_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{EI}{l^2}}$

Vyšší síly k^2 – násobky $P_{cr,k} = k^2 \cdot P_{cr}$



Konzola



$$M = -P(f - w)$$

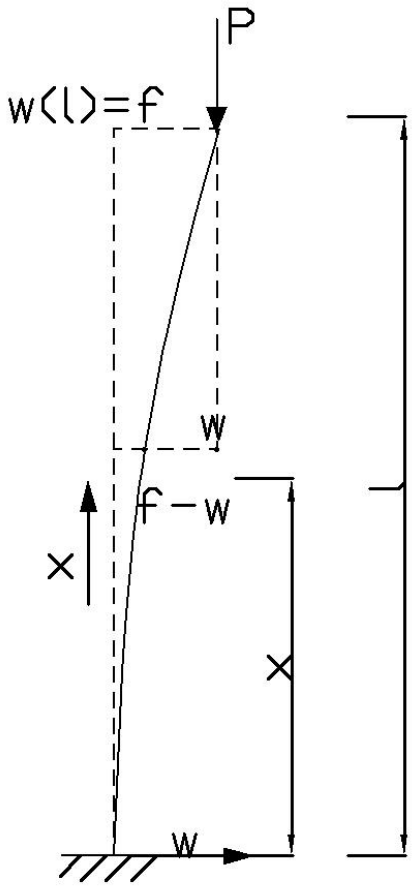
$$w'' = -\frac{M}{EI} = \frac{P}{EI}(f - w)$$

$$= \alpha^2(f - w)$$

$$w'' + \alpha^2 w = \alpha^2 f \quad \text{dif. rovnice}$$

Homogenní diferenciální rovnice
- určit α^2 tak, aby existovalo netriviální řešení

Konzola



Řešení:

$$w = c_1 \cdot \sin\alpha x + c_2 \cdot \cos\alpha x + f$$

$$w' = c_1 \cdot \alpha \cdot \cos\alpha x - c_2 \cdot \alpha \cdot \sin\alpha x$$

Okrajové podmínky

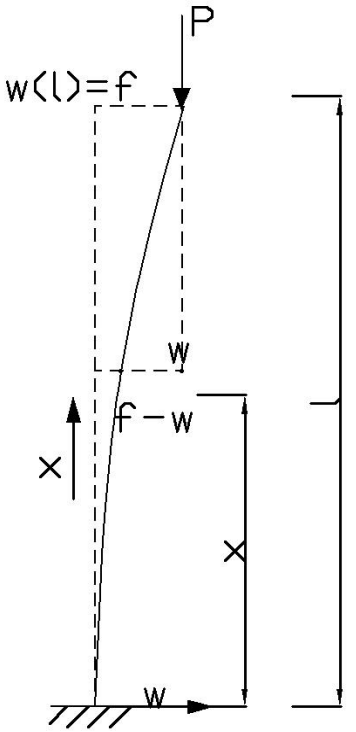
$$w'(0) = 0 \quad c_1\alpha = 0$$

$$w(0) = 0 \quad c_2 + f = 0$$

$$w(l) = f \quad c_1 \sin\alpha l + c_2 \cos\alpha l + f = f$$

* řešení: determinant soustavy D = 0

Konzola



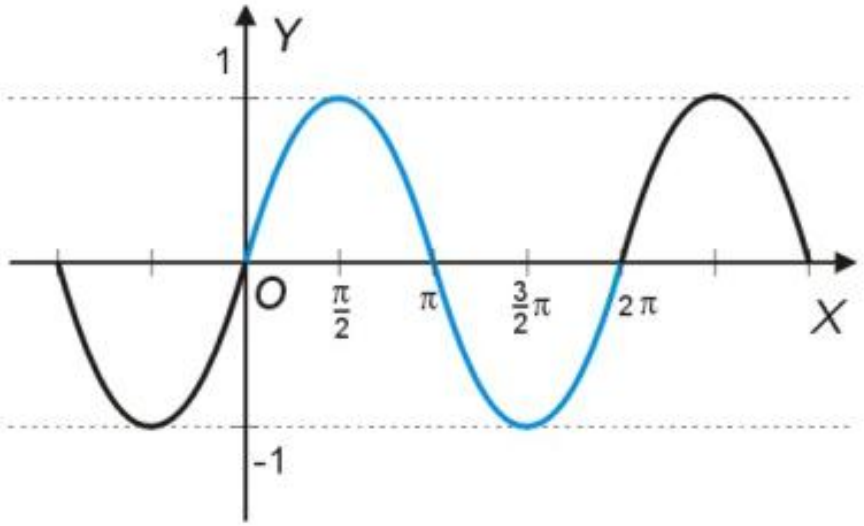
$$c_1 = 0 \qquad c_2 = -f$$

$$-f\cos\alpha\, l + f = f$$

$$\cos\alpha\, l = 0$$

$$\alpha\, l = \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi; \ldots$$

$$P_{cr} = \alpha^2 EI = \frac{\pi^4}{4}\frac{EI}{l^2}$$



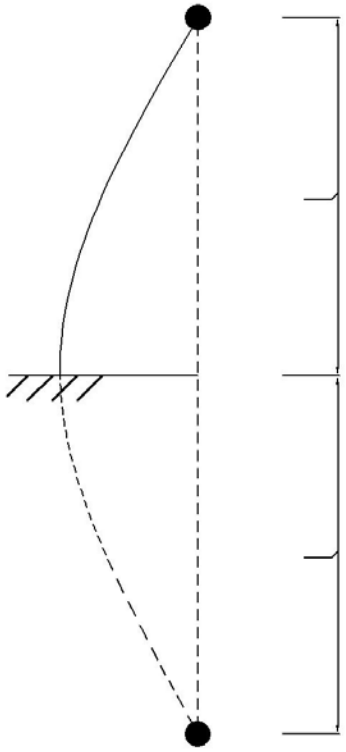
Konzola

Kritická Eulerova síla na konzole je rovna čtvrtině Eulerovy síly na prostě kloubově uloženém nosníku.

Ohybová čára: **jedna sinusová čtvrtina**

(u kloubového uložení šlo o sinusovou půlvlnu)

$$w = f\left(1 - \cos\frac{\pi x}{l}\right)$$



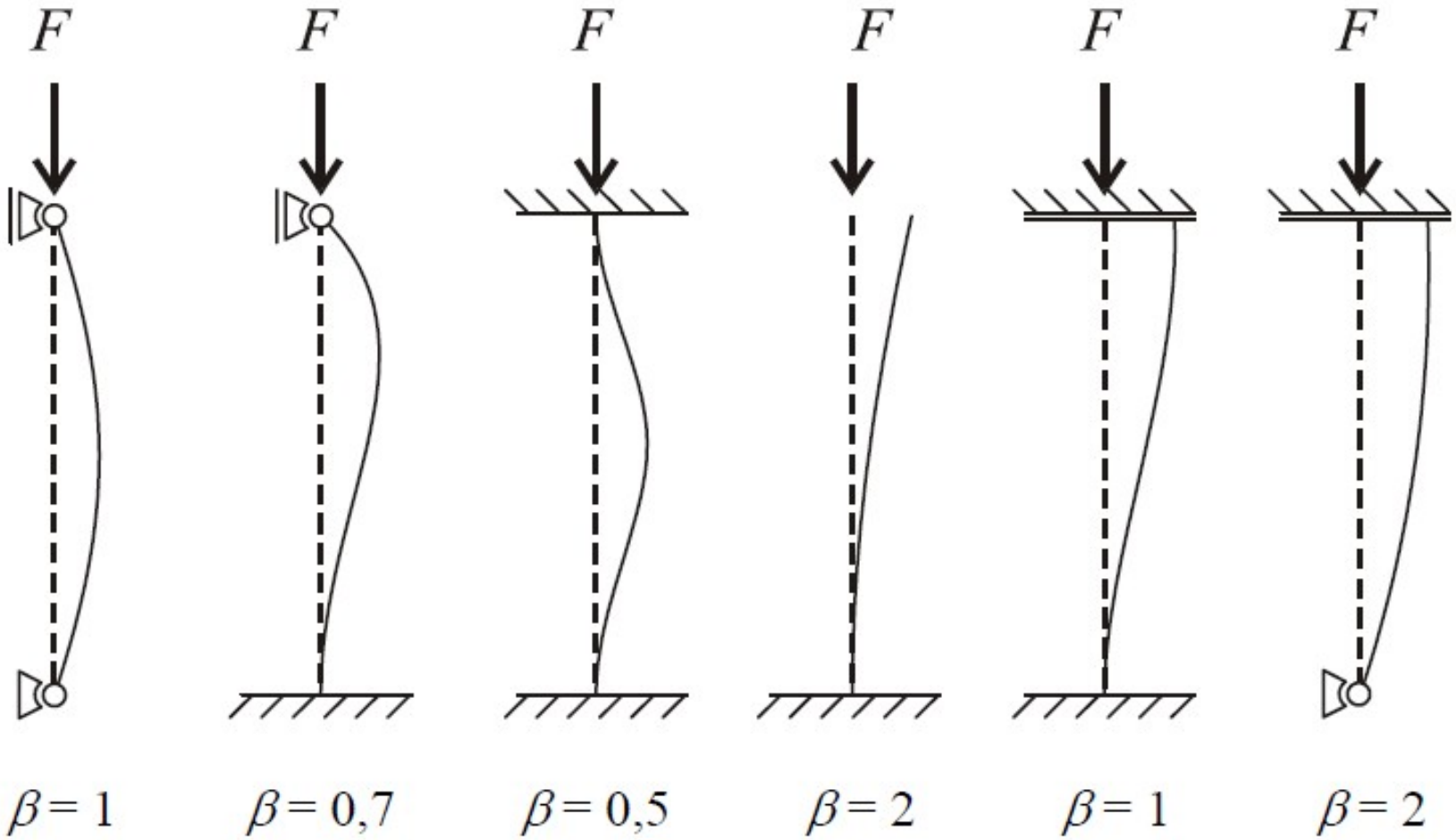
Základní Eulerovy případy – kritická délka L_{cr}

Eulerovo řešení pro různé druhy uložení lze sjednotit zavedením pojmu **kritické délky** (vzpěrné, volné, efektivní) – délka kloubově uloženého prutu, který vybočí při shodné kritické síle (jak plyne z matematického řešení) – a to je současně délka jedné sinusové půlvlny = **vzdálenost dvou inflexních bodů**

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L_{cr}^2}$$

Kritická délka

$L_{cr} = \beta \times L$



Numerický příklad – ocelová trubka

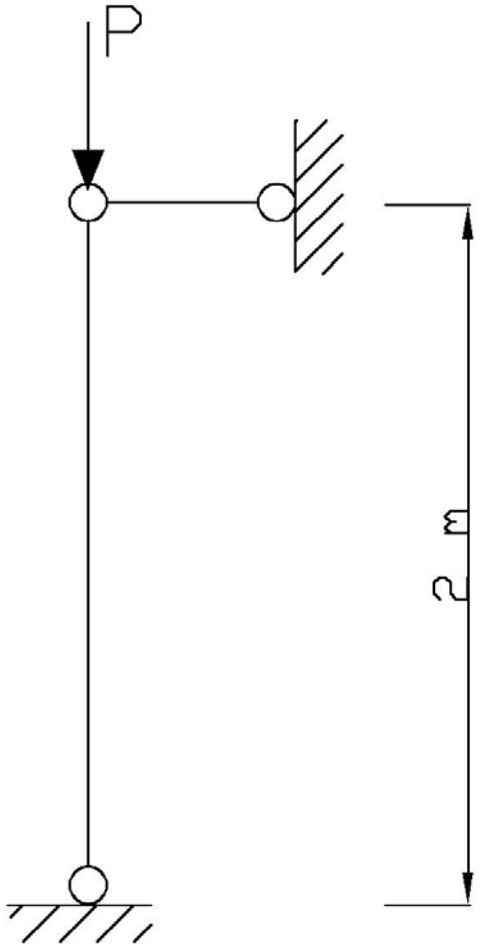
$\phi 41{,}5 \times 3\ mm$

$l = L_{cr} = 2\ m$

$A = 3{,}63\ cm^2 \qquad I = 6{,}76\ cm^4$

$i = 1{,}37\ mm$

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{210 \cdot 10^6 \cdot 6{,}76 \cdot 10^{-8}}{2{,}0^2} = 35{,}0\ kN$$



Základní Eulerovi případy
Kritické napětí

normálové napětí odpovídající kritické síle, ale před vybočením

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \pi^2 \frac{EI}{L_{cr}^{\ 2} A} = \pi^2 \frac{E \cdot i^2}{L_{cr}^{\ 2}} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$$

$$\sigma_{cr} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$$

$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i}$$

Štíhlostní poměr [-] (štíhlost prutu) závisí:

- na délce l
- způsobu uložení
- poloměru setrvačnosti i

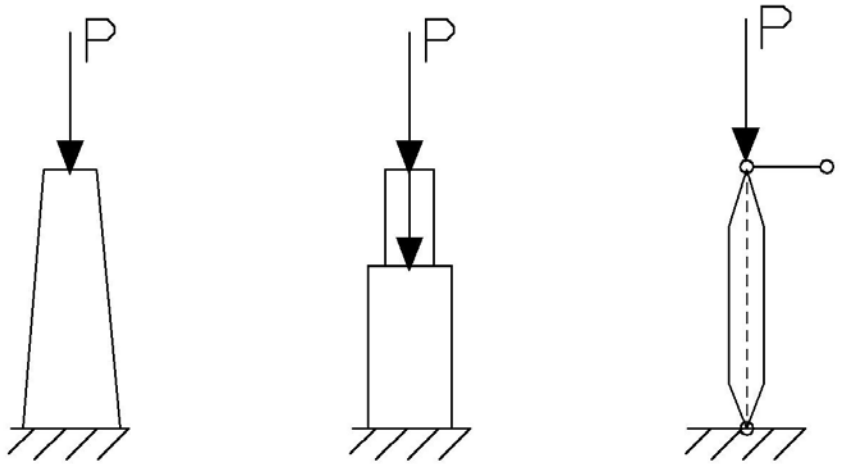
Obecnější případy stability tlačeného prutu

Řešení matematicky, dělení oboru na více intervalů a podmínka nulového determinantu soustavy

- energetické metody – variační

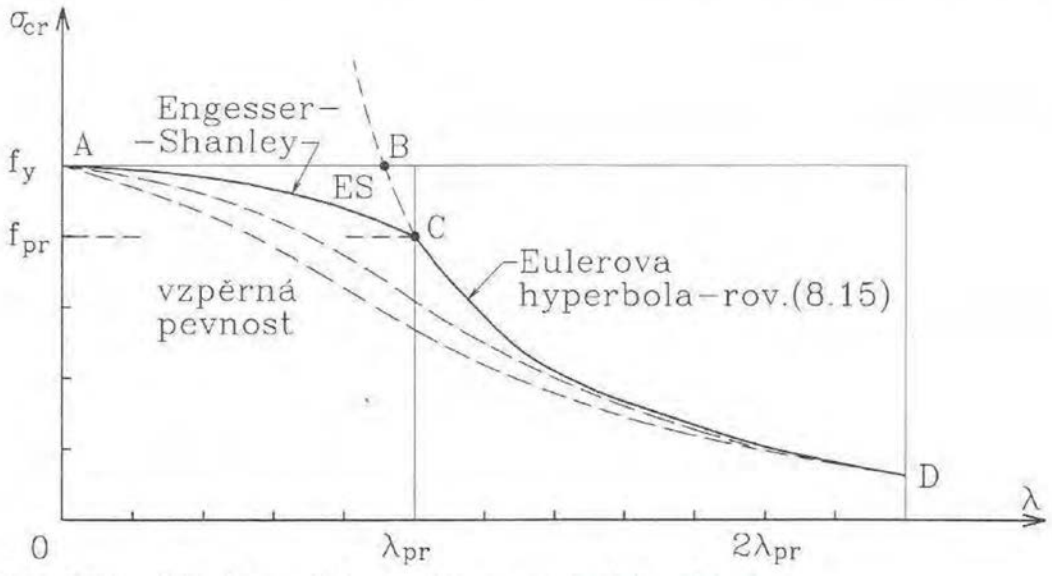
  iterativní řešení - odhad $w \rightarrow M \rightarrow w \rightarrow M \ldots$

- metoda konečných prvků



Stabilita v nepružném oboru

- veškeré dosavadní úvahy o ztrátě stability prutu předpokládají pružné působení prutu, tj. platnost Hookova zákona
- při malé štíhlost prutu je však Eulerovo **kritické napětí** tak velké, že **překračuje mez kluzu** a nemůže být proto realizováno



Hlavní rozdílné přístupy k řešení

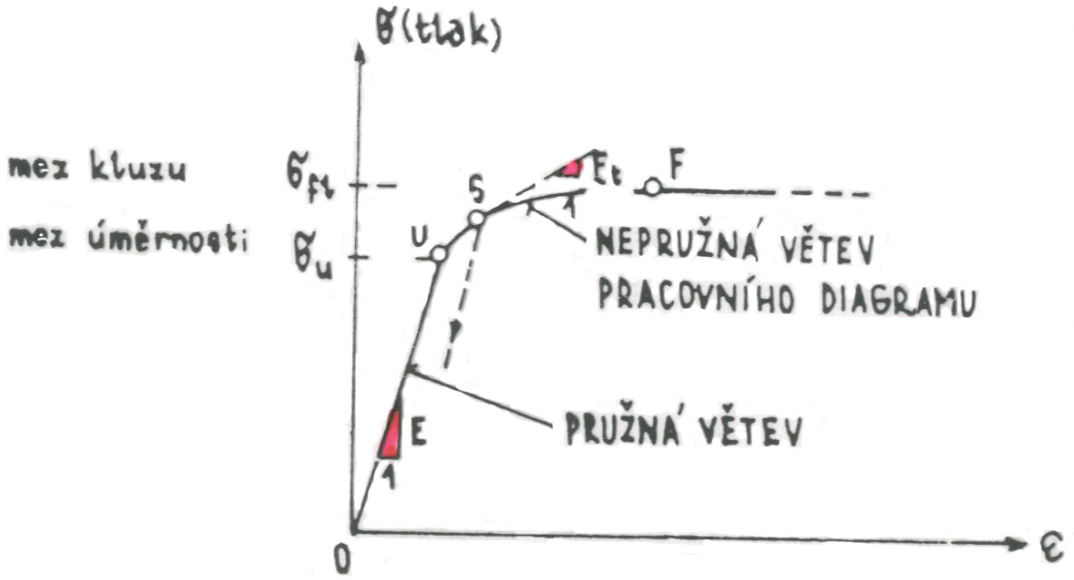
Engesser-Shanleyova teorie tečného modulu – hledá takovou hodnotu tlakové síly, při níž započne proces vybočení (dojde k rozdvojení rovnováhy), který pak pokračuje při dalším zvyšování tlaku

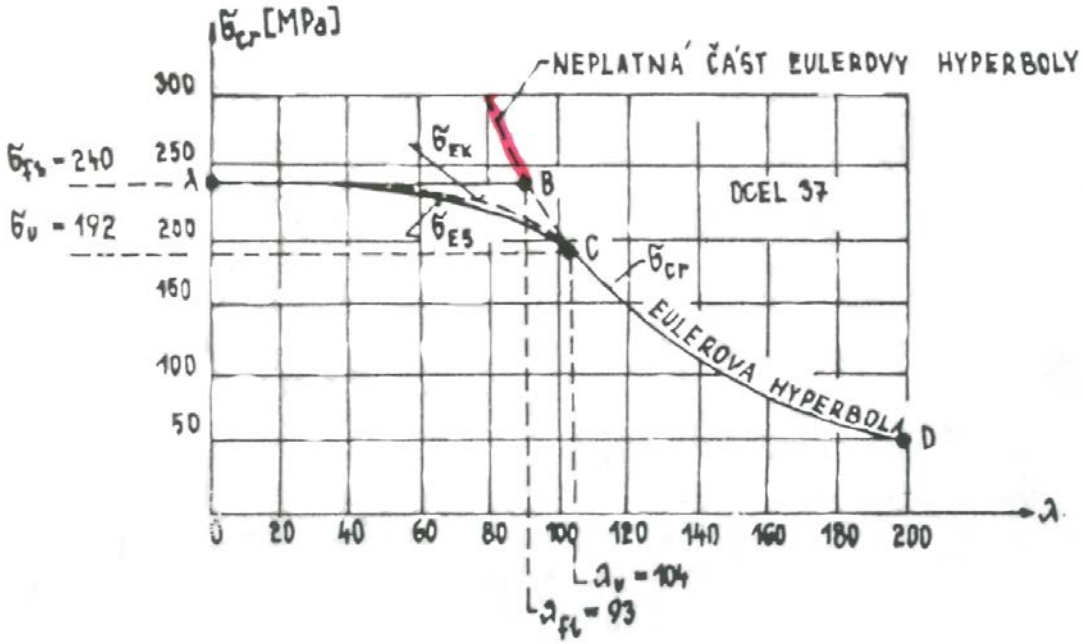
$$\sigma_{ES} = \pi^2 \frac{E_t}{\lambda^2}$$

Engesser-Kármánova teorie redukovaného modulu – hledá velikost kritické síly, po jejímž dosažení může dojít k vybočení samovolně, bez dalšího zvyšování tlakové síly

$$\sigma_{EK} = \pi^2 \frac{E_r}{\lambda^2}$$

$$E_r = \frac{4E\,E_t}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E_t}\right)^2} \quad (obdél.)$$


σ (tlak)
mez kluzu
mez úměrnosti
σfl
σu
S
U
Et
F
NEPRUŽNÁ VĚTEV
PRACOVNÍHO DIAGRAMU
E
1
PRUŽNÁ VĚTEV
0
ε


σcr [MPa]
NEPLATNÁ ČÁST EULEROVY HYPERBOLY
300
250
200
150
100
50
σfl = 240
σu = 192
λ
σEK
B
DOEL 37
σES
C
σcr
EULEROVA HYPERBOLA
D
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
λu = 104
λfl = 93

Prut s počátečním zakřivením

- ideální prut – jistá abstrakce, skutečný prut není nikdy zcela přímý

Prut kloubově uložený, počáteční tvar střednice má tvar sinusové půlvlny o vzepětí f_o

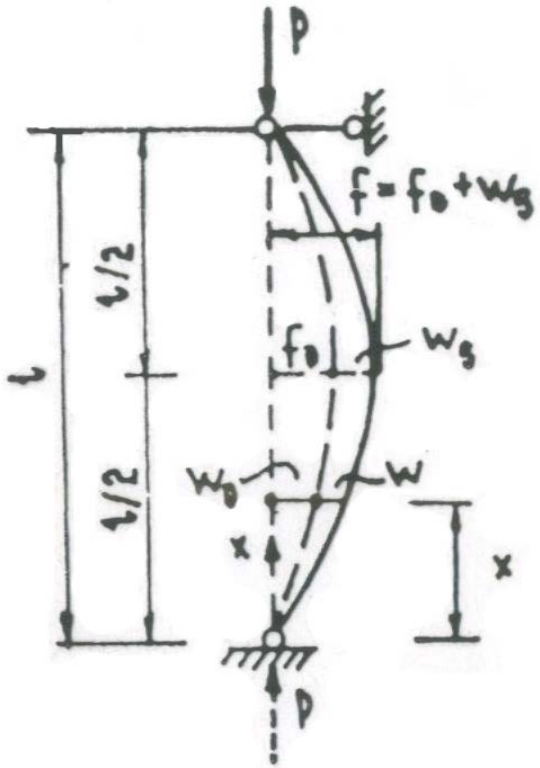
Rovnice počátečního tvaru:

$$w_o = f_o \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$$

Konečný tvar:

$$w + w_o = w_{celk} = f \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$f = \frac{1}{1 - P/P_{cr}} \cdot f_o$$



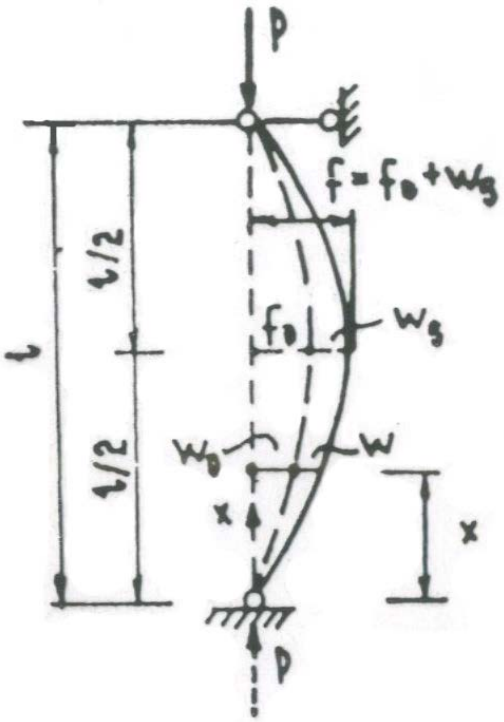
Prut s počátečním zakřivením

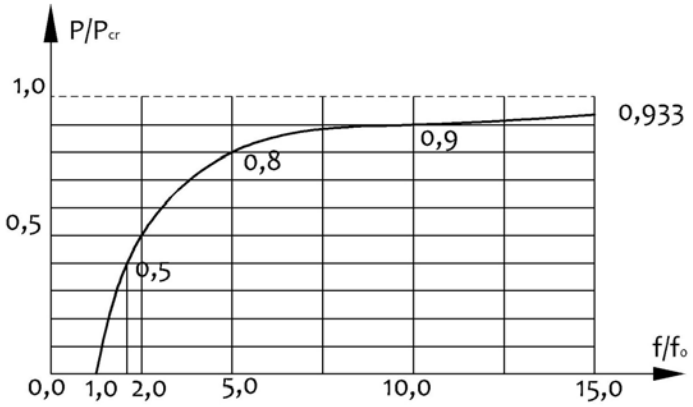
$$w = w_s \sin\frac{x\pi}{l}$$

$$w'' = -w_s \frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l} \qquad EIw'' = -M$$

$$-w_s EI\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l} = -M(x) = -P(w_s + f)\cdot\sin\frac{\pi x}{l}$$

$$w_s(P_{cr} - P) - Pf_o \Rightarrow w_s = \frac{P}{P_{cr} - P}\cdot f_o \Rightarrow f = f_o + w_s$$





Závislost výchylky na tlakové síle

Pevnostní pojetí vzpěru

Stabilitní pojetí vzpěru

dosažení **kritické síly** představuje pro prut nebezpečný stav, tj. můžeme připustit pouze menší hodnotu tlakové síly s určitou mírou bezpečnosti (dělíme koeficientem bezpečnosti, eventuelně závislým na štíhlosti)

Pevnostní pojetí vzpěru

předpokládáme nikoliv ideální prut, ale skutečný prut

- Imperfekce, vlastní pnutí, odchylka materiálových vlastností, excentricita zatížení

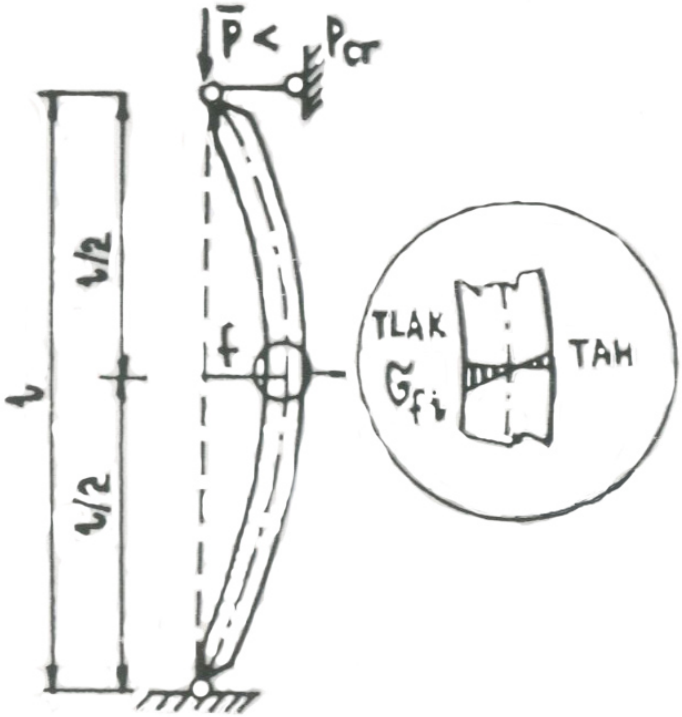
Pevnostní pojetí vzpěru

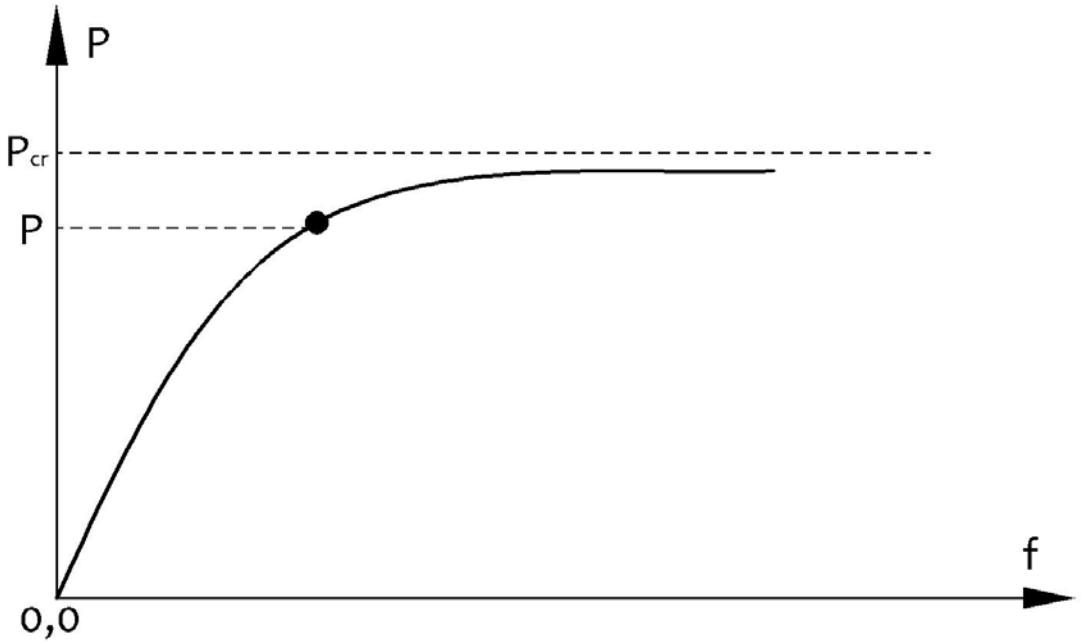
Pevnostní pojetí vzpěru

předpokládáme nikoliv ideální prut, ale skutečný prut s jeho imperfekcemi (zakřivení prutu, excentricita tlakové síly…)

- Na základě teorie II. řádu hledáme takovou velikost tlakové síly, při níž v krajních vláknech průřezu vznikne od kombinace tlaku a ohybu mezní napětí – mez kluzu
- Je zřejmé, že takto získané hodnoty jsou nižší než kritické zatížení, neboť před dosažením Eulerovy síly rostou průhyby (a tedy i ohybové momenty počítané podle teorie II. řádu velmi výrazně.

Pevnostní pojetí vzpěru



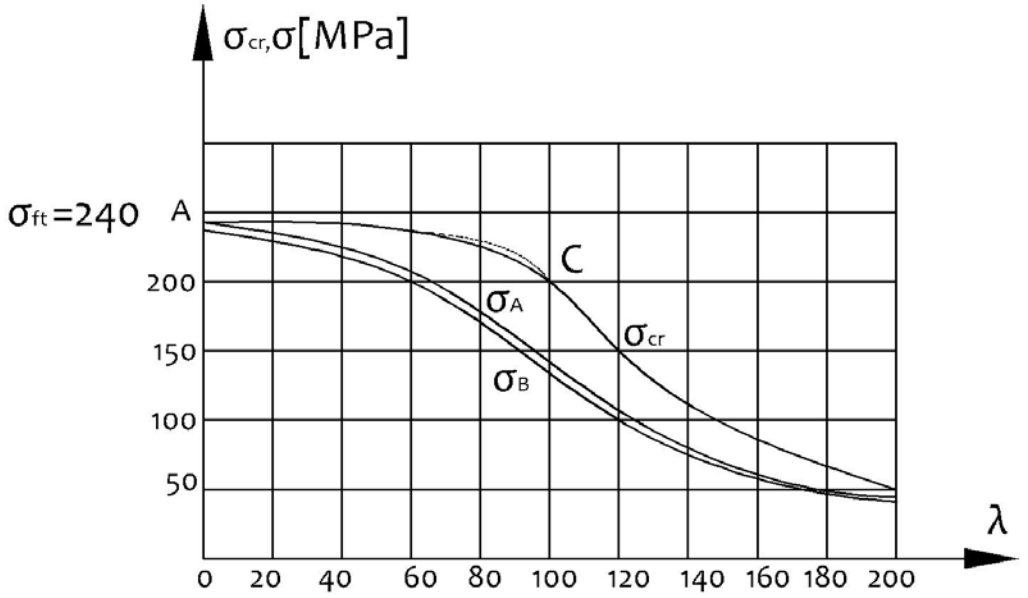


Pruty z oceli

- u ocelových konstrukcí se vychází plně z pevnostních pojetí vzpěru, předpokládá se prut počátečně zakřivený podle sinusovky (Dutheil)

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot f}{w} = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot f_o}{\left(1 - P/P_{cr}\right) \cdot w} = \sigma_k$$

- počáteční výchylka f_o se zavádí na základě zkoušek na skutečných konstrukcích



Návrh tlačených prutů na vzpěr

pro praktické účely se zavádí tzv. součinitel vzpěrnosti

$$\varphi = \bar{\sigma} / \sigma_k \leq 1$$

tabelovaný v normě

$$\frac{N}{A} \leq \varphi \cdot R_d$$

N... výpočtová normálová síla

A... plocha průřezu

φ... součinitel vzpěrnosti

R_d... výpočtová pevnost materiálu



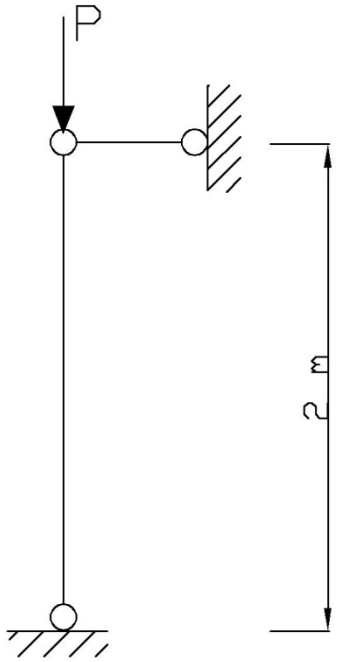
Dříve: součinitelé vzpěrnosti pro ocel řady 37 (R_d =210 MPa)

typ A – kruhové a obdélníkové průřezy

typ B – I, U

Štíhlost	Součinitel vzpěrnosti		Štíhlost	Součinitel vzpěrnosti	
	typ A	typ B		typ A	typ B
0	1	1	130	0,4	0,36
10	1	1	140	0,35	0,32
20	0,99	0,99	150	0,31	0,28
30	0,98	0,97	160	0,27	0,25
40	0,96	0,94	170	0,24	0,22
50	0,94	0,91	180	0,22	0,2
60	0,9	0,86	190	0,2	0,18
70	0,84	0,79	200	0,18	0,17
80	0,77	0,71	210	0,16	0,15
90	0,69	0,63	220	0,15	0,14
100	0,6	0,55	230	0,14	0,13
110	0,53	0,48	240	0,13	0,12
120	0,46	0,42	250	0,12	0,11

Numerický příklad – ocelová trubka



$\phi 41{,}5 \times 3\,mm$

$L_{cr} = 2{,}0\,m \qquad R_d = 210 MPa$

$A = 3{,}63\,cm^2 \qquad I = 6{,}76\,cm^4$

$i = 1{,}37\,cm \qquad P_{cr} = 35\,kN$

$$\lambda = \frac{200}{1{,}37} = 146 \Rightarrow z\ tab.\ \varphi = \varphi A = 0{,}32$$

$$N \le \varphi \cdot A \cdot R_d = 0{,}32 \cdot 3{,}36 \cdot 10^{-4} \cdot 210000 = 24{,}4\,kN$$

$N \le P_{cr} \qquad 24{,}4\,kN \le 35\,kN$

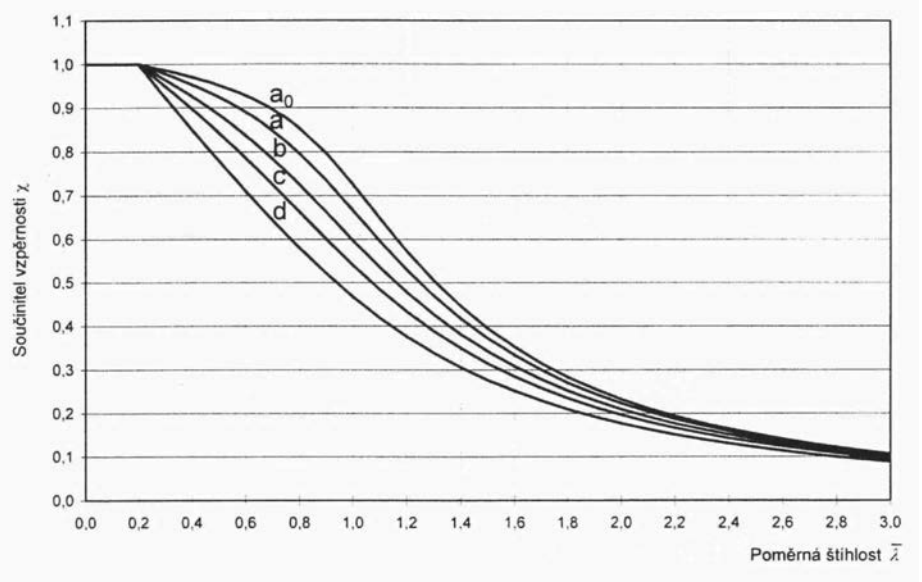
Vzpěrnostní součinitel dle EC

- Štíhlost a poměrná štíhlost:

$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i} \rightarrow \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi\sqrt{\frac{E}{f_y}}} = \sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr}}} = \frac{\lambda}{93.9}$$

pro S235

- Součinitel vzpěrnosti χ :
  - graficky
  - výpočtem

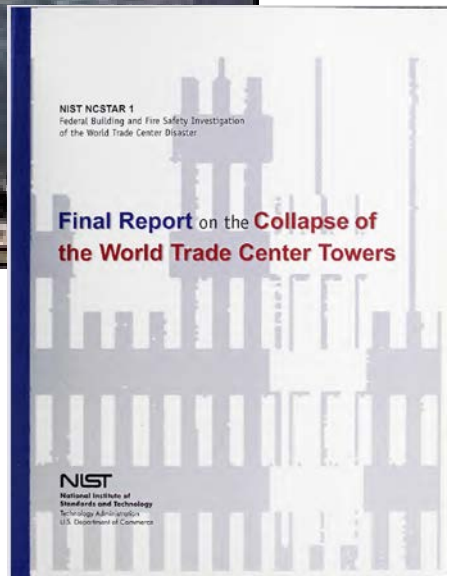


- Návrhová únosnost:

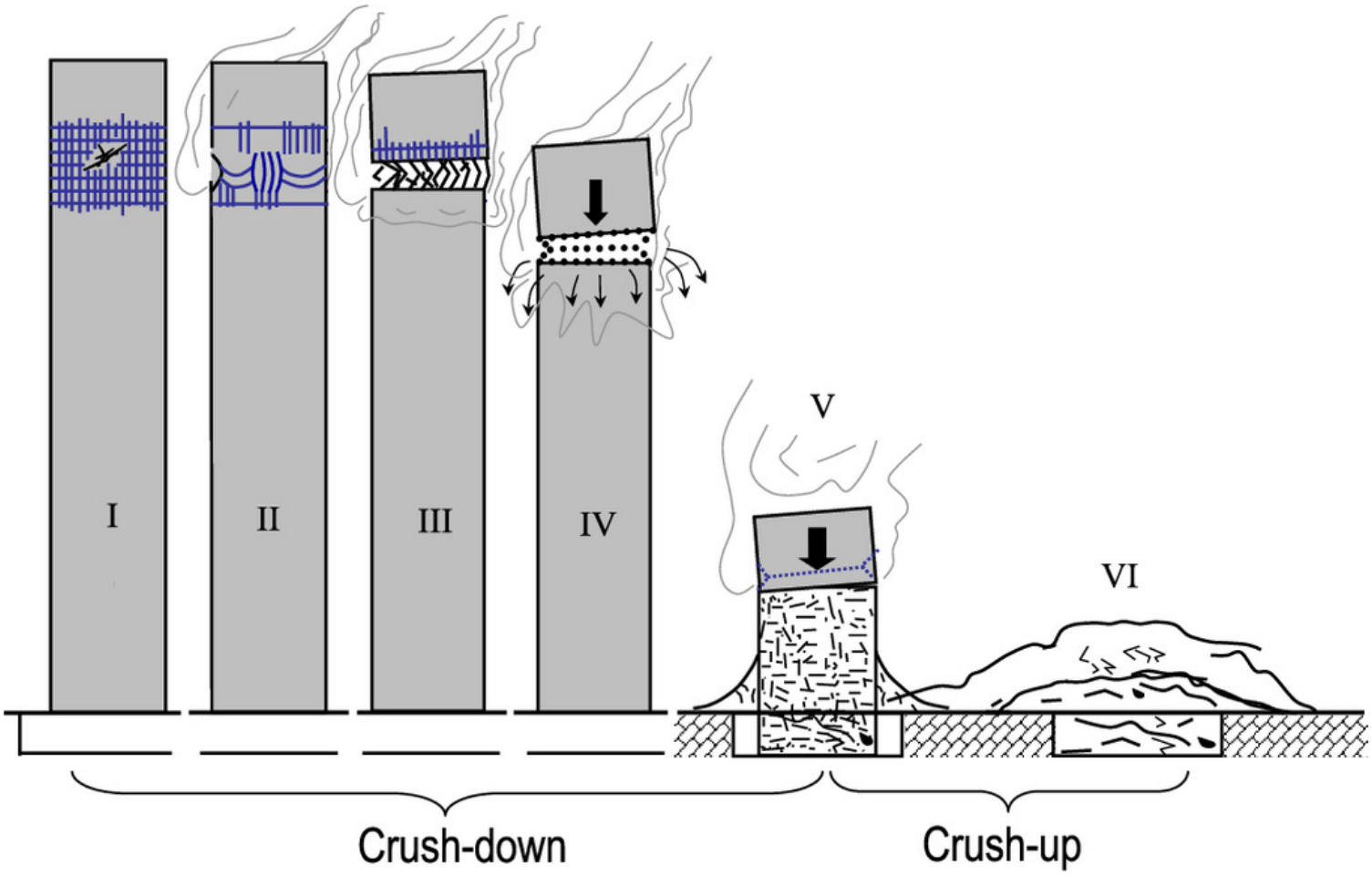
$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A f_y}{\gamma_{M,1}}$$

Praktický důsledek WTC 2001





Praktický důsledek WTC 2001



Le & Bažant, *Spontaneous Collapse Mechanism of World Trade Center Twin Towers and Progressive Collapse in General,* Journal of Structural Engineering 2022