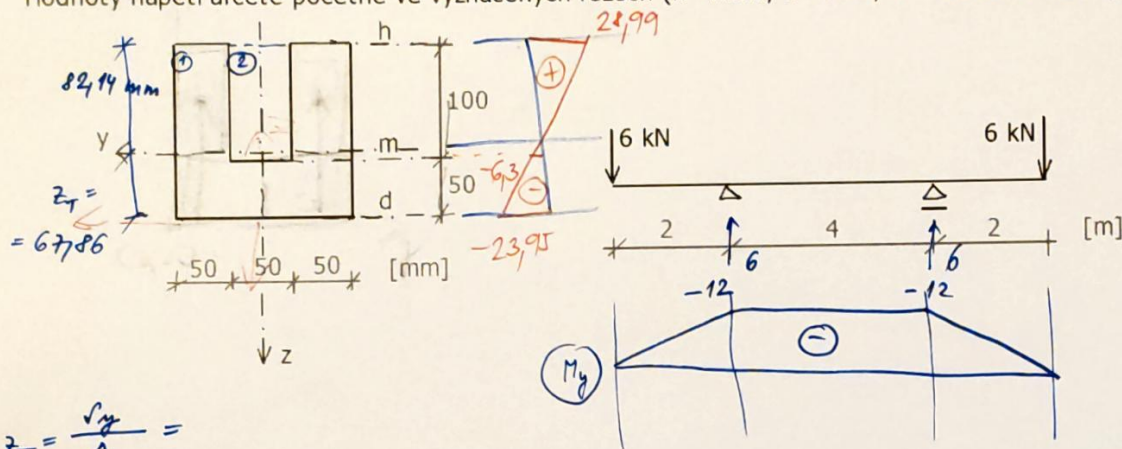


Vykreslete průběh normálového napětí od ohybu po výšce průřezu v místě M_{max} na nosníku. Hodnoty napětí určete početně ve vyznačených řezech (h - horní, d - dolní, m - mezilehlá vlákna).



$$z_T = \frac{I_{yy}}{A} = \frac{150 \cdot 150 \cdot 75 - 50 \cdot 100 \cdot 100}{150 \cdot 150 - 50 \cdot 100} = 67,86 \text{ mm}$$

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 150 \cdot 150^3 + 150 \cdot 150 \cdot (67,86 - 75)^2 - \frac{1}{12} \cdot 50 \cdot 100^3 - 50 \cdot 100 \cdot (67,86 - 100)^2 = 43,334541 \cdot 10^6 - 9,331565 \cdot 10^6 = 34,003 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

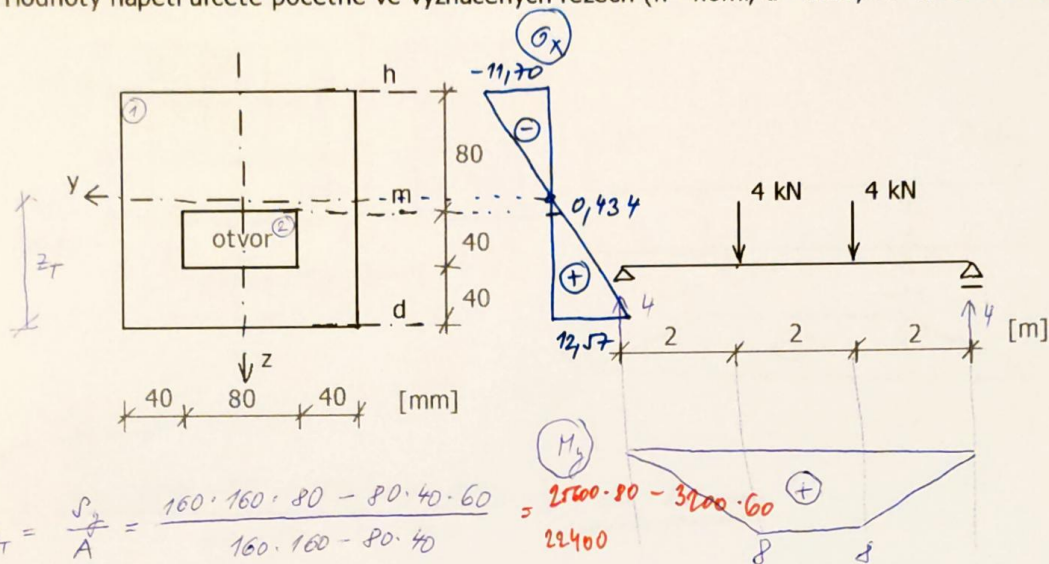
$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

$$\sigma_{xd} = \frac{-12 \cdot 10^{-3}}{34,003 \cdot 10^{-6}} \cdot (0,06786) = -23,95 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xh} = \frac{-12 \cdot 10^{-3}}{34,003 \cdot 10^{-6}} \cdot (-0,08214) = 28,99 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xm} = \frac{-12 \cdot 10^{-3}}{34,003 \cdot 10^{-6}} \cdot (0,01786) = -6,30 \text{ MPa}$$

Vykreslete průběh normálového napětí od ohybu po výšce průřezu v místě M_{max} na nosníku. Hodnoty napětí určete početně ve vyznačených řezech (h - horní, d - dolní, m - mezilehlá vlákna).



$$z_T = \frac{S_y}{A} = \frac{160 \cdot 160 \cdot 80 - 80 \cdot 40 \cdot 60}{160 \cdot 160 - 80 \cdot 40}$$

$$z_T = \frac{1856000}{22400} = 82,86 \text{ mm}$$

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 160 \cdot 160^3 + 160 \cdot 160 \cdot (80 - 82,86)^2 - \frac{1}{12} \cdot 80 \cdot 40^3 - 80 \cdot 40 \cdot (60 - 82,86)^2$$

$$I_y = 54822731,1 - 2098921,39 = 52,724 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

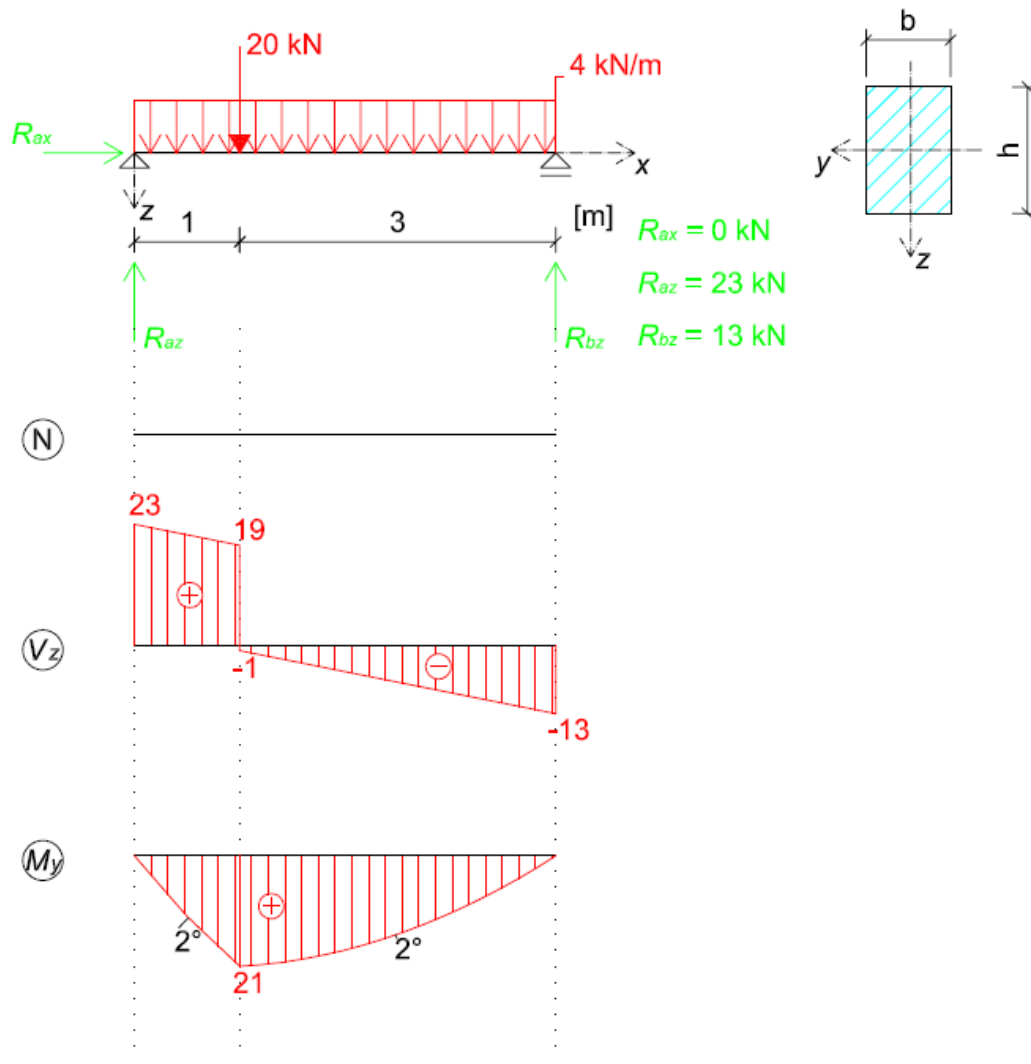
$$\sigma_{x,d} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{52,724 \cdot 10^{-6}} \cdot (0,08286) = 12,57 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,h} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{52,724 \cdot 10^{-6}} \cdot (-77,14) \cdot 10^{-3} = -11,70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,m} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{52,724 \cdot 10^{-6}} \cdot (0,00286) = 0,434 \text{ MPa}$$

A

Navrhnete a posudte dřevěný nosník obdélníkového průřezu, je-li $\sigma_{Rd} = 12,1 \text{ MPa}$. Poměr $b:h$ volte 2:3. Navržené rozměry zaokrouhlete na celé centimetry.



$$\frac{b}{h} = \frac{2}{3} \rightarrow b = \frac{2}{3}h$$

$$W_y = \frac{I_y}{z} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{\frac{1}{2}h} = \frac{1}{6}bh^2$$

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z = \frac{M_y}{W_y} \rightarrow W_{y,\min} = \frac{M_y}{\sigma_{Rd}} = \frac{21 \cdot 10^3}{12,1 \cdot 10^6} = 1,736 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$W_y = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}h^3 = \frac{1}{9}h^3 \rightarrow h = \sqrt[3]{9W_y} = \sqrt[3]{9 \cdot 1,736 \cdot 10^{-3}} = 0,250 \text{ m} \rightarrow \text{návrh } h = 0,250 \text{ m}$$

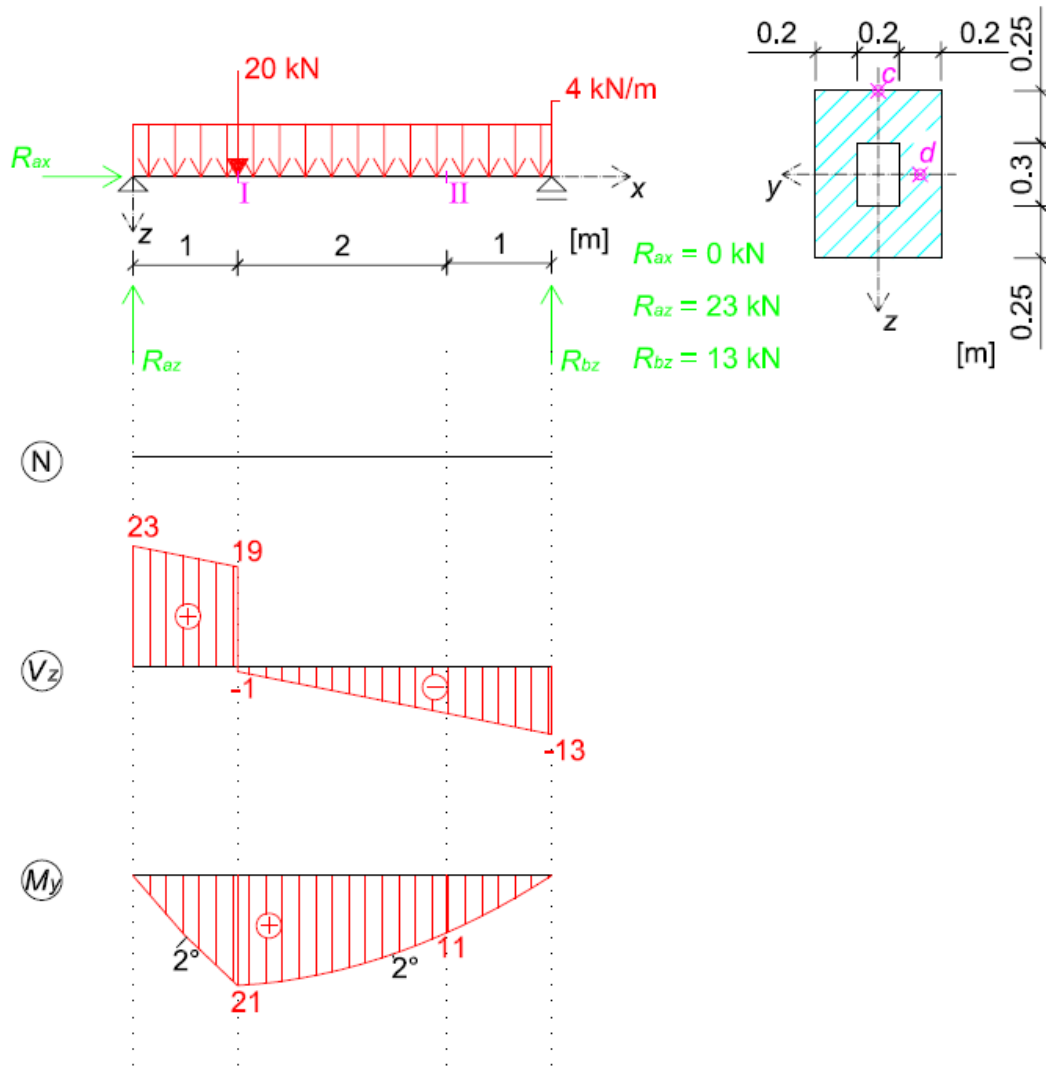
$$\rightarrow b = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot 0,250 = 0,167 \text{ m} \rightarrow \text{návrh } b = 0,170 \text{ m}$$

Posouzení:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{W_y} = \frac{21 \cdot 10^3}{\frac{1}{6} \cdot 0,17 \cdot 0,25^2} = 11,86 \text{ MPa} \leq \sigma_{Rd} = 12,1 \text{ MPa} \rightarrow \text{navržený průřez vyhoví}$$

B

Vypočítejte hodnoty normálového napětí v bodě c řezu I a v bodě d řezu II zadaného nosníku obdélníkového průřezu s otvorem.



$$I_y = \sum I_{y,i} + A_i c_i^2 = \frac{1}{12} \cdot 0,6 \cdot 0,8^3 - \frac{1}{12} \cdot 0,2 \cdot 0,3^3 = 25,15 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

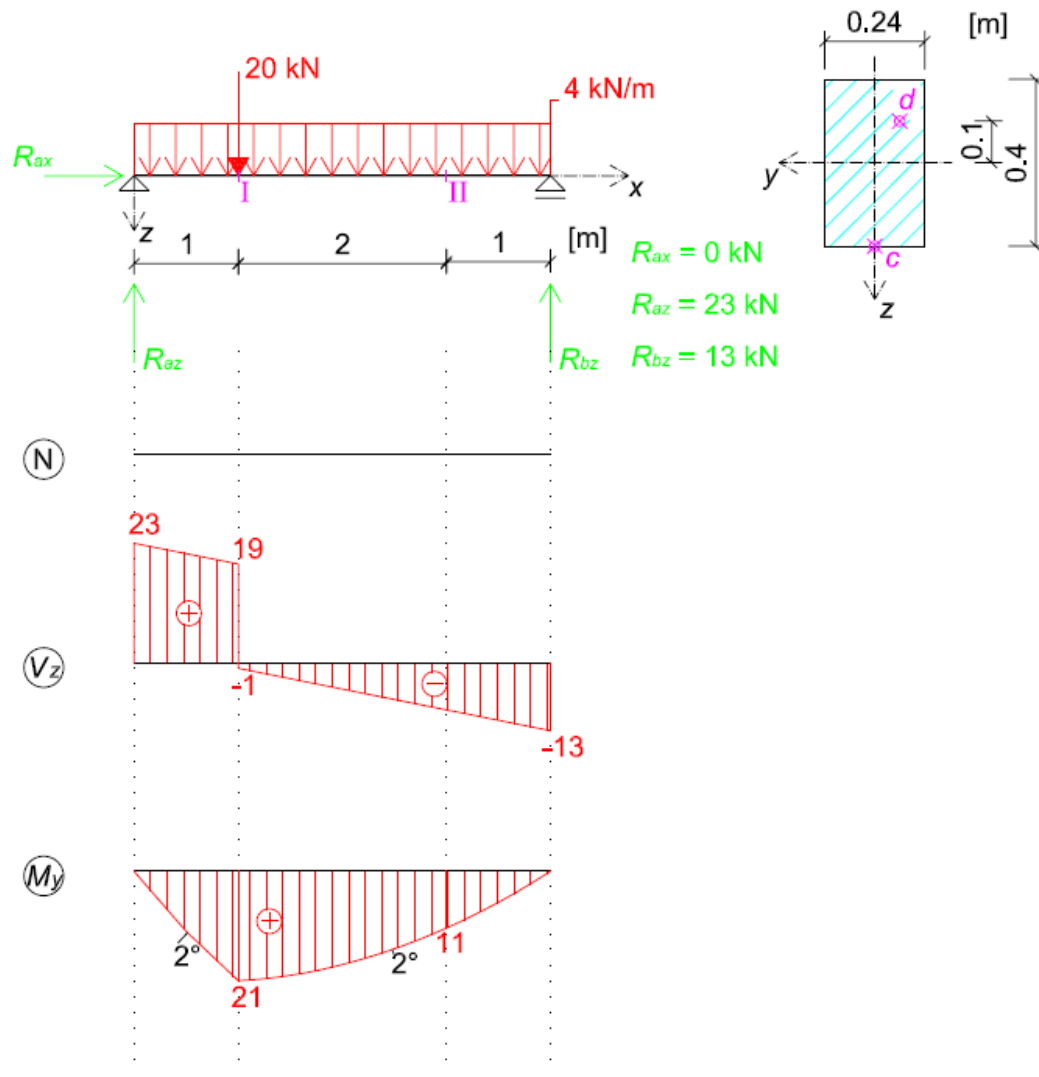
$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$$

$$z_c = -0,4 \text{ m} \rightarrow \sigma_{x,c} = \frac{M_{y,I}}{I_y} z_c = \frac{21 \cdot 10^3}{25,15 \cdot 10^{-3}} \cdot (-0,4) = -0,334 \text{ MPa}$$

$$z_d = 0 \rightarrow \sigma_{x,d} = \frac{M_{y,II}}{I_y} z_d = \frac{11 \cdot 10^3}{25,15 \cdot 10^{-3}} \cdot 0 = 0 \text{ MPa}$$

C

Vypočítejte hodnoty normálového napětí v bodě c řezu I a v bodě d řezu II zadaného nosníku obdélníkového průřezu.



$$I_y = \sum I_{y,i} + A_i c_i^2 = \frac{1}{12} \cdot 0,24 \cdot 0,4^3 = 1,28 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

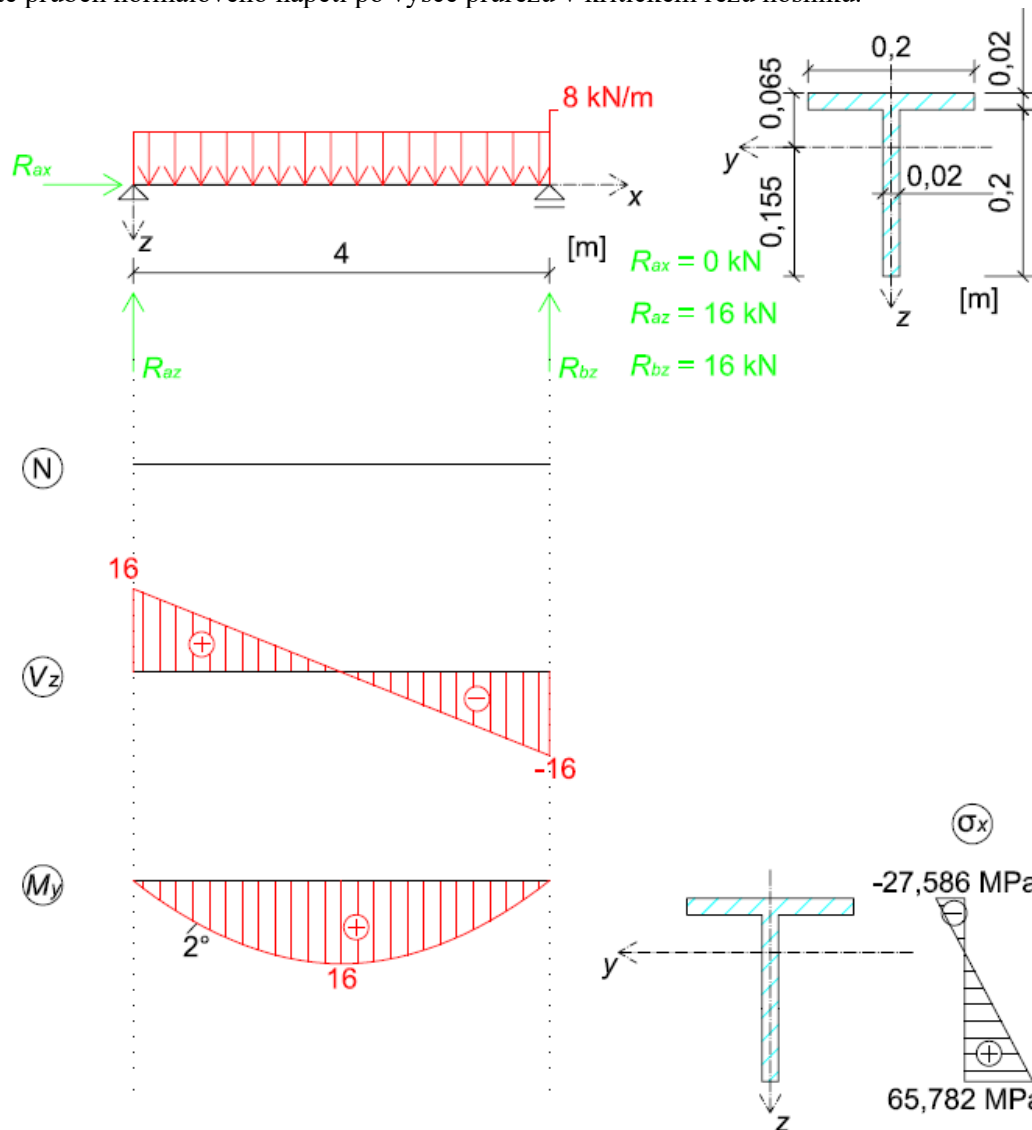
$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$$

$$z_c = 0,2 \text{ m} \rightarrow \sigma_{x,c} = \frac{M_{y,I}}{I_y} z_c = \frac{21 \cdot 10^3}{1,28 \cdot 10^{-3}} \cdot 0,2 = 3,281 \text{ MPa}$$

$$z_d = -0,1 \rightarrow \sigma_{x,d} = \frac{M_{y,II}}{I_y} z_d = \frac{11 \cdot 10^3}{1,28 \cdot 10^{-3}} \cdot (-0,1) = -0,859 \text{ MPa}$$

D

Vykreslete průběh normálového napětí po výšce průřezu v kritickém řezu nosníku.



$$I_y = \sum I_{y,i} + A_i c_i^2$$

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 0,02 \cdot 0,2^3 + 0,02 \cdot 0,2 \cdot (0,155 - 0,1)^2 + \frac{1}{12} \cdot 0,2 \cdot 0,20^3 + 0,2 \cdot 0,02 \cdot (0,155 - 0,21)^2 = 3,77 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

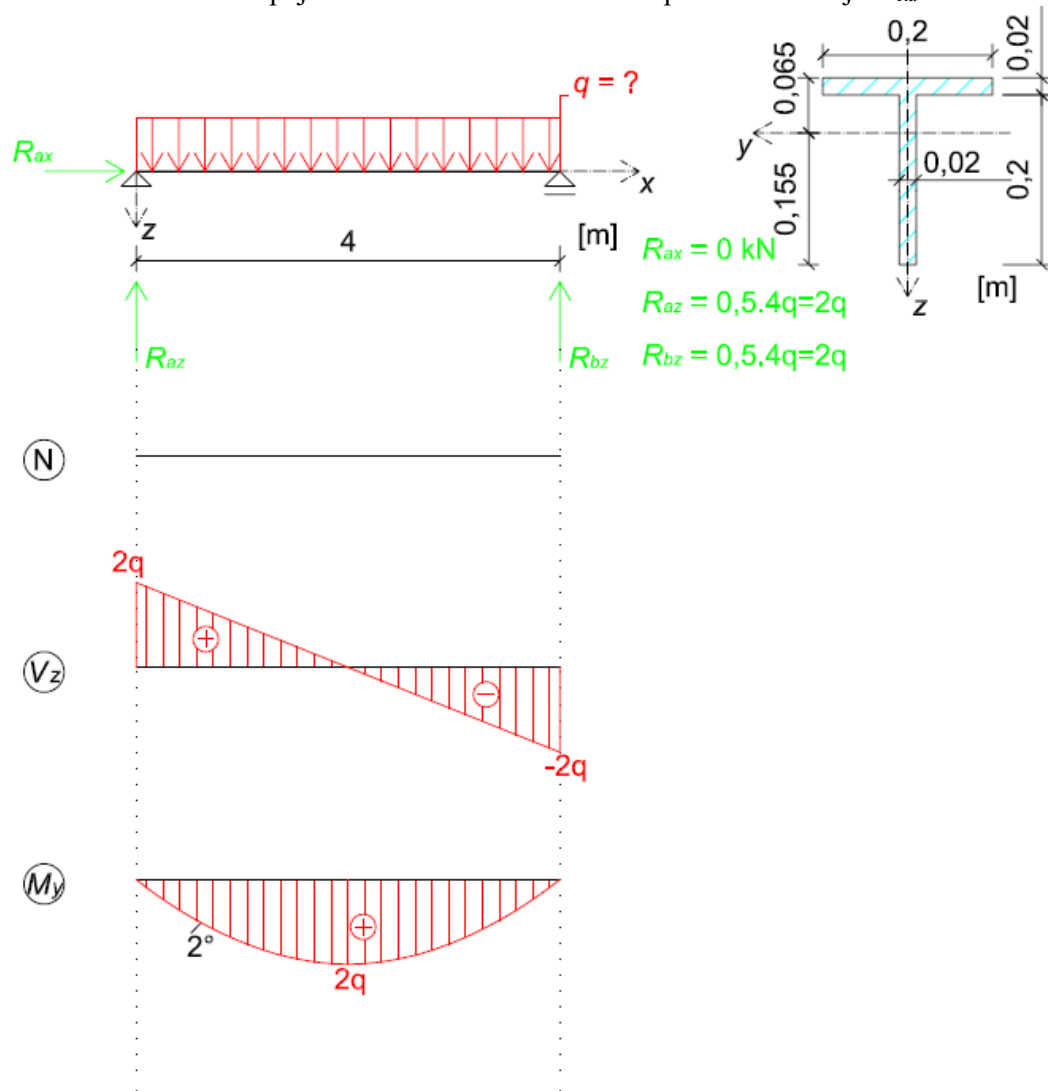
$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$$

$$z_1 = 0,155 \text{ m} \rightarrow \sigma_{x,1} = \frac{M_y}{I_y} z_1 = \frac{16 \cdot 10^3}{3,77 \cdot 10^{-5}} \cdot 0,155 = 65,782 \text{ MPa}$$

$$z_2 = -0,065 \text{ m} \rightarrow \sigma_{x,2} = \frac{M_y}{I_y} z_2 = \frac{16 \cdot 10^3}{3,77 \cdot 10^{-5}} \cdot (-0,065) = -27,586 \text{ MPa}$$

E

Spočítejte maximální hodnotu spojitého zatížení nosníku daného průřezu. Uvažujte $\sigma_{Rd} = 200 \text{ MPa}$.



$$I_y = \sum I_{y,i} + A_i c_i^2$$

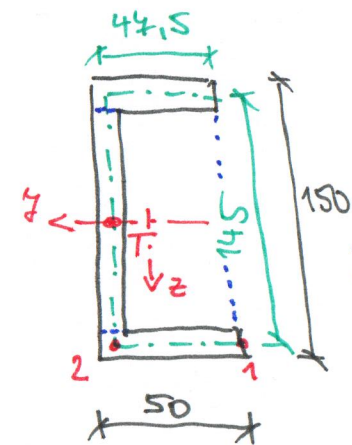
$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 0,02 \cdot 0,2^3 + 0,02 \cdot 0,2 \cdot (0,155 - 0,1)^2 + \frac{1}{12} \cdot 0,2 \cdot 0,20^3 + 0,2 \cdot 0,02 \cdot (0,155 - 0,21)^2 = 3,77 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$\sigma_x = \frac{M_y}{W_{y,\min}}$$

$$W_{y,\min} = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{I_y}{z_1} = \frac{3,77 \cdot 10^{-5}}{0,155} = 2,432 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$\sigma_{Rd} = \frac{M_y}{W_{y,\min}} \rightarrow M_y = 2q = \sigma_{Rd} \cdot W_{y,\min} \rightarrow q = \frac{\sigma_{Rd} \cdot W_{y,\min}}{2} = \frac{200 \cdot 10^6 \cdot 2,432 \cdot 10^{-4}}{2} = 24,32 \text{ kNm}^{-1}$$

Maximální hodnota spojitého zatížení je 24,32 kNm⁻¹.



$$t = 5 \text{ mm}$$

$$V_z = 108 \text{ N}$$

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 50 \cdot 150^3 - \frac{1}{12} \cdot 45 \cdot 140^3 = 3,7725 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\tau = \frac{V_z \cdot \bar{S}_y}{I_y \cdot t}$$

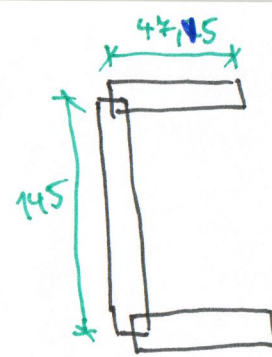
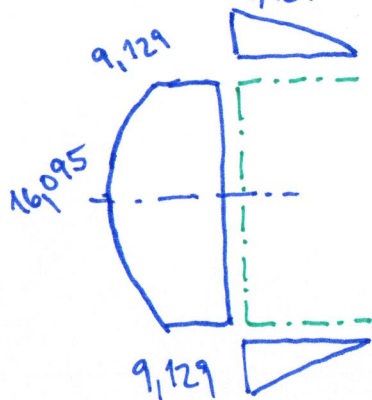
$$\tau_{xy1} = 0 \quad \bar{S}_{y2} = 44.5 \cdot 5 \cdot \frac{145}{2} = 17218.75 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{xy2} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 17218.75}{3,7725 \cdot 10^6 \cdot 5} = 9,129 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz2} = \tau_{xy2}$$

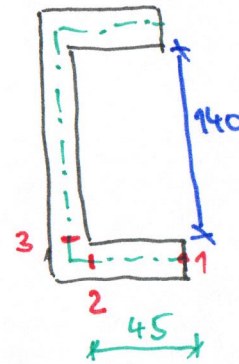
$$\tau_{xzT} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 30359,375}{3,7725 \cdot 10^6 \cdot 5} = 16,095 \text{ MPa}$$

$$\bar{S}_{yT} = \bar{S}_{y2} + 5 \cdot \frac{145}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{145}{2} \right) = 30359,375 \text{ mm}^3$$



$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 5 \cdot 145^3 + 2 \cdot \left[\frac{1}{12} \cdot 44.5 \cdot 5^3 + 44.5 \cdot 5 \cdot \left(\frac{145}{2} \right)^2 \right] = 3,767969 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{xy2} = \dots = 9,1395 \text{ MPa}$$



$$\bar{S}_{y2} = 45 \cdot 5 \cdot \frac{145}{2} = 16312,5 \text{ mm}^3$$

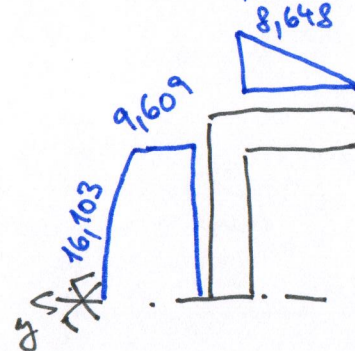
$$\tau_{xy2} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 16312,5}{3,7725 \cdot 10^6 \cdot 5} = 8,648 \text{ MPa}$$

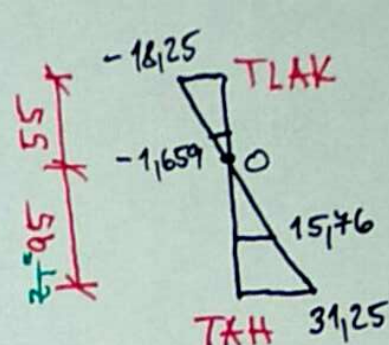
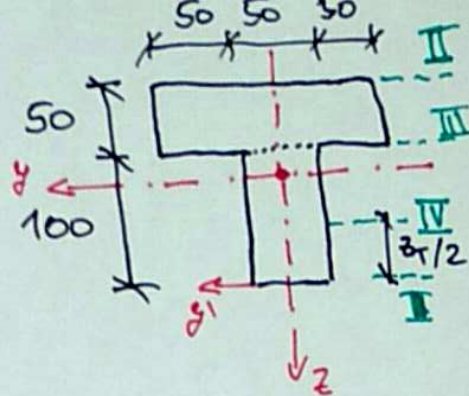
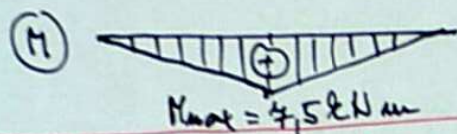
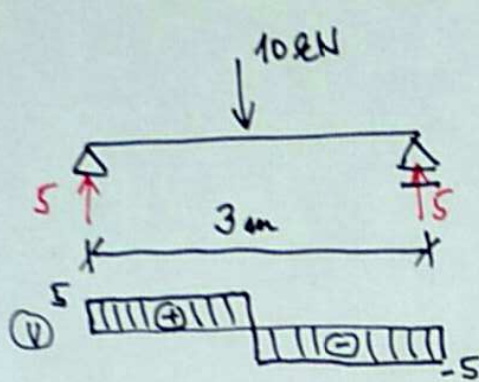
$$\bar{S}_{y3} = 50 \cdot 5 \cdot \frac{145}{2} = 18125 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{xz3} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 18125}{3,7725 \cdot 10^6 \cdot 5} = 9,609 \text{ MPa}$$

$$\bar{S}_{yT} = \bar{S}_{y3} + \frac{140}{2} \cdot 5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{140}{2} \right) = 30375 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{xzT} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 30375}{3,7725 \cdot 10^6 \cdot 5} = 16,103 \text{ MPa}$$





Pokud není vyžadováno - nemusíte vykreslovat.
Pokud už vykreslujete, tak pokud možno správně!! Žádná parabola!!

$$z_T = \frac{50 \cdot 150 \cdot 125 + 50 \cdot 100 \cdot 50}{50 \cdot 150 + 50 \cdot 100} = 95 \text{ mm}$$

$$I_{By} = \frac{1}{12} \cdot 150 \cdot 50^3 + 150 \cdot 50 \cdot 30^2 + \frac{1}{12} \cdot 100^3 \cdot 50 + 100 \cdot 50 \cdot 45^2 = 22,60416 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_x = \frac{M}{I_y} z$$

Pokud dodržíme konvenci a dosadíme moment včetně znaménka a souřadnici "z" k řešení, tak řezu také $\Rightarrow$ dostaneme σ_x se znaménkem $\oplus$ tah $\ominus$ tlak

$$\sigma_{xI} = \frac{4,5 \cdot 10^3}{22,60416 \cdot 10^6} \cdot 95 \cdot 10^{-3} = 31,52 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xII} = \frac{4,5 \cdot 10^3}{22,60416 \cdot 10^6} \cdot (-55 \cdot 10^{-3}) = -18,25 \text{ MPa}$$

Protože je průběh σ_x po výšce lineární, můžeme toho využít při výpočtu nebo ke kontrole:

$$\frac{\sigma_{xII}}{55} = \frac{\sigma_{xI}}{95} \Rightarrow \sigma_{xII} = -18,25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xT} = 0 \text{ MPa (neutrální osa } z \equiv \text{osa } y)$$

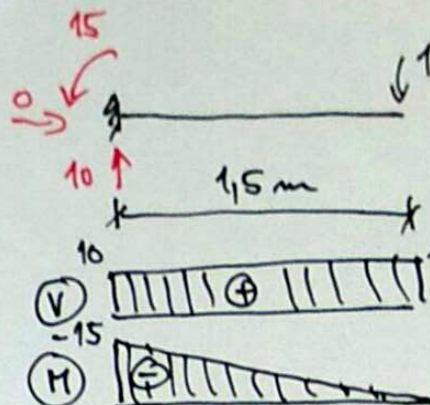
$$\sigma_{xIII} = \frac{4,5 \cdot 10^3}{22,60416 \cdot 10^6} \cdot (-5 \cdot 10^{-3}) = -1,659 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xIII} = \frac{5}{55} \cdot \sigma_{xII} = -1,659 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xIV} = \frac{4,5 \cdot 10^3}{22,60416 \cdot 10^6} \cdot \left(\frac{95}{2} \cdot 10^{-3}\right) = 15,76 \text{ MPa}$$

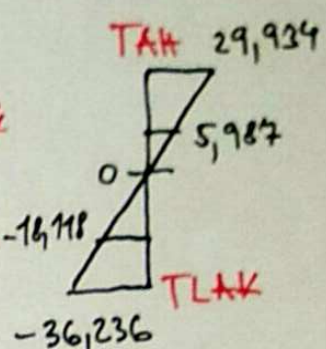
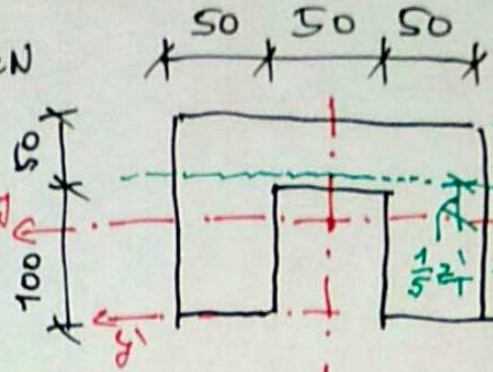
$$\sigma_{xIV} = \frac{\sigma_{xI}}{2} = \frac{31,52}{2} = 15,76 \text{ MPa}$$

Poslední kontrola: zamyslíme se nad tím, jak se zdeformuje nosník a která vlákna budou tažena/tlačena - porovnáme s tím co máme vyšetřeno



$$M_{max} = -15 \text{ kNm}$$

POZNÁMKY VÍZ
DRUHÝ PŘÍKLAD



$$z_T = \frac{150 \cdot 150 \cdot 75 - 100 \cdot 50 \cdot 50}{150 \cdot 150 - 100 \cdot 50} = 82,143 \text{ mm}$$

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 150 \cdot 150^3 + 150 \cdot 150 \cdot (75 - 82,143)^2 - \frac{1}{12} \cdot 50 \cdot 100^3 - 50 \cdot 100 (50 - 82,143)^2 = 34,003 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_x = \frac{M}{I_y} z$$

$$\sigma_{xI} = \frac{-15 \cdot 10^3}{34,003 \cdot 10^6} \cdot 82,143 \cdot 10^{-3} = -36,236 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xII} = \frac{-15 \cdot 10^3}{34,003 \cdot 10^6} \cdot (-67,857 \cdot 10^{-3}) = 29,934 \text{ MPa} \quad \frac{\sigma_{xII}}{67,857} = \frac{\sigma_{xI}}{82,143} \Rightarrow \sigma_{xII} = 29,934 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xT} = 0 \text{ MPa} \quad (\text{neutraľná osa} \equiv \text{osa } y)$$

$$\sigma_{xIII} = \frac{-15 \cdot 10^3}{34,003 \cdot 10^6} \cdot \left(-\frac{67,857}{5}\right) \cdot 10^{-3} = 5,987 \text{ MPa} \quad \sigma_{xIII} = \frac{\sigma_{xII}}{5} = 5,987 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xIV} = \frac{-15 \cdot 10^3}{34,003 \cdot 10^6} \cdot \frac{82,143}{2} \cdot 10^{-3} = -18,118 \text{ MPa} \quad \sigma_{xIV} = \frac{\sigma_{xI}}{2} = -18,118 \text{ MPa}$$

Kolikrát se zvýší M_{Rd} přidáním pásmu 100×10 na H, které je namáháno ve směru své měkčí osy. $f_d = 210 \text{ MPa}$

$$z_{T1} = 50 \text{ mm}$$

$$I_{yT1}^H = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 100^3 \cdot 2 + \frac{1}{12} \cdot 80 \cdot 10^3$$

$$I_{yT1}^H = 1,673 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$W_1 = \frac{I_{yT1}}{z} = \frac{1,673 \cdot 10^6}{50} = 3,346 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_x = \frac{M}{W} \Rightarrow M_{Rd1} = f_d \cdot W_1 = 210 \cdot 10^6 \cdot 3,346 \cdot 10^{-5} = \underline{\underline{4,035 \text{ kNm}}}$$

$$A_H = 100 \cdot 10 \cdot 2 + 10 \cdot 80 = 2800 \text{ mm}^2$$

$$A_{\square} = 100 \cdot 10 = 1000 \text{ mm}^2$$

$$z_{T2} = \frac{A_{\square} \cdot 105 + A_H \cdot 50}{2800 + 1000} = 64,4736 \text{ mm}$$

$$I_{yT2} = I_{yT1} + 2800 \cdot (64,4736 - 50)^2 + \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 10^3 + 1000 \cdot (105 - 64,4736)^2$$

$$I_{yT2} = 3,9106 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$W_2 = \frac{I_{yT2}}{z} = \frac{3,9106 \cdot 10^6}{0,0644736}$$

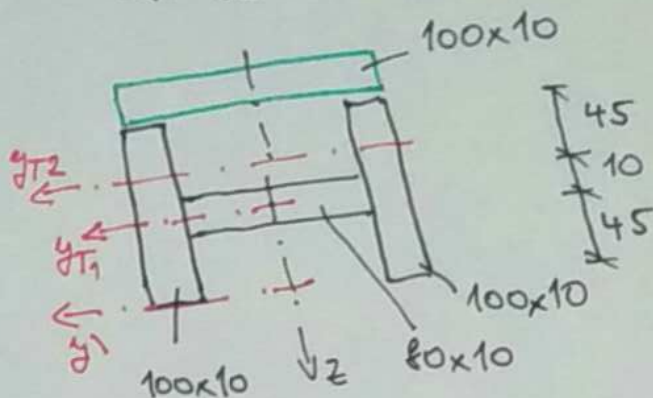
$$W_2 = 6,06545 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$M_{Rd2} = f_d \cdot W_2 =$$

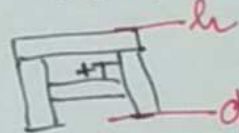
$$= 210 \cdot 10^6 \cdot 6,06545 \cdot 10^{-5}$$

$$= \underline{\underline{12,737 \text{ kNm}}}$$

$$\frac{M_{Rd2}}{M_{Rd1}} = \frac{12,737}{4,035} = \underline{\underline{1,81 \times}}$$



- při posouzení chceme
 $W_y = \min(W_{y1}; W_{y2})$



- za předpokladu shodné
 pevnosti v tahu a tlaku
 (což ocel splňuje)

- minima při dělení dosáhneme
 větší hodnotou "z"
 (tedy ke vzdálenějším vláknům)