

FAST-BDA007 – STATIKA II

3. ročník Bc: Stavební inženýrství, letní semestr 2026/27 (2+2 hod.) – zápočet, zkouška

přednášející: Jan Eliáš, David Lehký, Zbyněk Vlk

cvičící: Jan Mašek, Václav Sadílek, Martina Sadílková Šomodíková, Hana Šimonová,
Zbyněk Vlk

Studijní podklady

- Teorie: kniha *Statika stavebních konstrukcí II.* autorů Jaroslava Kadlčáka & Jiřího Kytýra, nakladatelství VUTIUM (dostupná k vypůjčení ve studovně).
- Příklady: skripta *Statika II: řešené příklady* autorů Jiřího Kytýra, Romana Gratzy, Jana Pláška, Tomáše Ridoška & Jana Ekra, nakladatelství CERM (dostupná k vypůjčení ve studovně).
- Elektronické podklady: www.stm.fce.vutbr.cz/study/materials.
- On-line software: STRIAN – Structural analyser <http://structural-analyser.com>, autoři Petr Frantík & Miroslav Stibor

Harmonogram přednášek

1. Příčinkové čáry na staticky neurčitých konstrukcích
*Opakování metod vykreslení příčinkových čar na staticky určité konstrukce, výpočet příčinkové čáry na obous-
tranně/jednostranně vetknutém nosníku*
2. Příčinkové čáry na spojitém nosníku
Výpočet příčinkové čáry na spojitém nosníku a rámu, použití těchto čar k výpočtu reakcí a vnitřních sil
3. Podstata deformační metody, její vznik a vývoj
*Motivace, základní rovnice osově namáhaného prutu, jednoduché příklady, rozdíly oproti silové metodě, historický
vývoj deformační metody*
4. Skalární forma deformační metody pro prutové konstrukce s vodorovnými a svislými pruty
Výpočtový model a stupeň přetvárné neurčitosti, jednoduchý příklad s libovolným zatížením, použití tabulek
5. Zatížení na prutech – primární stav, včetně teplotního zatížení
Odvození primárních vektorů na prutech, příklad
6. Maticová forma deformační metody pro prutové konstrukce s vodorovnými a svislými pruty
Zápis postupu pomocí matic, odvození matice tuhosti prutu, lokalizace vektorů a matic pro celou konstrukci
7. Transformace mezi lokálním a globálním souřadnicovým systémem
Souřadnicové systémy, transformační matice, příklad s vodorovnými a svislými pruty
8. Skalární i maticová forma deformační metody pro příhradové konstrukce
Výpočtový model a stupeň přetvárné neurčitosti pro příhradovou konstrukci, natočení prutů a transformace
9. Maticová forma deformační metody pro obecné rovinné prutové konstrukce
*Plný zápis deformační metody, primární stav, transformace, lokalizace, rovnice rovnováhy, sekundární stav,
vnitřní síly*

10. Zjednodušená deformační metoda
Omezení volných kinematických proměnných, styčnicková a patrová rovnice
11. Prut proměnného průřezu
Výškový přímkový náběh, určení deformačních součinitelů – analytické řešení, numerická integrace
12. Princip virtuálních sil a přemístění, minimalizace potenciální a doplňkové energie, vlastnosti matice tuhosti
Vysvětlení základních principů elastostatiky pro příhradové konstrukce, získání matice tuhosti jako Hessovy matice potenciální energie, symetrie a pozitivní definitnost
13. Diskuze, informace ke zkoušce
Zakončení výuky, doplnění výkladu, dotazy a různé

Harmonogram cvičení

1. Základy práce ve statickém softwaru
Představení komplexnějšího programu (například RFEM) pro analýzu konstrukcí na počítači a jednoduššího on-line programu pro výuku mechaniky na mobilu či tabletu (například STRIAN nebo EduBeam)
2. Základy práce ve statickém softwaru
Modelování složitějších konstrukcí ve statickém softwaru, jednotky, chybné podepření konstrukce, před výpočtem kvalitativní odhad průběhu posunů a momentů
3. Příčinkové čáry na jednoduchém staticky neurčitým nosníku
Statické a kinematické určitosti prutových soustav, opakování silové metody, příčinkové čáry na staticky neurčitých nosnících, porovnání se softwarem
4. Příčinkové čáry spojitého nosníku
Včetně aplikace pro výpočet vnitřních sil a odhad nejhoršího umístění zatížení, porovnání se softwarem, diskuze
5. Základy deformační metody
Jednoduché příklady procvičující principy deformační metody, diskuze, porovnání se softwarem
 1. **TEST** Vykreslení příčinkových čar na staticky neurčitou konstrukci, jejich použití k výpočtu statických veličin
6. Pravoúhle lomená prutová konstrukce se statickým i kinematickým zatížením řešená skalární formou
Výpočtový model, vykreslení silových účinků od kinematických veličin, vykreslení vnitřních sil, porovnání se softwarem, diskuze
7. Pravoúhle lomená prutová konstrukce řešená skalární formou
Teplotní zatížení, pokles podpor, porovnání se softwarem a diskuze
8. Pravoúhle lomená prutová konstrukce řešená pomocí maticového zápisu
Primární a sekundární stav, matice tuhosti, lokalizace, porovnání se softwarem a diskuze
9. Řešení příhradových konstrukcí deformační metodou
Transformace primárních a sekundárních účinků, transformační matice
 2. **TEST** Výpočtový model, určení kinematických neznámých a druhů prutů
10. Obecná konstrukce s libovolným zatížením, kompletní maticový zápis deformační metody
Včetně transformace, porovnání se softwarem a diskuze
11. Obecná konstrukce s libovolným zatížením, kompletní maticový zápis deformační metody
Včetně transformace, porovnání se softwarem a diskuze
12. Zjednodušená deformační metoda
Styčnickové a patrové rovnice, porovnání se softwarem a diskuze
13. Zápočtový test
 3. **TEST** Řešení prutové konstrukce deformační metodou

Podmínky získání zápočtu

- Aktivní účast ve cvičeních: zjevná nepřipravenost bude hodnocena jako neomluvená neúčast.
- Maximálně jedna neomluvená a jedna omluvená absence (z celkového počtu 13 dvouhodinových cvičení).
- Úspěšné vypracování tří testů. Testy nemají opravný termín, pouze na konci semestru je možné jeden z testů opravit. Cvičící může některý z testů nahradit samostatnou prací nebo některé testy spojit dohromady. Cvičící může hodnotit každý test zvlášť nebo vytvořit bodovací systém a zápočet udělit na základě splnění minimálního počtu bodů za všechny testy dohromady.
- Neomluvená absence v termínu testu znamená automaticky hodnocení testu známkou F nebo nulovým počtem bodů.

Pokyny ke zkoušce

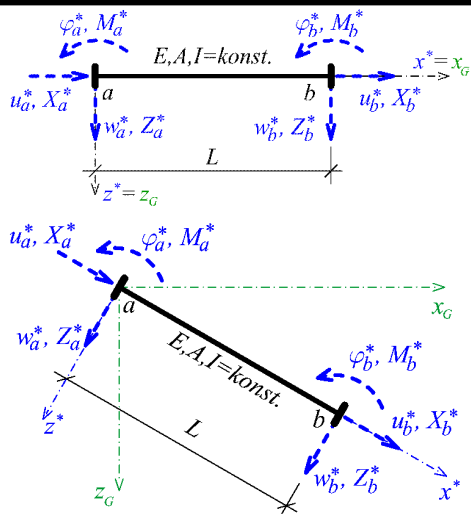
- Studenti potřebují ke zkoušce pouze papír a psací potřeby, klasickou kalkulačku a studijní průkaz. Žádné další pomůcky, kromě tabulek zmíněných níže, nejsou povoleny.
- Každý student dostane tabulky lokálních primárních vektorů a lokálních i globálních matic tuhosti (připojeny k tomuto dokumentu). Celá zkouška probíhá bez použití jiné literatury či dalších zdrojů.
- Každý student pracuje samostatně, komunikace je možná jen s přítomným učitelem.
- Zkouška má pouze jednu pevnou část trvající maximálně 120 minut. V této písemné části je nutné získat nadpoloviční většinu bodů. Po splnění písemné části může zkouška pokračovat také ústní částí, ve které má zkoušející možnost doptat se na detaily z písemné části nebo položit další, s předchozími úkoly nesouvisející otázky.
- V případě zařazení ústní zkoušky by studenti měli očekávat přestávku v délce 1-2 hodiny nutnou k opravení písemné části.
- Písemná část bude sestavena z několika teoretických a praktických úkolů. Nebude se počítat kompletní příklad od začátku do konce. Příklady otázek včetně jejich vzorových odpovědí jsou přiloženy k tomuto dokumentu.

Vetknutí - Vetknutí



Lokální matice tuhosti

$$[K_{a,b}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} X_a^* \\ Z_a^* \\ M_a^* \\ X_b^* \\ Z_b^* \\ M_b^* \end{matrix}$$

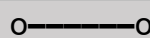


Globální matice tuhosti

$$[K_{a,b}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{12EI}{L^3} + Dc^2\right) & Dcs & \frac{6EI}{L^2}s & -\left(\frac{12EI}{L^3} + Dc^2\right) & -Dcs & \frac{6EI}{L^2}s \\ Dcs & \left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & -\frac{6EI}{L^2}c & -Dcs & -\left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & -\frac{6EI}{L^2}c \\ \frac{6EI}{L^2}s & -\frac{6EI}{L^2}c & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2}s & \frac{6EI}{L^2}c & \frac{2EI}{L} \\ -\left(\frac{12EI}{L^3} + Dc^2\right) & -Dcs & -\frac{6EI}{L^2}s & \left(\frac{12EI}{L^3} + Dc^2\right) & Dcs & -\frac{6EI}{L^2}s \\ -Dcs & -\left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & \frac{6EI}{L^2}c & Dcs & \left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & \frac{6EI}{L^2}c \\ \frac{6EI}{L^2}s & -\frac{6EI}{L^2}c & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2}s & \frac{6EI}{L^2}c & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} X_a \\ Z_a \\ M_a \\ X_b \\ Z_b \\ M_b \end{matrix}$$

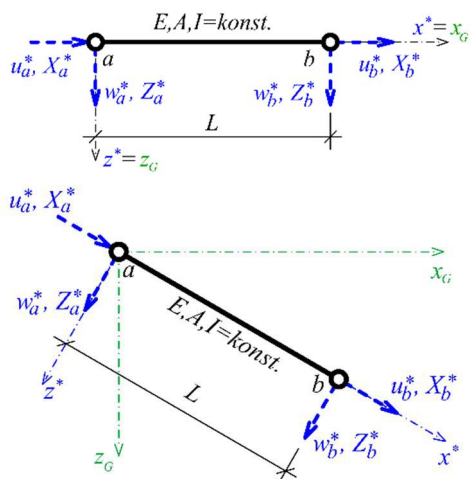
$D = \frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}$ $c = \cos(\gamma_{ab})$
 $s = \sin(\gamma_{ab})$

Kloub - Kloub



Lokální matice tuhosti

$$[K_{a,b}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} X_a^* \\ Z_a^* \\ M_a^* \\ X_b^* \\ Z_b^* \\ M_b^* \end{matrix}$$

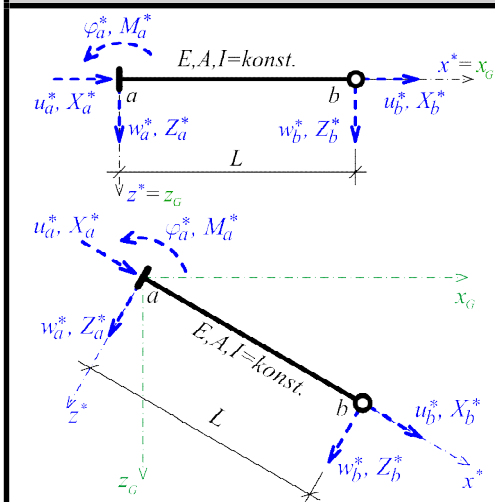


Globální matice tuhosti

$$[K_{a,b}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}c^2 & \frac{EA}{L}cs & 0 & -\frac{EA}{L}c^2 & -\frac{EA}{L}cs & 0 \\ \frac{EA}{L}cs & \frac{EA}{L}s^2 & 0 & -\frac{EA}{L}cs & -\frac{EA}{L}s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L}c^2 & -\frac{EA}{L}cs & 0 & \frac{EA}{L}c^2 & \frac{EA}{L}cs & 0 \\ -\frac{EA}{L}cs & -\frac{EA}{L}s^2 & 0 & \frac{EA}{L}cs & \frac{EA}{L}s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} X_a \\ Z_a \\ M_a \\ X_b \\ Z_b \\ M_b \end{matrix}$$

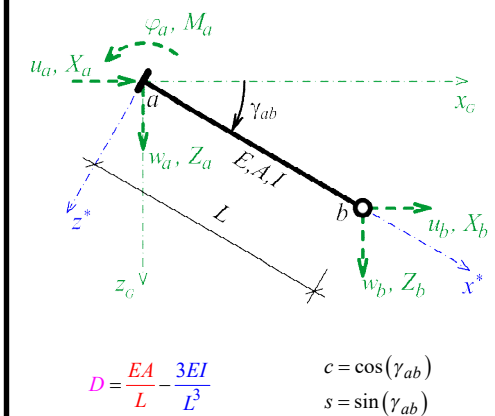
$c = \cos(\gamma_{ab})$
 $s = \sin(\gamma_{ab})$

Vetknutí - Kloub



Lokální matice tuhosti

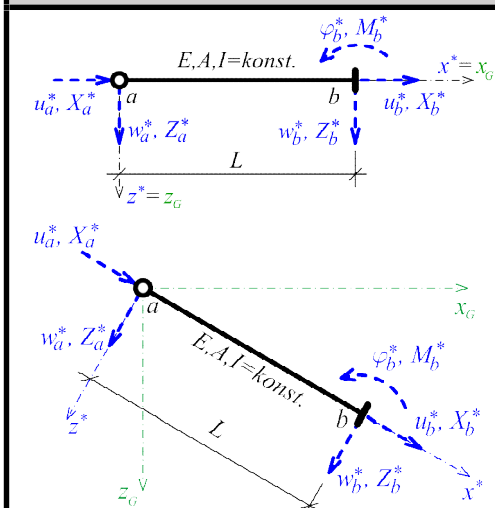
$$[K_{a,b}^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} X_a^* \\ Z_a^* \\ M_a^* \\ X_b^* \\ Z_b^* \\ M_b^* \end{matrix}$$



Globální matice tuhosti

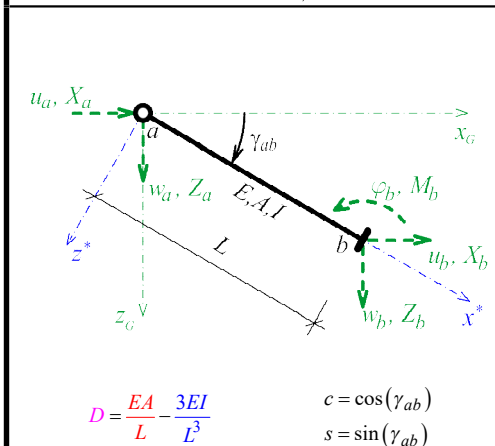
$$[K_{a,b}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{3EI}{L^3} + Dc^2\right) & Dcs & \frac{3EI}{L^2}s & -\left(\frac{3EI}{L^3} + Dc^2\right) & -Dcs & 0 \\ Dcs & \left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & -\frac{3EI}{L^2}c & -Dcs & -\left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & 0 \\ \frac{3EI}{L^2}s & -\frac{3EI}{L^2}c & \frac{3EI}{L} & -\frac{3EI}{L^2}s & \frac{3EI}{L^2}c & 0 \\ -\left(\frac{3EI}{L^3} + Dc^2\right) & -Dcs & -\frac{3EI}{L^2}s & \left(\frac{3EI}{L^3} + Dc^2\right) & Dcs & 0 \\ -Dcs & -\left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & \frac{3EI}{L^2}c & Dcs & \left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} X_a \\ Z_a \\ M_a \\ X_b \\ Z_b \\ M_b \end{matrix}$$

Kloub - Vetknutí



Lokální matice tuhosti

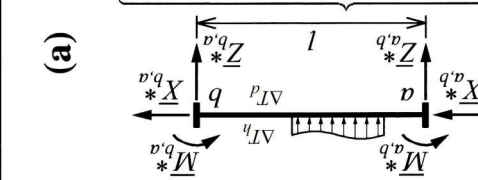
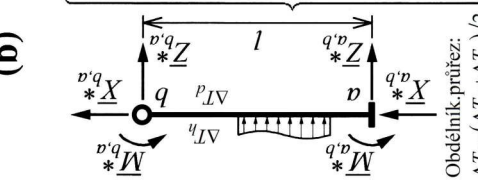
$$[K_{a,b}^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} X_a^* \\ Z_a^* \\ M_a^* \\ X_b^* \\ Z_b^* \\ M_b^* \end{matrix}$$



Globální matice tuhosti

$$[K_{a,b}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{3EI}{L^3} + Dc^2\right) & Dcs & 0 & -\left(\frac{3EI}{L^3} + Dc^2\right) & -Dcs & \frac{3EI}{L^2}s \\ Dcs & \left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & 0 & -Dcs & -\left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & -\frac{3EI}{L^2}c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{3EI}{L^3} + Dc^2\right) & -Dcs & 0 & \left(\frac{3EI}{L^3} + Dc^2\right) & Dcs & -\frac{3EI}{L^2}s \\ -Dcs & -\left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & 0 & Dcs & \left(\frac{EA}{L} - Dc^2\right) & \frac{3EI}{L^2}c \\ \frac{3EI}{L^2}s & -\frac{3EI}{L^2}c & 0 & -\frac{3EI}{L^2}s & \frac{3EI}{L^2}c & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} X_a \\ Z_a \\ M_a \\ X_b \\ Z_b \\ M_b \end{matrix}$$

Tabulka 8.1 Primární lokální vektory koncových sil prutu $\{R_{a,b}^*\}$

(a)		(8.1a/1)	(8.1a/2)	(8.1a/3)	(8.1a/4)	(8.1a/5)	(8.1a/6)	(8.1a/7)	(8.1a/8)	(8.1a/9)	(8.1a/10)
		$\begin{Bmatrix} -b^2 \\ -b \\ \frac{3l-2b}{l^3} F_z \\ \frac{ab^2}{l^2} F_z \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{b}{l} F_x \\ \frac{3l-2b}{l^3} F_z \\ \frac{ab^2}{l^2} F_z \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{ab}{l^3} M \\ \frac{2l-3b}{l^2} M \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3M}{2l} \\ \frac{1}{4} M \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} nl \\ -\frac{1}{2} ql \\ \frac{1}{12} ql^2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{2al-a^2}{2l} n \\ -\frac{2al^3-2a^3l+a^4}{2l^3} q \\ \frac{6a^2l^2-8a^3l+3a^4}{12l^2} q \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{1}{8} nl \\ \frac{3}{32} ql \\ \frac{5}{192} ql^2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{2n_a+n_b}{6} l \\ \frac{7q_a+3q_b}{20} l \\ \frac{3q_a+2q_b}{60} l^2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} EA\alpha_T \Delta T_0 \\ 0 \\ EI \frac{\alpha_T \Delta T_1}{h} \\ -EA\alpha_T \Delta T_0 \\ 0 \\ EI \frac{\alpha_T \Delta T_1}{h} \end{Bmatrix}$
		$\begin{Bmatrix} -b \\ -\frac{3l^2-b^2}{2l^3} F_z \\ \frac{ab}{2l^2} F_z \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{b}{l} F_x \\ \frac{3l^2-b^2}{2l^3} F_z \\ \frac{ab}{2l^2} F_z \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{l^2-b^2}{3l^3} M \\ \frac{l^2-3b^2}{2l^2} M \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{9M}{8l} \\ \frac{1}{8} M \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3M}{2l} \\ \frac{1}{2} M \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} nl \\ -\frac{5}{8} ql \\ \frac{1}{8} ql^2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{2al-a^2}{2l} n \\ -\frac{8al^3-4a^3l+a^4}{8l^3} q \\ \frac{(2al-a^2)^2}{8l^2} q \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{1}{8} nl \\ \frac{23}{128} ql \\ \frac{7}{128} ql^2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{2n_a+n_b}{6} l \\ \frac{16q_a+9q_b}{40} l \\ \frac{8q_a+7q_b}{120} l^2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} EA\alpha_T \Delta T_0 \\ -\frac{3EI}{2h} \alpha_T \Delta T_1 \\ \frac{3EI}{2h} \alpha_T \Delta T_1 \\ -EA\alpha_T \Delta T_0 \\ \frac{3EI}{2h} \alpha_T \Delta T_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Tabulka 8.1 Primární lokální vektory koncových sil prutu $\{R_{ab}^*\}$ (pokračování)

Oprava: Ing. Zbyněk Vlček, Ph.D. - 2025

(c) Obdélník-průřez: $\Delta T_0 = (\Delta T_d + \Delta T_h) / 2$ $\Delta T_l = \Delta T_d - \Delta T_h$	(8.1c/1) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{b}{l} F_x \\ -\frac{b^2}{2l^3} F_z \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1c/2) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} F_x \\ -\frac{5}{16} F_z \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1c/3) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{l^2 - a^2}{2l^3} M \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1c/4) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{9M}{8l} \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1c/5) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3M}{2l} \\ \frac{1}{2} M \end{Bmatrix}$		(8.1c/6) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} nl \\ -\frac{3}{8} ql \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1c/7) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2al - a^2}{2l} n \\ -\frac{8al^3 - 6a^2l^2 + a^4}{8l^3} q \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1c/8) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{8} nl \\ -\frac{7}{128} ql \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1c/9) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2n_a + n_b}{6} l \\ -\frac{1lq_a + 4q_b}{40} l \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1c/10) $\begin{Bmatrix} EA\alpha_T \Delta T_0 \\ \frac{3EI}{2hl} \alpha_T \Delta T_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$
	(8.1d/1) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{b}{l} F_x \\ -\frac{b^2}{2l^3} F_z \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1d/2) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} F_x \\ -\frac{1}{2} F_z \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1d/3) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{M}{l} \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1d/4) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{M}{l} \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1d/5) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{M_1 + M_2}{l} \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1d/6) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} nl \\ -\frac{1}{2} ql \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1d/7) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2al - a^2}{2l} n \\ -\frac{2al - a^2}{2l} q \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1d/8) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{8} nl \\ -\frac{1}{8} ql \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1d/9) $\begin{Bmatrix} \bar{X}_{a,b}^* \\ \bar{Z}_{a,b}^* \\ \bar{M}_{a,b}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2n_a + n_b}{6} l \\ -\frac{2q_a + q_b}{6} l \\ 0 \end{Bmatrix}$		(8.1d/10) $\begin{Bmatrix} EA\alpha_T \Delta T_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Transformace vektorů

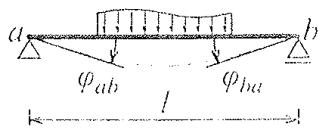
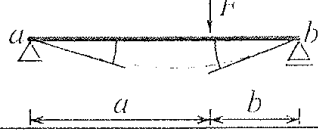
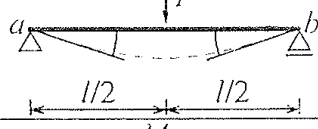
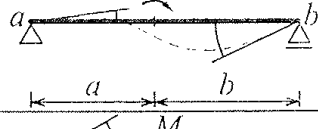
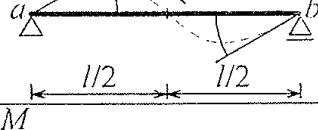
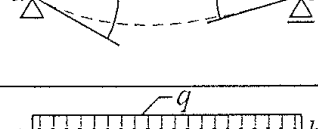
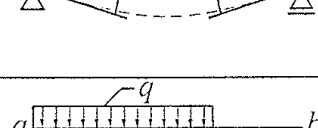
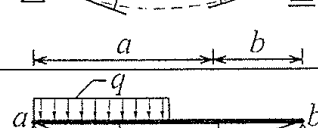
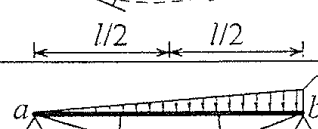
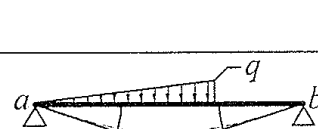
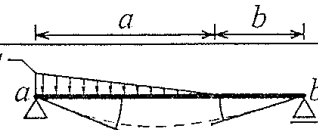
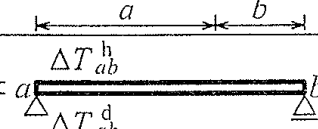
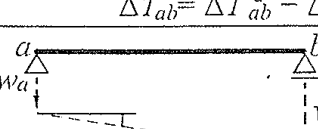
z lokálních do globálních souřadnic

$$\left\{\bar{\mathbf{R}}_{a,b}^*\right\} \rightarrow \left\{\bar{\mathbf{R}}_{a,b}\right\}$$
$$\left\{\bar{\mathbf{R}}_{a,b}\right\}=\left\{\begin{array}{c} \bar{X}_a^* \cos \gamma_{ab}-\bar{Z}_a^* \sin \gamma_{ab} \\ \bar{X}_a^* \sin \gamma_{ab}+\bar{Z}_a^* \cos \gamma_{ab} \\ \hline \bar{M}_a^* \\ \bar{X}_b^* \cos \gamma_{ab}-\bar{Z}_b^* \sin \gamma_{ab} \\ \bar{X}_b^* \sin \gamma_{ab}+\bar{Z}_b^* \cos \gamma_{ab} \\ \hline \bar{M}_b^* \end{array}\right\}$$

z globálních do lokálních souřadnic

$$\left\{\mathbf{r}_{a,b}\right\} \rightarrow \left\{\mathbf{r}_{a,b}^*\right\}$$
$$\left\{\mathbf{r}_{a,b}^*\right\}=\left\{\begin{array}{c} u_a \cos \gamma_{ab}+w_a \sin \gamma_{ab} \\ -u_a \sin \gamma_{ab}+w_a \cos \gamma_{ab} \\ \hline \varphi_a \\ u_b \cos \gamma_{ab}+w_b \sin \gamma_{ab} \\ -u_b \sin \gamma_{ab}+w_b \cos \gamma_{ab} \\ \hline \varphi_b \end{array}\right\}$$

Tabulka 5.2 Pootočení u prostého nosníku konstantní ohybové tuhosti

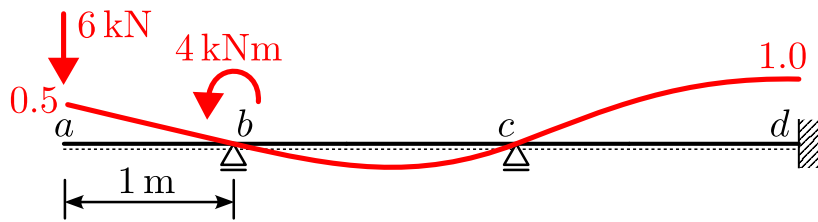
Pootočení φ_{ab} podporového průřezu a		Pootočení φ_{ba} podporového průřezu b
$\varphi_{ab}^F = \frac{1}{6} \frac{F}{EI} \frac{ab}{l} (l+b)$ (5.8a)		$\varphi_{ba}^F = \frac{1}{6} \frac{F}{EI} \frac{ab}{l} (l+a)$ (5.8b)
$\varphi_{ab}^F = \frac{1}{16} \frac{F}{EI} l^2$ (5.9a)		$\varphi_{ba}^F = \frac{1}{16} \frac{F}{EI} l^2$ (5.9b)
$\varphi_{ab}^M = -\frac{1}{6} \frac{M}{EI} \frac{1}{l} (l^2 - 3b^2)$ (5.10a)		$\varphi_{ba}^M = \frac{1}{6} \frac{M}{EI} \frac{1}{l} (l^2 - 3a^2)$ (5.10b)
$\varphi_{ab}^M = -\frac{1}{24} \frac{M}{EI} l$ (5.11a)		$\varphi_{ba}^M = \frac{1}{24} \frac{M}{EI} l$ (5.11b)
$\varphi_{ab}^M = \frac{1}{3} \frac{M}{EI} l$ (5.12a)		$\varphi_{ba}^M = \frac{1}{6} \frac{M}{EI} l$ (5.12b)
$\alpha_{ab} = \frac{1}{3} \frac{l}{EI}$ (5.13a)		$\beta_{ba} = \frac{1}{6} \frac{l}{EI}$ (5.13b)
$\varphi_{ab}^q = \frac{1}{24} \frac{q}{EI} l^3$ (5.14a)		$\varphi_{ba}^q = \frac{1}{24} \frac{q}{EI} l^3$ (5.14b)
$\varphi_{ab}^q = \frac{1}{24} \frac{q}{EI} \frac{a^2}{l} (2l-a)^2$ (5.15a)		$\varphi_{ba}^q = \frac{1}{24} \frac{q}{EI} \frac{a^2}{l} (2l^2 - a^2)$ (5.15b)
$\varphi_{ab}^q = \frac{9}{384} \frac{q}{EI} l^3$ (5.16a)		$\varphi_{ba}^q = \frac{7}{384} \frac{q}{EI} l^3$ (5.16b)
$\varphi_{ab}^q = \frac{7}{360} \frac{q}{EI} l^3$ (5.17a)		$\varphi_{ba}^q = \frac{8}{360} \frac{q}{EI} l^3$ (5.17b)
$\varphi_{ab}^q = \frac{1}{360} \frac{q}{EI} \frac{a^2}{l} (40l^2 - 45al + 12a^2)$ (5.18a)		$\varphi_{ba}^q = \frac{1}{90} \frac{q}{EI} \frac{a^2}{l} (5l^2 - 3a^2)$ (5.18b)
$\varphi_{ab}^q = \frac{1}{360} \frac{q}{EI} \frac{a^2}{l} (20l^2 - 15al + 3a^2)$ (5.19a)		$\varphi_{ba}^q = \frac{1}{360} \frac{q}{EI} \frac{a^2}{l} (10l^2 - 3a^2)$ (5.19b)
$\varphi_{ab}^T = \frac{1}{2} \alpha_T \Delta T_{ab} \frac{l}{h}$ (5.20a)		$\varphi_{ba}^T = \frac{1}{2} \alpha_T \Delta T_{ab} \frac{l}{h}$ (5.20b)
$\varphi_{ab}^w = \frac{w_b - w_a}{l}$ (5.21a)		$\varphi_{ba}^w = \frac{w_a - w_b}{l}$ (5.21b)

Příklad 1

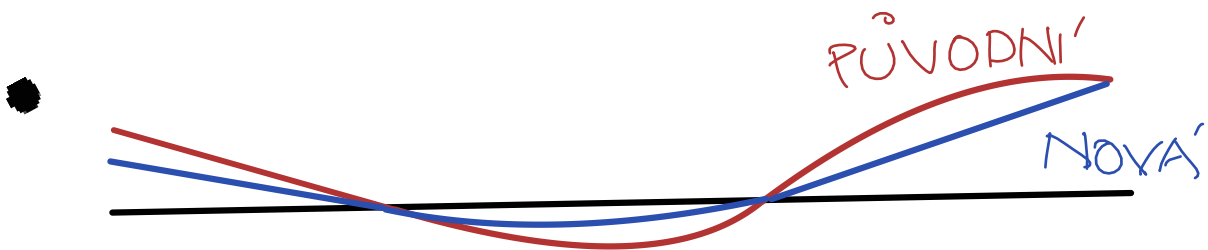
body: 3

Na obrázku je schématicky zakreslená příčinková čára, její hodnota na levém konci je 0.5 a napravo je 1.

- Je možné, že se jedná o příčinkovou čáru momentové reakce v bodě d ? Pokud ne, k jaké statické veličině se tato příčinková čára váže? Svou odpověď podpořte argumenty.
- Vypočtete hodnotu statické veličiny dané touto čarou od naznačeného zatížení (osamělá síla a moment).
- Jak by se změnila zakreslená příčinková čára, pokud by vpravo nebylo vetknutí, ale pouze neposuvná kloubová podpora? Schématicky zakreslete rozdíl mezi původní a novou čarou a slovně vysvětlíte.



- NENÍ TO MOŽNÉ, V BODĚ A NENÍ JEDNOTKOVÉ POTOČENÍ A NENÍ RESPEKTOVAN NULOVÝ SVISLÝ POSUN. JEDNÁ SE O PŘÍČINKOVOU SVISLÉ REAKCE V BODĚ A.
- $Z_A = 6 \cdot 0,5 + 4 \cdot \frac{0,5}{1} = 3 + 2 = 5 \text{ kN}$

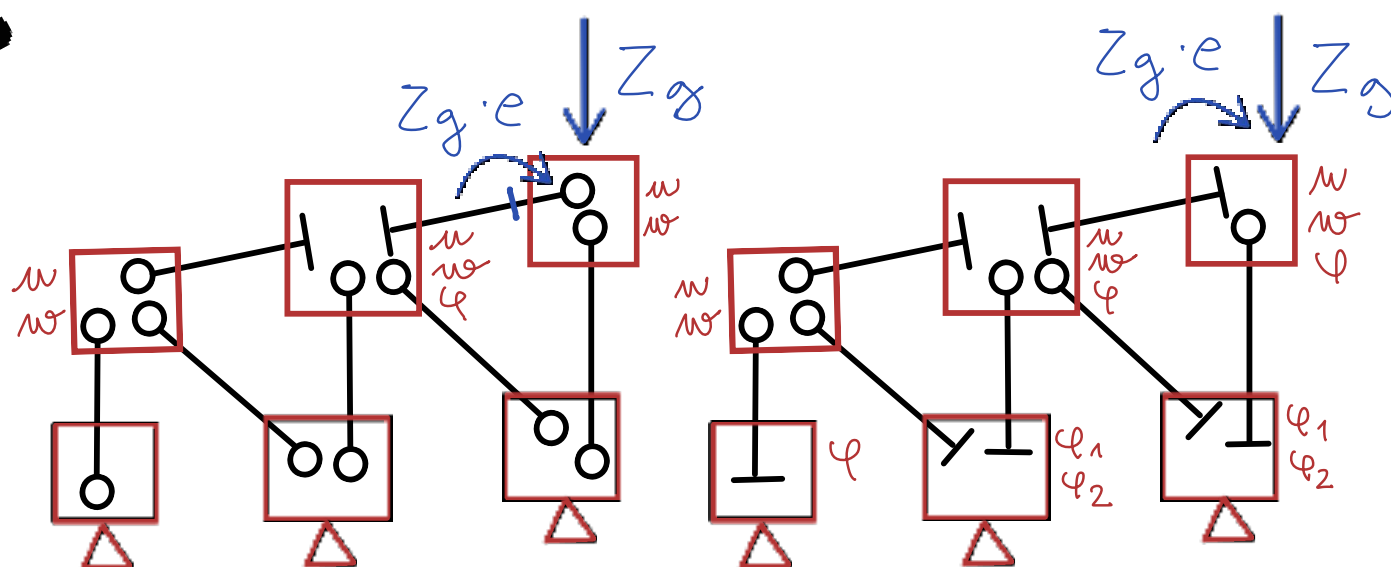
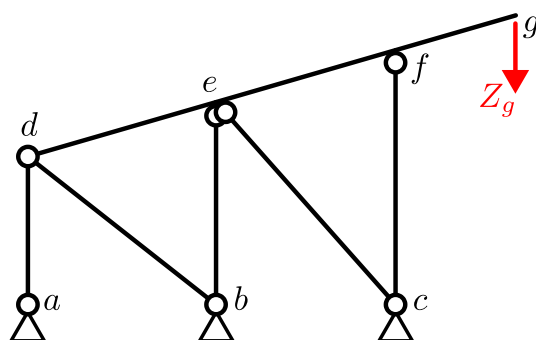


V BODĚ A SE ČARA MŮŽE POTOČIT
NÁSLEDNĚ TĚDY BUDE MÍT
MENŠÍ POTOČENÍ V BODECH B A C
A MENŠÍ HODNOTU V BODĚ O.

Příklad 2

body: 4

- Pro konstrukci na obrázku vytvořte 2 různé výpočtové modely pro řešení obecnou deformační metodou. Jeden z modelů vytvořte tak, aby měl minimální *stupeň přetvárné neurčitosti*. Diskutujte výhody a nevýhody takového modelu.
- Pro každý model jasné označte druhy prutů (kloub nebo vetknutí na koncích) a vypiště počet a seznam volných kinematických proměnných.
- Vysvětlete, jakým způsobem bude síla Z_g zahrnuta do zatížení modelu v případě varianty s minimálním stupněm přetvárné neurčitosti.
- Zakreslete veškeré sekundární síly a momenty v modelu s minimálním stupněm přetvárné neurčitosti vzniklé od vodorovného posunu bodu d v globální souřadnicové soustavě. Síly zakreslete v kladném globálním směru a označte X , Z nebo M s indexem ij (nebo ji) pro sílu na prutu ij v bodě i (nebo v bodě j).



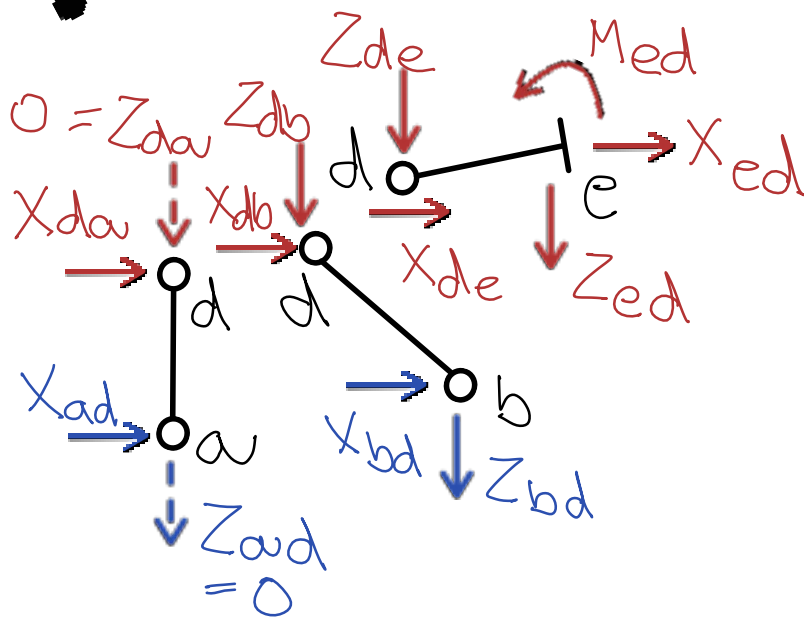
MINIMÁLNÍ STUPEŇ
P.X. 7 NEZNÁMÝCH

$w_d, w_d, w_e, w_e, \varphi_e, w_f, w_f$

$\varphi_a, \varphi_{b1}, \varphi_{b2}, \varphi_{c1}, \varphi_{c2}, w_b, w_b, w_c, w_c, \varphi_c, w_d, w_d, \varphi_d$

13 NEZNÁMÝCH
- NÁROČNĚJŠÍ VÝPOČET
+ ZNALOST ROTACÍ
VE STŘEŠNÍCÍCH
+ ZATĚŽOVACÍ MOMENT
JAKO UZLOVÁ SÍLA

- SVISLÁ SÍLA JAKO UZLOVÉ ZATÍŽENÍ V BODĚ f
MOMENT JAKO ZATÍŽENÍ NA KONCI PRUTU ef



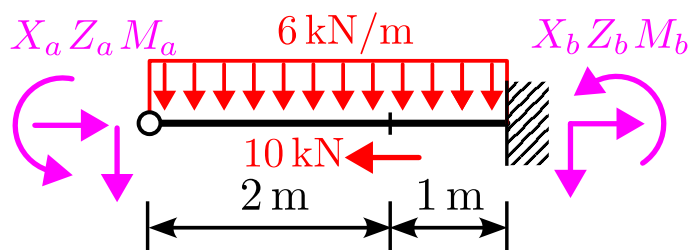
SEKUNDAŘNÍ
SÍLY VYSTUPUJÍCÍ
V ROVNICÍCH
ROVNOVÁHY

NEVYSTUPUJÍCÍ
V ROVN. ROVNOVÁHY

Příklad 3

body: 3

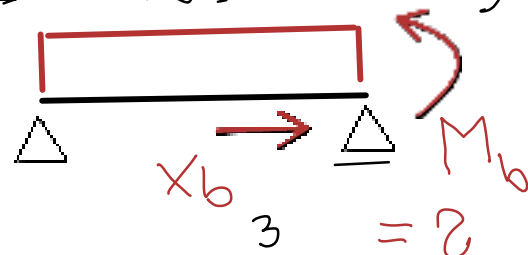
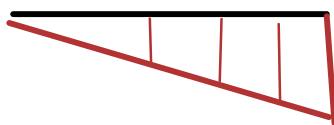
Odvoďte hodnoty primárních koncových sil na prutu na obrázku od zaznačeného zatížení. Použijte silovou metodu nebo přímou integraci a postup okomentujte. Opsání výsledku z tabulek nebude ohodnoceno žádným bodem.



● SILOVÁ METODA (POUZE PRÁCE MOM.)

ZAKLADNÍ SOUSTAVA:

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{1}{8} q l^2 \\ &= 6,75 \text{ kNm} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \int_0^l \frac{M_0 M_1}{EI} dx \\ &= \frac{3}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6,75 \cdot 0,5 \\ &= 6,75/EI \end{aligned}$$

$$\delta_{11} = \frac{l}{3EI} = \frac{1}{EI}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} M_b = 0 \Rightarrow M_b = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = -6,75 \text{ kNm}$$

(POUZE PRÁCE NORMÁLOVÝCH SIL)

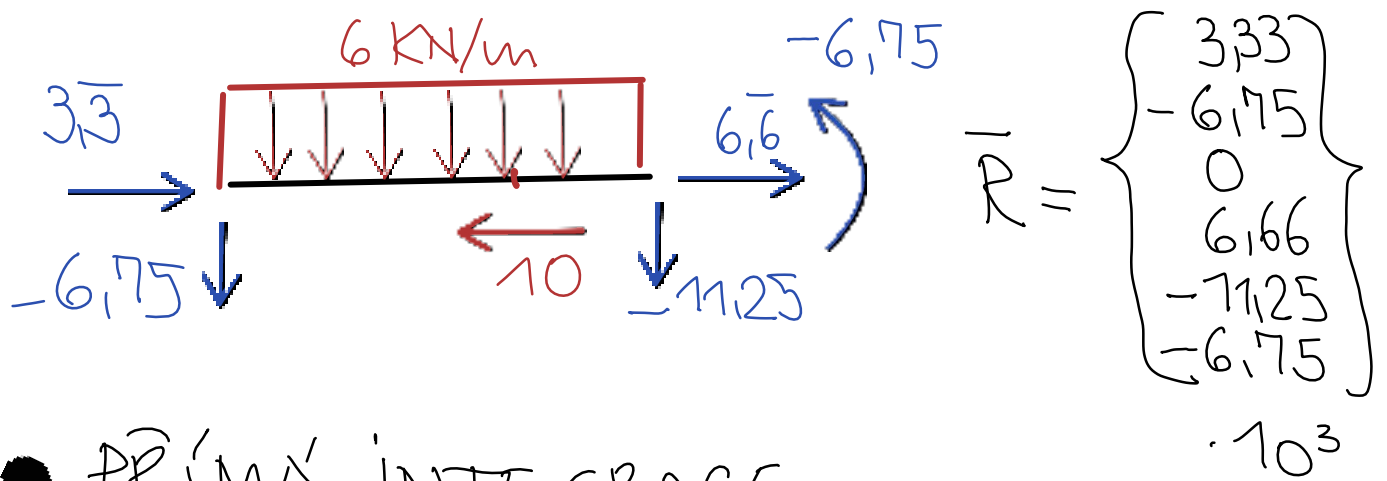
$$\begin{aligned} N_0 &= \dots \\ N_1 &= \dots \end{aligned}$$

$$\delta_{10} = 2(-10) \cdot 1/EA = \frac{-20}{EA}$$

$$\delta_{11} = \frac{3}{EA}$$



$$\delta_{10} + \delta_{11} X_b = 0 \Rightarrow X_b = 6,66 \text{ kN}$$



● PRÍMA INTEGRACE

$$V = \int -q dx = -6x + C_1$$

$$M = \int V dx = -3x^2 + C_1x + C_2$$

$$\varphi = -\frac{1}{EI} \int M dx = \frac{1}{EI} \left(x^3 - \frac{C_1 x^2}{2} - C_2 x + C_3 \right)$$

$$w = \int \varphi dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{C_1 x^3}{6} - \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4 \right)$$

OKRAJOVÉ PODMÍNKY

$$M(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad \varphi(3) = 0 \Rightarrow 27 - 4,5C_1 + C_3 = 0$$

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \quad w(3) = 0 \Rightarrow \frac{81}{4} - \frac{27C_1}{6} + 3C_3 = 0$$

$$\frac{81}{4} - \frac{27C_1}{6} + 3(-27 + 4,5C_1) = 0$$

$$243 - 54C_1 - 972 + 162C_1 = 0 \quad C_1 = \frac{729}{108} = 6,75$$

$$N = -\int n dx = \begin{cases} C_1 & x < 2 \\ C_2 & x > 2 \end{cases} \quad N^+(2) = N^-(2) + 10$$

$$C_2 = C_1 + 10$$

$$w = \frac{1}{EA} \int N dx = \begin{cases} \frac{1}{EA} (C_1 x + C_3) & x < 2 \\ \frac{1}{EA} ((C_1 + 10)x + C_4) & x > 2 \end{cases} \quad w^+(2) = w^-(2)$$

$$C_4 = C_3 - 20$$

OKRAJOVÉ PODMÍNKY

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$w(3) = 0 \Rightarrow C_1 \cdot 3 + 10 = 0 \Rightarrow C_1 = -3,33$$

$$X_a = -N(0) = 3,33 \text{ kN}$$

$$Z_a = -V(0) = -6,75 \text{ kN}$$

$$M_a = -M(0) = 0 \text{ kNm}$$

$$X_b = N(3) = 6,66 \text{ kN}$$

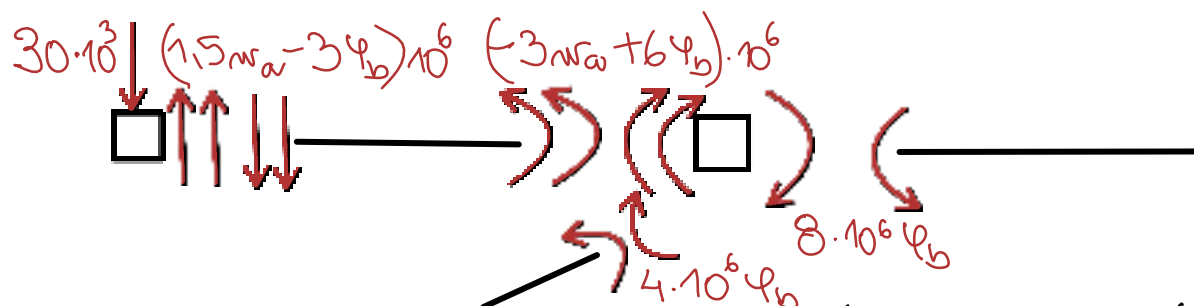
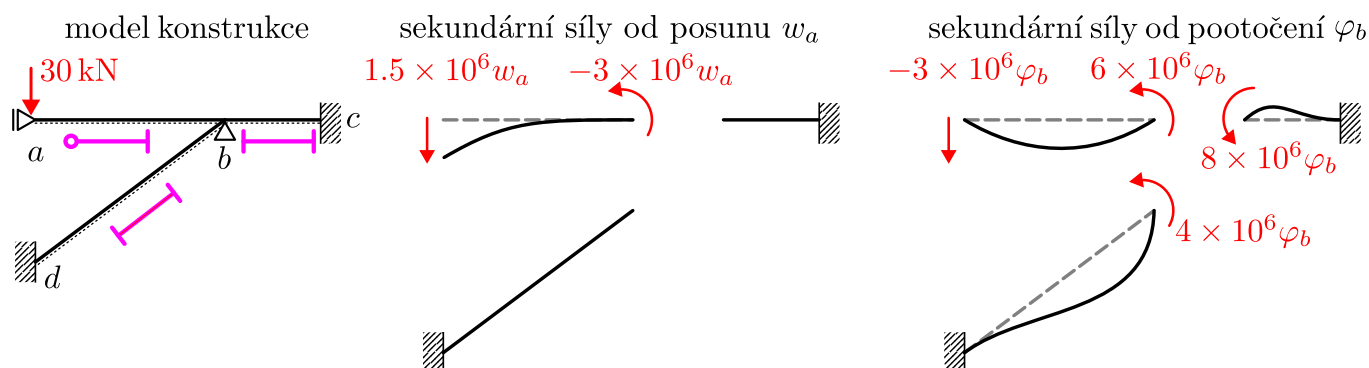
$$Z_b = V(3) = -18 + 6,75 = -11,25 \text{ kN}$$

$$M_b = M(3) = -27 + 3 \cdot 6,75 = -6,75 \text{ kNm}$$

Příklad 4

body: 3

Na obrázku vlevo je model konstrukce zatížené silou 30 kN se dvěma stupni volnosti: w_a a φ_b . Vpravo jsou pak zaznačeny odpovídající sekundární síly od těchto volných kinematických veličin. Sestavte rovnice rovnováhy (skalárně nebo maticově) a vyřešte je. Zapište nalezený posun a pootočení včetně jednotek.



$$\sum Z_a = 0 \quad 30 \cdot 10^3 - 1,5 \cdot 10^6 w_a + 3 \cdot 10^6 \varphi_b = 0$$

$$\sum M_b = 0 \quad 3 \cdot 10^6 w_a - (6 + 4 + 8) \cdot 10^6 \varphi_b = 0$$

$$10^6 \begin{bmatrix} 1,5 & -3 \\ -3 & 18 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_a \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1,5 & -3 & 30 \cdot 10^{-3} \\ -3 & 18 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 0,18 \\ -3 & 18 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0,03 \\ -3 & 18 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0,03 \\ 0 & 18 & 0,09 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0,03 \\ 0 & 1 & 0,005 \end{array} \right)$$

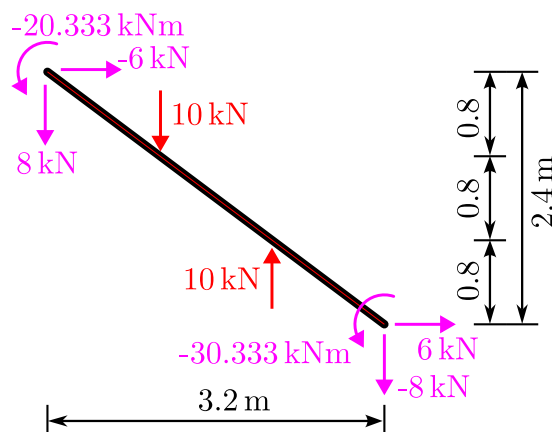
$$w_a = 30 \text{ mm}$$

$$\varphi_b = 5 \text{ mrad}$$

Příklad 5

body: 3

Jsou známy hodnoty koncových sil a zatížení nosníku. Spočítejte a vykreslete obrazce vnitřních sil.

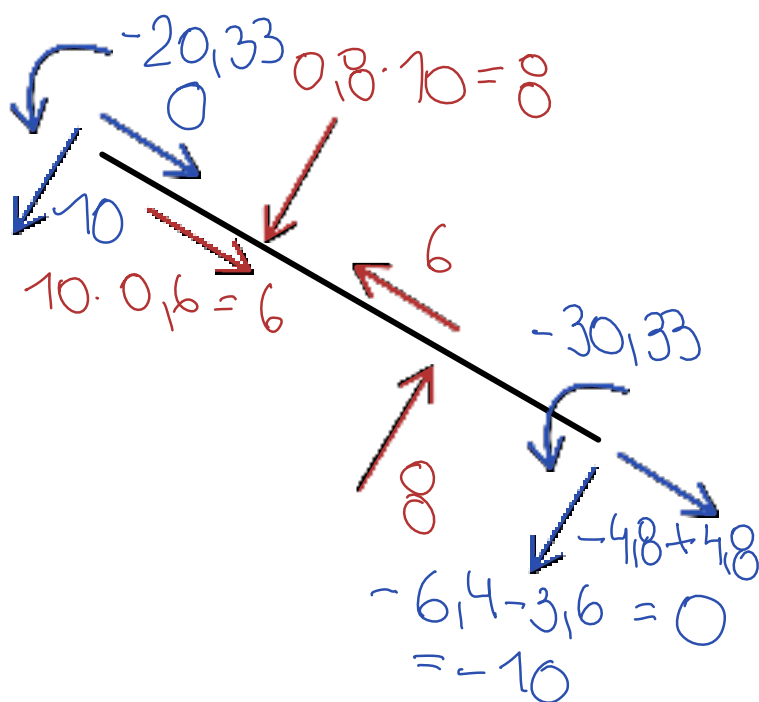


● TRANSFORMACE
DO LOKÁLNÍHO SS

$$l = \sqrt{2,4^2 + 3,2^2} = 4 \text{ m}$$

$$\sin \alpha = 2,4/4 = 0,6$$

$$\cos \alpha = 3,2/4 = 0,8$$

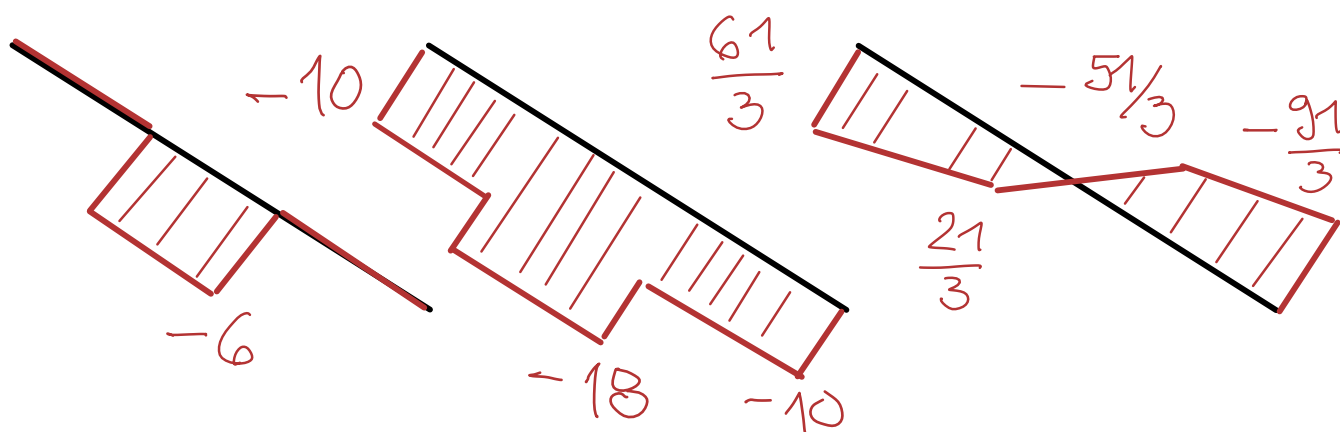


● VNITŘNÍ SÍLY

(N)

(V)

(M)



Příklad 6

body: 3

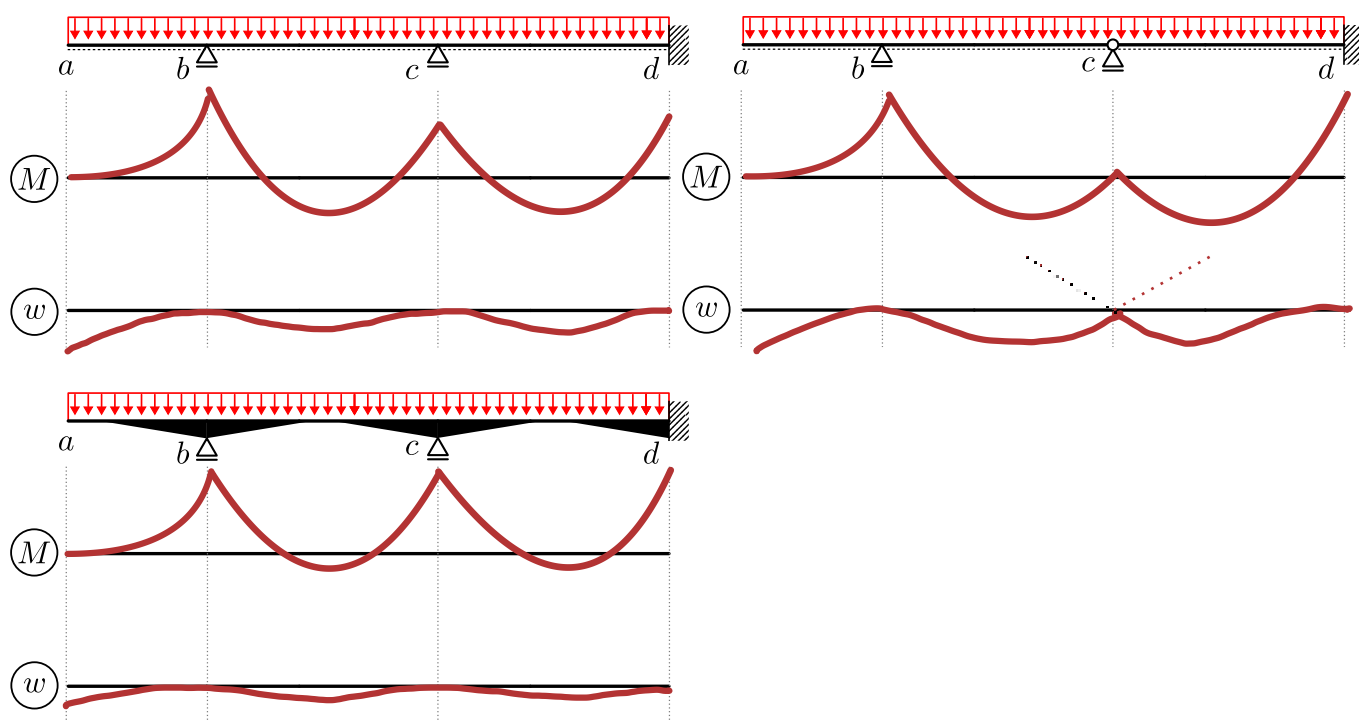
Uvažujte spojitý nosník na obrázku ve třech variantách:

- s pruty konstantního průřezu spojenými tuze;
- s pruty konstantního průřezu a kloubem v bodě c ;
- s pruty s lineárními náběhy.

Do obrázku načrtněte průběh momentů a průhybů v jednotlivých případech. Obrázky nakreslete tak, aby byl patrný rozdíl mezi jednotlivými variantami.

Dále odpovězte na následující doplňující dotazy a své odpovědi podpořte argumenty:

- Jak se liší moment v bodě b v jednotlivých variantách?
- Jak se liší průhyb v bodě a v jednotlivých variantách?



MOMENT M_b JE VE VŠECH VARIANTÁCH STEJNÝ, ROVNÝ MOMENTU NA PŘEVISLÉ KONZOLE

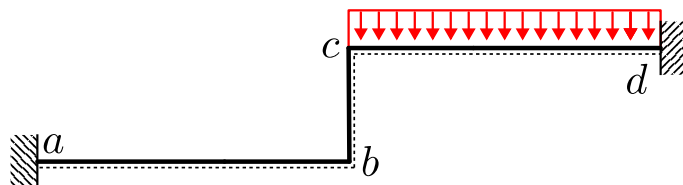
PRŮHYB w_a JE NEJVĚTŠÍ PRO VARIANTU S KLOUBEM, MENŠÍ PRO ZÁKLADNÍ VARIANTU A NEJMENŠÍ PRO VARIANTU S NÁBĚHY.

Příklad 7

body: 3

Vytvořte výpočtový model konstrukce na obrázku pro zjednodušenou deformační metodu s *minimálním stupněm přetvárné neurčitosti*.

- Jaké neznámé popisují kinematiku konstrukce a kolik jich je? Jaký počet neznámých by byl potřeba při použití obecné deformační metody?
- Co vyjadřují rovnice odpovídající těmto neznámým získané zjednodušenou deformační metodou?
- Jsou některé z těchto rovnic nazývány styčnickové nebo patrové?



- 3 NEZNÁMÉ, φ_b φ_c A $M_c = M_b$
OBECNÁ METODA 6 NEZNÁMÝCH
 M_b M_c φ_b M_c M_b φ_c
- $\varphi_b \rightarrow$ MOMENTOVÁ ROVNOVAHA STYČNÍKU
 $\varphi_c \rightarrow$ MOMENTOVÁ ROVNOVAHA STYČNÍKU
 $M_c = M_b \rightarrow$ SOUČET SVISLÝCH SIL NA PRUTU b-c VČETNĚ STYČNÍKŮ b A c JE NULOVÝ
- φ_b A φ_c JSOU STYČNÍKOVÉ ROVNICE
 $M_c = M_b$ JE PATROVÁ ROVNICE