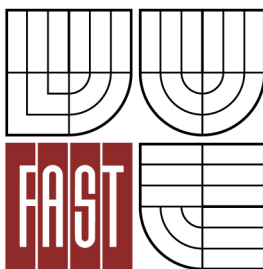


ŘEŠENÉ ÚLOHY Z OBLASTI
SPOLEHLIVOSTI STAVEBNÍCH
KONSTRUKCÍ

Václav Sadílek
Jiří Doležel
Miroslav Vořechovský



PODĚKOVÁNÍ

Skripta vznikla za podpory projektu 2378/2010/G1 Fondu rozvoje vysokých škol FRVŠ MŠMT.

Typeset by $\text{\LaTeX}$ 2 $_{\epsilon}$

OBSAH

1	Předmluva	4
2	Úvod	5
3	Teorie spolehlivosti a matematické statistiky	6
3.1	Náhodná veličina X , parametry a výběrové charakteristiky základního souboru	6
3.2	Kvantilové odhady	7
3.3	Korelace mezi náhodnými veličinami	8
3.4	Spojité rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X	9
	<i>Př. 3.1– Odhad momentových charakteristik plochy předpínacího lana</i>	15
	<i>Př. 3.2– Stanovení kvantilů</i>	17
	<i>Př. 3.3– Vyhodnocení tlakové zkoušky na betonových krychlích</i>	20
3.5	Transformace náhodných veličin	25
	<i>Př. 3.4– Plocha čtverce s náhodnou délkou strany</i>	25
	<i>Př. 3.5– Goniometrická funkce</i>	30
4	Teorie spolehlivosti	36
4.1	Podmínka spolehlivosti, pravděpodobnost poruchy, index spolehlivosti	36
4.1.1	Pravděpodobnost poruchy	37
4.1.2	Index spolehlivosti	37
4.2	Metody pro řešení úloh spolehlivosti	38
4.2.1	Aproximační metody	38
4.2.2	Simulační metody typu Monte Carlo	39
4.3	Směrná úroveň spolehlivosti dle mezinárodních předpisů	41
	<i>Př. 4.1– Stanovení indexu spolehlivosti</i>	46
	<i>Př. 4.2– Určení indexu spolehlivosti a pravděpodobnosti poruchy</i> . . .	47
	<i>Př. 4.3– Stanovení spolehlivosti ze zadaných modelů zatížení a odolnosti konstrukce</i>	49
5	Softwarové nástroje	51
5.1	Pravděpodobnostní modul FReET	52
5.2	Ukázkový příklad – ocelový nosník – ovládání programu FReET . . .	54
5.2.1	Zadání	54
5.2.2	Zadání vstupních hodnot	54

5.2.3	Generování hodnot a jejich kontrola	55
5.2.4	Zadání a výpočet funkce odezvy	57
5.2.5	Výstupy analýzy	58
5.2.6	Vyhodnocení získaných výsledků	60
6	Aplikace pravděpodobnostních metod při navrhování konstrukcí	62
6.1	FReET	62
	<i>Př. 6.1– Železobetonový průvlak</i>	62
	<i>Př. 6.2– Posouzení gravitační zdi</i>	66
	<i>Př. 6.3– Vzpěr ocelového svařovaného I-profilu</i>	71
6.2	SARA	74
	<i>Př. 6.4– Modelování zatěžovací zkoušky nosníku namáhaného čtyřbo-</i> <i>dovým ohybem</i>	74

1 PŘEDMLUVA

Tento soubor řešených úloh z oblasti teorie spolehlivosti, který vznikl za podpory projektu FRVŠ 2378/2010/G1, má posloužit studentům navazujícího magisterského studia oboru Konstrukce a dopravní stavby, oboru Pozemní stavby a studentům doktorského studia v prezenční i kombinované formě jako učební pomůcka do cvičení z předmětů, které jsou v současnosti vyučovány na Ústavu stavební mechaniky (STM), Fakulty stavební na VUT v Brně:

- CD04 – Spolehlivost konstrukcí
- CD06 – Teorie spolehlivosti
- CD57 – Spolehlivost a teorie porušování materiálů
- CD59 – Teorie spolehlivosti stavebních materiálů
- CD51 – Vybrané statě ze stavební mechaniky II
- CD55 – Vybrané statě ze stavební mechaniky II

Snahou autorů při psaní jednotlivých kapitol bylo nezabývat se příliš podrobně teorií, ale ukázat na jednoduchých příkladech řešení praktických úloh z oblasti spolehlivosti stavebních konstrukcí. Bohužel žádnou úlohu nelze řešit bez stručného popisu daného problému, proto i v našem případě bylo nutno ke každému příkladu napsat též krátký teoretický úvod. Po přečtení tohoto textu by měl čtenář získat představu o tom, co je náhodná veličina a jak ji lze definovat, jaká jsou kritéria hodnotící spolehlivost konstrukce, co je funkce odolnosti konstrukce R , funkce zatížení konstrukce E a rezerva odolnosti (spolehlivosti) Z . Dále si osvojí pojmy jako je index spolehlivosti, pravděpodobnost poruchy, simulační metody typu Monte Carlo, aproximační metoda FORM a SORM.

Hlavním cílem tohoto textu je podat čtenáři stručný návod při řešení praktických úloh z oblasti spolehlivosti stavebních konstrukcí pomocí pravděpodobnostního výpočetního programu FReET, který je v současnosti vyvíjen na Ústavu stavební mechaniky. Rovněž je cílem ukázat, jaké jsou rozdíly mezi jednotlivými pravděpodobnostními modely náhodných veličin a jakým způsobem lze s nimi pracovat v rámci programu FReET. A v neposlední řadě je poskytnout návod, jakou zvolit metodu pravděpodobnostního výpočtu tak, abychom získali relativně co nejpřesnější odhady pravděpodobnosti poruchy.

Poznamenejme na závěr, že zařazení moderních metod pro návrh spolehlivých a ekonomických konstrukcí, mezi které patří právě pravděpodobnostní metody, je plně v souladu s dlouhodobým pedagogickým záměrem Fakulty stavební VUT Brno.

2 ÚVOD

V současné době jsou stavební konstrukce běžně navrhovány pomocí metody dílčích součinitelů spolehlivosti. Zavedením této metody se získala větší kontrola nad výslednou spolehlivostí konstrukce, která závisí na variabilitě mnoha parametrů. Kvalitativně vyšší úrovní hospodárného návrhu spolehlivých konstrukcí je tzv. plně pravděpodobnostní výpočet, který je platnou metodou uvedenou v současných normativních předpisech. Plně pravděpodobnostní výpočet inženýrům v jistém pohledu umožňuje ve výpočtech zohlednit nejistoty plynoucí z náhodného charakteru materiálových parametrů (tlaková pevnost betonu, pevnost oceli, atd.), geometrie (průřezové charakteristiky, poloha výztuže v průřezu, atd.) a částečně i modelové nejistoty plynoucí z nesprávně vytvořeného matematického modelu posuzované konstrukce. V neposlední řadě metoda zohledňuje nejistoty plynoucí z proměnnosti zatížení, kterému je konstrukce v průběhu své životnosti vystavena. V plně pravděpodobnostním výpočtu ovšem nelze prakticky vůbec zohlednit hrubé chyby plynoucí z nedostatků v činnosti osob a neznalosti skutečného chování materiálů a konstrukce samotné. Poznamenejme, že chyby plynoucí z lidské činnosti se podílí na původu příčin poruchy konstrukce téměř z 80 %. Zbýlých 20 % se přisuzuje vlivu prostředí, které nejsou přímo závislé na činnosti osob a lze je do jisté míry postihnout právě klasickými pravděpodobnostními metodami.

Samotnou spolehlivostní analýzu konstrukce lze rozdělit na tři základní typy:

- Statistická analýza – cílem je získání odhadů statistických parametrů sledovaného náhodného jevu (tlaková pevnost betonu, krycí vrstva výztuže, zatížení sněhem atd.) s odhadem vhodného pravděpodobnostního modelu. Problematikou statistické analýzy se bude popsána v kap. 3
- Pravděpodobnostní analýza – cílem je kvantifikace spolehlivosti resp. pravděpodobnosti poruchy konstrukce. Definicí spolehlivosti a pravděpodobnosti poruchy společně s metodami pravděpodobnostní analýzy se zabývá kap. 4.
- Citlivostní analýza – cílem je získat představu o relativní citlivosti náhodné proměnlivosti sledované odezvy na náhodnou proměnlivost jednotlivých vstupních veličin. Citlivostní analýza může posloužit k definování dominantních a nedominantních veličin.

3 TEORIE SPOLEHLIVOSTI A MATEMATICKÉ STATISTIKY

V této kapitole se seznámíme s pojmem náhodná veličina a jejími parametry, výběrovými charakteristikami a kvantilovými odhady. Dále budou ukázány v technické praxi nejpoužívanější pravděpodobnostní modely náhodné veličiny X .

3.1 Náhodná veličina X , parametry a výběrové charakteristiky základního souboru

Definice: Veličina X , která při splnění stanovených podmínek π (tj. při realizaci určitého náhodného jevu) nabývá právě jednu hodnotu x , se nazývá náhodná veličina.

Souhrn všech možných realizací x náhodné veličiny X se nazývá základní soubor. Je popsán rozdělením pravděpodobnosti $f_X(x)$ (PDF – Probability Density Function), tj. funkcí udávající pravděpodobnost, že náhodná veličina je z daného intervalu. Distribuční funkce $F_X(x)$ (CDF – Cumulative Distribution Function) udává pro každou hodnotu x pravděpodobnost, že X bude menší než daná hodnota x :

$$F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad (3.1)$$

Vedle distribuční funkce a hustoty pravděpodobnosti se základní soubor popisuje různými parametry, z nichž nejdůležitější jsou tzv. momentové parametry.

Základní parametr je *střední hodnota*, která je definována jako první obecný moment ve tvaru:

$$\mu_X = \int x f_X(x) dx \quad (3.2)$$

Míra rozptýlení náhodné veličiny X vzhledem k průměru μ_X je dána druhým centrálním momentem, *rozptylem* σ_X^2 .

$$\sigma_X^2 = \int (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \quad (3.3)$$

Směrodatná odchylka náhodné veličiny X je pak odmocninou z rozptylu:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} \quad (3.4)$$

Mírou nesymetrie základního souboru je *šikmost* definovaná jako třetí cetrální moment dělený třetí mocninou směrodatné odchylky:

$$\alpha_X = \frac{1}{\sigma_X^3} \int_x (x - \mu_X)^3 f_X(x) dx \quad (3.5)$$

Variační koeficient je dán vztahem:

$$\text{CoV}_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (3.6)$$

Opakovanou realizací podmínek π se získá výběr $\{x_i\}$ o rozsahu n . Momentové charakteristiky jsou definovány analogicky k momentovým parametrům základního souboru.

Základní charakteristikou výběru je aritmetický průměr, který je také nejlepším nestranným bodovým odhadem střední hodnoty μ příslušného základního souboru:

$$m = \frac{1}{n} \sum_i x_i \quad (3.7)$$

Základní charakteristikou popisující míru rozptýlení je výběrový rozptyl s^2 , který je současně nestranným bodovým odhadem rozptylu základního souboru σ^2 :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - m)^2 \quad (3.8)$$

Výběrová směrodatná odchylka je dána ve tvaru:

$$s = \sqrt{s^2} \quad (3.9)$$

Výběrová šikmost a charakterizuje nesymetrii souboru a je také nestranným bodovým odhadem šikmosti α základního souboru:

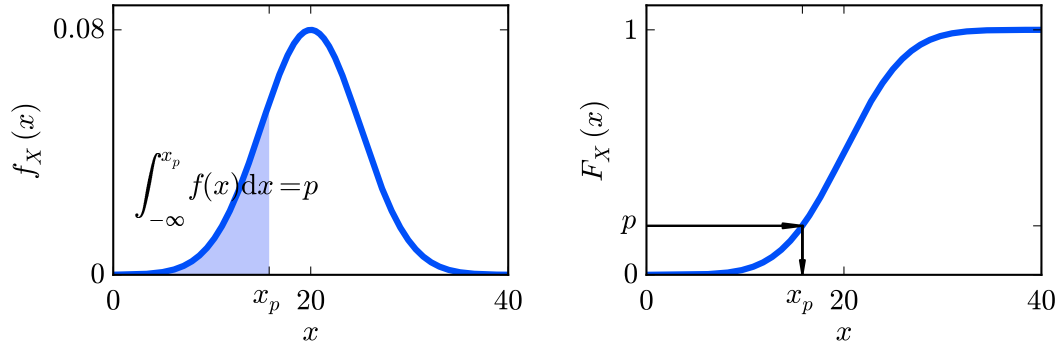
$$a = \frac{n}{(n-1)(n-2)s^3} \sum_i (x_i - m)^3 \quad (3.10)$$

3.2 Kvantilové odhady

V případě spojité náhodné veličiny X , která má distribuční funkci $F_X(x)$, je p -kvantil x_p taková hodnota náhodné veličiny X , pro niž platí, že výskyt hodnot menších než x_p nastane pouze s pravděpodobností p , tj. pro niž je distribuční funkce $F_X(x_p)$ rovna pravděpodobnosti p .

$$P(X < x_p) = F_X(x_p) = p \quad (3.11)$$

Ve stavební praxi se setkáváme s pojmem dolní 5% kvantil ($p = 0.05$) ve spojení s charakteristickou hodnotou materiálových vlastností např. tlaková pevnost betonu, mez kluzu oceli atd. Návrhové hodnoty dominantních veličin jsou obvykle kvantily odpovídající nižší pravděpodobnosti, např. $p \approx 0.001$. Návrhové hodnoty u nedominantních veličin odpovídají většinou vyšším pravděpodobnostem, např. $p \approx 0.10$.



Obr. 3.1: Grafické určení kvantilu normálně rozdělené náhodné veličiny X .

3.3 Korelace mezi náhodnými veličinami

Korelace ve statistice vyjadřuje vzájemný vztah mezi dvěma náhodnými veličinami X a Y . Míra korelace se vyjadřuje korelačním koeficientem, který nabývá hodnoty z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Pearsonův (lineární) korelační koeficient pro dvojici náhodných veličin X a Y je dán vztahem:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (3.12)$$

kde E je střední hodnota náhodné veličiny, cov je kovariance a σ je směrodatná odchylka. Odhad Pearsonova korelačního součinitele pro náhodný výběr o rozsahu n je:

$$r_{X,Y} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}} \quad (3.13)$$

Hodnota -1 korelačního koeficientu vyjadřuje zcela nepřímou lineární závislost mezi náhodnými veličinami, $+1$ vyjadřuje zcela přímou lineární závislost. Pokud mezi veličinami není žádná zjištěitelná lineární závislost, potom je korelační koeficient roven 0 .

Spearmanův korelační koeficient je neparametrickou mírou, která udává míru statistické závislosti mezi dvěma veličinami. Pro výpočet lze použít stejný vztah jako pro Pearsonův korelační koeficient (rovnice 3.13) pouze místo hodnot náhodného výběru se použije jejich pořadí. Hodnoty -1 a $+1$ se nastane v případě, kdy každou z náhodných proměnných je možné přesně proložit monotónní funkcí ostatních proměnných.

3.4 Spojitá rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X

Rovnoměrné rozdělení

Rovnoměrné rozdělení (obdélníkové) je patrně nejjednodušší spojité rozdělení. Hustota pravděpodobnosti $f_X(x)$ rovnoměrně rozdělené náhodné veličiny X na intervalu $\langle a, b \rangle$ (symbolický zápis $X \sim U(a, b)$) je dána vztahem:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{1}{b-a} & a < x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases} \quad (3.14)$$

a příslušná distribuční funkce $F_X(x)$ je:

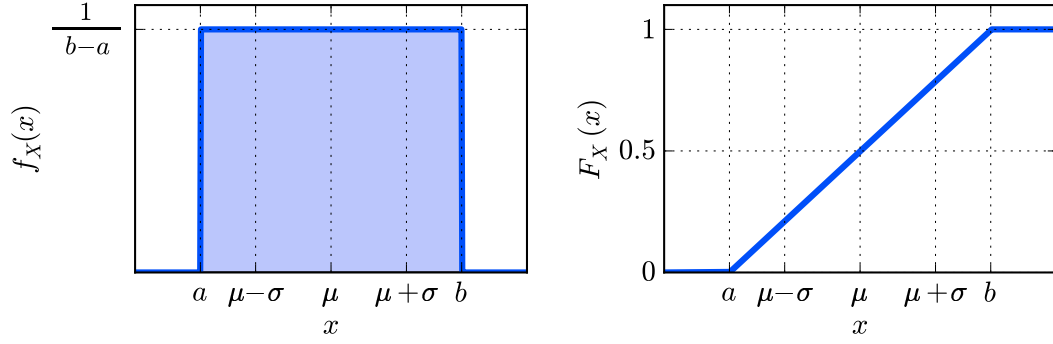
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases} \quad (3.15)$$

Hustota a distribuční funkce náhodné veličiny X je vyobrazena na obrázku 3.2 včetně střední hodnoty a rozptylu:

$$\mu = \frac{1}{2}(a+b), \quad \sigma^2 = \frac{1}{12(b-a)^2} \quad (3.16)$$

Trojúhelníkové rozdělení

Mezi další základní rozdělení patří trojúhelníkové rozdělení (symbolický zápis $X \sim Tri(a, b, c)$). Hustota pravděpodobnosti $f_X(x)$ je dána vztahem:



Obr. 3.2: Hustota a distribuční funkce rovnoměrného rozdělení.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a < x \leq c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c < x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases} \quad (3.17)$$

a příslušná distribuční funkce $F_X(x)$ je:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} & a < x \leq c \\ 1 - \frac{(x-b)^2}{(b-a)(b-c)} & c < x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases} \quad (3.18)$$

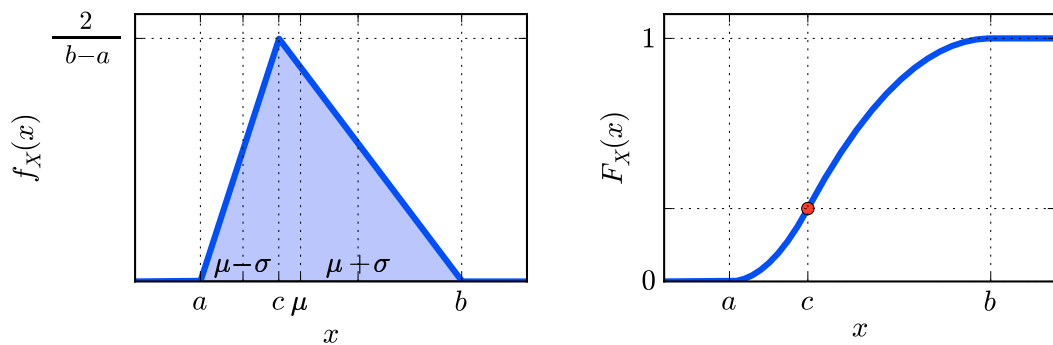
kde a a b vymezují podstavu a c polohu vrcholu hustoty pravděpodobnosti (viz obrázek 3.3). Střední hodnota a rozptyl trojúhelníkového rozdělení jsou:

$$\mu = \frac{a+b+c}{3}, \quad \sigma^2 = \frac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18} \quad (3.19)$$

Normální rozdělení

Normální rozdělení náhodné veličiny X je symetrické a definováno na intervalu $\langle -\infty, \infty \rangle$ a je závislé na dvou parametrech. Hustota pravděpodobnosti $f_X(x)$ normálního rozdělení má tvar:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma} \Phi(y) = \frac{1}{\sigma} \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (3.20)$$



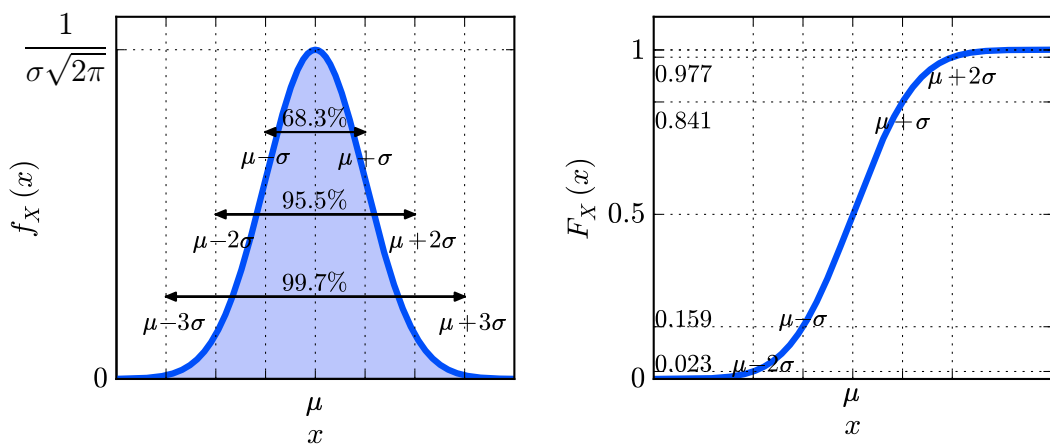
Obr. 3.3: Hustota a distribuční funkce trojúhelníkového rozdělení.

kde μ je střední hodnota (angl. mean), σ^2 se nazývá rozptyl (angl. variance) a Φ je standardizované normální rozdělení. Distribuční funkce $F_X(x)$ je dána vztahem:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\xi = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right] \quad (3.21)$$

kde erf je speciální funkce esovitého tvaru (error function, pravděpodobnostní integrál):

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (3.22)$$



Obr. 3.4: Hustota a distribuční funkce normálního (Gaussova) rozdělení.

Normální rozdělení má v teorii spolehlivosti zcela zásadní roli. V teorii spolehlivosti stavebních konstrukcí se často používá pro popis náhodných veličin, které charakterizují některá zatížení (např. vlastní tíha, viz tab. 3.1), mechanické vlastnosti a geometrické údaje. Dále je vhodné pro náhodné veličiny s relativně malým rozptylem, tj. s hodnotou variačního koeficientu $\operatorname{CoV} < 0.3$.

Materiál	Veličina			Typ PDF	Mean	CoV
Ocel	Objemová tíha	γ_s	[kN/m ³]	Normal	77	< 0.01
Beton	Objemová tíha	γ_c	[kN/m ³]	Normal	24–26	0.03–0.05

Tab. 3.1: Pravděpodobnostní modely vybraných materiálových parametrů betonu a oceli. (JCSS, 2001; Holický et al., 2007; TP 224, 2010)

Lognormální rozdělení

Obecně jednostranně omezené nesymetrické lognormální rozdělení na ohraničeném intervalu $x_0 < x < \infty$ resp. $-\infty < x < x_0$ je nejčastěji definováno momentovými parametry, střední hodnotou μ_x , směrodatnou odchylkou σ_x a šikmostí α_x . Pokud není známa šikmost, lze pracovat s dolní resp. horní mezí x_0 . Hustota pravděpodobnosti $f_X(x)$ obecného lognormálního rozdělení $LN(\mu, \sigma, \alpha_x)$ má tvar.

$$f_X(x) = \frac{1}{|x - x_0| \sqrt{\ln(1 + c^2)} \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{\ln \frac{(|x - x_0| |c| \sqrt{\ln(1 + c^2)})^2}{\sigma}}{2 \ln(1 + c^2)} \right) \quad (3.23)$$

$$\mu_X = x_0 + c\sigma_X; \alpha_X = 3c + c^3; c = \left(\sqrt{\frac{\alpha_X^2}{4} + 1} + \frac{\alpha_X}{2} \right)^{1/3} - \left(\sqrt{\frac{\alpha_X^2}{4} + 1} - \frac{\alpha_X}{2} \right)^{1/3} \quad (3.24)$$

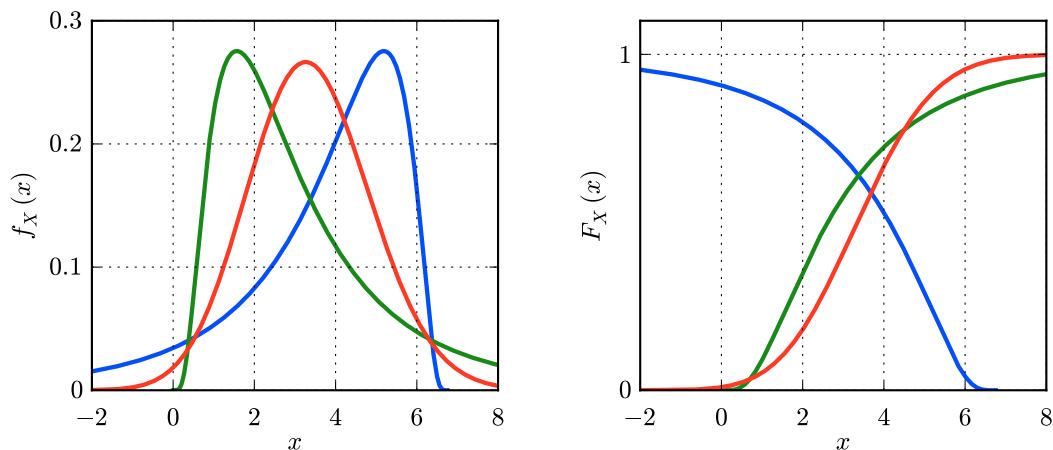
Hustota pravděpodobnosti $f_X(x)$ lognormálního rozdělení $LN(\mu, \sigma)$ s dolní mezí v nule má tvar.

$$f_X(x) = \frac{1}{x \sqrt{\ln(1 + w^2)} \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{\ln \frac{(x \sqrt{\ln(1 + w^2)})^2}{\mu}}{2 \ln(1 + w^2)} \right); w = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (3.25)$$

Lognormální rozdělení se v technické praxi používá pro popis náhodných veličin, které charakterizují některé druhy zatížení, mechanické vlastnosti materiálů (viz tab. 3.2) a geometrické údaje. Vzniká např. jako součin nezáporných nezávislých veličin.

Beta rozdělení

Beta rozdělení je vhodné použít pro definici náhodné veličiny, která je omezena na intervalu $\langle a, b \rangle$. Základní dvouparametrické beta rozdělení je definováno na intervalu



Obr. 3.5: Rozmanitost tvaru hustot a distribučních funkcí lognormálního rozdělení.

Materiál	Veličina		Typ PDF	Mean	CoV
Ocel	Mez kluzu	f_y [MPa]	Lognorm (2 par)	$\frac{f_{y,k}}{1 - 2\text{CoV}}$	0.05–0.08
Beton	Tlaková pevnost	f_c [MPa]	Lognorm (2 par)	$\frac{f_{c,k}}{1 - 2\text{CoV}}$	0.06–0.15
Beton	Modul pružnosti	E [MPa]	Lognorm (2 par)	E_m	0.15
Beton	Tahová pevnost	f_t [MPa]	Lognorm (2 par)	f_{ctm}	0.3

Tab. 3.2: Pravděpodobnostní modely vybraných materiálových parametrů betonu a oceli (k – charakteristická hodnota, m – střední hodnota). (JCSS, 2001; Holický et al., 2007; TP 224, 2010)

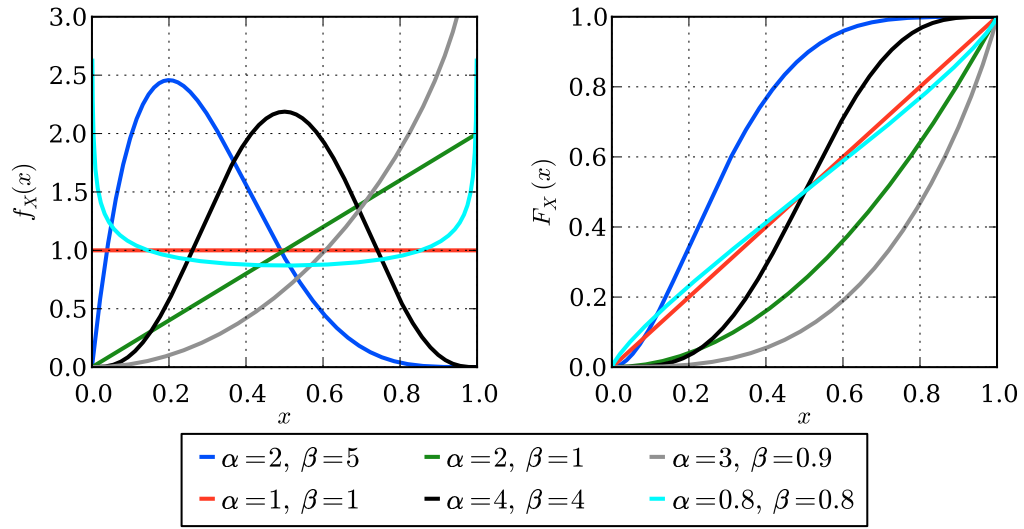
$\langle 0, 1 \rangle$ pomocí dvou kladných parametrů tvaru α a β .

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.26)$$

kde Γ je tzv. Gamma funkce a $B(\alpha, \beta)$ je tzv. Beta funkce:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \quad (3.27)$$

Volbou parametrů α a β dosáhneme různých tvarů rozdělení, viz obrázek 3.6. Pro parametry $\alpha = \beta = 1$ dostaneme tvar rovnoměrného (obdélníkového) rozdělení. Pokud jeden parametr zvolíme 1 a druhý 2 získáme trojúhelníkové rozdělení. Jsou-li oba parametry kladné a menší než 1 má rozdělení tvar písmene U, pokud je menší než 1 pouze jeden parametr, potom má tvar písmene J.



Obr. 3.6: Rozmanitost tvaru hustot a distribučních funkcí beta rozdělení.

Obohatíme-li předchozí dvouparametrické beta rozdělení o dva parametry a a b , které nám umožňují měnit polohu a rozměr intervalu, získáme čtyřparametrické beta rozdělení, jehož hustota má tvar:

$$f_X(x; \alpha, \beta, a, b) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \frac{(x-a)^{\alpha-1} (b-x)^{\beta-1}}{(b-a)^{\alpha+\beta-1}} \quad (3.28)$$

Parametry a a b představují levou a pravou mez náhodné veličiny.

Ve stavební praxi se Beta rozdělení s oblibou používá pro popis zatížení, geometrických údajů např. pro krycí vrstvu výztuže v železobetonovém průřezu (viz tab. 3.3).

Veličina			Typ PDF	Mean	CoV
Krycí vrstva	c	[m]	Beta	c_{nom}	0.15–0.25

Tab. 3.3: Pravděpodobnostní model pro krycí vrstvu betonářské výztuže. (JCSS, 2001; Holický et al., 2007; TP 224, 2010)

Příklad 3.1– Odhad momentových charakteristik plochy předpínacího lana

Na základě provedeného měření průřezové plochy A_p předpínacího lana Ls 15.7 stanovte momentové charakteristiky základního výběru o rozsahu $n = 20$.

n	A_p [mm ²]				
1–5	148.6	148.0	148.2	148.3	148.3
6–10	148.5	148.9	148.5	148.4	148.7
11–15	148.6	148.4	148.6	148.5	148.6
16–20	148.1	148.4	148.6	148.7	148.2

Tab. 3.4: Naměřené hodnoty průřezové plochy A_p předpínacího lana Ls 15.7.

Řešení

Aritmetický průměr m jako odhad střední hodnoty:

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 148.46 \text{ mm}^2$$

Výběrová směrodatná odchylka s

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2} = 0.224 \text{ mm}^2$$

Výběrová šikmost

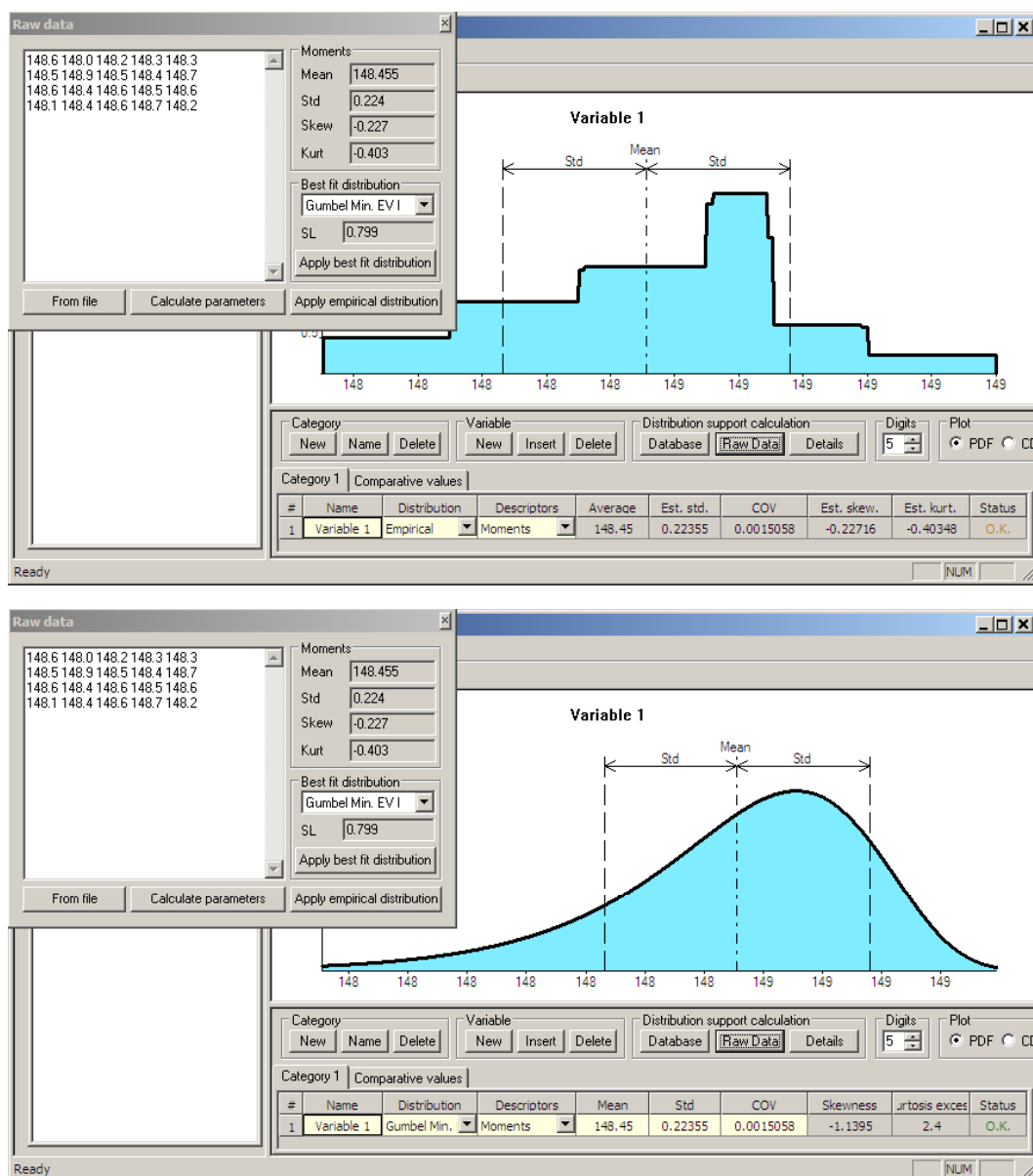
$$a = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - m}{s} \right)^3 = -0.246 - 0.227$$

Variační koeficient

$$\text{CoV} = \frac{s}{m} = 0.0012$$

Vyhodnocení momentových charakteristik průřezové plochy A_p předpínacího lana Ls 15.7 můžeme provést pomocí programu FReET podle následujícího postupu:

- 1) v kategorii „Random variables“ vybereme tlačítko „Raw Data“, do otevřeného okna vložíme naměřené hodnoty (je třeba použít desetinnou tečku a hodnoty musí být oddělené čárkou nebo mezerou)
- 2) použitím tlačítka „Calculate parameters“ obdržíme základní charakteristiky zadaného souboru



Obr. 3.7: Vyhodnocení charakteristických hodnot v programu FReET a jejich převzetí pro definování náhodné veličiny (nahore převzetí empirického rozdělení, dole nejvhodnější pravděpodobnostní rozdělení).

Pozn.: Na základě uvedených bodových odhadů statistických momentů je v programu FReET zvoleno ze seznamu dostupných rozdělení nejvhodnější, a to pomocí testu dobré shody. V případě, že máme vytvořenou náhodnou veličinu (vytvoření viz příklad v části 5.2) pro výpočet, můžeme tlačítkem „Apply best fit distribution“ tuto veličinu přenastavit podle hodnot získaných ze souboru. Nebo můžeme pro další výpočet převzít empirické rozdělení „Apply empirical distribution“ (viz obr. 3.7).

Příklad 3.2– Stanovení kvantilů

Stanovte hodnotu horního a dolního 10% kvantilu za předpokladu, že náhodná veličina X má zadané rovnoměrné a trojúhelníkové symetrické rozdělení pravděpodobnosti.

- a) Rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti $U(1, 5)$
- b) Trojúhelníkové rozdělení pravděpodobnosti $Tri(1,3,5)$

Řešení

Ad a) Rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti $U(1, 5)$

Hustota pravděpodobnosti $f_X(x)$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{1}{5-1} & 1 < x \leq 5 \\ 0 & x > 5 \end{cases}$$

Distribuční funkce $F_X(x)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{5-1} & 1 < x \leq 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

Hodnota dolního a horního 10% kvantilu

$$p_1 = \int_{-\infty}^{x_p} f_X(x) dx = F_X(x_p) = 0.1$$

$$0.10 = \frac{x_{0.10} - 1}{5 - 1} \Rightarrow x_{0.10} = 1.40$$

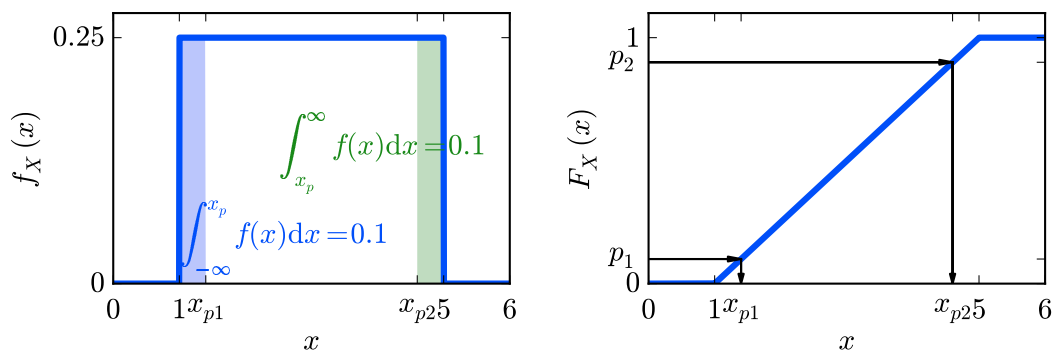
$$p_2 = 1 - p = 1 - \int_{x_p}^{\infty} f_X(x) dx = F_X(x_p) = 0.9$$

$$0.90 = \frac{x_{0.90} - 1}{5 - 1} \Rightarrow x_{0.90} = 4.60$$

Ad b) Trojúhelníkové rozdělení pravděpodobnosti $Tri(1,3,5)$

Hustota pravděpodobnosti $f_X(x)$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{2(x-1)}{(5-1)(3-1)} & 1 < x \leq 3 \\ \frac{2(5-x)}{(5-1)(5-3)} & 3 < x \leq 5 \\ 0 & x > 5 \end{cases}$$



Obr. 3.8: Grafické určení dolního a horního 10% kvantilu u rovnoměrného rozdělení $U(1, 5)$.

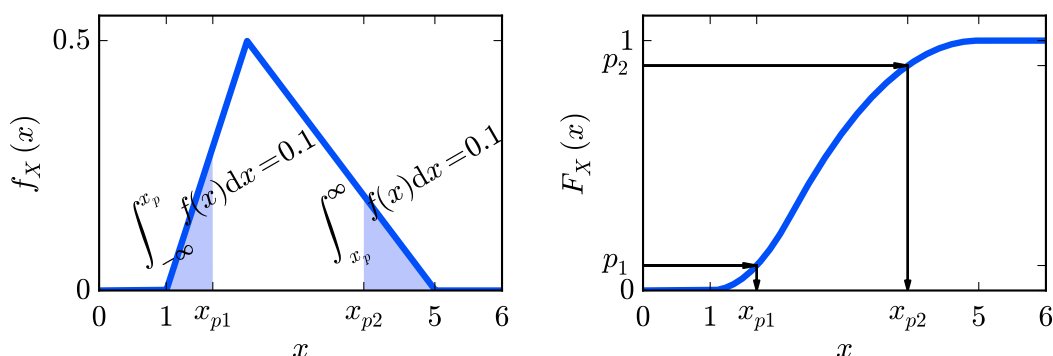
Distribuční funkce $F_X(x)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{(x-1)^2}{(5-1)(3-1)} & 1 < x \leq 3 \\ 1 - \frac{(x-5)^2}{(5-1)(5-3)} & 3 < x \leq 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

Hodnota dolního a horního 10% kvantilu

$$p_1 = 0.10 = \frac{(x_{0.10} - 1)^2}{(5-1)(3-1)} \Rightarrow x_{0.10} = 1.64$$

$$p_2 = 0.90 = 1 - \frac{(x_{0.90} - 5)^2}{(5-1)(5-3)} \Rightarrow x_{0.90} = 4.36$$



Obr. 3.9: Grafické určení dolního a horního 10% kvantilu u trojúhelníkového rozdělení $\text{Tri}(1,3,5)$.

Uvedené příklady práce s funkcí jedné náhodné proměnné lze zobecnit na případ funkcí náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$, který sdružuje N náhodných veličin.

Při výpočtu je však nutné pracovat se sdruženou hustotou pravděpodobnosti $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ a veškeré integrály jsou potom N -rozměrné.

Příklad 3.3– Vyhodnocení tlakové zkoušky na betonových krychlích

Ze souboru 100 experimentálně získaných hodnot tlakové pevnosti betonu (tabulka 3.5) odhadněte:

- a) střední hodnotu tlakové pevnosti betonu f_c , směrodatnou odchylku, šikmost a hodnotu variačního koeficientu
- b) horní a dolní 5% kvantil tlakové pevnosti betonu na základě analýzy naměřených dat
- c) horní a dolní 5% kvantil tlakové pevnosti betonu za předpokladu teoretického pravděpodobnostního modelu normálního a lognormálního dvouparametrického rozdělení

i	$f_{c,i}[\text{MPa}]$									
1-10	31.1	26.1	33.5	30.9	29.7	31.3	22.1	34.0	34.8	41.6
11-20	30.4	31.0	31.9	39.5	32.8	28.1	32.5	33.6	30.7	35.6
21-30	30.4	36.5	32.6	33.9	25.2	37.1	25.6	34.1	34.6	29.7
31-40	29.3	31.7	34.0	29.5	29.5	32.4	32.0	24.5	24.2	29.6
41-50	34.4	32.0	31.1	33.7	35.0	35.5	33.2	30.9	35.8	38.1
51-60	30.5	30.8	36.4	27.8	30.1	27.4	34.1	26.7	24.1	34.6
61-70	33.7	32.6	31.8	25.8	35.1	30.0	33.6	36.4	34.3	32.1
71-80	32.3	26.9	24.9	28.1	33.8	30.8	35.3	29.7	32.7	31.2
81-90	30.1	32.6	36.4	31.4	33.8	37.0	38.9	29.6	30.1	29.7
91-100	28.6	38.5	28.7	25.6	31.8	26.7	29.2	36.6	37.0	27.3

Tab. 3.5: Tabulka naměřených tlakových pevností betonu.

Pro vyhodnocení použijeme program EXCEL (v závorce budou uváděny funkce programu Excel v následujícím formátu: FUNKCE). Stejně výsledky obdržíme při použití programu FReET (viz př. 3.1).

Ad a) Stanovení charakteristik popisujících polohu, rozptýlení a nesouměrnost souboru hodnot

Náhodnou veličinu pevnost označíme X , která má spojitě rozdělení. Máme realizaci náhodného výběru $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ z X o rozsahu $n = 100$ (POČET).

Nejprve si vytvoříme histogram (obr. 3.10) z hodnot, které si roztřídíme do $k \doteq \sqrt{n} = 10$ tříd stejné šířky h . K tomu potřebujeme minimální $f_{c,\min} = 22.1$ MPa

a maximální $f_{c,\max} = 41.6$ MPa hodnotu ze souboru dat. Interval tříd zvolíme $\langle 22; 42 \rangle$, ve kterém leží naše hodnoty a rozdělíme ho na $k = 10$ tříd o šířce $d = (f_{c,\min} - f_{c,\max}) / k = 2$ (viz tab. 3.6 první a druhý sloupec). Určíme četnost hodnot v jednotlivých třídách (funkce ČETNOST)

Třídy	Střed	Četnost	Kumulativní četnost
22.0 – 24.0	23.0	1	0.010
24.0 – 26.0	25.0	8	0.090
26.0 – 28.0	27.0	7	0.160
28.0 – 30.0	29.0	14	0.300
30.0 – 32.0	31.0	23	0.530
32.0 – 34.0	33.0	20	0.730
34.0 – 36.0	35.0	14	0.870
36.0 – 38.0	37.0	8	0.950
38.0 – 40.0	39.0	4	0.990
40.0 – 42.0	41.0	1	1.000
$\Sigma = 100$			

Tab. 3.6: Hranice tříd, četnosti a relativní kumulativní četnost.

Výběrový průměr m (PRŮMĚR)

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 31.7 \text{ MPa}$$

Výběrový rozptyl s (SMODCH.VÝBĚR)

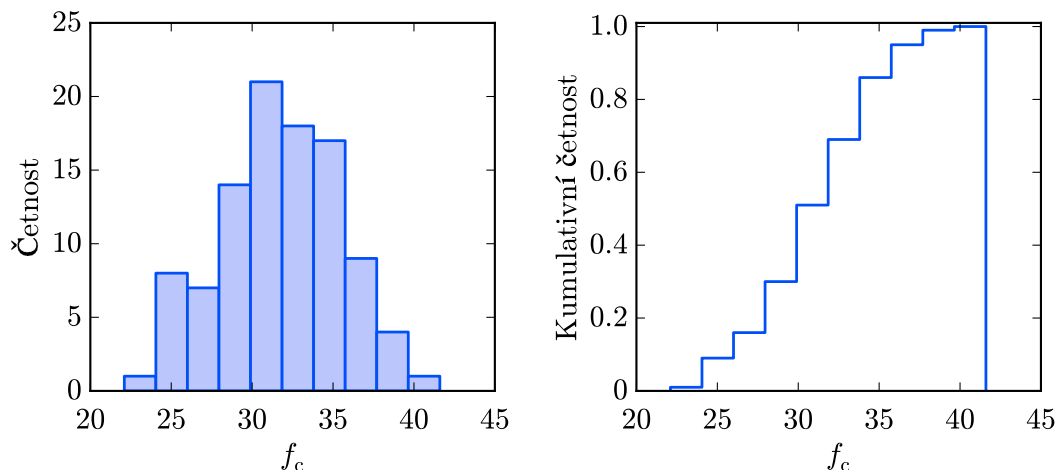
$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2} = 3.8 \text{ MPa}$$

Výběrová šikmost (SKEW)

$$a = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - m}{s} \right)^3 = -0.098$$

Variační koeficient

$$COV = \frac{s}{m} = 0.119$$



Obr. 3.10: Histogram a empirická distribuční funkce pevnosti betonu.

Ad b) Horní a dolní 5% kvantil tlakové pevnosti betonu na základě analýzy naměřených dat

Pro výpočet dolního 5% kvantilu pevnosti použijeme následující hodnoty z tabulky 3.6: krajní hodnotu třídy a jemu odpovídající kumulativní četnost (24; 0.01) a (26; 0.09). Mezi těmito hodnotami budeme lineárně interpolovat. Pro tyto hodnoty se jedná o velmi jednoduchou úlohu, protože 0.05 leží přesně uprostřed intervalu (0.01; 0.09). Pro dolní 5% kvantil dostáváme tedy hodnotu $f_{c,0.05} = 25$ MPa.

Podobným postupem určíme horní 5% kvantil pevnosti betonu. V našem případě máme hodnotu pevnosti přímo v tabulce $f_{c,0.95} = 38$ MPa.

Ad c) Horní a dolní 5% kvantil tlakové pevnosti betonu z teoretického pravděpodobnostního modelu

Předpokládejme, že pevnost betonu má normální rozdělení $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ .

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty; -\infty < \mu < \infty; \sigma^2 > 0$$

Pro střední hodnotu a směrodatnou odchylku použijeme jejich odhady viz výše uvedený výběrový průměr a výběrová směrodatná odchylka. Dosadíme-li vypočtené hodnoty dostáváme:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(31.706, 3.770^2)$$

Tvar rozdělení (hustota i distribuční funkce) je vyobrazen zelenou barvou na obrázku 3.11 spolu s histogramem z naměřených dat. Odhad dolního 5% kvantilu

pevnosti betonu (NORMINV)

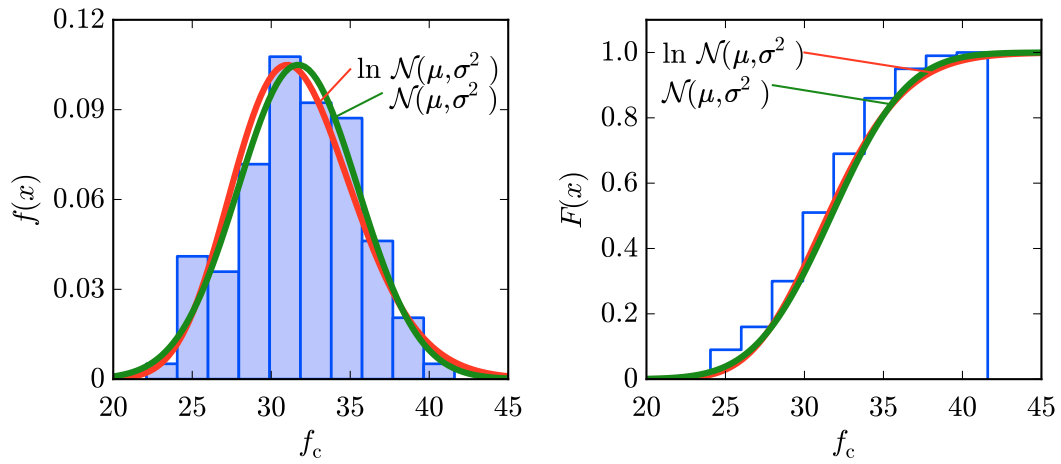
$$f_{c,0.05} = F^{-1}(0.05) = 25.505 \text{ MPa}$$

Odhad horního 5% kvantilu pevnosti betonu (NORMINV)

$$f_{c,0.95} = F^{-1}(0.95) = 37.906 \text{ MPa}$$

Odhad návrhové hodnoty pevnosti betonu, odpovídá dolnímu kvantilu 1 ‰ (NORMINV)

$$f_{c,0.001} = F^{-1}(0.001) = 20.056 \text{ MPa}$$



Obr. 3.11: Histogram, empirická distribuční funkce pevnosti betonu proložená teoretickými pravděpodobnostními rozděleními – normální (zelené) a lognormální (červené) rozdělení.

Nyní předpokládejme, že pevnost betonu (náhodná veličina X) má lognormální rozdělení $\ln \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ . Hustota pravděpodobnosti $f_X(x)$ má podobný tvar jako pro normální rozdělení s parametry λ a ζ :

$$f_X(x; \lambda, \zeta) = \frac{1}{x\zeta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\lambda)^2}{2\zeta^2}} \quad 0 < x < \infty; 0 < \lambda < \infty; \zeta^2 > 0$$

Střední hodnota a rozptyl daného rozdělení lze určit z parametrů λ a ζ následovně:

$$\mu = e^{\lambda + \zeta^2/2}, \quad \sigma^2 = (e^{\zeta^2} - 1)e^{2\lambda + \zeta^2} \quad (3.29)$$

Náhodná veličina X má lognormální rozdělení se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ^2 , pokud transformovaná veličina $Y = \ln(X)$ má normální rozdělení s parametry λ, ζ^2 .

Použijeme-li vypočtené hodnoty, dostáváme odhad střední hodnoty pro parametr $\lambda = 3.449$ a směrodatné odchyly $\zeta = 0.122$ náhodné veličiny Y . Pro náhodnou veličinu X můžeme tedy napsat:

$$X \sim \ln \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \ln \mathcal{N}(31.704, 3.882^2)$$

Vizuální porovnání tvaru rozdělení (hustota i distribuční funkce červené barvy) je možné na obrázku 3.11 s histogramem z naměřených dat. Odhad dolního 5% kvantilu pevnosti betonu (EXP (NORMINV))

$$f_{c,0.05} = F^{-1}(0.05) = 25.770 \text{ MPa}$$

Odhad horního 5% kvantilu pevnosti betonu (EXP (NORMINV))

$$f_{c,0.95} = F^{-1}(0.95) = 38.451 \text{ MPa}$$

Odhad návrhové hodnoty pevnosti betonu, odpovídá dolnímu kvantilu 1 ‰ (EXP (NORMINV))

$$f_{c,0.001} = F^{-1}(0.001) = 21.615 \text{ MPa}$$

V této úloze jsme pracovali s materiálovou vlastností (tlaková pevnost betonu) jako s náhodnou veličinou, stejně bychom postupovali i u vyhodnocování jiných veličin – např. délka, šířka, atd.

3.5 Transformace náhodných veličin

Při řešení pravděpodobnostních úloh nás může zajímat zákon rozdělení náhodné veličiny Y , která je funkcí náhodné veličiny X , jejíž zákon rozdělení známe:

$$Y = h(X), \quad (3.30)$$

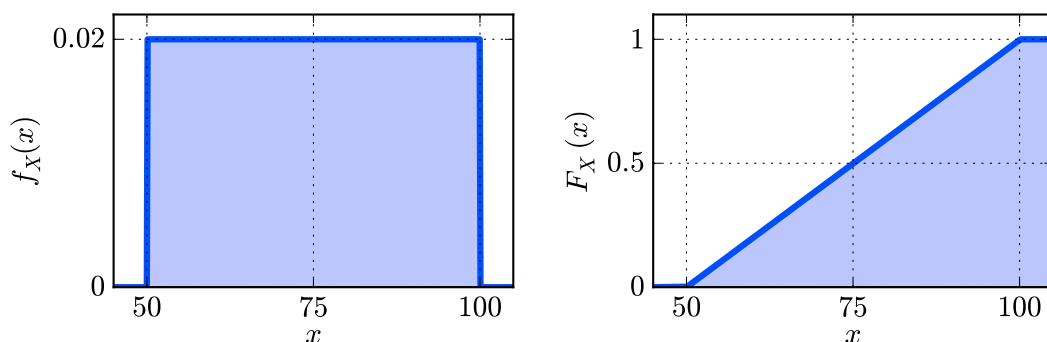
kde h je reálná funkce jedné reálné proměnné definované na oboru hodnot náhodné veličiny X . O náhodné veličině Y potom řekneme, že vznikla transformací h náhodné veličiny X . Podrobnější informace o transformaci náhodných veličin čtenář nalezne ve skriptech [Koutková a Moll \(2001\)](#).

Příklad 3.4– Plocha čtverce s náhodnou délkou strany

Určeme hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = X^2$ (plocha čtverce), známe-li hustotu veličiny X (délka strany čtverce):

$$X \sim f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{50} & \text{pro } 50 \leq x \leq 100 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (3.31)$$

jedná se o rovnoměrné rozdělení se střední hodnotou $\mu_x = 75$ a rozptylem $\sigma_x^2 = 208.\bar{3}$. Vypočítejte střední hodnotu, směrodatnou odchylku a variační koeficient (CoV) veličiny Y a výsledky porovnejte s programem FReET.



Obr. 3.12: Rovnoměrné rozdělení náhodné veličiny X

O veličině Y řekneme, že vznikla transformací veličiny X . Nejprve si vyjádříme distribuční funkci veličiny X :

$$X \sim F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 50 \\ \frac{1}{50}x - 1 & \text{pro } 50 \leq x \leq 100 \\ 1 & \text{pro } x > 100 \end{cases} \quad (3.32)$$

a dále využijeme definičního vztahu distribuční funkce náhodné veličiny Y :

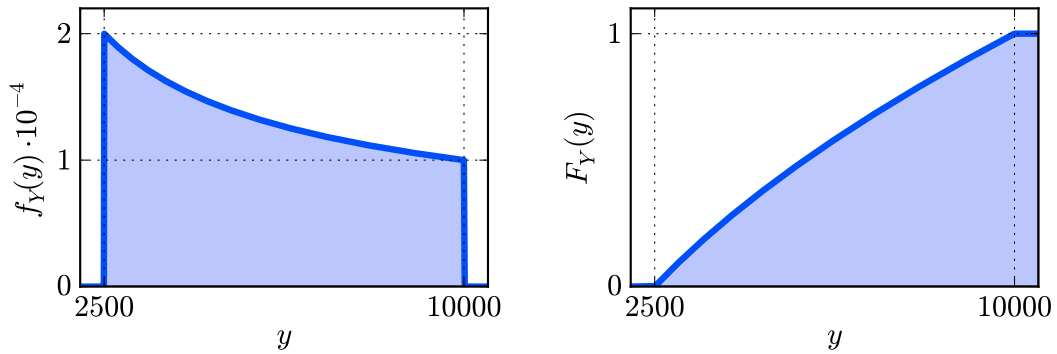
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) \quad (3.33)$$

Pravděpodobnost ve vztahu 3.33 vyjádříme pomocí náhodné veličiny X , což můžeme zapsat jako distribuční funkci $F_X(x)$ (vztah 3.32) náhodné veličiny X s funkční hodnotou obsahující náhodnou veličinu Y :

$$F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(|X| \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) = \frac{1}{50}\sqrt{y} - 1 \quad (3.34)$$

Získali jsme distribuční funkci náhodné veličiny Y :

$$Y \sim F_Y(y) = P(Y < y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y < 2\,500 \\ \frac{1}{50}\sqrt{y} - 1 & \text{pro } 2\,500 \leq y \leq 10\,000 \\ 1 & \text{pro } y > 10\,000 \end{cases} \quad (3.35)$$



Obr. 3.13: Hustota pravděpodobnosti a distribuční funkce náhodné veličiny Y

Hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny Y získáme derivací distribuční funkce $F_Y(Y)$:

$$Y \sim f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{100} \frac{\sqrt{y}}{y} & \text{pro } 2\,500 \leq y \leq 10\,000 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (3.36)$$

Střední hodnota veličiny Y :

$$\begin{aligned} E[Y] = \mu_y &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{2\,500}^{10\,000} y \frac{1}{100} \frac{\sqrt{y}}{y} dy \\ &= \int_{2\,500}^{10\,000} \frac{1}{100} \sqrt{y} dy = \left[\frac{2}{300} y^{\frac{3}{2}} \right]_{2\,500}^{10\,000} = 5833.\bar{3} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Častou chybou, které se studenti dopouštějí je snaha vypočítat střední hodnotu Y jako $h(E[X])$, tedy $(E[x])^2$. Porovnáme-li střední hodnotu náhodné veličiny Y a druhou mocninu střední hodnoty náhodné veličiny X , zjistíme, že tyto hodnoty se nerovnají ($E[Y] = 5833.\bar{3} \neq (E[X])^2 = 5625$), protože se jedná o nelineární transformaci.

Rozptyl náhodné veličiny můžeme spočítat jako rozdíl střední hodnoty náhodné veličiny Y^2 a druhé mocniny střední hodnoty veličiny Y :

$$D[Y] = \sigma_y^2 = E[Y^2] - (E[Y])^2 \quad (3.38)$$

Střední hodnota náhodné veličiny Y^2 nebo též druhý necentrální moment veličiny Y :

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_{2500}^{10000} y^2 \frac{1}{100} \frac{\sqrt{y}}{y} dy \\ &= \int_{2500}^{10000} y \frac{1}{100} \sqrt{y} dy = \left[\frac{2}{500} y^{\frac{5}{2}} \right]_{2500}^{10000} = 38750000 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Dosazením do rovnice 3.38 dostaneme rozptyl náhodné veličiny Y :

$$D[Y] = 38750000 - 5833.\bar{3}^2 = 4722222.\bar{2} \quad (3.40)$$

Směrodatnou odchylku získáme odmocninou z rozptylu a variační koeficient vyjádříme jako podíl směrodatné odchylky a střední hodnoty náhodné veličina Y :

$$\sigma_y = \sqrt{D[Y]} = 2173.0675 \quad (3.41)$$

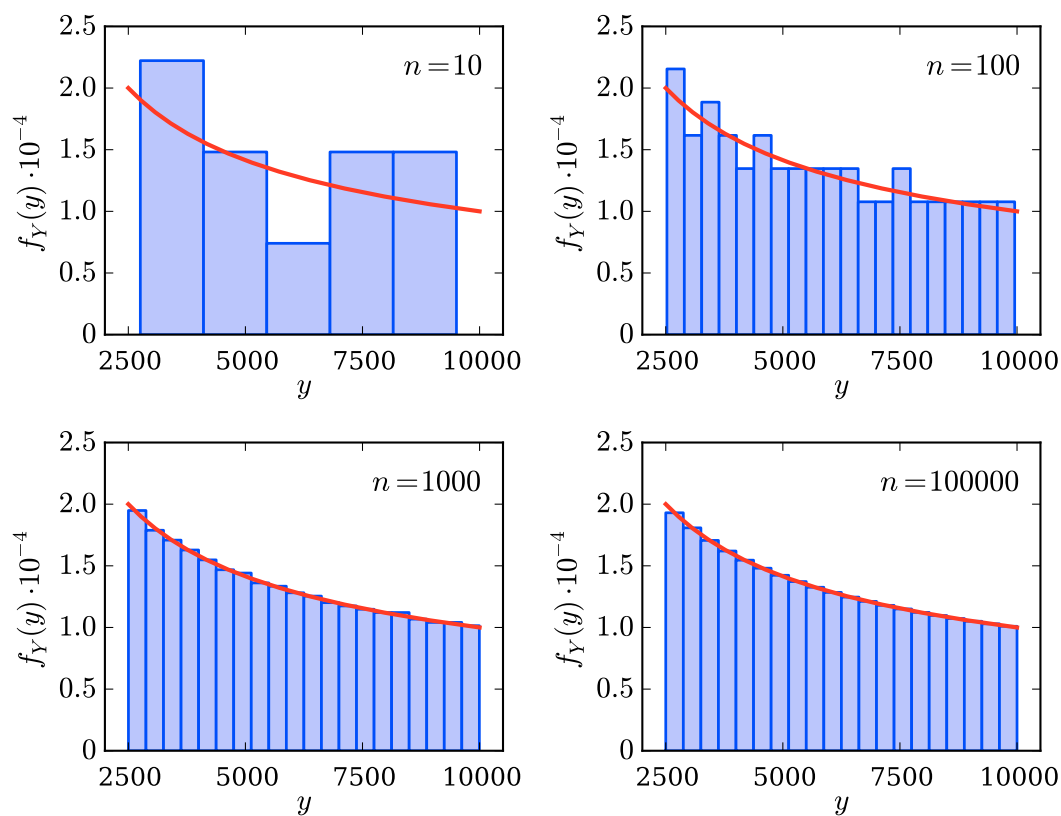
$$COV = \frac{\sqrt{D[Y]}}{E[Y]} = 0.3725 \quad (3.42)$$

Výpočet číselných charakteristik náhodné veličiny Y pomocí programu FReET. V programu zadáme jednu náhodnou veličinu X s rovnoměrným rozdělením (rectangular) a provedeme n simulací pomocí simulační metody LHS mean (viz sekce 4.2.2).

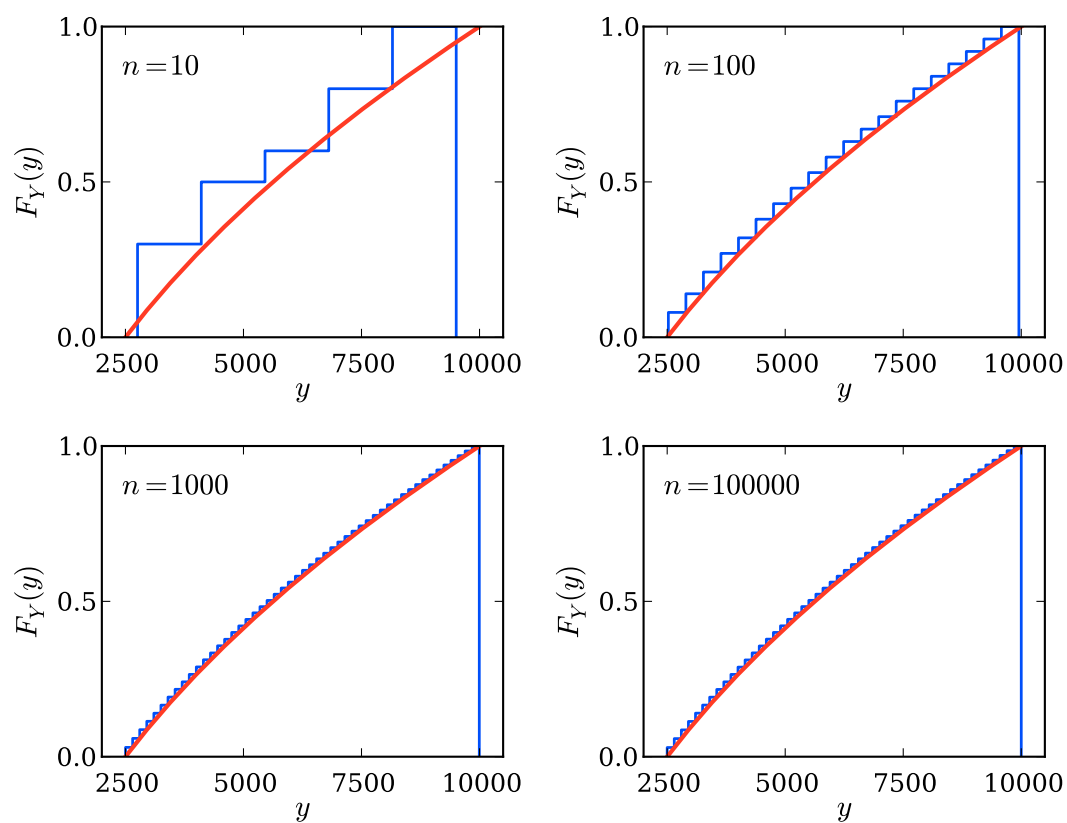
Na obrázcích 3.14 a 3.15 je grafické porovnání přesného tvaru hustoty pravděpodobnosti resp. distribuční funkce náhodné veličiny Y s histogramy získanými z různého počtu simulací v programu FReET.

n	$E[Y]$	$D[Y]$	σ_y	$COV [\%]$
10	5831.25	5192917	2278.797	39.08
100	5833.31	4769430	2183.903	37.44
1000	5833.33	4726944	2174.154	37.27
10000	5833.33	4722694	2173.176	37.25
100000	5833.33	4722269	2173.078	37.25
přesně	$5833.\bar{3}$	$4722222.\bar{2}$	2173.068	37.25

Tab. 3.7: Porovnání číselných charakteristik při různém počtu simulací s přesnými hodnotami.



Obr. 3.14: Hustoty pravděpodobností pro různý počet simulací náhodné veličiny Y



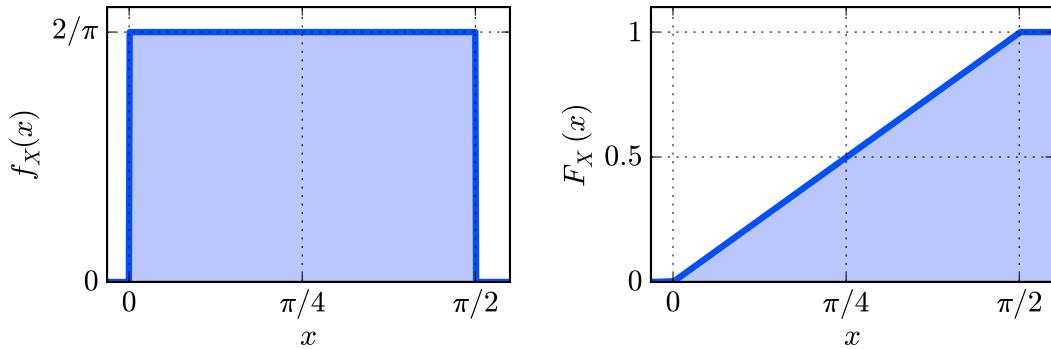
Obr. 3.15: Distribuční funkce pro různá počet simulací náhodné veličiny Y

Příklad 3.5– Goniometrická funkce

Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = \cos(X)$, známe-li hustotu veličiny X :

$$X \sim f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{pro } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (3.43)$$

jedná se o rovnoměrné rozdělení se střední hodnotou $\mu_x = \frac{\pi}{4}$. Vypočtěte střední hodnotu, směrodatnou odchylku a variační koeficient (COV) veličiny Y a výsledky porovnejte s programem FReET.



Obr. 3.16: Rovnoměrné rozdělení náhodné veličiny X

O veličině Y řekneme, že vznikla transformací veličiny X . Nejprve si vyjádříme distribuční funkci veličiny X :

$$X \sim F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \frac{2}{\pi} x & \text{pro } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{pro } x > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (3.44)$$

a dále využijeme definičního vztahu distribuční funkce náhodné veličiny Y :

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) \quad (3.45)$$

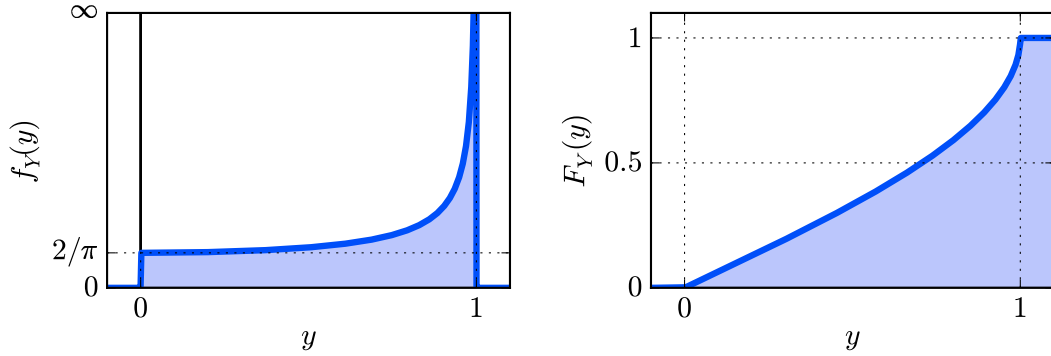
Pravděpodobnost ve vztahu 3.45 vyjádříme pomocí náhodné veličiny X , což můžeme zapsat jako distribuční funkci $F_X(x)$ (vztah 3.44) náhodné veličiny X s funkční hodnotou obsahující náhodnou veličinu Y :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(\cos(X) \leq y) = P(X \geq \arccos(y)) = 1 - P(X \leq \arccos(y)) \\ &= 1 - F_X(\arccos(y)) = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos(y) \end{aligned} \quad (3.46)$$

zde si musíme při úpravě nerovnic dát pozor na $\arccos(\cdot)$, neboť na intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$ se jedná o klesající funkci a dojde tedy k otočení znaménka nerovnosti.

Získali jsme distribuční funkci náhodné veličiny Y :

$$Y \sim F_Y(y) = P(Y < y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y < 0 \\ 1 - \frac{2}{\pi} \arccos(y) & \text{pro } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{pro } y > 1 \end{cases} \quad (3.47)$$



Obr. 3.17: Hustota pravděpodobnosti a distribuční funkce náhodné veličiny Y

Hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny Y získáme derivací distribuční funkce $F_Y(Y)$:

$$Y \sim f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi \sqrt{1-y^2}} & \text{pro } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (3.48)$$

Střední hodnota veličiny Y :

$$\begin{aligned} E[Y] = \mu_y &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 y \frac{2}{\pi \sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \left[-\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} \right]_0^1 = \frac{2}{\pi} \doteq 0.6366 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Porovnáme-li střední hodnotu náhodné veličiny Y a druhou mocninu střední hodnoty náhodné veličiny X , zjistíme, že tyto hodnoty se nerovnají ($E[Y] = 0.6366 \neq E[X]^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0.7071$), protože se opět jedná o nelineární transformaci.

Rozptyl náhodné veličiny můžeme spočítat jako rozdíl střední hodnoty náhodné veličiny Y^2 a druhé mocniny střední hodnoty veličiny Y :

$$D[Y] = \sigma_y^2 = E[Y^2] - (E[Y])^2 \quad (3.50)$$

Střední hodnota náhodné veličiny Y^2 :

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_0^1 y^2 \frac{2}{\pi \sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \left[-\frac{1}{\pi} \left(\sqrt{1-y^2} - \arcsin(y) \right) \right]_0^1 = 0.5 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Dosazením do rovnice 3.38 dostaneme rozptyl náhodné veličiny Y :

$$D[Y] = 0.5 - 0.6366^2 = 0.0947 \quad (3.52)$$

Směrodatnou odchylku získáme odmocninou z rozptylu a variační koeficient vyjádříme jako podíl směrodatné odchylky a střední hodnoty náhodné veličiny Y :

$$\sigma_y = \sqrt{D[Y]} = 0.30776 \quad (3.53)$$

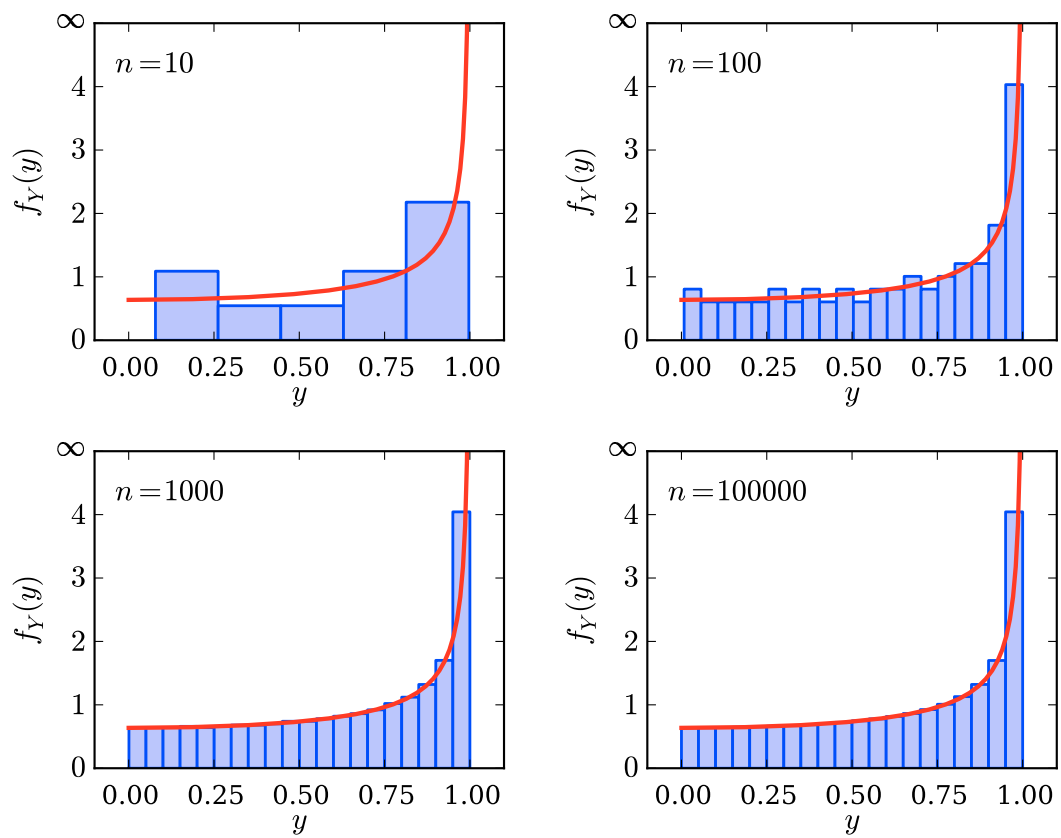
$$COV = \frac{\sqrt{D[Y]}}{E[Y]} = 0.4834 \quad (3.54)$$

Výpočet číselných charakteristik náhodné veličiny Y provedeme nyní pomocí programu FReET. V programu zadáme jednu náhodnou veličinu X s rovnoměrným rozdělením (rectangular) a provedeme n simulací (realizací náhodné veličiny X) pomocí metody LHS mean.

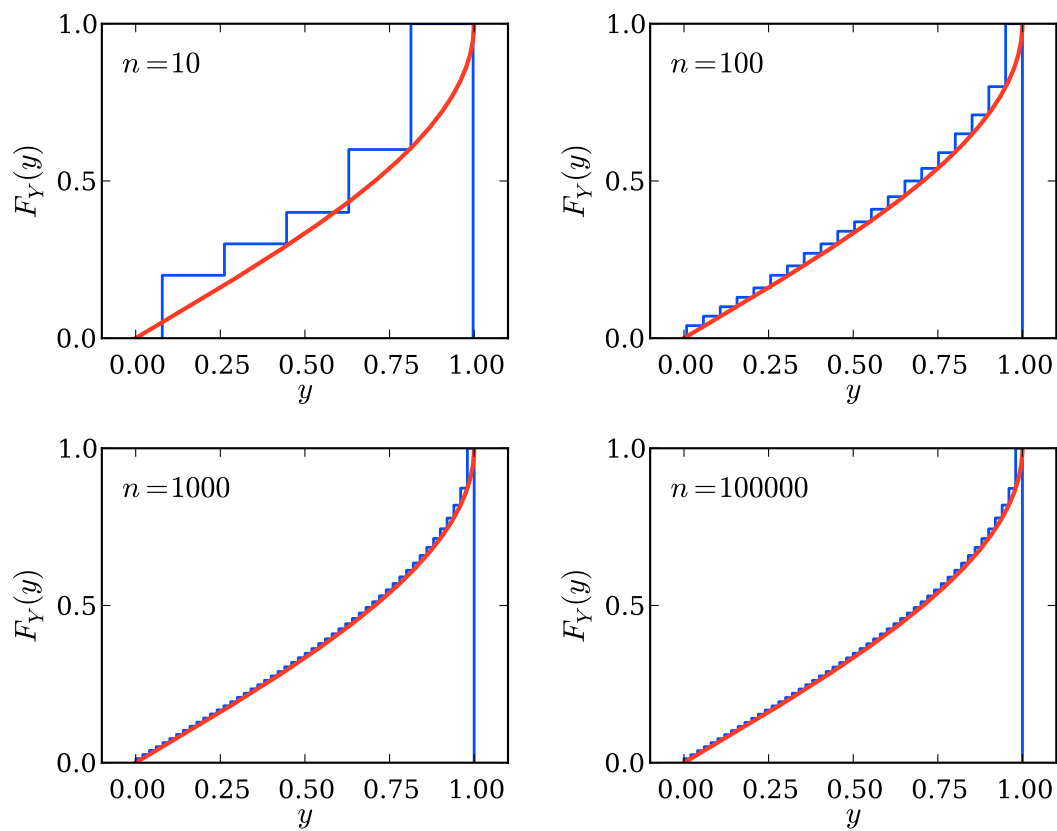
n	$E[Y]$	$D[Y]$	σ_y	COV
10	0.6373	0.1043	0.3230	50.68
100	0.6366	0.0957	0.3093	48.58
1000	0.6366	0.0948	0.3079	48.37
10000	0.6366	0.0947	0.3078	48.35
100000	0.6366	0.0947	0.3078	48.34
přesně	0.6366	0.0947	0.3078	48.34

Tab. 3.8: Porovnání číselných charakteristik při různém počtu simulací s přesnými hodnotami.

Je vidět, že pro odhad střední hodnoty se zadanou přesností je třeba menší počet realizací než pro odhad směrodatné odchylky. Obecně lze říci, že vyšší statistické momenty potřebují vyšší rozsahy n . Na obrázcích 3.18 a 3.19 je grafické porovnání přesného tvaru hustoty pravděpodobnosti resp. distribuční funkce náhodné veličiny Y s histogramy získanými z různého počtu simulací v programu FReET.



Obr. 3.18: Hustoty pravděpodobností pro různý počet simulací náhodné veličiny Y



Obr. 3.19: Distribuční funkce pro různá počet simulací náhodné veličiny Y

Úloha na procvičení: Určete hustotu pravděpodobnosti a číselné charakteristiky průmětu prutu délky L do směru osy x , pokud má úhel natočení prutu od osy x v prostoru následující hustotu pravděpodobnosti (pozor na úpravu nerovnic):

$$X \sim f_X(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pro } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (3.55)$$

$$[Y = L \cos(X), \text{ rovnoměrné rozdělení } f_Y(y) = \frac{1}{L} \text{ pro } y \in \langle 0; L \rangle]$$

4 TEORIE SPOLEHLIVOSTI

Spolehlivostí rozumíme schopnost konstrukce plnit požadované funkce při zachování provozních ukazatelů v daných mezích a v požadovaném časovém úseku (referenční době). Spolehlivost objektu je charakterizována z hlediska navrhování konstrukce jeho bezporuchovostí, životností, opravitelností a udržitelností. Dílčími složkami spolehlivosti mohou být bezpečnost, použitelnost a trvanlivost. Spolehlivost je tedy schopnost konstrukce, konstrukčního systému zachovávat požadované vlastnosti (tvar, izolační schopnost, pevnost atd.) po předem stanovenou technickou životnost.

4.1 Podmínka spolehlivosti, pravděpodobnost poruchy, index spolehlivosti

Mějme dvě vzájemně nezávislé náhodné veličiny popisující účinek zatížení E a odolnost konstrukce R s hustotami pravděpodobnosti $f_R(r)$ a $f_E(e)$. Předpokládá se, že konstrukce je spolehlivá, jestliže je účinek zatížení E menší než odolnost konstrukce R .

a) deterministicky formulovaná podmínka spolehlivosti

$$R_d \geq E_d \quad (4.1)$$

kde R_d a E_d jsou návrhové deterministické (nominální) hodnoty odolnosti konstrukce R a účinků zatížení E .

b) pravděpodobnostní podmínka spolehlivosti

$$R - E \geq 0 \quad (4.2)$$

kde R a E jsou náhodné veličiny odolnost konstrukce a účinků zatížení.

Výraz na levé straně nerovnosti 4.2 je často označován jako rezerva spolehlivosti a obvykle se značí Z . Mezní stav konstrukce nastane, platí-li:

$$R - E = Z < 0, \quad (4.3)$$

což lze brát jako limitní stav konstrukce. Náhodná veličina Z je tedy funkce náhodného vektoru dvou veličin:

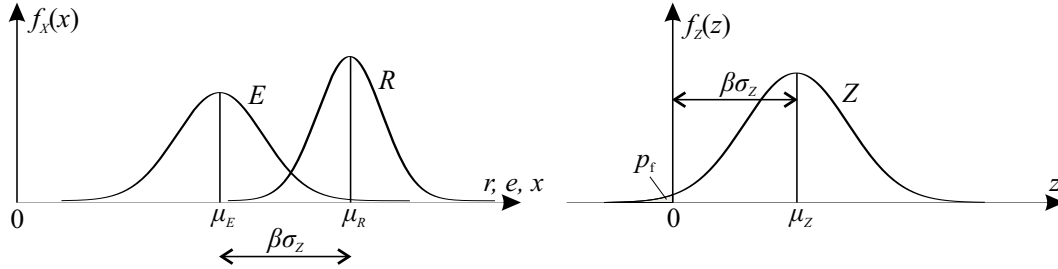
$$Z = g(R, E) = R - E \quad (4.4)$$

4.1.1 Pravděpodobnost poruchy

Teoretická pravděpodobnost poruchy je dána jako pravděpodobnost záporné rezervy spolehlivosti, tedy pravděpodobnost, že náhodná veličina R nabude menší hodnoty než veličina E :

$$p_f = P(R - E < 0) = P(Z < 0) \quad (4.5)$$

Stanovení pravděpodobnosti poruchy je naznačeno na obr.4.1.



Obr. 4.1: Stanovení pravděpodobností poruchy a indexu spolehlivosti.

4.1.2 Index spolehlivosti

Index spolehlivosti β je vedle pravděpodobnosti poruchy dalším měřítkem spolehlivosti a je v hojné míře používán v normativních předpisech.

Elementární index spolehlivosti podle Cornella (Rjanytrina) je definován jako převrácená hodnota variačního koeficientu rezervy spolehlivosti a stanoví se za předpokladu normality rozdělení veličiny Z podle vztahu:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad (4.6)$$

kde μ_Z je střední hodnota rezervy spolehlivosti. V případě nezávislých normálně rozdělených veličin R a E je uvedená střední hodnota dána vztahem:

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_E \quad (4.7)$$

a σ_Z směrodatná odchylka rezervy spolehlivosti dána vztahem:

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_E^2 \quad (4.8)$$

4.2 Metody pro řešení úloh spolehlivosti

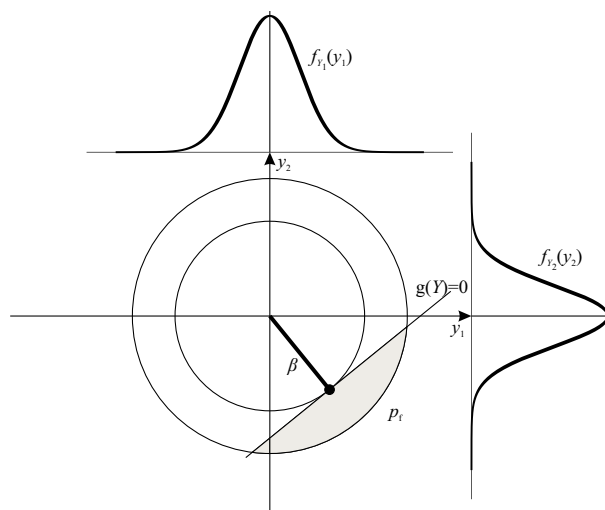
Metody k řešení spolehlivosti, tj. odhadu pravděpodobnosti poruchy, lze obecně rozdělit na dvě základní skupiny. Na aproximační metody a na metody simulační.

4.2.1 Aproximační metody

Aproximační metody aproximují funkci poruchy jednoduchou aproximační funkcí nebo se aproximuje až empirická distribuční funkce rezervy spolehlivosti vhodným teoretickým modelem. Ve stručnosti budou představeny aproximační metody FORM a SORM, které jsou často nazývány přibližnými metodami.

FORM

Spolehlivostní metoda I. řádu (FORM – First Order Reliability Method) je založena na linearizaci funkce poruchy v prostoru transformovaných náhodných veličin. Vstupní náhodné veličiny $\mathbf{X}$ je tedy nutné nejprve transformovat na nekorelované normované normální veličiny $\mathbf{Y}$. Funkce poruchy je pak aproximována lineární funkcí v bodě maximálního příspěvku k pravděpodobnosti poruchy v tzv. návrhovém bodě. Z hlediska geometrické interpretace v prostoru normovaných normálních veličin $\mathbf{Y}$ je návrhový bod u bodem ležícím na funkci poruchy $g(\mathbf{Y}) = 0$ s nejmenší vzdáleností od počátku. Tato nejmenší vzdálenost je označována jako index β viz obr. 4.2.



Obr. 4.2: Návrhový bod a index spolehlivosti

Na základě linearizace funkce poruchy (přímkou, rovinou, nadrovinou) je pak

přibližná teoretická pravděpodobnost poruchy za předpokladu normovaného normálního rozdělení pravděpodobnosti $\Phi_{\mathcal{N}}(\cdot)$ dána jako:

$$p_f \approx \Phi_{\mathcal{N}}(-\beta) = 1 - \Phi_{\mathcal{N}}(\beta) \quad (4.9)$$

SORM

Spolehlivostní metoda II. řádu (SORM – Second Order Reliability Method) používá kvadratickou aproximaci funkce mezního stavu v návrhovém bodě. Metodu SORM lze považovat za mnohem přesnější než metodu FORM.

Pravděpodobnost poruchy stanovená na základě odhadu statistických parametrů

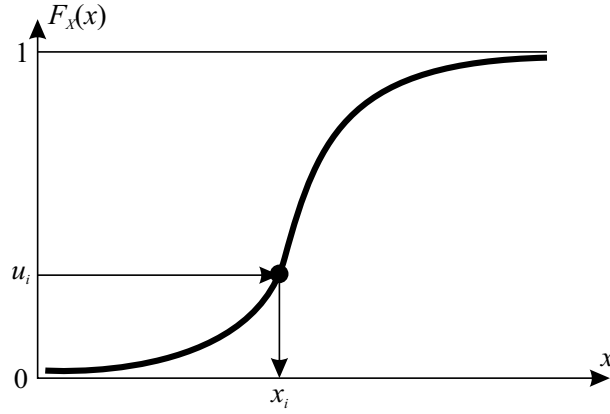
Pravděpodobnost poruchy lze stanovit na základě odhadu statistických parametrů a teoretického modelu rozdělení pravděpodobnosti rezervy spolehlivosti $Z = g(\mathbf{X})$. Přičemž k odhadu statistických parametrů (střední hodnota, směrodatná odchylka, šikmost, špičatost atd.) je vhodné použít některou ze simulačních metod. Po výběru nejvhodnějšího modelu pravděpodobnosti např. na základě testu dobré shody (Kolmogorov-Smirnov) je možné vyčíslit pravděpodobnost pro $Z = 0$. Tento postup lze považovat za méně přesný.

4.2.2 Simulační metody typu Monte Carlo

Společným rysem metod typu Monte Carlo jsou opakované numerické simulace řešeného problému, tedy v opakovaném výpočtu funkce mezního stavu $Z = g(\mathbf{X})$, vždy s jiným vektorem vstupních náhodných veličin $\mathbf{X}$. Náhodné veličiny jsou generovány podle svých teoretických modelů rozdělení pravděpodobnosti na základě generovaných náhodných čísel rovnoměrně rozložených na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ viz obr. 4.3.

Klasická metoda Monte Carlo (MC)

Tato metoda je velmi názorná a snadno přijatelná pro širokou technickou veřejnost. Ve své podstatě určitým způsobem simuluje reálné chování konstrukce. Je zřejmé, že přesnost odhadu pravděpodobnosti poruchy závisí na celkovém počtu simulací ve spojení s řádem výsledné pravděpodobnosti. Při odhadech malých pravděpodobností je však nutno provádět velký počet simulací. Uvedme na ukázkou potřebný počet simulací N pro daný řád pravděpodobnosti za předpokladu variačního koeficientu



Obr. 4.3: Generování náhodné veličiny inverzní transformací distribuční funkce

odhadu pravděpodobnosti poruchy 10 %.

$$N = \frac{1}{p_f \text{CoV}^2} \quad (4.10)$$

p_f	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
N	10^5	10^6	10^7	10^8

Tab. 4.1: Potřebný počet simulací metodou MC dle řádu pravděpodobnosti poruchy pro variační koeficient odhadu pravděpodobnosti 10 %

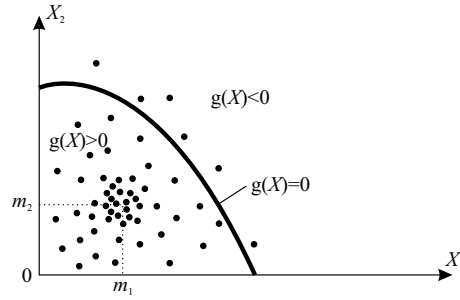
Postup:

- generování jednotlivých realizací vektoru X_j , pro j -tou simulaci
- výpočet hodnoty funkce poruchy pro daný vektor náhodných veličin $g(X_j) = z_j$
- po provedení všech simulací získáme soubor výsledných hodnot funkce poruchy $Z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$, pro které se provede statistické vyhodnocení
- je-li $z \leq 0$, nastává porucha a celkový počet těchto případů, které nastanou v průběhu všech N simulací, označíme N_f . Pak podle elementární definice teoretické pravděpodobnosti poruchy lze pravděpodobnost poruchy odhadnout jako podíl:

$$p_f = \frac{N_f}{N_{\text{tot}}} \quad (4.11)$$

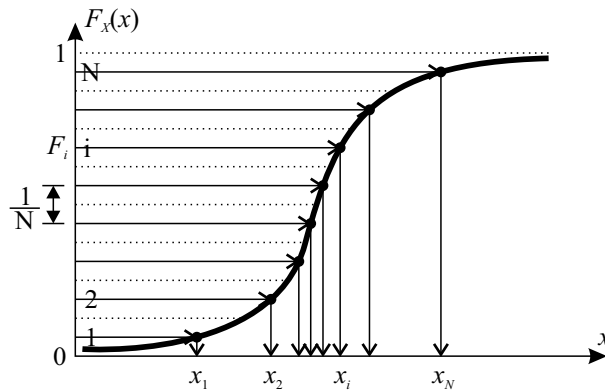
Metoda LHS

Pod zkratkou LHS (Latin Hypercube Sampling) se skrývá modifikovaná metoda typu MC. Výhodou této metody je, že obvykle je zapotřebí nižší počet simulací při



Obr. 4.4: Simulace Monte Carlo - dvourozměrný případ

zachování významnosti odhadů statistických parametrů odezvy konstrukce. Proto tato metoda spadá do skupiny metod redukce rozptylu. Generování jednotlivých realizací vektoru X_j pro j -tou simulaci je znázorněn na obr. 4.5, z kterého je patrný rozdíl oproti metodě MC. Definiční distribuční funkce $\Phi(x_i)$ každé náhodné veličiny x_i je rozdělen na N intervalů o stejné pravděpodobnosti $1/N$.



Obr. 4.5: Rozdělení definičního oboru distribuční funkce – metoda LHS

4.3 Směrná úroveň spolehlivosti dle mezinárodních předpisů

Při pravděpodobnostním rozboru spolehlivosti konstrukce je nutno stanovit limitní funkci $Z(\mathbf{X})$ pro vektor náhodných veličin $\mathbf{X}$ a určit pravděpodobnost poruchy p_f popř. index spolehlivosti β , jak bylo popsáno v předcházejícím textu. Nosný prvek nebo konstrukci lze považovat dle předpisů pro navrhování za vyhovující, pokud je splněna následující nerovnost:

$$p_f < p_d \quad \text{resp.} \quad \beta > \beta_d \quad (4.12)$$

kde p_d je přijímaná pravděpodobnost poruchy a β_d je index spolehlivosti dle normativních předpisů. Index spolehlivosti lze v případě normality rezervy spolehlivosti Z stanovit na základě pravděpodobnosti poruchy na základě vztahu:

$$\beta = -\Phi_N^{-1}(p_f) = \Phi_N^{-1}(1 - p_f) \quad (4.13)$$

kde Φ je normovaná normální distribuční funkce. Hodnoty indexu spolehlivosti pro danou úroveň pravděpodobnosti poruchy jsou uvedeny v tab. 4.2.

p_f	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
β	1.3	2.3	3.1	3.7	4.2	4.7	5.2

Tab. 4.2: Vztah mezi indexem spolehlivosti β a pravděpodobností poruchy p_f

Pro správnou volbu návrhové situace je vhodné u objektu stanovit třídu následků plynoucích z poruchy stavby. Ta se běžně stanovuje pomocí koeficientu ρ , který je definován jako podíl mezi celkovými náklady (tj. náklady plynoucími ze stavby objektu a jeho následné poruchy ve vztahu k lidským obětem, ekonomickým a sociálním následkům) a náklady na zřízení stavebního objektu.

Dle ČSN EN 1990 je směrná úroveň spolehlivosti pro nosné prvky dané třídy RC1–RC3 (RC – reliability classes) spolehlivosti a referenční doby uvedena pro mezní stav únosnosti v tab. 4.4 a přímo souvisí s třídami následků CC1–CC3.

V tab. 4.5 jsou uvedeny směrné hodnoty indexu spolehlivosti β pro nosné prvky třídy RC2 dle ČSN EN 1990.

Úroveň spolehlivosti dle ČSN ISO 13822 v podobě směrného indexu spolehlivosti β je uvedena v tab. 4.6.

Dle doporučení JCSS lze index spolehlivosti a požadovanou míru pravděpodobnosti poruchy pro I. mezní stav (mezní stav únosnosti) stanovit z tab. 4.7.

Třída následku	ρ	Popis	Příklady staveb
1 (CC1*)	≥ 2.0	Malé následky s ohledem na lidské životy a zranění osob nebo malé následky ekonomické a sociální.	Stavební objekty bez časté přítomnosti lidí, zemědělské a skladovací objekty, sila, skleníky, stožáry,...
2 (CC2*)	2.0–5.0	Střední následky s ohledem na lidské životy a zranění osob nebo značné následky ekonomické a sociální.	Obytné budovy, průmyslové objekty, administrativní budovy a budovy určené pro veřejnost se střední závažností následků.
3 (CC3*)	5.0–10.0	Velké následky s ohledem na lidské životy a zranění osob nebo významné následky ekonomické a sociální	Budovy resp. objekty určené pro veřejnost, kde jsou následky poruchy vysoké. Nemocnice, divadla, stadiony, mrakodrapy a mosty.

*třída následku dle ČSN EN 1990

Tab. 4.3: Definice tříd následků – CC (consequences classes).

Třída spolehlivosti	β	Referenční doba životnosti
RC3	5.2	1 rok
	4.3	50 let
RC2	4.7	1 rok
	3.8	50 let
RC1	4.2	1 rok
	3.3	50 let

Tab. 4.4: Směrná úroveň spolehlivosti podle ČSN EN 1990 pro mezní stav únosnosti

Mezní stav	β	Referenční doba životnosti
Únosnosti	4.7	1 rok
	3.8	50 let
Únavy	–	1 rok
	1.5–3.8	50 let
Použitelnosti	2.9	1 rok
	1.5	50 let

Tab. 4.5: Směrná úroveň spolehlivosti podle ČSN EN 1990 pro nosné prvky třídy RC2

Mezní stavy	β	Referenční doba životnosti
<i>Použitelnosti</i>		
- vratné	0.0	plánovaná zbytková životnost
- nevratné	1.5	plánovaná zbytková životnost
<i>Únavy</i>		
- kontrolovatelné	2.3	plánovaná zbytková životnost
- nekontrolovatelné	3.1	plánovaná zbytková životnost
<i>Únosnosti</i>		
- velmi malý následek poruchy	2.3	Ls v letech
- malý následek poruchy	3.1	Ls v letech
- střední následek poruchy	3.8	Ls v letech
- vysoký následek poruchy	4.3	Ls v letech
Ls - minimální běžná doba z hlediska bezpečnosti (např. 50 let)		

Tab. 4.6: Směrná úroveň spolehlivosti podle ČSN ISO 13822

Relat. náklady na bezpečnostní zajištění	Malé následky plynoucí z poruchy	Mírné následky plynoucí z poruchy	Velké následky plynoucí z poruchy
Velké (A)	$\beta = 3.1(p_f \approx 10^{-3})$	$\beta = 3,3(p_f \approx 5 \cdot 10^{-4})$	$\beta = 3.7(p_f \approx 10^{-4})$
Střední (B)	$\beta = 3.7(p_f \approx 10^{-4})$	$\beta = 4,2(p_f \approx 10^{-5})$	$\beta = 4.4(p_f \approx 5 \cdot 10^{-6})$
Malé (C)	$\beta = 4.2(p_f \approx 10^{-5})$	$\beta = 4.4(p_f \approx 5 \cdot 10^{-6})$	$\beta = 4.7(p_f \approx 10^{-6})$

Tab. 4.7: Index spolehlivosti v souvislosti s následky poruchy dle JCSS

Příklad 4.1– Stanovení indexu spolehlivosti

Stanovte index spolehlivosti β za předpokladu, že odolnosti konstrukce R má:
a) normální, b) lognormální rozdělení pravděpodobnosti se střední hodnotou $\mu_R = 25.5$ kN, směrodatnou odchylkou $\sigma_R = 2.55$ kN a variační koeficient $\text{CoV}_R = 0.10$.
Účinek zatížení E má: a) normální, b) lognormální rozdělení pravděpodobnosti se střední hodnotou $\mu_E = 15.6$ kN, směrodatnou odchylkou $\sigma_E = 3.90$ kN a variační koeficient $\text{CoV}_E = 0.25$.

Řešení

a) Předpokládá se normální rozdělení pravděpodobnosti odolnosti konstrukce R a účinku zatížení E

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} = \frac{25.5 - 15.6}{\sqrt{2.55^2 + 3.90^2}} = 2.15$$

b) Předpokládá se lognormální rozdělení pravděpodobnosti odolnosti konstrukce R a účinku zatížení E

$$\beta = \frac{\ln \frac{\mu_R}{\mu_E}}{\sqrt{V_R^2 + V_E^2}} = \frac{\ln \frac{25.5}{15.6}}{\sqrt{0.10^2 + 0.25^2}} = 1.83$$

Příklad 4.2– Určení indexu spolehlivosti a pravděpodobnosti poruchy

Stanovte index spolehlivosti β a pravděpodobnost poruchy p_f metodou FORM, simulační technikou MC a LHS. Předpokládejte, že odolnosti konstrukce R a účinků zatížení E jsou náhodné veličiny a jsou charakterizovány pravděpodobnostními modely dle tab.4.8. Limitní (mezní) funkce je definována podle vztahu:

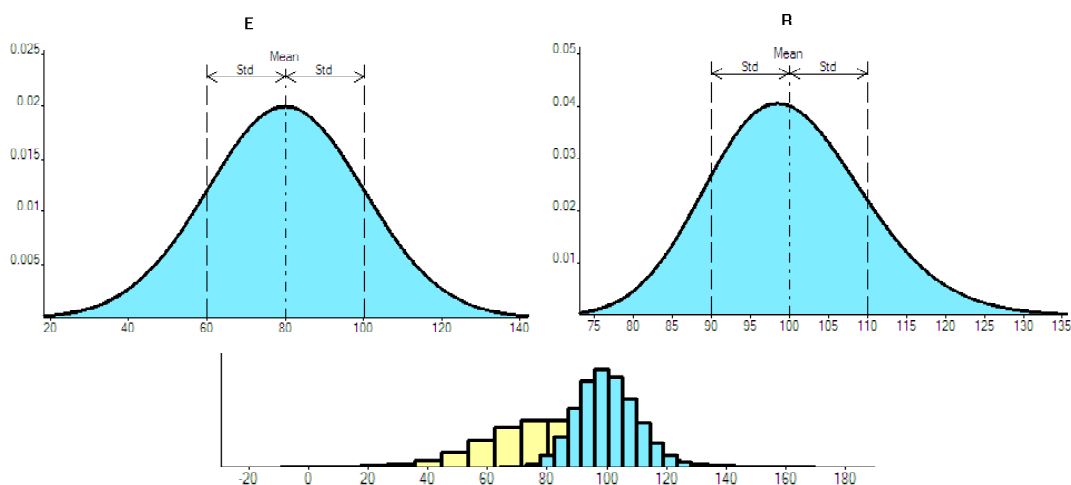
$$Z = R - E$$

i	Veličina		Typ PDF	Mean	CoV _{i}
1	R	[kN]	Lognormal (2 par.)	100	0.10
2	E	[kN]	Normal	80	0.25

Tab. 4.8: Pravděpodobnostní modely R a E

Řešení

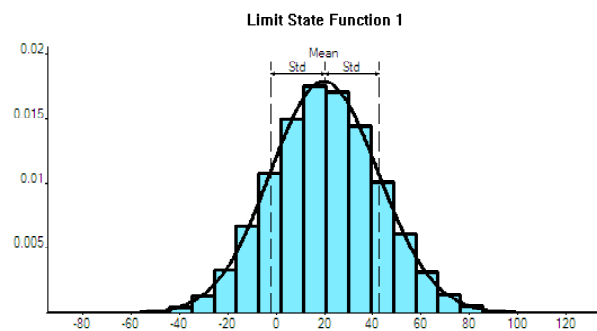
Na obrázku 4.6 nahoře jsou zobrazena pravděpodobnostní rozdělení náhodných veličin R a E a dole je vykreslena jejich vzájemná poloha na společné ose.



Obr. 4.6: Hustoty pravděpodobnosti R a E .

Odečtením těchto dvou náhodných veličin dostaneme funkci rezervy spolehlivosti Z , která je vykreslena na obrázku 4.7. Tvar této funkce je velmi blízký normálnímu rozdělení, a proto můžeme použít index spolehlivosti β podle Cornella.

Pravděpodobnost poruchy a index spolehlivosti pro zadané pravděpodobnostní modely únosnosti R a účinků zatížení E je uvedena v tabulce 4.9. Pro metodu LHS a MC bylo provedeno 100 000 simulací.



Obr. 4.7: Rezerva spolehlivosti Z .

Metoda	β	p_f
LHS(100000)	0.89407	0.18564
MC (100000)	0.89705	0.18485
LHS(1000)	0.89417	0.18562
MC(1000)	0.90824	0.18188
FORM	0.87675	0.19031

Tab. 4.9: Hodnota indexu spolehlivosti β a pravděpodobnost poruchy p_f stanoveny metodou MC, LHS a FORM

Příklad 4.3– Stanovení spolehlivosti ze zadaných modelů zatížení a odolnosti konstrukce

Stanovte index spolehlivosti β a pravděpodobnost poruchy p_f metodou FORM, metodou MC a LHS. Předpokládejte, že náhodné veličiny vstupujících do výpočtů funkce odolnosti R a zatížení E se řídí pravděpodobnostními modely dle tab. 4.10. Funkce odolnosti R je definována vztahem (obr. 4.8):

$$R = f(r) = \frac{1}{r_1} e^{0.5r_2}$$

Funkce účinků zatížení E je definována vztahem (obr. 4.8):

$$E = f(e) = \frac{1}{e_1} e^{0.5e_2}$$

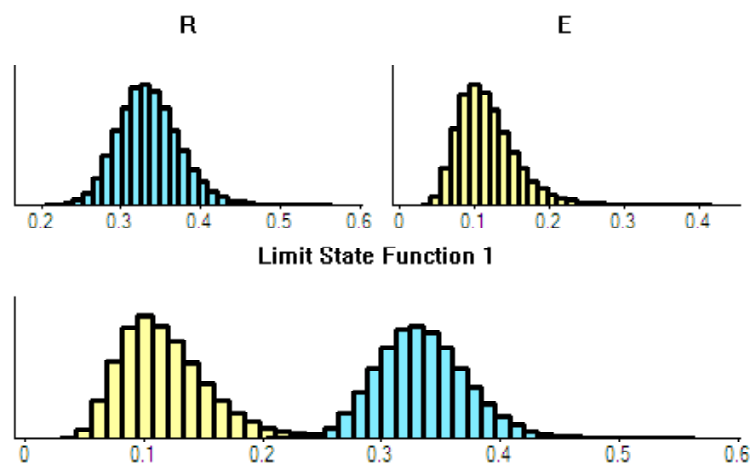
Funkce rezervy spolehlivosti Z (obr. 4.9) je definována vztahem:

$$Z = R - E$$

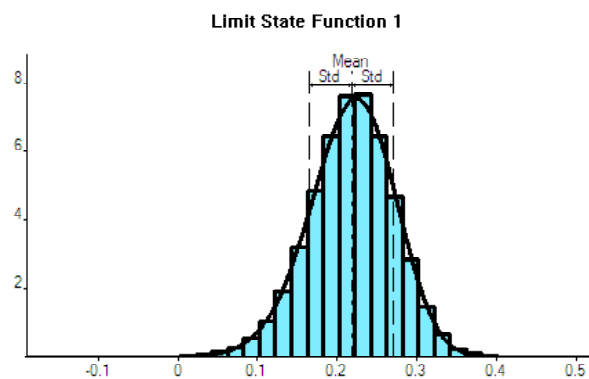
i	Veličina		Typ PDF	Mean	CoV _{i}
1	r_1	[–]	Lognormal (2 par.)	5	0.10
2	r_2	[–]	Normal	1	0.1
3	e_1	[–]	Lognormal (2 par.)	25	0.20
4	e_2	[–]	Normal	2	0.25

Tab. 4.10: Pravděpodobnostní modely r a e

Výsledek



Obr. 4.8: Hustoty pravděpodobnosti R a E .



Obr. 4.9: Rezerva spolehlivosti Z .

metoda	β^*	p_f^*	β	$p_f = N_f/N_{\text{tot}}$
LHS(100000)	4.058	$2.4782 \cdot 10^{-5}$	3.279	0.00052
MC (100000)	4.054	$2.5216 \cdot 10^{-5}$	3.234	0.00061
LHS(1000)	4.042	$2.6501 \cdot 10^{-5}$	—	—
MC(1000)	3.948	$3.9348 \cdot 10^{-5}$	—	—
FORM	—	—	3.240	0.000597

Tab. 4.11: Hodnota indexu spolehlivosti β a pravděpodobnost poruchy p_f stanoveny metodou MC, LHS a FORM. (* hodnoty určeny podle Cornella)

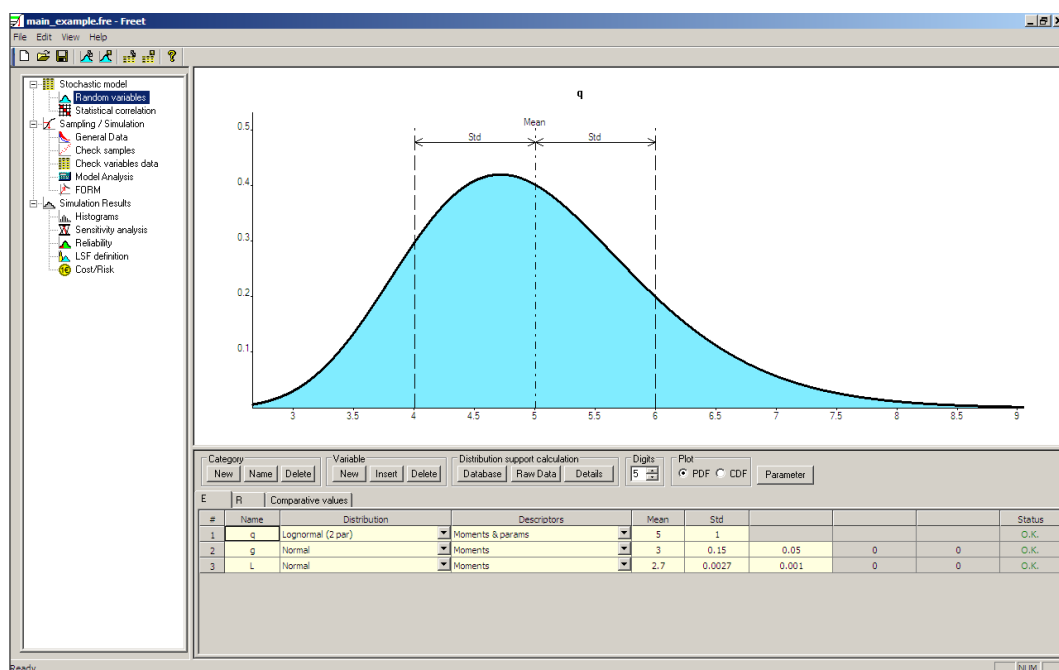
5 SOFTWAREVÉ NÁSTROJE

V současnosti jsou pro řešení praktických úloh z oblasti teorie spolehlivosti stavebních konstrukcí používány na trhu již běžně dostupné výpočetní programy jako např. STRUREL, VaP a FReET, které umožňují provést odhady teoretické pravděpodobnosti poruchy resp. indexu spolehlivosti na základě simulačních a aproximačních technik.

V této kapitole se budeme podrobněji zabývat uživatelským rozhraním pravděpodobnostního modulu FReET, který je v současné době vyvíjen na Ústavu stavební mechaniky stavební fakulty Vysokého učení technického v Brně.

5.1 Pravděpodobnostní modul FReET

Při spuštění programu FReET (obr. 5.1) se v levé části okna nachází dialogový strom, který je rozčleněn do tří hlavních částí a jejich podčástí (podrobnější popis jednotlivých částí dialogového stromu je proveden v následujícím textu). Pravá část okna je rozdělena horizontálně na dvě části: horní část slouží pro grafický výstup a spodní část pro přehledné zobrazení dat uspořádaných do tabulky nebo pro nastavení parametrů programu.



Obr. 5.1: Okno programu FReET.

Dialogový strom:

- **Stochastic model** Zadávání vstupních dat řešeného problému.
 - **Random Variables** Definování náhodných veličin a jejich pravděpodobnostního rozdělení pomocí momentů nebo parametrů.
 - **Statistical correlation** Definování statistické korelace mezi zadanými náhodnými veličinami.
- **Sampling/Simulation** Generování realizací zadaných náhodných veličin a výpočet funkcí odezvy.
 - **General data** Zadání počtu realizací náhodných veličin a metody pro jejich generování (LHS mean, LHS median, LHS random, Monte Carlo viz část 4.2.1). Také možnost nastavit parametry pro metodu simulovaného

žihání. A nakonec tlačítko „Run“ pro vygenerování hodnot jednotlivých náhodných veličin.

-  Check samples Vizuální kontrola vygenerovaných hodnot vykreslených graficky (histogram, bodový graf) a výsledné (dosažené) korelační matice.
-  Check variables data Kontrola číselných hodnot realizací uspořádaných do tabulky.
-  Model analysis Zadání funkce odezvy: jednoduchá funkce pomocí grafického kalkulátoru „a+b“ nebo složitější funkce pomocí DLL knihovny „...“. A pomocí tlačítka „Run model analysis“ dojde k vyřešení zadaných funkcí pro vygenerované realizace náhodných veličin.
-  FORM Použití metody FORM pro odhad pravděpodobnosti poruchy (viz část 4.2.1).
-  Simulation results Vyhodnocení získaných výsledků.
 -  Histograms Histogramy z hodnot funkcí odezvy.
 -  Sensitivity analysis Citlivostní analýza mezi vstupními náhodnými veličinami a funkcemi odezvy.
 -  Reliability Vyhodnocení spolehlivosti konstrukce na základě mezní funkce (rezerva spolehlivosti). Proložení histogramu nejvhodnějším pravděpodobnostním rozdělením na základě testu dobré shody.
 -  LSF definition Zadání mezní funkce odezvy, rezerva spolehlivosti

5.2 Ukázkový příklad – ocelový nosník – ovládání programu FReET

5.2.1 Zadání

Odhadněte pravděpodobnost poruchy prostě uloženého stropního ocelového nosníku profilu I120 o rozpětí $l = 3.25$ m, který je zatížen stálým g a nahodilým spojitým rovnoměrným zatížením q . Třída oceli nosníku je S235. Předpokládejte, že porucha nastane:

a) vyčerpáním ohybové únosnosti (1. mezní stav)

$$\begin{aligned} Z &= M_R - M_E \\ R &= M_R = w_{pl} f_y, \quad E = M_E = \frac{1}{8} (g + q) l^2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

kde M_R = momentová únosnost průřezu, M_E = maximální moment uprostřed rozpětí od účinků spojitého zatížení na prostém nosníku, w_{pl} = plastický modul průřezu, f_y = mez kluzu oceli, g = spojitě zatížení od vlastní tíhy konstrukce a q = spojitě zatížení od nahodilého zatížení.

b) překročením limitní hodnoty průhybu (2. mezní stav).

$$\begin{aligned} Z &= w_{lim} - w \\ R &= w_{lim} = \frac{l}{200}, \quad E = w = \frac{5}{348} \frac{(g + q) l^4}{EI} \end{aligned} \quad (5.2)$$

kde w_{lim} = maximální dovolený průhyb nosníku, w = průhyb nosníku od zatížení, l = délka nosníku, E = modul pružnosti a I = moment setrvačnosti průřezu.

5.2.2 Zadání vstupních hodnot

Nyní se budeme zabývat částí pro zadání vstupních hodnot „Stochastic model – Random Variables“. Z rovnic 5.1 a 5.2 vybereme proměnné, které budeme chtít definovat jako náhodné veličiny. Těmto veličinám přiřadíme typ a parametry pravděpodobnostního rozdělení (viz tab. 5.1). Hodnoty variačního koeficientu (CoV) jsou převzaty z doporučení JCSS (2001). Veličiny jsou rozděleny do dvou kategorií: veličiny pro výpočet účinků od zatížení E a veličiny pro výpočet odolnosti konstrukce R . Pomocí tlačítka „New“ (obr. 5.2), ze skupiny tlačítek „Category“, vytvoříme novou kategorii, kterou si pojmenujeme E (volíme krátké a jasné názvy) a stejným způsobem vytvoříme kategorii R . Vytvořili se nám dvě nové záložky a do každé

E – účinky od zatížení					
Name		Distribution	Mean	Std	CoV
q	kN/m	Lognormal (2 par)	4	0.6	0.15
g	kN/m	Normal	2.9	0.2175	0.075
L	m	Normal	3.25	0.00325	0.001
R – odolnost konstrukce					
Name		Distribution	Mean	Std	CoV
w_{pl}	m ³	Normal	$6.36 \cdot 10^{-5}$	$2.54 \cdot 10^{-6}$	0.04
f_y	MPa	Lognormal (2 par)	265	18.55	0.07
E	GPa	Lognormal (2 par)	220	6.6	0.03
I_y	m ³	Normal	$3.27 \cdot 10^{-3}$	$3.27 \cdot 10^{-6}$	0.001

Tab. 5.1: Tabulka náhodných veličin a jejich parametrů

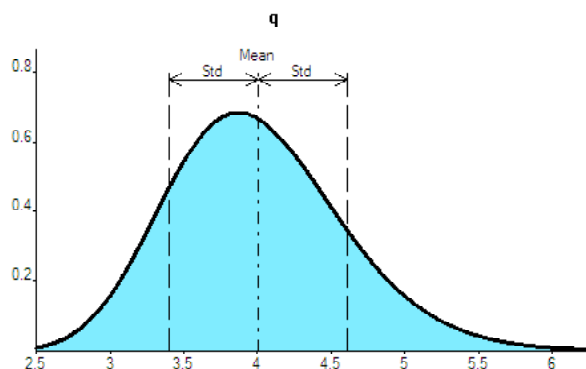
z nich vložíme pomocí tlačítka „New“, ze skupiny tlačítek „Variable“, náhodné veličiny z tabulky 5.1. Do prvního sloupce „Name“ zadáme název náhodné veličiny (např. q), ve sloupci „Distribution“ zvolíme pravděpodobnostní rozdělení (např. Lognormal (2 par)), v dalším sloupci vybereme způsob zadání parametrů rozdělení (např. moments), do sloupce „Mean“ zadáme střední hodnotu náhodné veličiny (např. 5) a nakonec zadáme hodnotu „Std“ nebo „CoV“ (např. 1 nebo 0.2). V případě, že by mělo pravděpodobnostní rozdělení více parametrů zadáme ještě další hodnoty (např. Skewness, Kurtosis).

Zadání korelace mezi náhodnými veličinami se provádí v kategorii „Statistical correlation“ pomocí korelační matice (obr. 5.3). V zadané úloze budeme uvažovat náhodné veličiny statisticky nezávislé a korelační matice bude jednotková.

5.2.3 Generování hodnot a jejich kontrola

V položce „General Data“ (obr. 5.4) nastavíme v poli „Number of simulations“ počet simulací. Pro počáteční výpočty volíme spíše menší hodnotu (100–1000) a až po odladění úlohy zvolíme vyšší hodnotu pro konečný výpočet. V kategorii „Sampling type“ vybereme metodu pro generování náhodných čísel (popis metod viz část 4.2). Další kategorie „Simulated annealing“ slouží pro nastavení parametrů metody simulovaného žitání pro kontrolu korelace mezi vstupními veličinami, pro běžné použití je

Category			Variable			Distribution support calculation			Digits		Plot		Parameter
New	Name	Delete	New	Insert	Delete	Database	Raw Data	Details	5		☒ PDF	☐ CDF	
E													
R													
Comparative values													
#	Name	Distribution	Descriptors	Mean	Std	COV	Skewness	Kurtosis excess	Status				
1	q	Lognormal (2 par)	Moments	4	0.6	0.15	0.45337	0.36766	O.K.				
2	g	Normal	Moments	2.7	0.2025	0.075	0	0	O.K.				
3	L	Normal	Moments	3	0.003	0.001	0	0	O.K.				



Obr. 5.2: Zadání náhodných veličin a hustota pravděpodobnosti (NV q)

Correlation coefficient		Pearson		Spearman	
E		R		Comparative values	
				All variables	
	q	q	L		
q	1	0	0		
g	0	1	0		
L	0	0	1		

Obr. 5.3: Zadání korelační matice

vhodné nechat výchozí nastavení. Pokud máme vše nastaveno, pak můžeme pomocí tlačítka „Run“ vygenerovat realizace zadaných náhodných veličin.

Number of simulations 1000	Simulated annealing ☒ Default parameters	
Sampling type ☒ LHS mean ☐ LHS median ☐ LHS random ☐ Monte Carlo	☒ Random sampling first No. of loops 280000	Automatic stop ☒ $\ C - C^*\ < 4.2e-006$ ☐ And ☐ Or ☒ $ C_i - C^* < 0.001$
	SA parameters Loops per T 0	
	Tmax 0.05 Tmin 0.05	Seed ☒ Random ☐ Fixed 0
	☐ Comparative values only Run	

Obr. 5.4: Nastavení pro generování realizací náhodných veličin

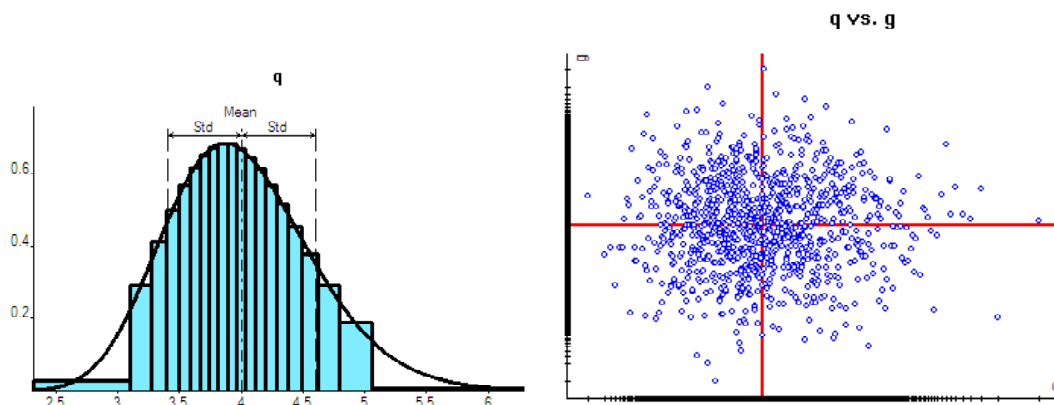
Pod položkou „Check variables data“ si můžeme přímo prohlédnout všechny

vygenerované hodnoty uspořádané do tabulky. Vybrané hodnoty (sloupce, řádky, buňky) můžeme pomocí „Ctrl+C“ kopírovat.

Další možností pro kontrolu dat je položka „Check samples“, kde v pravé dolní části nalezneme korelační matici (obr. 5.5): zeleně označené hodnoty jsou námi požadované korelace a červeně označené hodnoty jsou skutečné korelace mezi vygenerovanými hodnotami. Při výběru hodnoty na diagonále se nám v grafickém okně (obr. 5.6) zobrazí histogram z realizací náhodné veličiny spolu se zadaným pravděpodobnostním rozdělením (pomocí přepínače „PDF“ a „CDF“ můžeme přepínat mezi hustotou a distribuční funkcí). Výběrem mimodiagonálního členu se zobrazí bodový graf náhodné veličiny daného řádku (osa x) vs. sloupce (osa y).

☐ Numbers	Digits 5	☒ Cartesian Coordinates	☒ PDF	$g(X) \leq 0$
		☐ Parallel Coordinates	☐ CDF	Not drawn
E	R	Comparative values	All variables	
	q	q	L	
q	1	0	0	
q	0.0025603	1	0	
L	-0.0035445	0.0064942	1	

Obr. 5.5: Skutečná korelační matice: zeleně – požadovaná korelace, červeně – dosažená korelace mezi náhodnými veličinami

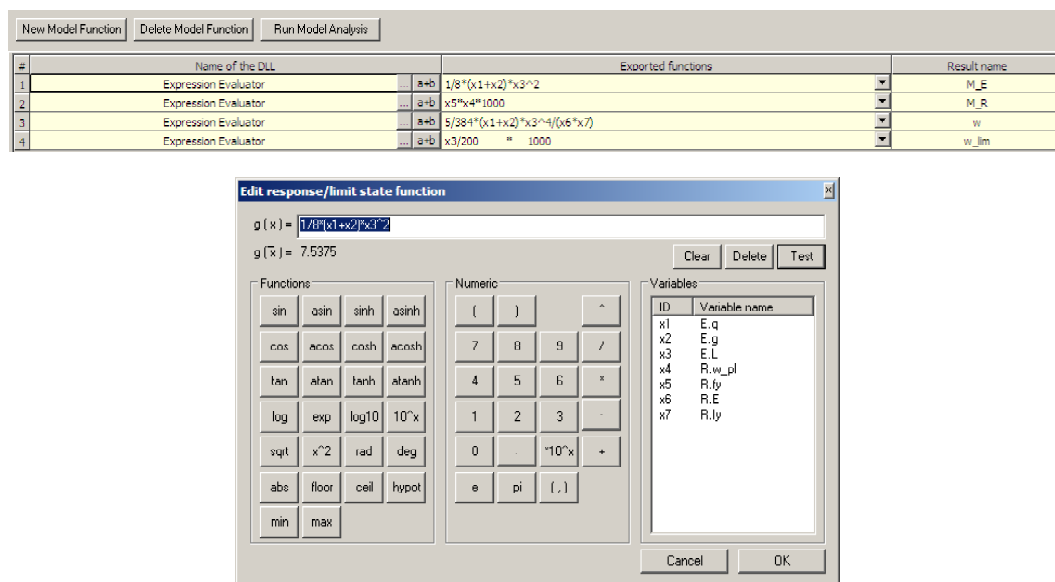


Obr. 5.6: Kontrola nagenerovaných hodnot

5.2.4 Zadání a výpočet funkce odezvy

Zadání a výpočet funkce odezvy provádíme v kategorii „Model Analysis“ (obr. 5.7). Pomocí tlačítka „New Model Function“ vytvoříme novou funkci, kterou si můžeme

pojmenovat v posledním sloupci „Result name“ (např. M_E, M_R). Zadáním funkce pomocí tlačítka „...“ se budeme zabývat později v příkladu 6.2, nyní funkci zadáme tlačítkem „a+b“. Při kliknutí na toto tlačítko se otevře grafický kalkulátor (obr. 5.7 dole), kde nalezneme základní funkce, které nám postačí pro zadání většiny jednoduchých funkcí. Funkci můžeme zadávat pomocí jednotlivých tlačítek nebo přímo vepisováním hodnot do vstupního řádku „g(x)“. Náhodné veličiny jsou vypsány v pravé tabulce „Variables“ a mají označení „ID“ x1,x2,..., které se používá pro zadání funkce. Zadání se provádí vepsáním „ID“ do vstupního řádku nebo dvojitým poklikáním na „ID“ náhodné veličiny. Pro kontrolu správnosti funkce je vhodné použít tlačítko „Test“, které zadanou funkci vyřeší pro zadané střední hodnoty (Mean) a výsledek „g($\bar{x}$)“ zobrazí pod vstupním řádkem.

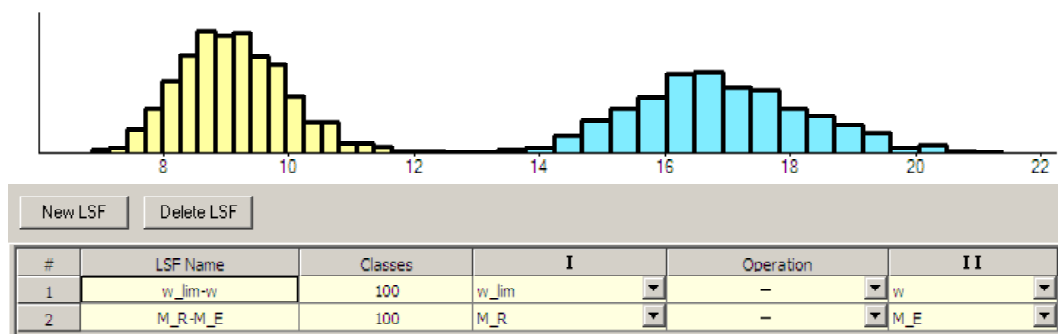


Obr. 5.7: Zadání funkce odezvy

5.2.5 Výstupy analýzy

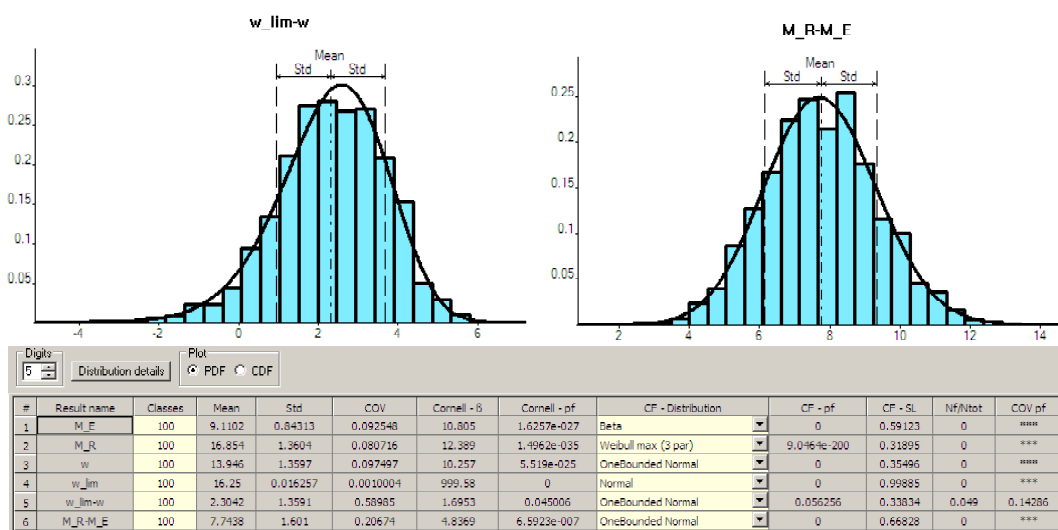
Pro posouzení potřebujeme získat *rezervu spolehlivosti*, kterou můžeme zadat přímo v editoru rovnic nebo pod položkou „LSF definition“, jejíž část je zobrazena na obrázku 5.8. V tabulce se zadává vztah mezi odolností konstrukce a účinky zatížení pro získání rezervy spolehlivosti.

Pod položkou „Histogram“ si můžeme v grafickém okně prohlédnout histogramy hodnot z vypočtených funkcí a v tabulce nalezneme číselné charakteristiky souboru těchto dat.



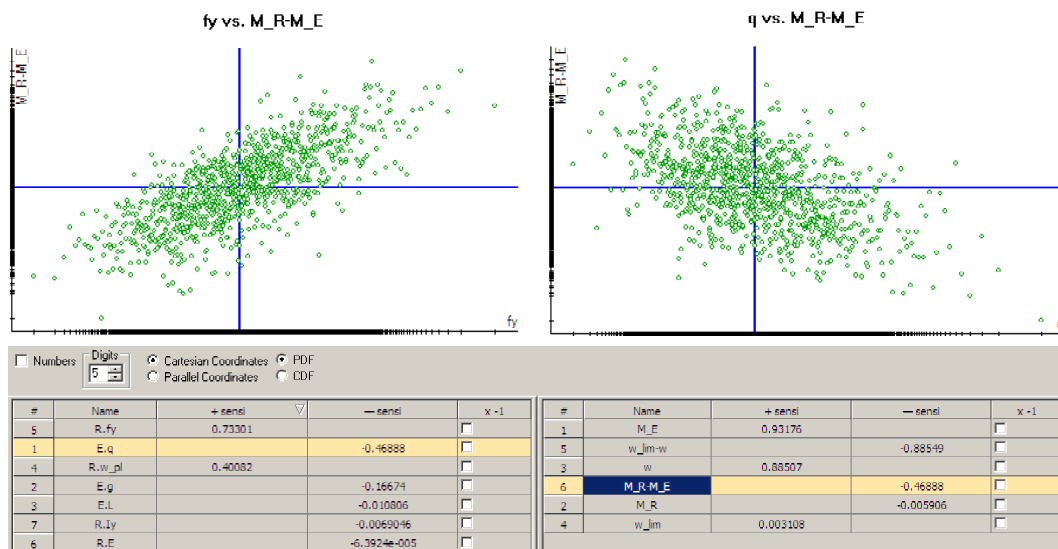
Obr. 5.8: Okno „LSF definition“

Pod položkou „Reliability“ (obr. 5.9) nalezneme tabulku podobnou té u histogramu, která navíc obsahuje funkce rezervy spolehlivosti vytvořené pod nabídkou „LSF definition“. V tabulce nalezneme základní statistiky, index spolehlivosti β podle Cornella (viz část 4.1) a jemu odpovídající pravděpodobnost poruchy p_f , pravděpodobnostní rozdělení uspořádaná podle testu dobré shody, pravděpodobnost poruchy podle vybraného rozdělení (včetně hladiny významnosti) a pravděpodobnost poruchy podle vztahu n_f/n_{tot} .



Obr. 5.9: Okno „Reliability“

Pod položkou „Sensitivity“ se skrývá citlivostní analýza (obr. 5.10). V tabulce jsou uvedeny korelační koeficienty (Spearman) mezi výslednou funkcí a vstupními náhodnými veličinami. Na dvou horních obrázcích jsou grafy s pozitivní (mez kluzu vs. rezerva spolehlivosti) a negativní (nahodilé zatížení vs. rezerva spolehlivosti) korelací.



Obr. 5.10: Okno „Sensitivity“

5.2.6 Vyhodnocení získaných výsledků

Konečné posouzení se provede porovnáním směrných hodnot pravděpodobnosti poruchy dle příslušných norem (viz část 4.3) s hodnotami teoretických pravděpodobností stanovených na základě aproximační metody FORM a simulačních metod MC a LHS v závislosti na počtu simulací (viz tabulka 5.2).

U posouzení na únosnost se jedná o odhad velmi malých pravděpodobností a jediné použitelné řešení je metoda FORM nebo metodu Monte Carlo s velkým počtem simulací nebo se uchýlit k odhadu pomocí pravděpodobnostního rozdělení získaného momentovou metodou a testem dobré shody. Posouzení na použitelnost nevyžaduje tak přísnou podmínku a je tedy řešitelný všemi uvedenými postupy. Zadaný ocelový nosník I120 vyhoví a) z pohledu mezního stavu únosnosti

$$p_f = 5.9 \cdot 10^{-7} < p_d = 7.23 \cdot 10^{-5}$$

b) z pohledu mezního použitelnosti:

$$p_f = 0.053 < p_d = 6.68 \cdot 10^{-2}$$

Posouzení na únosnost			
Metoda	p_f	$p_f = \frac{N_f}{N_{\text{tot}}}$	$COV(p_f)$
LHS mean $n = 100$	$7.21 \cdot 10^{-7} \mathcal{N}^*$		nelze
LHS mean $n = 1000$	$6.40 \cdot 10^{-7} \mathcal{N}^*$		nelze
LHS mean $n = 10\,000$	$1.24 \cdot 10^{-7} \ln \mathcal{N} \text{ 3par}^*$		nelze
LHS mean $n = 100\,000$	$1.20 \cdot 10^{-7} \ln \mathcal{N} \text{ 3par}^*$		nelze
Monte Carlo $n = 10 \cdot 10^6$			nelze
Monte Carlo $n = 10 \cdot 10^{10}$		$6 \cdot 10^{-7}$	0.41
Monte Carlo $n = 100 \cdot 10^{10}$		$6.7 \cdot 10^{-7}$	0.12
FORM	$5.9 \cdot 10^{-7}$		
Posouzení na použitelnost			
Metoda	p_f	$p_f = \frac{N_f}{N_{\text{tot}}}$	$COV(p_f)$
LHS mean $n = 100$	$0.054 \mathcal{N} \text{ 3par}^*$	0.05	0.45
LHS mean $n = 1000$	$0.055 \ln \mathcal{N} \text{ 3par}^*$	0.049	0.14
LHS mean $n = 10\,000$	$0.054 \ln \mathcal{N} \text{ 3par}^*$	0.054	0.04
LHS mean $n = 100\,000$	$0.054 \ln \mathcal{N} \text{ 3par}^*$	0.053	0.01
Monte Carlo $n = 1 \cdot 10^6$		0.054	0.004
Monte Carlo $n = 10 \cdot 10^6$		0.054	0.0014
FORM	0.053		

*curve fitting – aproximace rozdělení nejvhodnějším rozdělením na základě momentové metody a testu dobré shody

Tab. 5.2: Hodnoty pravděpodobnosti poruchy pro posouzení na mezní stav únosnosti a použitelnosti získané různými způsoby dostupnými v programu FReET.

6 APLIKACE PRAVDĚPODOBNOSTNÍCH METOD PŘI NAVRHOVÁNÍ KONSTRUKCÍ

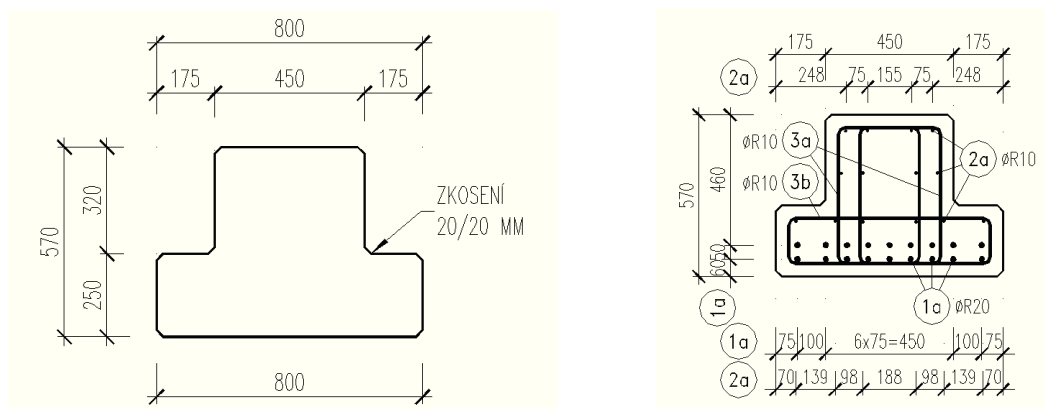
6.1 FReET

Příklad 6.1– Železobetonový průvlak

Předmětem pravděpodobnostního výpočtu je ověření únosnosti ŽB průvlaku T-průřezu (obr. 6.1), který je součástí skeletového systému dvoupatrové prefabrikované montované výrobní haly. Prvek působí jako prostý nosník o efektivním rozpětí 7.75 m.

Původní návrh byl proveden v souladu s EC1 a EC2. Intenzita užitého zatížení byla uvažována hodnotou 3.5 kN/m^2 . Následným požadavkem uživatele bylo navýšení hodnoty užitého zatížení o 1.5 kN/m^2 . Dodatečným výpočtem bylo prokázáno, že prvek již nesplňuje elementární podmínku spolehlivosti návrhu při porušení ohybovým momentem, kdy $M_{Ed} < M_{Rd}$.

Plně pravděpodobnostním výpočtem bude stanovena hodnota pravděpodobnosti poruchy p_f a zobecněný index spolehlivosti β .



Obr. 6.1: Tvar a výztuž ŽB průvlaku

Zatížení, stanovení funkce účinku zatížení

Pravděpodobnostní modely uvažované pro výpočet funkce zatížení E byly voleny v souladu s doporučeními mezinárodní organizace JCSS (2001) včetně modelových nejistot a jsou souhrnně uvedeny v tab. 6.1. V případě dlouhodobého nahodilého zatížení pro lehký průmysl je nutné stanovit směrodatnou odchylku pro dlouhodobou

složku užitého zatížení dle vztahu

$$\sigma_{q,gl}(u) = \sqrt{\sigma_v^2 + \sigma_v^2 \frac{A_0}{A} \chi}$$

kde A_0 je referenční plocha (100 m²), A je zatěžovací plocha haly (350 m²) z níž se počítá účinek zatížení a χ koeficient okrajových podmínek a tvaru konstrukce.

i	Veličina		Typ PDF	Mean _{i}	CoV _{i}
1	Konstrukce stropu	g_1 [kN/m ²]	Normal	3.70	0.05
2	Podlaha	g_2 [kN/m ²]	Normal	2.4	0.10
3	Železobeton	g_0 [kN/m ³]	Normal	24.5	0.10
4	Rozpětí strop. pole	l [m]	Normal	7.5	0.01
5	Průřezová plocha průvlaku	A [m ²]	Normal	0.343	0.01
6	Nahodilé dlouhodobé zat.	q_{lt} [kN/m ²]	Gamma	1.0	1.80
7	Ef. délka průvlaku	L_{ef} [m]	Normal	7.75	0.01
8	Modelové nejistoty	ξ_E [-]	Lognorm. (2 par)	1.0	0.10

Účel stavby	A_0 [m ²]	dlouhodobé zatížení				krátkodobé zatížení			
		μ_{lg} [kN/m ²]	σ_v [kN/m ²]	σ_u [kN/m ²]	$1/\lambda$ [a]	μ_{st} [kN/m ²]	σ_U [kN/m ²]	$1/\nu$ [a]	d_p [d]
Sklady	100	1.0	1.0	2.8	5–10				

Tab. 6.1: Pravděpodobnostní modely pro stanovení účinku zatížení

Funkce zatížení pro ohýbaný prvek – ohybový moment

$$E = \xi_E \frac{1}{8} (g_1 + g_2 + q_{lt}) l L_{ef}^2 + \xi_E \frac{1}{8} A g_0 L_{ef}^2 + \xi_E \frac{1}{8} (g_2 + q_{lt}) L_{ef}^2$$

Stanovení funkce odolnosti

Funkce odolnosti R je definována pro případ ohybového porušení betonového průřezu. Jako náhodné proměnné jsou uvažovány ve výpočtu geometrické odchylky průřezu, materiálové parametry a modelové nejistoty odolnosti v souladu s [JCSS \(2001\)](#) souhrnně uvedeny v tab. 6.2.

Funkce odolnosti pro ohýbaný prvek – ohybový moment

$$R = \xi_R f_y A_s \left[(h - a_s) - 0.5 \frac{f_y A_s}{f_c b} \right]$$

i	Veličina			Typ PDF	Mean _{i}	CoV _{i}
1	Šířka	b	[m]	Normal	0.450	0.01
2	Výška	h	[m]	Normal	0.570	0.01
3	Poloha bet. výztuže*	a_s	[m]	Normal	0.085	0.18
4	Plocha bet. výztuže	A_s	[mm ²]	Normal	5283.0	0.03
5	Tlaková pevnost	f_c	[MPa]	Lognorm. (2 par)	43.0	0.06
6	Tahová pevnost	f_y	[MPa]	Lognorm. (2 par)	580	0.05
7	Únosnost v ohybu	ξ_R	[-]	Lognorm. (2 par)	1.2	0.15

*Poloha betonářské výztuže je omezena intervalem $\langle 0.05, 0.10 \rangle$

Tab. 6.2: Pravděpodobnostní modely pro stanovení funkce odolnosti R

Stanovení funkce rezervy odolnosti

Funkce rezervy odolnosti je dána ve tvaru:

$$Z = R - E$$

Spolehlivost konstrukce je vyjádřena hodnotou zobecněného indexu spolehlivosti β stanoveného na základě teoretické pravděpodobnosti poruchy p_f . Výsledky jsou souhrnně uvedeny v tab. 6.3. Je zřejmé, že přesnost odhadu teoretické pravděpodobnosti poruchy v případě simulačních metod je do značné míry dána počtem provedených simulací a použitou technikou.

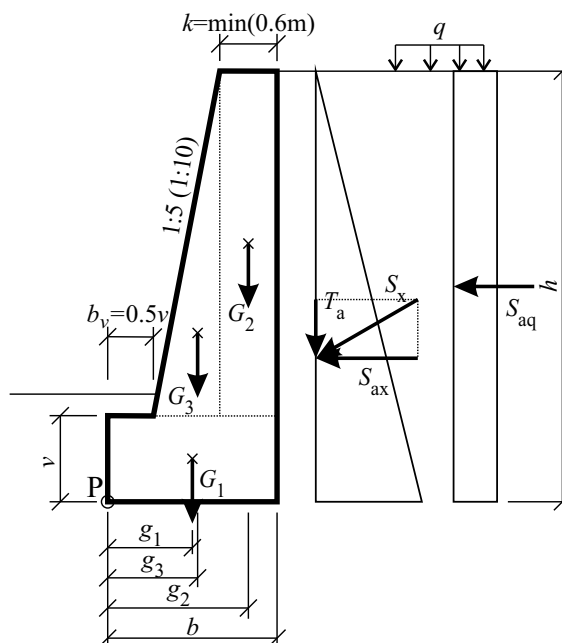
Požadovaná hodnota indexu spolehlivosti dle ČSN EN 1990 pro nosný prvek třídy RC2 je pro referenční období 50 let a mezní stav únosnosti $\beta_d = 3.8$. Hodnota teoretické pravděpodobnosti poruchy je $p_d = 7.2 \cdot 10^{-5}$. Z tabulky 6.3 vyplývá, že index spolehlivosti stanovený na základě metody FORM a na základě přímých metod Monte Carlo a LHS je menší než požadovaný. Je zřejmé, že zvýšením hodnoty nahodilého zatížení o 1.5 kN/m² na hodnotu 5.0 kN/m², což odpovídá 95% kvantilu z hustoty pravděpodobnosti nahodilého dlouhodobého zatížení, dojde ke zvýšení úrovně teoretické pravděpodobnosti poruchy na $p_f = 5.4 \cdot 10^{-4}$.

Metoda	Index spolehlivosti β	Teor. pravděp. poruchy p_f	Pravděp. poruchy $p_f \approx N_f/N_{\text{tot}}$ (CoV)
FORM	3.271	0.000535	
MC (10^5 simulací)	3.264		0.000550 (0.134)
MC (10^6 simulací)	3.278		0.000523 (0.044)
LHS (10^4 simulací)	3.432		0.000300 (0.577)
LHS (10^5 simulací)	3.280		0.000520 (0.138)
LHS (10^6 simulací)	3.275		0.000529 (0.044)

Tab. 6.3: Hodnoty indexu spolehlivosti, teoretické pravděpodobnosti poruchy a pravděpodobnost poruchy dle metody FORM, MC a LHS.

Příklad 6.2– Posouzení gravitační zdi

Posuďte opěrnou stěnu na únosnost v základové spáře. Tvar stěny je znázorněn na obrázku 6.2.



Obr. 6.2: Schéma opěrné stěny a zatížení

Náhodné veličiny

Jako náhodné veličiny budeme uvažovat materiálové parametry γ_m = objemová tíha stěny a γ_z = objemová tíha zeminy, φ = úhel vnitřního tření zeminy a spojité přetížení q za rubem stěny. Rozměry stěny budeme uvažovat konstantní a jejich názvy jsou vyznačeny na obrázku 6.2.

Name	Distribution	Mean	Std	CoV	
b	Deterministic	0.8			
γ_m	Normal	24	1.2	0.05	
q	Normal	4	0.4	0.1	
φ	TwoBounded Normal	33	4.95	0.15	$a = 31 \quad b = 36$
γ_z	Normal	20	2	0.1	

Posouzení opěrné stěny na únosnost v základové spáře provedeme podle následujícího postupu a uvedených vzorců. Označení geometrických rozměrů a sil je zřejmé

z obrázku 6.2. Stěna je rozdělena na tři geometrické části, pro které vypočítáme vlastní tíhu a polohu těžiště od přední hrany základu (bod P) podle následujících vztahů:

$$G_1 = vb\gamma_m \quad G_2 = k(h-v)\gamma_m \quad G_3 = \frac{1}{2}(h-v)\left(k + \frac{h}{10}\right)\gamma_m$$

$$G = G_1 + G_2 + G_3$$

$$g_1 = \frac{1}{2}b \quad g_2 = b - \frac{1}{2}k \quad g_3 = b_v + \frac{2}{3}(b - b_v - k)$$

Dále si vypočteme síly od zatížení zeminou, budeme uvažovat pouze aktivní zemní tlak za rubem stěny (pasivní tlak zeminy před konstrukcí stěny zanedbáme). Výslednice horizontálního účinku aktivního zemního tlaku působící na stěnu v jedné třetině výšky h :

$$S_{ax} = \frac{1}{2}\gamma_z h^2 K_a \quad K_a = \tan^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Výslednice od spojitého přetížení za rubem stěny v jedné polovině výšky h :

$$S_{aq} = qK_a h$$

Svislý účinek zeminy na stěnu:

$$T_a = S_{ax} \tan \delta \quad \delta = \left(\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}\right) \varphi$$

Moment k bodu P působící na stěnu:

$$M_a = G_1 g_1 + G_2 g_2 + G_3 g_3 - \frac{1}{3}h S_{ax} - S_{aq} \frac{h}{2} + T_a b$$

Svislá výslednice působící na základovou zeminu:

$$V = G + T_a$$

Efektivní plocha mezi základem a zeminou:

$$A_{ef} = b_{ef} \cdot 1 = (b - 2e) \cdot 1 \quad e = \frac{1}{2}b - a \quad a = \frac{M_a}{V}$$

Posouzení únosnosti v základové spáře provedeme podle následující nerovnosti:

$$\sigma = \frac{V}{A_{ef}} < R,$$

kde σ je napětí v základové spáře od zatížení působícího na stěnu, které musí být menší než únosnost základové půdy R . Únosnost základové půdy budeme pro zjednodušení uvažovat jako náhodnou veličinu zadanou pomocí pravděpodobnostního rozdělení.

Z důvodu velkého množství mezivýpočtů využijeme možnosti nahrát algoritmus implementovaný pomocí dynamické knihovny DLL vytvořené v C++ . Pro vytvoření souboru DLL je nejvhodnější využít předpřipravenou šablonu ze složky „Freet\Examples\Reference Projects\Function C++ “. Při použití řádku pro zadání rovnice bychom museli ze všech vztahů sestavit jeden dlouhý vztah pro výpočet napětí v základové spáře. Tato rovnice by byla velmi dlouhá, nepřehledná (veličiny značeny pouze jako x_i) a těžko opravitelná při jakékoliv chybě.

Zdrojový kód funkce pro výpočet napětí v základové spáře σ viz Zdrojový kód 6.1. Data z programu FReET jsou uložena v poli *input*. Pro lepší přehlednost zdrojového kódu si nejprve jednotlivé členy pole uložíme do pojmenovaných proměnných. A poté vytvoříme posloupnost výpočtů, jako je uveden v předchozích rovnicích.

Zdrojový kód 6.1: Zdrojový kód v C++ pro výpočet napětí v základové spáře.

```
__declspec(dllexport) double __stdcall sigma_v(int *num, double
    *input) {
    // nacteni a pojmenovani vstupnich hodnot
    double k = input[0]; // sirka na vrcholu steny
    double gamma_m = input[1]; // objemova tiha materialu steny
    double q = input[2]; // spojite zatizeni za stenou
    double phi = input[3]; // uhel vnitřního treni
    double gamma_z = input[4]; // objemova tiha zeminy
    double h = 6.0; // vyska steny
    double v = 1.2; // vyska zakladu
    double sklon = 5; // sklon lice steny 1:5 az 1:10

    // vypocet pomocnych hodnot pro vypocet napeti
    // v zakladove spare od zemního tlaku
    // a spojitěho pritizeni za gravitacni stenou
    double bv = 0.5 * v; // sirka predsazeni zakladu
    double b = k + bv + h / sklon; // sirka zakladu

    double G1 = v * b * gamma_m;
    double G2 = k * (h - v) * gamma_m;
    double G3 = 1 / 2.0 * (h - v) * (k + h / sklon) * gamma_m;
    double G = G1 + G2 + G3; // vlastni tiha steny

    // ramena vlastnich tih k bodu P
    double g1 = 1 / 2.0 * b;
    double g2 = b - 1 / 2.0 * k;
    double g3 = bv + 2 / 3.0 * (b - bv - k);
```

```

// soucinitel aktivního zemního tlaku
double K_a = pow((tan((45.0 - 0.5 * phi) / 180.0 * PI)), 2);

// síla od zemního tlaku
double S_ax = 0.5 * gamma_z * pow(h, 2) * K_a;
double S_aq = q * K_a * h;

// zanedbáno
double delta = 1/2.0 * phi; // 1/3 až 1/2 * phi
double T_a = S_ax * tan(delta / 180. * PI);

double V = G + T_a;
double M = G1 * g1 + G2 * g2 + G3 * g3 - S_ax * h / 3.0 -
    S_aq * h / 2.0 + T_a * b;
double a = M / V;
double e = 1 / 2.0 * b - a; // excentricita
double A_ef = b - 2.0 * e; // efektivní plocha

// napětí v základové spáře
double sigma_v = V / A_ef;

return sigma_v;
}

```

Kód se poté zkompile a vznikne soubor dynamické knihovny DLL, která se do programu FReET naimportuje „Sampling/Simulation“ → „Model Analysis“ → „...“.

Výsledky

Navržená stěna vyhoví na únosnost v základové spáře, hodnoty pravděpodobnosti poruchy jsou uvedeny v tabulce 6.4. Pravděpodobnosti určené pomocí simulací Monte Carlo a LHS byly určeny pouze přibližně za předpokladu normálně rozdělené rezervy spolehlivosti Z .

Metoda	p_f
FORM	$2.718 \cdot 10^{-6}$
LHS (1000)	$1.625 \cdot 10^{-6}$ (Normal)
MC (1000)	$2.017 \cdot 10^{-6}$ (Normal)
LHS (100 000)	$1.632 \cdot 10^{-6}$ (Normal)
MC (100 000)	$1.478 \cdot 10^{-6}$ (Normal)

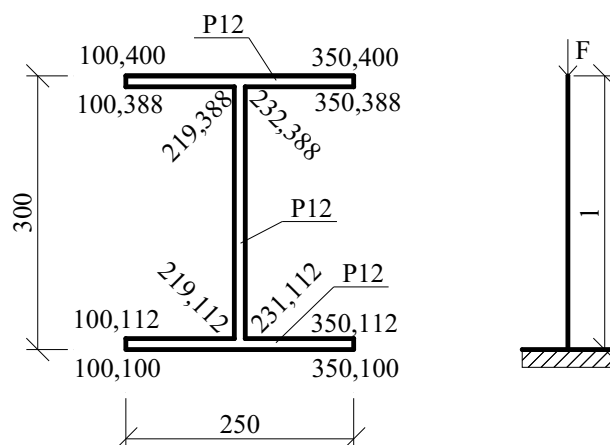
Tab. 6.4: Výsledné pravděpodobnosti poruchy opěrné stěny získané různými metodami.

Příklad 6.3– Vzpěr ocelového svařovaného I-profilu

Tento příklad se bude zabývat výpočtem průřezových charakteristik svařovaného I-profilu ze souřadnic a určením Eulerovy kritické síly pro různé délky sloupu. Budeme uvažovat dokonalý prut bez imperfekcí. Sloup je uvažován jako dokonale vetknutý a je zatížen normálovou silou v ose průřezu. Určete pravděpodobnost vybočení prutu při zatížení silou $F = 5$ kN (síla má lognormální rozdělení s variačním koeficientem $\text{CoV} = 0.1$).

Model

Sloup tvoří svařovaný I-profil z oceli S235. Pásnice a stojina nosníku jsou z plechu tloušťky 12 mm, výška profilu je 300 mm a šířka 250 mm. Tvar průřezu je zadán souřadnicemi uzlů, budeme uvažovat tři různé délky sloupu 2.5 m, 5 m a 10 m.



Obr. 6.3: I-profil (vlevo), statické schéma (uprostřed)

Náhodné veličiny

V tabulce 6.5 jsou uvedeny veličiny vstupující do výpočtových vztahů. První řádek slouží pouze pro načtení hodnot pomocí cyklu (if) a udává počet uzlů průřezu. Následují hodnoty souřadnic x a y . Poloha všech souřadnic je znáhodněna malým posunem ve směru os x a y . Souřadnice musí být zadány proti směru chodu hodinových ručiček. Další náhodné veličiny jsou modul pružnosti oceli E a délka nosníku L . Všechny náhodné veličiny jsou uvažovány jako statisticky nezávislé (korelační matice je jednotková). Hodnoty variačních koeficientů jsou převzaty z doporučení JCSS (2001).

Name	Distribution	Mean	Std	COV	Min	Max
n	Deterministic	12				
x1	TwoBounded Normal	0.1	0.0001	0.001	0.098	0.102
y1	TwoBounded Normal	0.1	0.0001	0.001	0.098	0.102
x2	TwoBounded Normal	0.35	0.00035	0.001	0.348	0.352
y2	TwoBounded Normal	0.1	0.0001	0.001	0.098	0.102
x3	TwoBounded Normal	0.35	0.00035	0.001	0.348	0.352
y3	TwoBounded Normal	0.112	0.000112	0.001	0.11	0.114
x4	TwoBounded Normal	0.231	0.000231	0.001	0.229	0.233
y4	TwoBounded Normal	0.112	0.000112	0.001	0.11	0.114
x5	TwoBounded Normal	0.231	0.000231	0.001	0.229	0.233
y5	TwoBounded Normal	0.388	0.000388	0.001	0.386	0.39
x6	TwoBounded Normal	0.35	0.00035	0.001	0.348	0.352
y6	TwoBounded Normal	0.388	0.000388	0.001	0.386	0.39
x7	TwoBounded Normal	0.35	0.00035	0.001	0.348	0.352
y7	TwoBounded Normal	0.4	0.0004	0.001	0.398	0.402
x8	TwoBounded Normal	0.1	0.0001	0.001	0.098	0.102
y8	TwoBounded Normal	0.4	0.0004	0.001	0.398	0.402
x9	TwoBounded Normal	0.1	0.0001	0.001	0.098	0.102
y9	TwoBounded Normal	0.388	0.000388	0.001	0.386	0.39
x10	TwoBounded Normal	0.219	0.000219	0.001	0.217	0.221
y10	TwoBounded Normal	0.388	0.000388	0.001	0.386	0.39
x11	TwoBounded Normal	0.219	0.000219	0.001	0.217	0.221
y11	TwoBounded Normal	0.112	0.000112	0.001	0.11	0.114
x12	TwoBounded Normal	0.1	0.0001	0.001	0.098	0.102
y12	TwoBounded Normal	0.112	0.000112	0.001	0.11	0.114
E	Weibull min (2 par)	290000	43500	0.15		
L	TwoBounded Normal	2.5	0.0025	0.001	2.44	2.51

Tab. 6.5: Tabulka proměnných a jejich pravděpodobnostní rozdělení

Výpočet

Průřezové charakteristiky jsou vypočteny ze souřadnic x a y podle vzorců 6.1–

6.5.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{vmatrix} \right) \quad (6.1)$$

$$f(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot x + \left(y_i - \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot z_i \right) \quad (6.2)$$

$$S_x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(y) \cdot y \, dy \quad S_y = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \cdot x \, dx \quad (6.3)$$

$$x_T = \frac{S_y}{A} \quad y_T = \frac{S_x}{A} \quad (6.4)$$

$$I_y = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \cdot x^2 \, dx \quad I_x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(y) \cdot y^2 \, dy \quad (6.5)$$

Výpočet vzpěrné síly je prováděn podle teorie pružnosti s využitím vzorce pro Eulerovu kritickou sílu (rovnice 6.6 viz např. skriptu Šmirák (1999)):

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}. \quad (6.6)$$

Výsledky

Hodnoty výsledných pravděpodobností vybočení sloupů různých délek podle různých metod při zatížení silou $F = 5$ kN (síla má lognormální rozdělení s variačním koeficientem $CoV = 0.1$) jsou uvedeny v tabulce 6.6. Odhad pravděpodobností je proveden přibližně s využitím hustoty pravděpodobnosti identifikované pomocí momentové metody a testu dobré shody.

Metoda	p_f (2.5 m)	p_f (5 m)	p_f (10 m)
LHS (1000)	$4.2 \cdot 10^{-5}$ (Weib min 3par)	0.85 (Beta)	1 (Lognorm 3par)
LHS (100 000)	$3.59 \cdot 10^{-5}$ (Weib min 3par)	0.85 (Lognorm 3par)	1 (Lognorm 3par)

Tab. 6.6: Výsledné pravděpodobnosti vybočení sloupů různých délek získané metodou LHS.

6.2 SARA

V této části se budeme zabývat dalším stupněm návrhu konstrukcí, tj. pravděpodobnostní návrh konstrukcí s využitím programů na bázi konečných prvků. Program SARA zprostředkovává komunikaci mezi programem FReET a ATENA (program založený na deformační variantě konečných prvků využívaný především pro nelineární analýzu betonových konstrukcí). Programem ATENA a jeho ovládáním se zde nebudeme zabývat. Zájemci se s tímto programem mohou setkat v jiných předmětech vyučovaných na Ústavu stavební mechaniky nebo využít podrobného uživatelského manuálu ([Červenka a Veselý, 2005](#)).

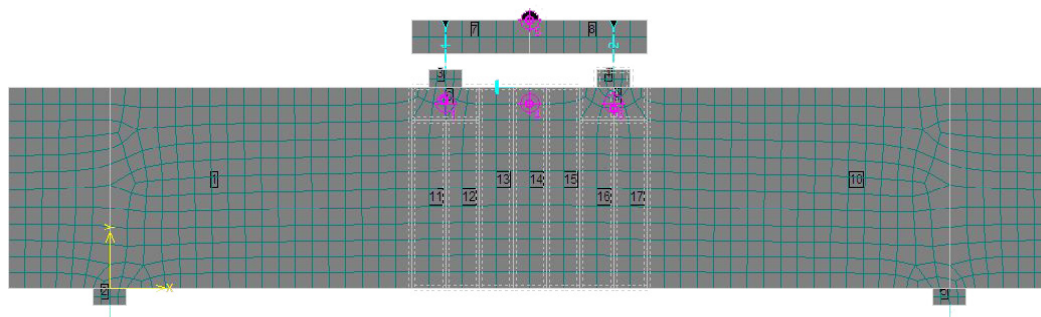
Je možné využít dvě varianty znáhodnění materiálových parametrů: a) konstantní vlastnost na celém makroprvku nebo b) pomocí autokorelovaného náhodného pole. V následujícím příkladu se budeme zabývat variantou a).

Příklad 6.4– Modelování zatěžovací zkoušky nosníku namáhaného čtyřbodovým ohybem

Úloha se zabývá statistickým vyhodnocením odezvy betonového nosníku o rozměrech $0.06 \times 0.06 \times 0.31$ m namáhaného čtyřbodovým ohybem. Vzdálenost podpor je 0.25 m. Nosník je zatěžován konstantním posunem uprostřed tuhé ocelové desky – vzdálenost hrotů přenášejících zatížení do nosníku je 0.05 m.

Prvním krokem je vytvoření základního modelu v programu ATENA. V oblasti poškození je nosník modelován sedmi makroprvky 11–17, jejichž tahová pevnost je znáhodněna.

Model je potřeba nejprve odladit, aby neobsahoval chyby a nastavit rozumný počet výpočtových kroků a jejich hustotu. Máme-li připravený základní soubor, můžeme přistoupit k zadání náhodných vlastností pomocí programu SARA.

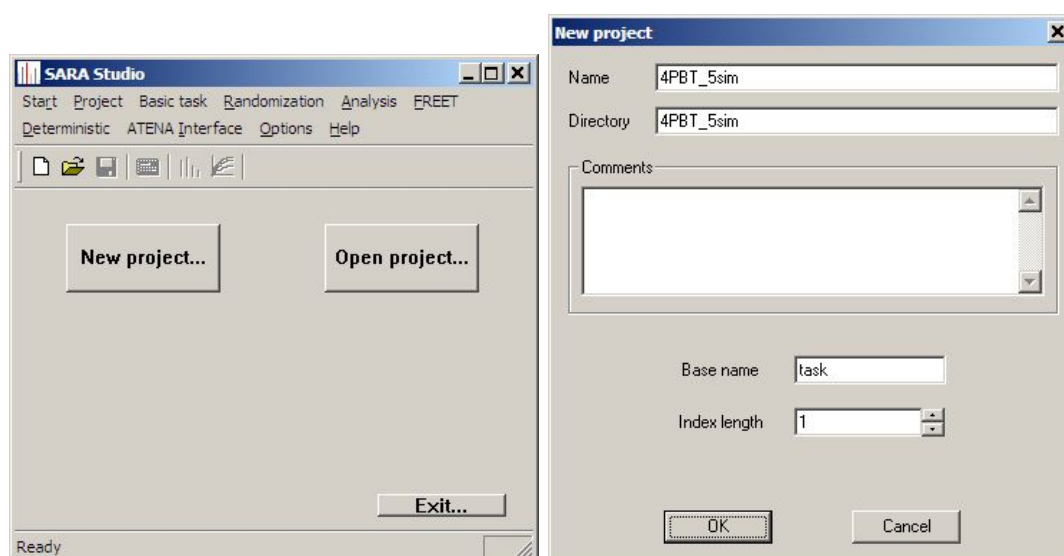


Obr. 6.4: Základní model připravený v programu Atena 2D.

Jako náhodná veličina je uvažována tahová pevnost sedmi makroprvků v tahové oblasti, která má dvouparametrické Weibullovo rozdělení se střední hodnotou $\mu = 2.807$ a variačním koeficientem $\text{CoV} = 0.1$.

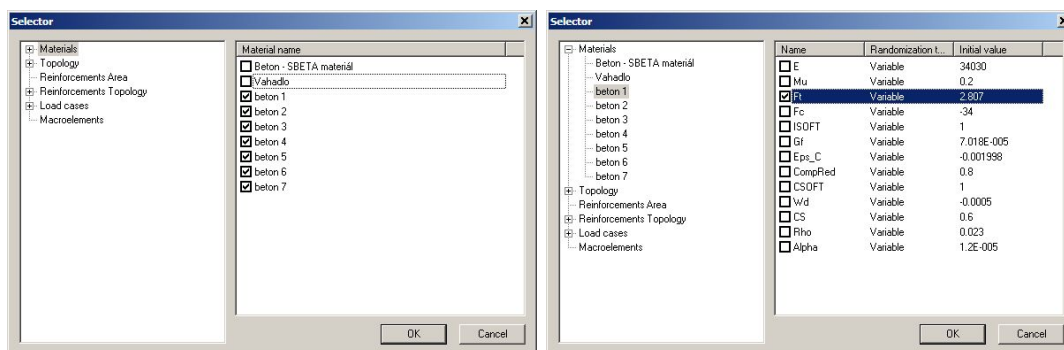
Zadání v programu SARA

Máme připravenou základní úlohu *4PBT_main.cc2* v programu Atena 2D. Spustíme *Sara studio* (obr. 6.5) a v nabídce *Options* vytvoříme cestu, kam se budou ukládat složky s našimi projekty (např. C:/user/prijmeni) a OK. V hlavním okně programu Sara klikneme na tlačítko *New project ...* a zvolíme název úlohy (např. 4PBT_5sim), název základní úlohy a počet čísel, které budou potřeba na indexování úloh (pro našich pět simulací stačí jedno místo) a OK. V nabídce přibude další tlačítko *Import basic.cc2*, pomocí kterého naimportujeme základní, odladěný model *4PBT_main.cc2*. Po naimportování úlohy se v nabídce objeví další dvě tlačítka *Se-*



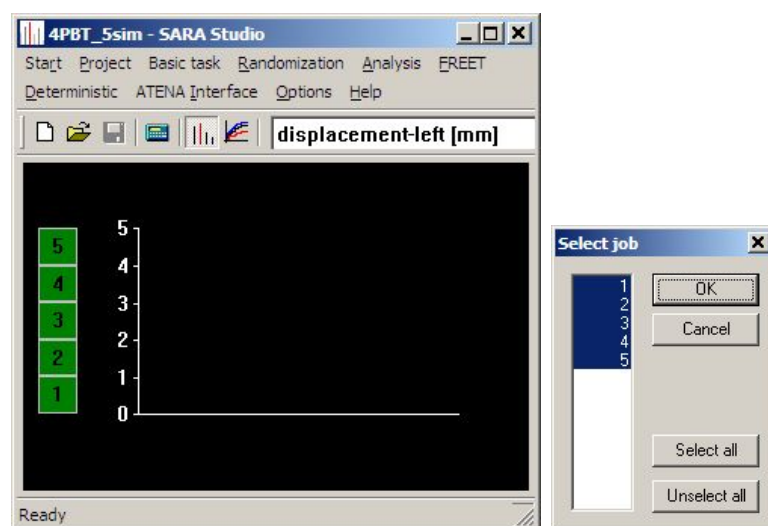
Obr. 6.5: Hlavní okno programu SARA (vlevo) a vytvoření a pojmenování nového projektu (vpravo).

lector a *Randomize materials*. V levé nabídce *Selectoru* se budeme věnovat pouze první položce *Materials* a necháme zaškrtnutí pouze u materiálů jejichž vlastnosti budou znáhodňovány (viz obr. 6.6). Rozkliknutím nabídky *Materials* u všech zaškrtnutých materiálů vybereme parametry, které budeme chtít znáhodňovat (v našem případě pouze *Ft*) a v druhém sloupečku necháme *variable*. A dále pokračujeme tlačítkem *Randomize materials*, kterým se nám spustí program FReET. V pravém dolním rohu jsou v tabulce záložky jednotlivých materiálů a jejich znáhodňovaných



Obr. 6.6: Výběr materiálů (vlevo) jejichž parametry budou některé parametry budou uvažovány jako náhodná veličina (vpravo volba těchto parametrů).

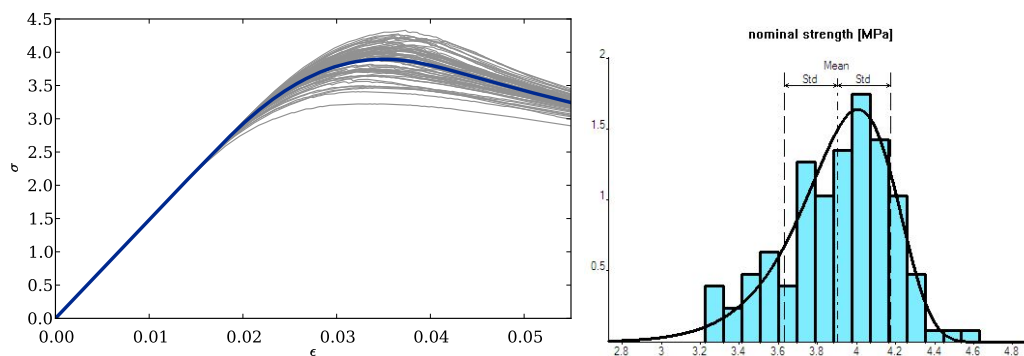
parametrů, u kterých zvolíme hustotu pravděpodobnosti a nastavíme střední hodnotu a směrodatnou odchylku. V případě potřeby je možné v položce *Statistical correlation* nastavit závislost mezi náhodnými veličinami (naše veličiny jsou nezávislé, a proto nebudeme měnit nastavení). Poslední krok v programu FReET je *Latin Hypercube Sampling/General Data*, kde v políčku *Number of simulations* zadáme pro naši úlohu 5 simulací a vybereme metodu generování vzorků (např. LHS mean). A stisknutím tlačítka *Run* se nám vygenerují hodnoty parametrů. Poklikáním na položku *Model analysis* se spustí generování jednotlivých úloh.



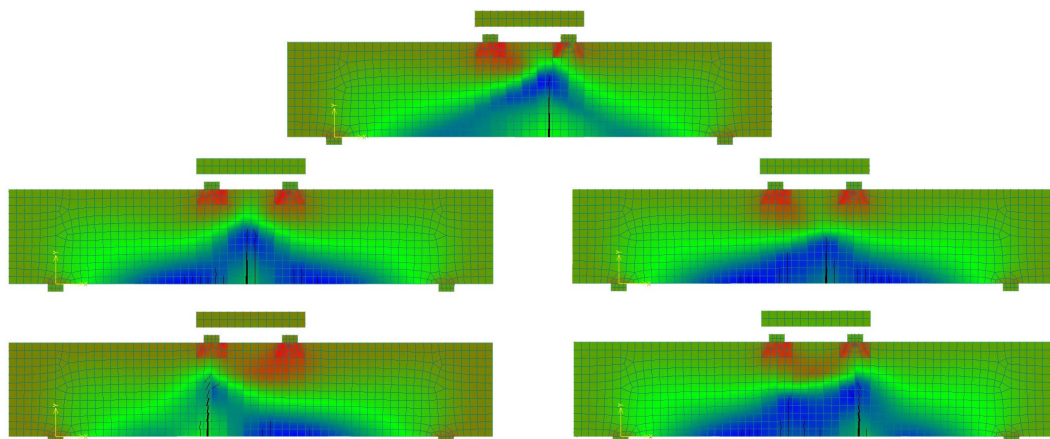
Obr. 6.7: Výběr materiálů (vlevo) jejichž parametry budou některé parametry budou uvažovány jako náhodná veličina (vpravo volba těchto parametrů).

Výsledky

Odezva nosníku namáhaného čtyřbodovým ohybem je na obr. 6.8 (vlevo) pro 135 simulací provedených v programu Atena 2D a také je zde zvýrazněna střední hodnota odezvy. Na obr. 6.8 (vpravo) je histogram nominální pevnosti vzorku a hustota pravděpodobnosti – dvouparametrické Weibullovo rozdělení se střední hodnotou $\mu = 3.9$ a směrodatnou odchylkou $\sigma = 0.27$.



Obr. 6.8: Deformační diagram (nominální napětí vs. posun) – odezva nosníků ze 135 simulací (šedá) a střední odezva (modrá). Histogram a hustota pravděpodobnosti nominální pevnosti trámce.



Obr. 6.9: Ukázka náhodného porušení vzorků.

LITERATURA

- ČERVENKA, J., VESELÝ, V. Průvodce programu atena 2d. Technical report, Červenka Consulting, Prague, Czech Republic, 2005. <http://www.cervenka.cz>.
- ČSN EN 1990. *Eurokód: Zásady navrhování konstrukcí*, 2004.
- ČSN EN 1991-1-1. *Eurokód 1: Zatížení konstrukcí – Část 1-1: Obecná zatížení, vlastní tíha a užitná zatížení pozemních staveb*, 2004.
- ČSN EN 1991-1-3. *Eurokód 1: Zatížení konstrukcí – Část 1-3: Obecná zatížení – Zatížení sněhem*, 2006.
- ČSN EN 1991-1-4. *Eurokód 1: Zatížení konstrukcí – Část 1-4: Obecná zatížení – Zatížení větrem*, 2005.
- ČSN EN 1992-1-1. *Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí - Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*, 2006.
- ČSN EN 1993-1-1. *Eurokód 3: Navrhování ocelových konstrukcí - Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*, 2006.
- ČSN ISO 13822. *Zásady navrhování konstrukcí – Hodnocení existujících konstrukcí*, 2005.
- ČSN ISO 2394. *Obecné zásady spolehlivosti konstrukcí*, 2003.
- HOLICKÝ, M. et al. *Příručka pro hodnocení existujících konstrukcí. : Česká technika – nakladatelství ČVUT v Praze*, 2007. URL http://www.konstrukce.cvut.cz/file_download/172. ISBN 978-80-01-03790-4.
- HOLICKÝ, M. et al. *Uplatnění pravděpodobnostních metod při navrhování konstrukcí. : ČVUT v Praze, Kloknerův ústav*, 2003. ISBN 80-01-02826-7.
- JCSS. Probabilistic model code, 2001. URL http://www.jcss.ethz.ch/publications/publications_pmc.html. [Online; accessed 8-October-2010].
- KOUTKOVÁ, H., MOLL, I. *Úvod do pravděpodobnosti a matematické statistiky. : Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno*, 2001. ISBN 80-214-1811-7.

NOVÁK, D., VOŘECHOVSKÝ, M., RUSINA, R., LEHKÝ, D. FReET – *Feasible Reliability Engineering Efficient Tool*. Technical report, Brno/Červenka Consulting, Czech Republic, 2005. URL <http://www.freet.cz>. Program documentation – Part 2 – User Manual.

ŠMIŘÁK, S. *Pružnost a plasticita I.* : Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, 1999.

TEPLÝ, B., NOVÁK, D. *Spolehlivost stavebních konstrukcí.* : Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, 1999.

TP 224. *Ověřování existujících betonových mostů pozemních komunikací*, 2010.

VOŘECHOVSKÝ, M. K problematice výpočtu spolehlivosti u nelineárních úloh mechaniky kontinua (On reliability computations of nonlinear continuum mechanics problems). Master's thesis, Institute of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Brno University of Technology, Brno, Czech Republic, 2000. in Czech.