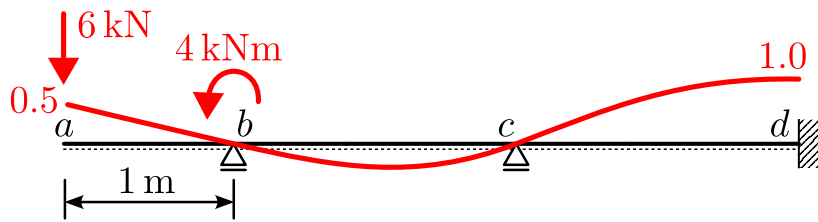


Příklad 1

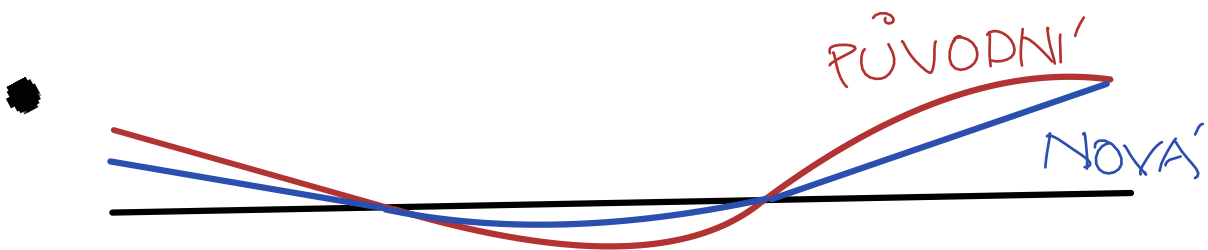
body: 3

Na obrázku je schématicky zakreslená příčinková čára, její hodnota na levém konci je 0.5 a napravo je 1.

- Je možné, že se jedná o příčinkovou čáru momentové reakce v bodě d ? Pokud ne, k jaké statické veličině se tato příčinková čára váže? Svou odpověď podpořte argumenty.
- Vypočtete hodnotu statické veličiny dané touto čarou od naznačeného zatížení (osamělá síla a moment).
- Jak by se změnila zakreslená příčinková čára, pokud by vpravo nebylo vetknutí, ale pouze neposuvná kloubová podpora? Schématicky zakreslete rozdíl mezi původní a novou čarou a slovně vysvětlíte.



- NENÍ TO MOŽNÉ, V BODĚ A NENÍ JEDNOTKOVÉ POTOČENÍ A NENÍ RESPEKTOVAN NULOVÝ SVISLÝ POSUN. JEDNÁ SE O PŘÍČINKOVOU SVISLÉ REAKCE V BODĚ A.
- $Z_A = 6 \cdot 0,5 + 4 \cdot \frac{0,5}{1} = 3 + 2 = 5 \text{ kN}$

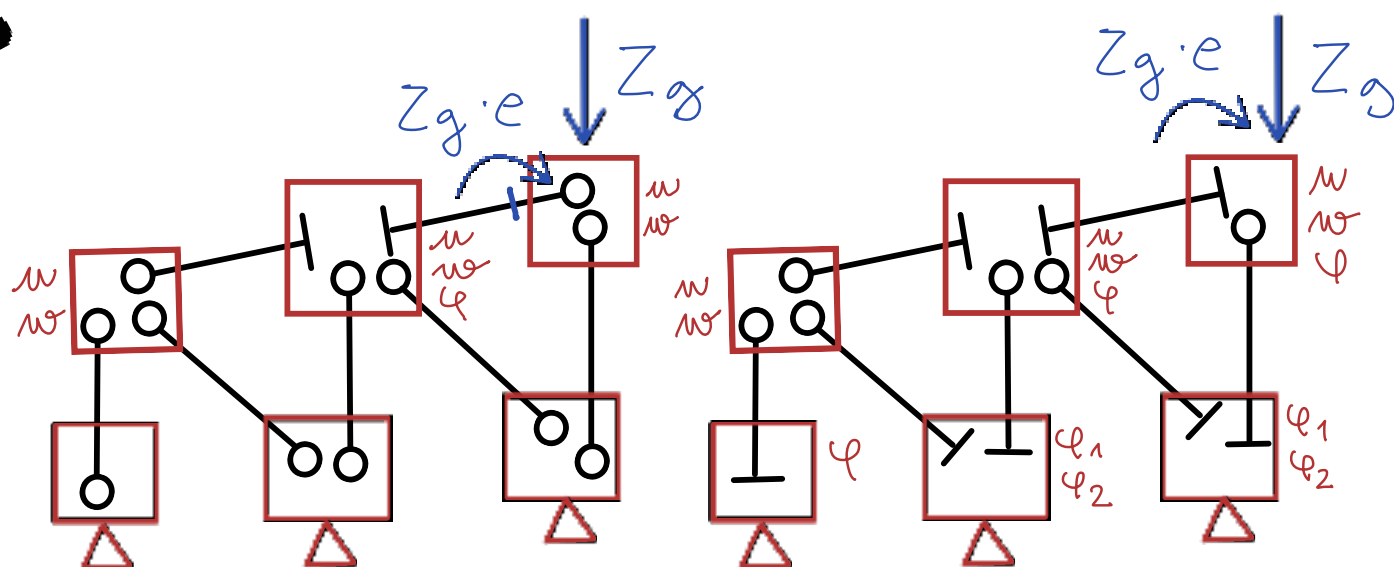
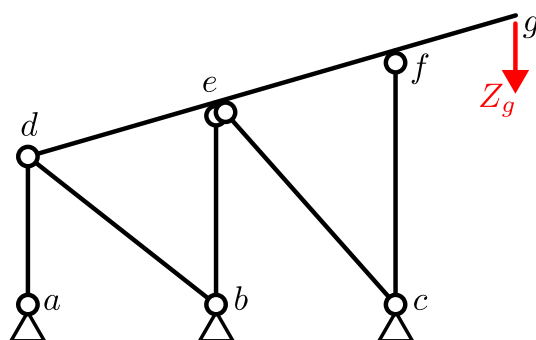


V BODĚ A SE ČARA MŮŽE POTOČIT
NÁSLEDNĚ TĚDY BUDE MÍT
MENŠÍ POTOČENÍ V BODECH B A C
A MENŠÍ HODNOTU V BODĚ O.

Příklad 2

body: 4

- Pro konstrukci na obrázku vytvořte 2 různé výpočtové modely pro řešení obecnou deformační metodou. Jeden z modelů vytvořte tak, aby měl minimální *stupeň přetvárné neurčitosti*. Diskutujte výhody a nevýhody takového modelu.
- Pro každý model jasné označte druhy prutů (kloub nebo vetknutí na koncích) a vypiště počet a seznam volných kinematických proměnných.
- Vysvětlete, jakým způsobem bude síla Z_g zahrnuta do zatížení modelu v případě varianty s minimálním stupněm přetvárné neurčitosti.
- Zakreslete veškeré sekundární síly a momenty v modelu s minimálním stupněm přetvárné neurčitosti vzniklé od vodorovného posunu bodu d v globální souřadnicové soustavě. Síly zakreslete v kladném globálním směru a označte X , Z nebo M s indexem ij (nebo ji) pro sílu na prutu ij v bodě i (nebo v bodě j).



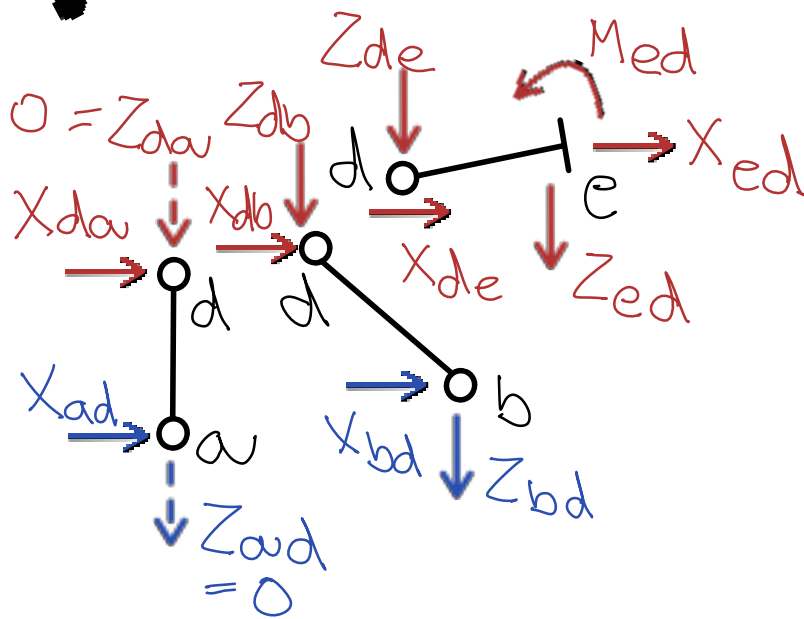
MINIMÁLNÍ STUPEŇ
P.X. 7 NEZNÁMÝCH

$w_d w_d w_e w_e \varphi_e w_f w_f$

$\varphi_a \varphi_{b1} \varphi_{b2} \varphi_{c1} \varphi_{c2} w_b w_b$
 $w_c w_c \varphi_c w_d w_d \varphi_d$

13 NEZNÁMÝCH
- NÁROČNĚJŠÍ VÝPOČET
+ ZNALOST ROTACÍ
VE STŘEŽNÍCÍCH
+ ZATĚŽOVACÍ MOMENT
JAKO UZLOVÁ SÍLA

- SVISLÁ SÍLA JAKO UZLOVÉ ZATÍŽENÍ V BODĚ F
MOMENT JAKO ZATÍŽENÍ NA KONCI PRUTU ef



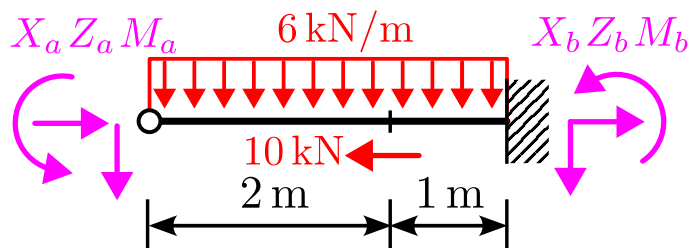
SEKUNDAŘNÍ
SÍLY VYSTUPUJÍCÍ
V ROVNICÍCH
ROVNOVÁHY

NEVYSTUPUJÍCÍ
V ROVN. ROVNOVÁHY

Příklad 3

body: 3

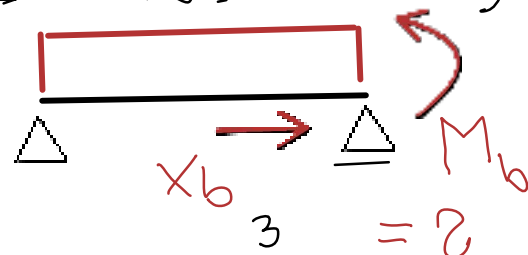
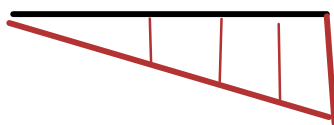
Odvoďte hodnoty primárních koncových sil na prutu na obrázku od zaznačeného zatížení. Použijte silovou metodu nebo přímou integraci a postup okomentujte. Opsání výsledku z tabulek nebude ohodnoceno žádným bodem.



● SILOVÁ METODA (POUZE PRÁCE MOM.)

ZAKLADNÍ SOUSTAVA:

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{1}{8} q l^2 \\ &= 6,75 \text{ kNm} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \int_0^3 \frac{M_0 M_1}{EI} dx \\ &= \frac{3}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6,75 \cdot 0,5 \\ &= 6,75/EI \end{aligned}$$

$$\delta_{11} = \frac{l}{3EI} = \frac{1}{EI}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} M_b = 0 \Rightarrow M_b = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = -6,75 \text{ kNm}$$

(POUZE PRÁCE NORMÁLOVÝCH SIL)

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{1}{EA} \\ N_1 &= \frac{1}{EA} \end{aligned}$$

$$\delta_{10} = 2(-10) \cdot 1/EA = \frac{-20}{EA}$$

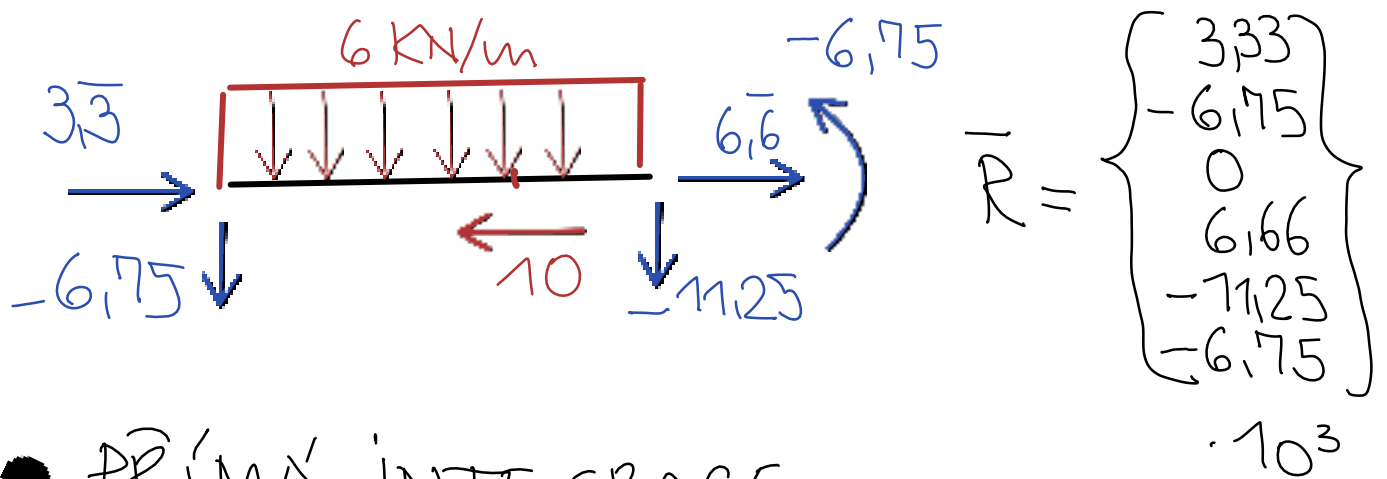
$$\delta_{11} = \frac{3}{EA}$$



+1



$$\delta_{10} + \delta_{11} X_b = 0 \Rightarrow X_b = 6,66 \text{ kN}$$



● PRÍMA INTEGRACE

$$V = \int -q dx = -6x + C_1$$

$$M = \int V dx = -3x^2 + C_1x + C_2$$

$$\varphi = -\frac{1}{EI} \int M dx = \frac{1}{EI} \left(x^3 - \frac{C_1 x^2}{2} - C_2 x + C_3 \right)$$

$$w = \int \varphi dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{C_1 x^3}{6} - \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4 \right)$$

OKRAJOVÉ PODMÍNKY

$$M(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad \varphi(3) = 0 \Rightarrow 27 - 4,5C_1 + C_3 = 0$$

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \quad w(3) = 0 \Rightarrow \frac{81}{4} - \frac{27C_1}{6} + 3C_3 = 0$$

$$\frac{81}{4} - \frac{27C_1}{6} + 3(-27 + 4,5C_1) = 0$$

$$243 - 54C_1 - 972 + 162C_1 = 0 \quad C_1 = \frac{729}{108} = 6,75$$

$$N = -\int n dx = \begin{cases} C_1 & x < 2 \\ C_2 & x > 2 \end{cases} \quad N^+(2) = N^-(2) + 10$$

$$C_2 = C_1 + 10$$

$$w = \frac{1}{EA} \int N dx = \begin{cases} \frac{1}{EA} (C_1 x + C_3) & x < 2 \\ \frac{1}{EA} ((C_1 + 10)x + C_4) & x > 2 \end{cases} \quad w^+(2) = w^-(2)$$

$$C_4 = C_3 - 20$$

OKRAJOVÉ PODMÍNKY

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$w(3) = 0 \Rightarrow C_1 \cdot 3 + 10 = 0 \Rightarrow C_1 = -3,33$$

$$X_a = -N(0) = 3,33 \text{ kN}$$

$$Z_a = -V(0) = -6,75 \text{ kN}$$

$$M_a = -M(0) = 0 \text{ kNm}$$

$$X_b = N(3) = 6,66 \text{ kN}$$

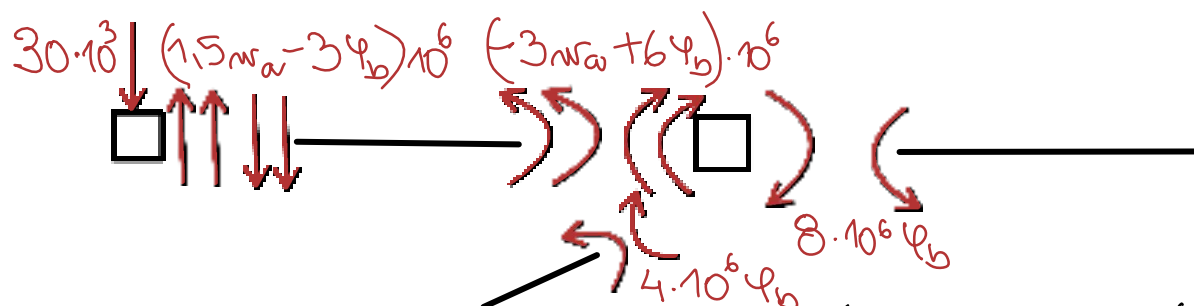
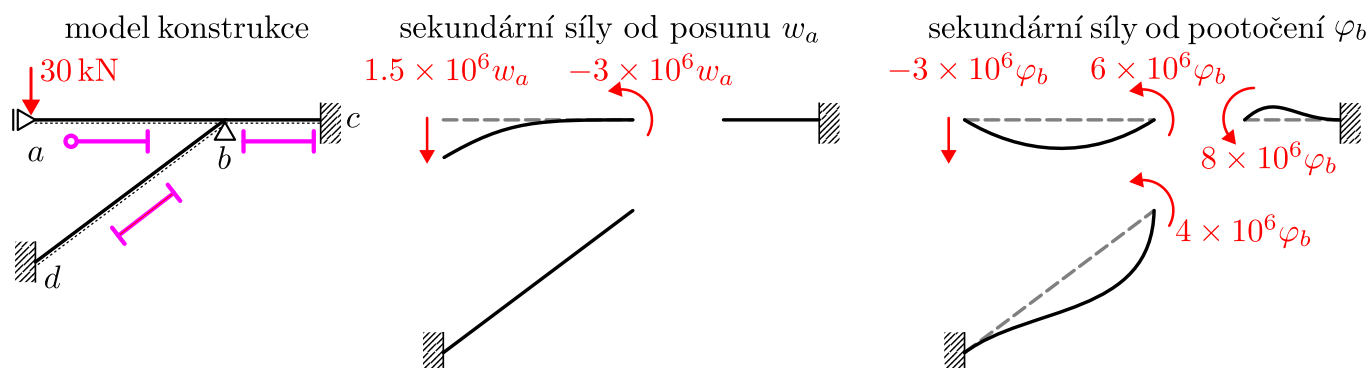
$$Z_b = V(3) = -18 + 6,75 = -11,25 \text{ kN}$$

$$M_b = M(3) = -27 + 3 \cdot 6,75 = -6,75 \text{ kNm}$$

Příklad 4

body: 3

Na obrázku vlevo je model konstrukce zatížené silou 30 kN se dvěma stupni volnosti: w_a a φ_b . Vpravo jsou pak zaznačeny odpovídající sekundární síly od těchto volných kinematických veličin. Sestavte rovnice rovnováhy (skalárně nebo maticově) a vyřešte je. Zapište nalezený posun a pootočení včetně jednotek.



$$\sum Z_a = 0 \quad 30 \cdot 10^3 - 1,5 \cdot 10^6 w_a + 3 \cdot 10^6 \varphi_b = 0$$

$$\sum M_b = 0 \quad 3 \cdot 10^6 w_a - (6 + 4 + 8) \cdot 10^6 \varphi_b = 0$$

$$10^6 \begin{bmatrix} 1,5 & -3 \\ -3 & 18 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_a \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1,5 & -3 & 30 \cdot 10^{-3} \\ -3 & 18 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 0,18 \\ -3 & 18 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0,03 \\ -3 & 18 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0,03 \\ 0 & 18 & 0,09 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0,03 \\ 0 & 1 & 0,005 \end{array} \right)$$

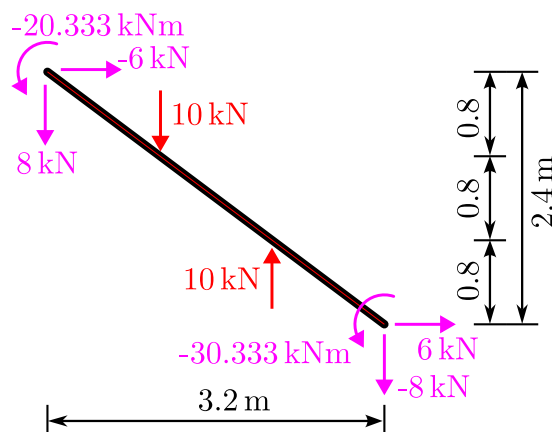
$$w_a = 30 \text{ mm}$$

$$\varphi_b = 5 \text{ mrad}$$

Příklad 5

body: 3

Jsou známy hodnoty koncových sil a zatížení nosníku. Spočítejte a vykreslete obrazce vnitřních sil.

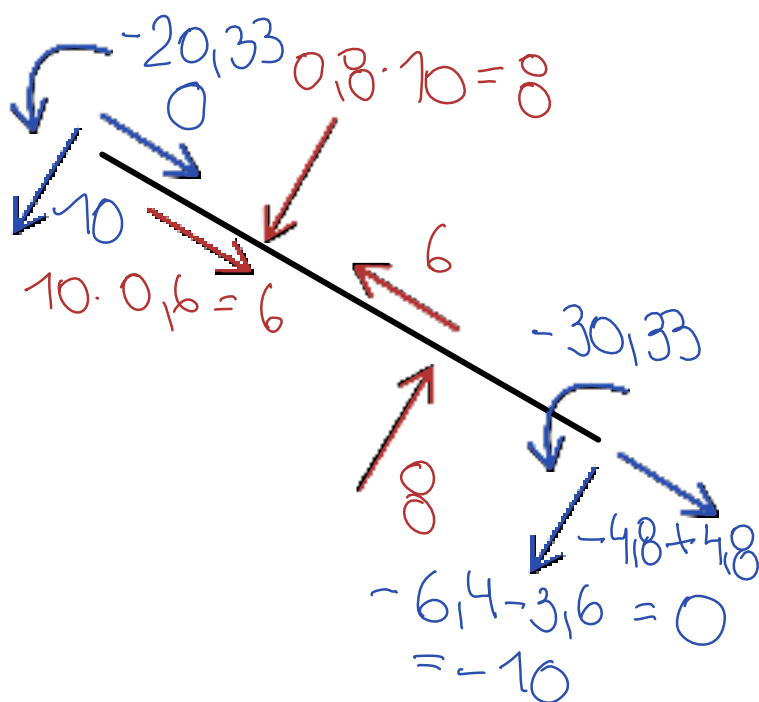


● TRANSFORMACE
DO LOKÁLNÍHO SS

$$l = \sqrt{2,4^2 + 3,2^2} = 4 \text{ m}$$

$$\sin \alpha = 2,4/4 = 0,6$$

$$\cos \alpha = 3,2/4 = 0,8$$

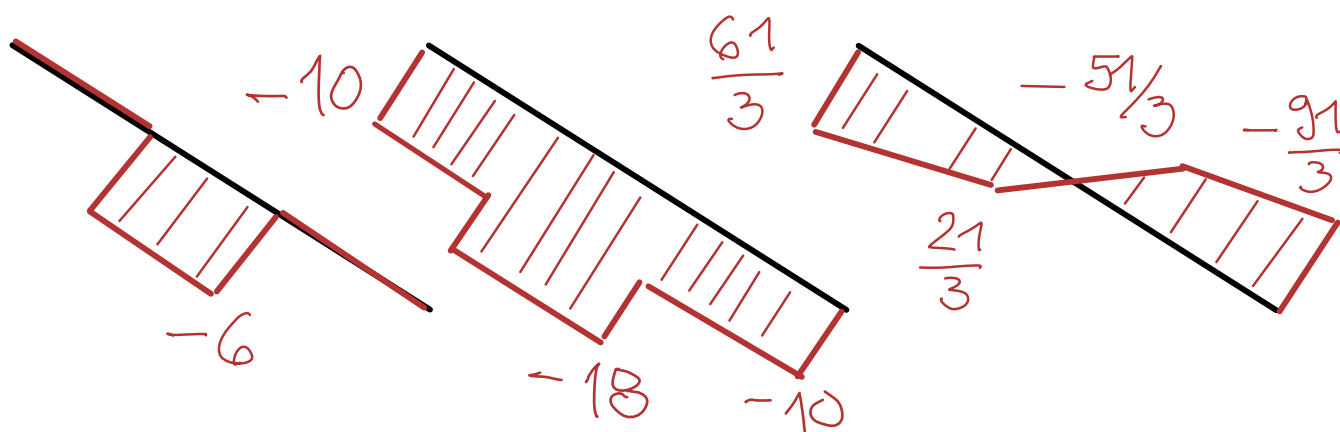


● VNITŘNÍ SÍLY

(N)

(V)

(M)



Příklad 6

body: 3

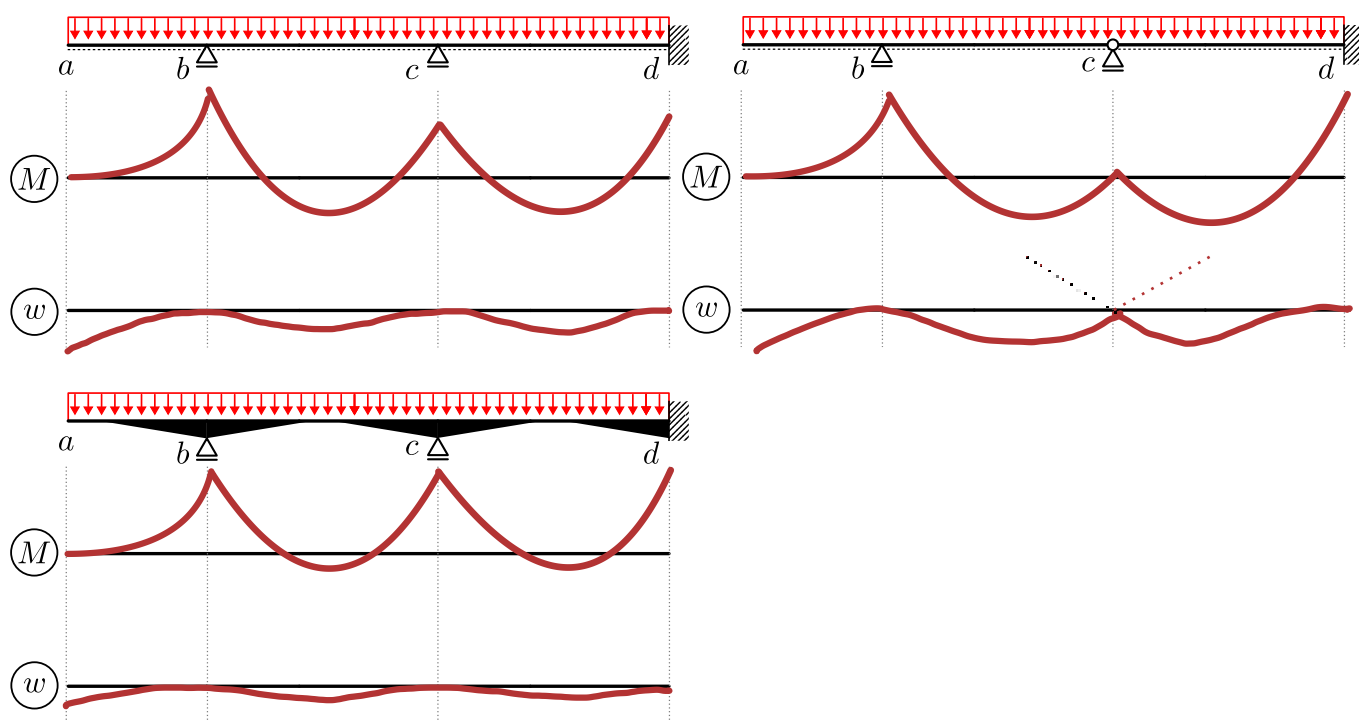
Uvažujte spojitý nosník na obrázku ve třech variantách:

- s pruty konstantního průřezu spojenými tuze;
- s pruty konstantního průřezu a kloubem v bodě c ;
- s pruty s lineárními náběhy.

Do obrázku načrtněte průběh momentů a průhybů v jednotlivých případech. Obrázky nakreslete tak, aby byl patrný rozdíl mezi jednotlivými variantami.

Dále odpovězte na následující doplňující dotazy a své odpovědi podpořte argumenty:

- Jak se liší moment v bodě b v jednotlivých variantách?
- Jak se liší průhyb v bodě a v jednotlivých variantách?



MOMENT M_b JE VE VŠECH VARIANTÁCH STEJNÝ, ROVNÝ MOMENTU NA PŘEVISLÉ KONZOLE

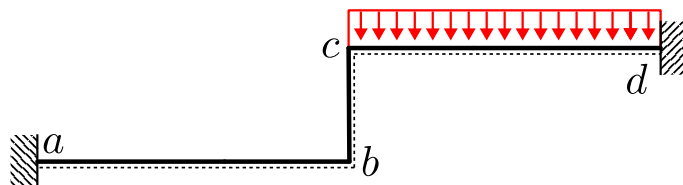
PRŮHYB w_a JE NEJVĚTŠÍ PRO VARIANTU S KLOUBEM, MENŠÍ PRO ZÁKLADNÍ VARIANTU A NEJMENŠÍ PRO VARIANTU S NÁBĚHY.

Příklad 7

body: 3

Vytvořte výpočtový model konstrukce na obrázku pro zjednodušenou deformační metodu s *minimálním stupněm přetvárné neurčitosti*.

- Jaké neznámé popisují kinematiku konstrukce a kolik jich je? Jaký počet neznámých by byl potřeba při použití obecné deformační metody?
- Co vyjadřují rovnice odpovídající těmto neznámým získané zjednodušenou deformační metodou?
- Jsou některé z těchto rovnic nazývány styčnickové nebo patrové?



- 3 NEZNÁMÉ, φ_b φ_c A $M_c = M_b$
OBECNÁ METODA 6 NEZNÁMÝCH
 M_b M_c φ_b M_c M_b φ_c
- $\varphi_b \rightarrow$ MOMENTOVÁ ROVNOVAHA STYČNÍKU
 $\varphi_c \rightarrow$ MOMENTOVÁ ROVNOVAHA STYČNÍKU
 $M_c = M_b \rightarrow$ SOUČET SVISLÝCH SIL NA PRUTU b-c VČETNĚ STYČNÍKŮ b A c JE NULOVÝ
- φ_b A φ_c JSOU STYČNÍKOVÉ ROVNICE
 $M_c = M_b$ JE PATROVÁ ROVNICE

Podmínky získání zápočtu

- Aktivní účast ve cvičeních: zjevná nepřipravenost bude hodnocena jako neomluvená neúčast.
- Maximálně jedna neomluvená a jedna omluvená absence (z celkového počtu 13 dvouhodinových cvičení).
- Úspěšné vypracování tří testů. Testy nemají opravný termín, pouze na konci semestru je možné jeden z testů opravit. Cvičící může některý z testů nahradit samostatnou prací nebo některé testy spojit dohromady. Cvičící může hodnotit každý test zvlášť nebo vytvořit bodovací systém a zápočet udělit na základě splnění minimálního počtu bodů za všechny testy dohromady.
- Neomluvená absence v termínu testu znamená automaticky hodnocení testu známkou F nebo nulovým počtem bodů.

Pokyny ke zkoušce

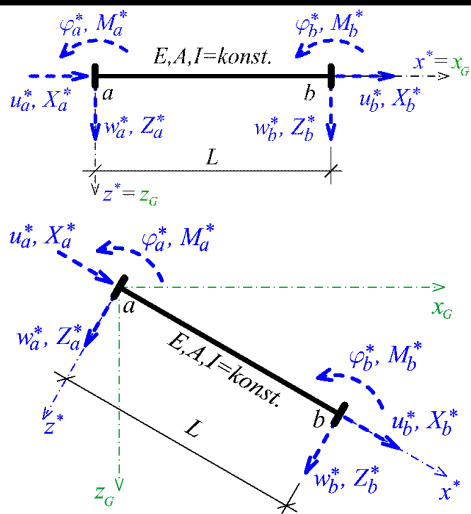
- Studenti potřebují ke zkoušce pouze papír a psací potřeby, klasickou kalkulačku a studijní průkaz. Žádné další pomůcky, kromě tabulek zmíněných níže, nejsou povoleny.
- Každý student dostane tabulky lokálních primárních vektorů a lokálních i globálních matic tuhosti (připojeny k tomuto dokumentu). Celá zkouška probíhá bez použití jiné literatury či dalších zdrojů.
- Každý student pracuje samostatně, komunikace je možná jen s přítomným učitelem.
- Zkouška má pouze jednu pevnou část trvající maximálně 120 minut. V této písemné části je nutné získat nadpoloviční většinu bodů. Po splnění písemné části může zkouška pokračovat také ústní částí, ve které má zkoušející možnost doptat se na detaily z písemné části nebo položit další, s předchozími úkoly nesouvisející otázky.
- V případě zařazení ústní zkoušky by studenti měli očekávat přestávku v délce 1-2 hodiny nutnou k opravení písemné části.
- Písemná část bude sestavena z několika teoretických a praktických úkolů. Nebude se počítat kompletní příklad od začátku do konce. Příklady otázek včetně jejich vzorových odpovědí jsou přiloženy k tomuto dokumentu.

Vetknutí - Vetknutí



Lokální matice tuhosti

$$[K_{a,b}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} X_a^* \\ Z_a^* \\ M_a^* \\ X_b^* \\ Z_b^* \\ M_b^* \end{matrix}$$

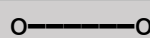


Globální matice tuhosti

$$[K_{a,b}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{12EI}{L^3} + Dc^2\right) & Dcs & \frac{6EI}{L^2}s & -\left(\frac{12EI}{L^3} + Dc^2\right) & -Dcs & \frac{6EI}{L^2}s \\ Dcs & \left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & -\frac{6EI}{L^2}c & -Dcs & -\left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & -\frac{6EI}{L^2}c \\ \frac{6EI}{L^2}s & -\frac{6EI}{L^2}c & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2}s & \frac{6EI}{L^2}c & \frac{2EI}{L} \\ -\left(\frac{12EI}{L^3} + Dc^2\right) & -Dcs & -\frac{6EI}{L^2}s & \left(\frac{12EI}{L^3} + Dc^2\right) & Dcs & -\frac{6EI}{L^2}s \\ -Dcs & -\left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & \frac{6EI}{L^2}c & Dcs & \left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & \frac{6EI}{L^2}c \\ \frac{6EI}{L^2}s & -\frac{6EI}{L^2}c & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2}s & \frac{6EI}{L^2}c & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} X_a \\ Z_a \\ M_a \\ X_b \\ Z_b \\ M_b \end{matrix}$$

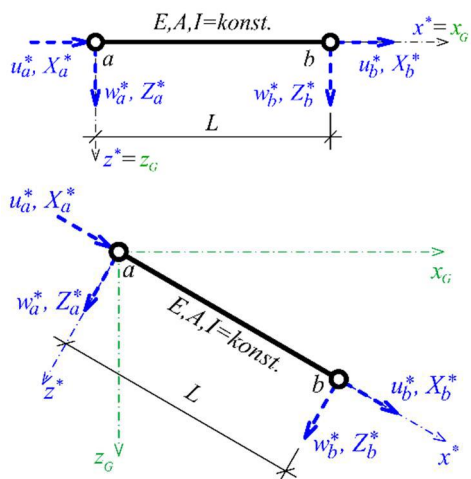
$D = \frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}$ $c = \cos(\gamma_{ab})$ $s = \sin(\gamma_{ab})$

Kloub - Kloub



Lokální matice tuhosti

$$[K_{a,b}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} X_a^* \\ Z_a^* \\ M_a^* \\ X_b^* \\ Z_b^* \\ M_b^* \end{matrix}$$

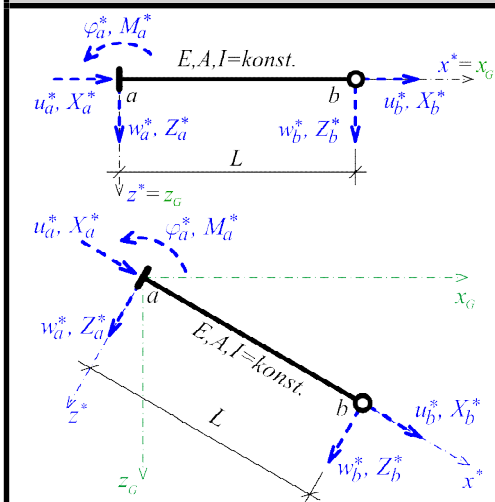


Globální matice tuhosti

$$[K_{a,b}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}c^2 & \frac{EA}{L}cs & 0 & -\frac{EA}{L}c^2 & -\frac{EA}{L}cs & 0 \\ \frac{EA}{L}cs & \frac{EA}{L}s^2 & 0 & -\frac{EA}{L}cs & -\frac{EA}{L}s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L}c^2 & -\frac{EA}{L}cs & 0 & \frac{EA}{L}c^2 & \frac{EA}{L}cs & 0 \\ -\frac{EA}{L}cs & -\frac{EA}{L}s^2 & 0 & \frac{EA}{L}cs & \frac{EA}{L}s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} X_a \\ Z_a \\ M_a \\ X_b \\ Z_b \\ M_b \end{matrix}$$

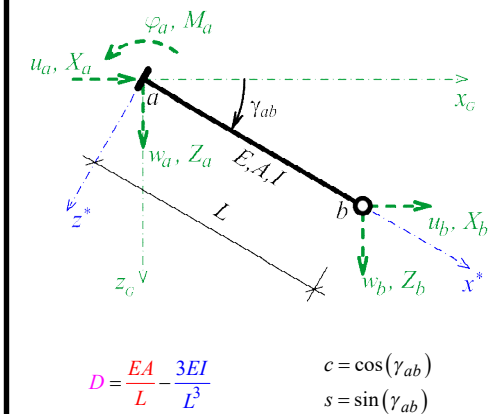
$c = \cos(\gamma_{ab})$ $s = \sin(\gamma_{ab})$

Vetknutí - Kloub



Lokální matice tuhosti

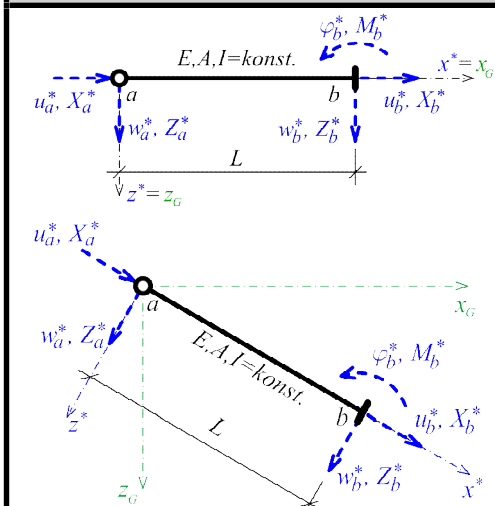
$$[K_{a,b}^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} X_a^* \\ Z_a^* \\ M_a^* \\ X_b^* \\ Z_b^* \\ M_b^* \end{matrix}$$



Globální matice tuhosti

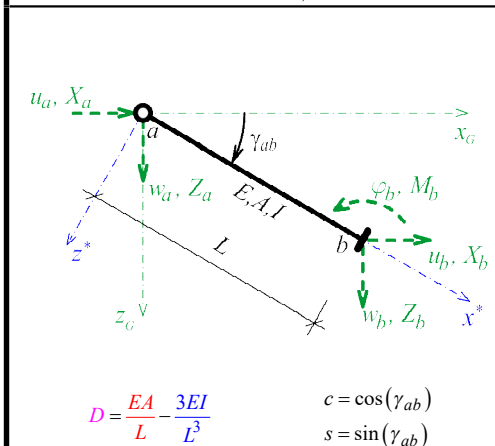
$$[K_{a,b}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{3EI}{L^3} + Dc^2\right) & Dcs & \frac{3EI}{L^2}s & -\left(\frac{3EI}{L^3} + Dc^2\right) & -Dcs & 0 \\ Dcs & \left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & -\frac{3EI}{L^2}c & -Dcs & -\left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & 0 \\ \frac{3EI}{L^2}s & -\frac{3EI}{L^2}c & \frac{3EI}{L} & -\frac{3EI}{L^2}s & \frac{3EI}{L^2}c & 0 \\ -\left(\frac{3EI}{L^3} + Dc^2\right) & -Dcs & -\frac{3EI}{L^2}s & \left(\frac{3EI}{L^3} + Dc^2\right) & Dcs & 0 \\ -Dcs & -\left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & \frac{3EI}{L^2}c & Dcs & \left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} X_a \\ Z_a \\ M_a \\ X_b \\ Z_b \\ M_b \end{matrix}$$

Kloub - Vetknutí



Lokální matice tuhosti

$$[K_{a,b}^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} X_a^* \\ Z_a^* \\ M_a^* \\ X_b^* \\ Z_b^* \\ M_b^* \end{matrix}$$



Globální matice tuhosti

$$[K_{a,b}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{3EI}{L^3} + Dc^2\right) & Dcs & 0 & -\left(\frac{3EI}{L^3} + Dc^2\right) & -Dcs & \frac{3EI}{L^2}s \\ Dcs & \left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & 0 & -Dcs & -\left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & -\frac{3EI}{L^2}c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{3EI}{L^3} + Dc^2\right) & -Dcs & 0 & \left(\frac{3EI}{L^3} + Dc^2\right) & Dcs & -\frac{3EI}{L^2}s \\ -Dcs & -\left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & 0 & Dcs & \left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & \frac{3EI}{L^2}c \\ \frac{3EI}{L^2}s & -\frac{3EI}{L^2}c & 0 & -\frac{3EI}{L^2}s & \frac{3EI}{L^2}c & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} X_a \\ Z_a \\ M_a \\ X_b \\ Z_b \\ M_b \end{matrix}$$

Tabulka 8.1 Primární lokální vektory koncových sil prutu $\{R_{a,b}^*\}$

(a)		(8.1a/1)	(8.1a/2)	(8.1a/3)	(8.1a/4)	(8.1a/5)	(8.1a/6)	(8.1a/7)	(8.1a/8)	(8.1a/9)	(8.1a/10)
		$\begin{Bmatrix} -b^2 \\ -b \\ \frac{b^2}{l^3} \end{Bmatrix} F_x$	$\begin{Bmatrix} -\frac{b}{l} F_x \\ \frac{3l-2b}{l^3} F_z \\ \frac{ab^2}{l^2} F_z \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{ab}{l^3} M \\ \frac{2l-3b}{l^2} M \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3M}{2l} \\ \frac{1}{4} M \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} nl \\ -\frac{1}{2} ql \\ \frac{1}{12} ql^2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{2al-a^2}{2l} n \\ -\frac{2al^3-2a^3l+a^4}{2l^3} q \\ \frac{6a^2l^2-8a^3l+3a^4}{12l^2} q \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{1}{8} nl \\ \frac{3}{32} ql \\ \frac{5}{192} ql^2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{2n_a+n_b}{6} l \\ \frac{7q_a+3q_b}{20} l \\ \frac{3q_a+2q_b}{60} l^2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} EA\alpha_T \Delta T_0 \\ 0 \\ EI \frac{\alpha_T \Delta T_1}{h} \end{Bmatrix}$
		$\begin{Bmatrix} -b \\ -\frac{3l^2-b^2}{2l^3} \\ \frac{ab}{2l^2} \end{Bmatrix} F_x$	$\begin{Bmatrix} -\frac{b}{l} F_x \\ -\frac{11}{16} F_z \\ \frac{3}{16} F_z l \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{l^2-b^2}{3} \frac{M}{2l^3} \\ \frac{l^2-3b^2}{2l^2} M \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{9M}{8l} \\ \frac{1}{8} M \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3M}{2l} \\ \frac{1}{2} M \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} nl \\ -\frac{5}{8} ql \\ \frac{1}{8} ql^2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{2al-a^2}{2l} n \\ -\frac{8al^3-4a^3l+a^4}{8l^3} q \\ \frac{(2al-a^2)^2}{8l^2} q \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{1}{8} nl \\ \frac{23}{128} ql \\ \frac{7}{128} ql^2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{2n_a+n_b}{6} l \\ \frac{16q_a+9q_b}{40} l \\ \frac{8q_a+7q_b}{120} l^2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} EA\alpha_T \Delta T_0 \\ -\frac{3EI}{2h} \alpha_T \Delta T_1 \\ \frac{3EI}{2h} \alpha_T \Delta T_1 \end{Bmatrix}$
		$\begin{Bmatrix} -a^2 \\ -a \\ \frac{a^2}{l^3} \end{Bmatrix} F_x$	$\begin{Bmatrix} -\frac{a}{l} F_x \\ -\frac{5}{16} F_z \\ \frac{1}{16} F_z l \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{l^2-b^2}{3} \frac{M}{2l^3} \\ \frac{l^2-3b^2}{2l^2} M \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{9M}{8l} \\ \frac{1}{8} M \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3M}{2l} \\ \frac{1}{2} M \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} nl \\ -\frac{5}{8} ql \\ \frac{1}{8} ql^2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{2al-a^2}{2l} n \\ -\frac{8al^3-4a^3l+a^4}{8l^3} q \\ \frac{(2al-a^2)^2}{8l^2} q \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{1}{8} nl \\ \frac{23}{128} ql \\ \frac{7}{128} ql^2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{2n_a+n_b}{6} l \\ \frac{16q_a+9q_b}{40} l \\ \frac{8q_a+7q_b}{120} l^2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} EA\alpha_T \Delta T_0 \\ -\frac{3EI}{2h} \alpha_T \Delta T_1 \\ \frac{3EI}{2h} \alpha_T \Delta T_1 \end{Bmatrix}$

Tabulka 8.1 Primární lokální vektory koncových sil prutu $\{R_{ab}^*\}$ (pokračování)

Oprava: Ing. Zbyněk Vlček, Ph.D. - 2025

(c) Obdélník-průřez: $\Delta T_0 = (\Delta T_d + \Delta T_h) / 2$ $\Delta T_l = \Delta T_d - \Delta T_h$	(8.1c/1) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{b}{l} F_x \\ -\frac{b^2}{2l^3} F_z \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1c/2) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} F_x \\ -\frac{5}{16} F_z \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1c/3) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{l^2 - a^2}{2l^3} M \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1c/4) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{9M}{8l} \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1c/5) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3M}{2l} \\ \frac{1}{2} M \end{Bmatrix}$		(8.1c/6) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} nl \\ -\frac{3}{8} ql \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1c/7) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2al - a^2}{2l} n \\ -\frac{8al^3 - 6a^2l^2 + a^4}{8l^3} q \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1c/8) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{8} nl \\ -\frac{7}{128} ql \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1c/9) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2n_a + n_b}{6} l \\ -\frac{1}{40} (q_a + 4q_b) l \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1c/10) $\begin{Bmatrix} EA\alpha_T \Delta T_0 \\ \frac{3EI}{2hl} \alpha_T \Delta T_l \\ 0 \end{Bmatrix}$	
	(8.1d/1) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{b}{l} F_x \\ -\frac{b^2}{2l^3} F_z \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1d/2) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} F_x \\ -\frac{1}{2} F_z \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1d/3) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{M}{l} \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1d/4) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{M}{l} \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1d/5) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{M_1 + M_2}{l} \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1d/6) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} nl \\ -\frac{1}{2} ql \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1d/7) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2al - a^2}{2l} n \\ -\frac{2al - a^2}{2l} q \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1d/8) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{8} nl \\ -\frac{1}{8} ql \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1d/9) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2n_a + n_b}{6} l \\ -\frac{2q_a + q_b}{6} l \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1d/10) $\begin{Bmatrix} EA\alpha_T \Delta T_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	

Transformace vektorů

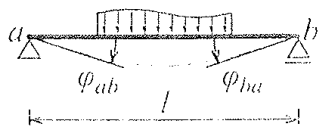
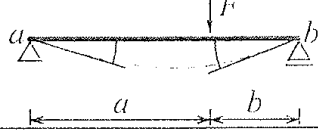
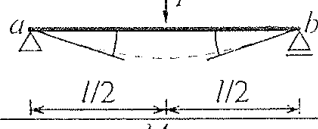
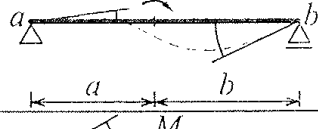
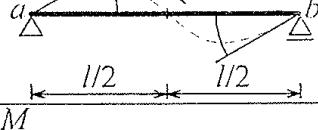
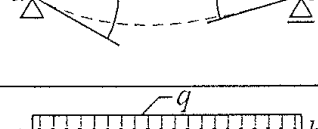
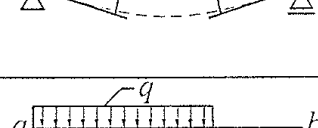
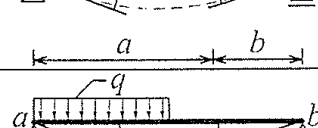
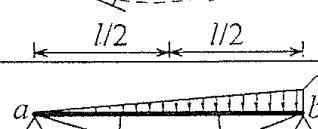
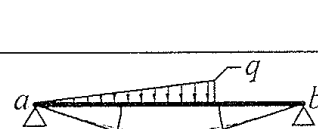
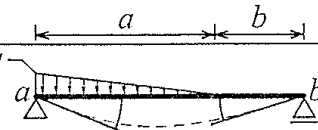
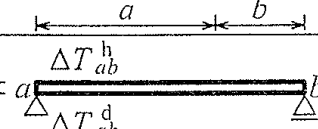
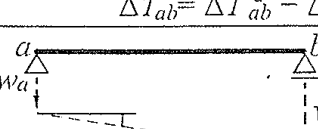
z lokálních do globálních souřadnic

$$\left\{\bar{\mathbf{R}}_{a,b}^*\right\} \rightarrow \left\{\bar{\mathbf{R}}_{a,b}\right\}$$
$$\left\{\bar{\mathbf{R}}_{a,b}\right\}=\left\{\begin{array}{c} \bar{X}_a^* \cos \gamma_{ab}-\bar{Z}_a^* \sin \gamma_{ab} \\ \bar{X}_a^* \sin \gamma_{ab}+\bar{Z}_a^* \cos \gamma_{ab} \\ \hline \bar{M}_a^* \\ \bar{X}_b^* \cos \gamma_{ab}-\bar{Z}_b^* \sin \gamma_{ab} \\ \bar{X}_b^* \sin \gamma_{ab}+\bar{Z}_b^* \cos \gamma_{ab} \\ \hline \bar{M}_b^* \end{array}\right\}$$

z globálních do lokálních souřadnic

$$\left\{\mathbf{r}_{a,b}\right\} \rightarrow \left\{\mathbf{r}_{a,b}^*\right\}$$
$$\left\{\mathbf{r}_{a,b}^*\right\}=\left\{\begin{array}{c} u_a \cos \gamma_{ab}+w_a \sin \gamma_{ab} \\ -u_a \sin \gamma_{ab}+w_a \cos \gamma_{ab} \\ \hline \varphi_a \\ u_b \cos \gamma_{ab}+w_b \sin \gamma_{ab} \\ -u_b \sin \gamma_{ab}+w_b \cos \gamma_{ab} \\ \hline \varphi_b \end{array}\right\}$$

Tabulka 5.2 Pootočení u prostého nosníku konstantní ohybové tuhosti

Pootočení φ_{ab} podporového průřezu a		Pootočení φ_{ba} podporového průřezu b
$\varphi_{ab}^F = \frac{1}{6} \frac{F}{EI} \frac{ab}{l} (l+b)$ (5.8a)		$\varphi_{ba}^F = \frac{1}{6} \frac{F}{EI} \frac{ab}{l} (l+a)$ (5.8b)
$\varphi_{ab}^F = \frac{1}{16} \frac{F}{EI} l^2$ (5.9a)		$\varphi_{ba}^F = \frac{1}{16} \frac{F}{EI} l^2$ (5.9b)
$\varphi_{ab}^M = -\frac{1}{6} \frac{M}{EI} \frac{1}{l} (l^2 - 3b^2)$ (5.10a)		$\varphi_{ba}^M = \frac{1}{6} \frac{M}{EI} \frac{1}{l} (l^2 - 3a^2)$ (5.10b)
$\varphi_{ab}^M = -\frac{1}{24} \frac{M}{EI} l$ (5.11a)		$\varphi_{ba}^M = \frac{1}{24} \frac{M}{EI} l$ (5.11b)
$\varphi_{ab}^M = \frac{1}{3} \frac{M}{EI} l$ (5.12a)		$\varphi_{ba}^M = \frac{1}{6} \frac{M}{EI} l$ (5.12b)
$\alpha_{ab} = \frac{1}{3} \frac{l}{EI}$ (5.13a)		$\beta_{ba} = \frac{1}{6} \frac{l}{EI}$ (5.13b)
$\varphi_{ab}^q = \frac{1}{24} \frac{q}{EI} l^3$ (5.14a)		$\varphi_{ba}^q = \frac{1}{24} \frac{q}{EI} l^3$ (5.14b)
$\varphi_{ab}^q = \frac{1}{24} \frac{q}{EI} \frac{a^2}{l} (2l-a)^2$ (5.15a)		$\varphi_{ba}^q = \frac{1}{24} \frac{q}{EI} \frac{a^2}{l} (2l^2 - a^2)$ (5.15b)
$\varphi_{ab}^q = \frac{9}{384} \frac{q}{EI} l^3$ (5.16a)		$\varphi_{ba}^q = \frac{7}{384} \frac{q}{EI} l^3$ (5.16b)
$\varphi_{ab}^q = \frac{7}{360} \frac{q}{EI} l^3$ (5.17a)		$\varphi_{ba}^q = \frac{8}{360} \frac{q}{EI} l^3$ (5.17b)
$\varphi_{ab}^q = \frac{1}{360} \frac{q}{EI} \frac{a^2}{l} (40l^2 - 45al + 12a^2)$ (5.18a)		$\varphi_{ba}^q = \frac{1}{90} \frac{q}{EI} \frac{a^2}{l} (5l^2 - 3a^2)$ (5.18b)
$\varphi_{ab}^q = \frac{1}{360} \frac{q}{EI} \frac{a^2}{l} (20l^2 - 15al + 3a^2)$ (5.19a)		$\varphi_{ba}^q = \frac{1}{360} \frac{q}{EI} \frac{a^2}{l} (10l^2 - 3a^2)$ (5.19b)
$\varphi_{ab}^T = \frac{1}{2} \alpha_T \Delta T_{ab} \frac{l}{h}$ (5.20a)		$\varphi_{ba}^T = \frac{1}{2} \alpha_T \Delta T_{ab} \frac{l}{h}$ (5.20b)
$\varphi_{ab}^w = \frac{w_b - w_a}{l}$ (5.21a)		$\varphi_{ba}^w = \frac{w_a - w_b}{l}$ (5.21b)