VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

Pružnost a pevnost

Přednášející: Doc. Ing. Lukáš Novák, Ph.D.

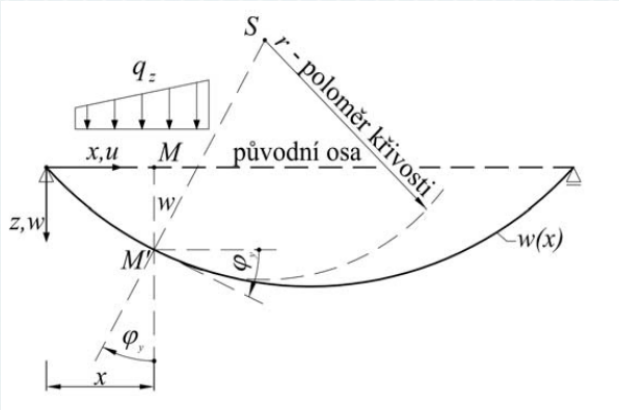
Autoři: Drahomír Novák, Lukáš Novák

Ústav stavební mechaniky

Deformace ohýbaných nosníků

Diferenciální rovnice 4. řádu

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2 w}{dx^2}\right) = q(x)$$



Pojmy

- **ohybová čára** - křivka v níž přejde původně přímá osa nosníku
- **přetvoření prutu** při ohybu – pole posunů, vzhledem k platnosti Bernoulliovi h. stačí vypočítat posuny bodů ležících na střednici.
- **průhyb** – pořadnice ohybové čáry
- **pootočení** – úhel, o nějž se pootočil průřez a který svírá tečna k ohybové čáře s osou x
- **poloměr křivosti** – ve stavební praxi je ohybová čára většinou velmi plochá (značně větší než výška průřezu)

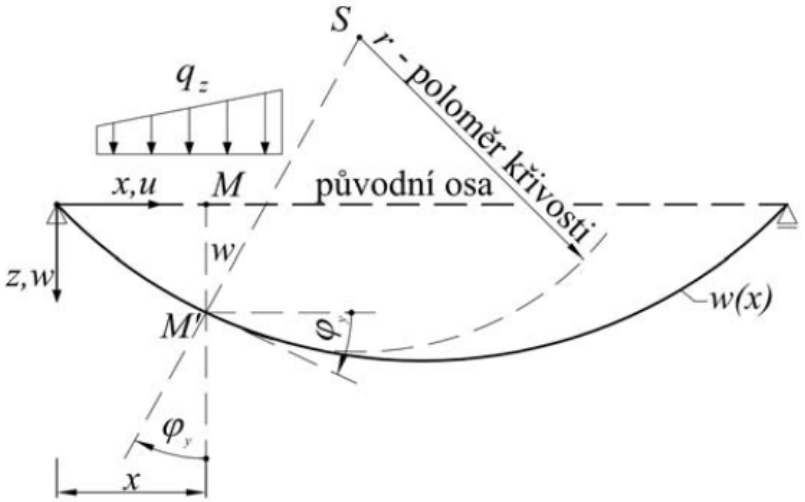
Teorie malých deformací

$$(w < l/150)$$

$$w << l$$

$$tg\varphi \approx \varphi = \frac{dw}{dx} = w'$$

$$dw \approx ds$$



Z matematiky je znám výraz pro převrácenou hodnotu poloměru křivosti:

$$\frac{1}{r} = -\frac{w''}{\left(1 + w'^2\right)^{3/2}}$$

$$w'^2 << 1$$

$$\frac{1}{r} = -w''$$

Znaménko +: střed křivosti leží nad nosníkem, tedy jsou-li tažená spodní vlákna (kladný ohybový moment)

Teorie malých deformaci

Vzhledem k předpokladu malých deformací :

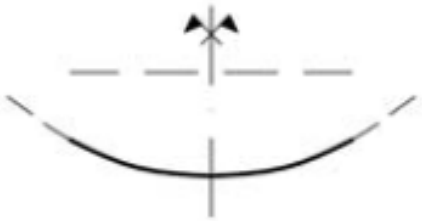
$$\frac{1}{r} = -w''$$

Využitím závislosti mezi křivostí a ohybovým momentem – rovnice založené na Bernoulliově hypotéze dostaneme **diferenciální rovnici ohybové čáry (2. řádu).**

$$\frac{1}{r} = \frac{M_y}{E \cdot I_Y} \qquad w'' = -\frac{M_y}{E \cdot I_y}$$

Diferenciální rovnice ohybové čáry

Při jejím řešení se uplatní 2 okrajové podmínky (kinematické)

$w = 0$		Prostě podepřený okraj
$w' = 0$ $w = 0$		Vetknutý okraj
$w' = 0$		Na ose symetrie

Diferenciální rovnice ohybové čáry

Vztahy známé ze statiky

$$M' = \frac{dM_y}{dx} = V_z$$

$$M'' = V_z' = \frac{dV_z}{dx} = -q_z$$

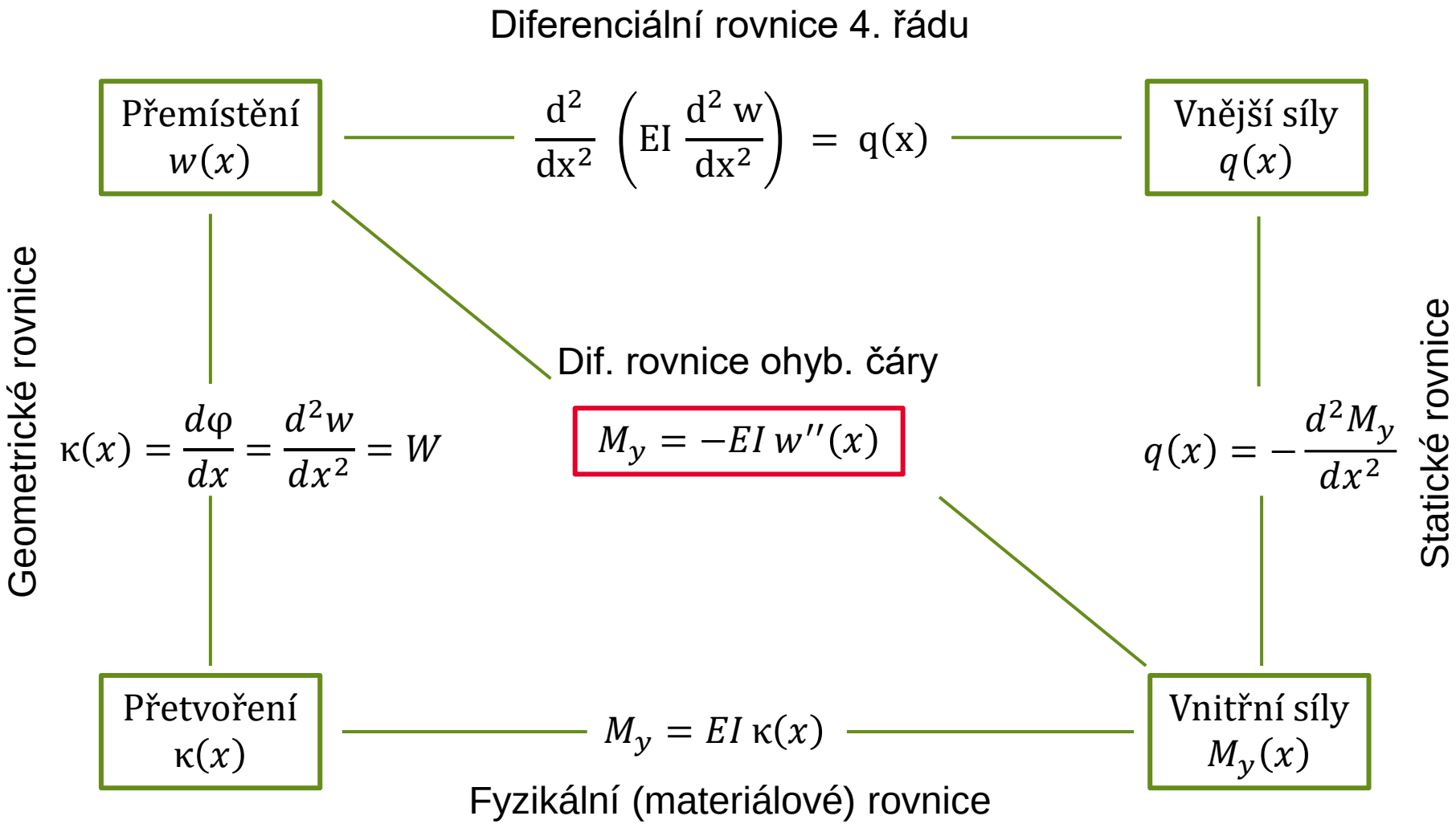
Pak derivováním získáme dále

$$w''' = -\frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \frac{dM_y}{dx} = -\frac{1}{E \cdot I_y} \cdot V_z$$

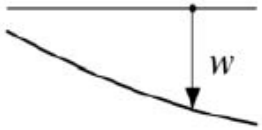
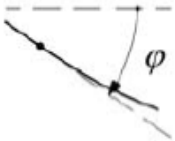
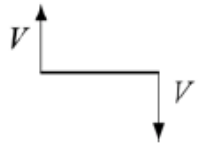
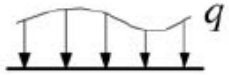
$$w^{IV} = -\frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \frac{dV_z}{dx} = -\frac{1}{E \cdot I_y}(-q_z) = \boxed{\frac{q_z}{E \cdot I_y}}$$

- diferenciální rovnice 4. řádu, u níž se uplatní navíc statické okrajové podmínky w´´=0 (M=0)

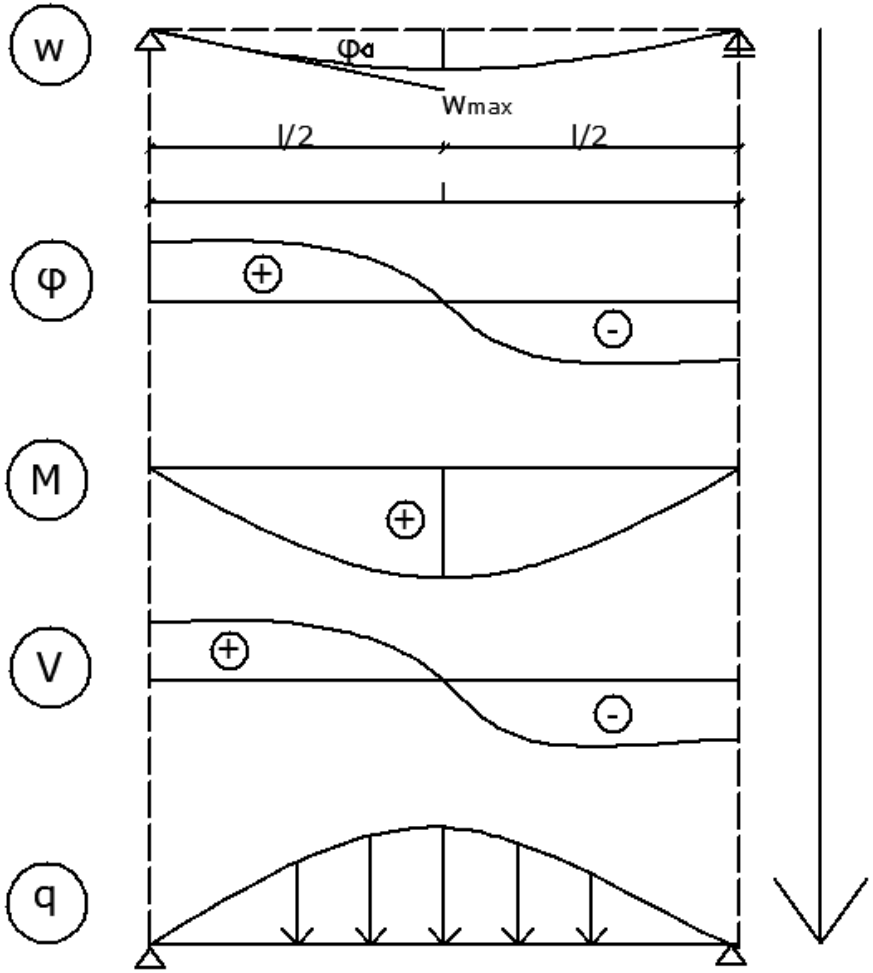
Přehled diferenciálních vztahů



Přehledné derivační (integrační) schéma

Označení a kladný smysl	Veličina	Diferenciální závislost	
		Obecný případ	Pro EI = konst.
	průhyb	w	
	pootočení	$\varphi = w'$	
	ohybový moment	$M = -EIw''$	
	posouvající síla	$V = -(EIw'')'$	$V = -EIw'''$
	příčné zatížení	$q = -(EIw'')''$	$q = -EIw^{IV}$

Aplikace schématu



$$EI = konst.$$

$$w = w_{max} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l}$$

$$\varphi = \pi \frac{w_{max}}{l} \cdot \cos \frac{\pi \cdot x}{l}$$

$$M = -\pi \frac{w_{max}}{l} \left(-\frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi \cdot x}{l} \right) \cdot EI =$$

$$EI \frac{\pi^2 w_{max}}{l^2} \sin \frac{\pi \cdot x}{l}$$

$$V = EI \frac{\pi^3 \cdot w_{max}}{l^3} \cos \frac{\pi \cdot x}{l}$$

$$q = EI\pi^4 \frac{w_{max}}{l^4} \sin \frac{\pi \cdot x}{l}$$

Vyčíslení

l=6 m

w_{max} = 2 cm

l 200

I= 2140 cm^4

EI= 4494 kNm^2

$$\varphi_a = \pi \frac{0,02}{6} = 0,0105$$

$$M_{max} = 4494 \frac{\pi^2 \cdot 0,02}{6^2} = 6,55kNm$$

Řešení ohybové čáry integrací

Rovnici ohybové čáry w=w(x) lze získat v jednoduchých případech integrací diferenciální rovnice

$$w'' = -\frac{M}{EI} \qquad M=M(x)$$

$$w' = -\int \frac{M}{EI}\,dx + c_1$$

$$w = -\iint \frac{M}{EI}\,dx\,dx + c_1 x + c_2$$

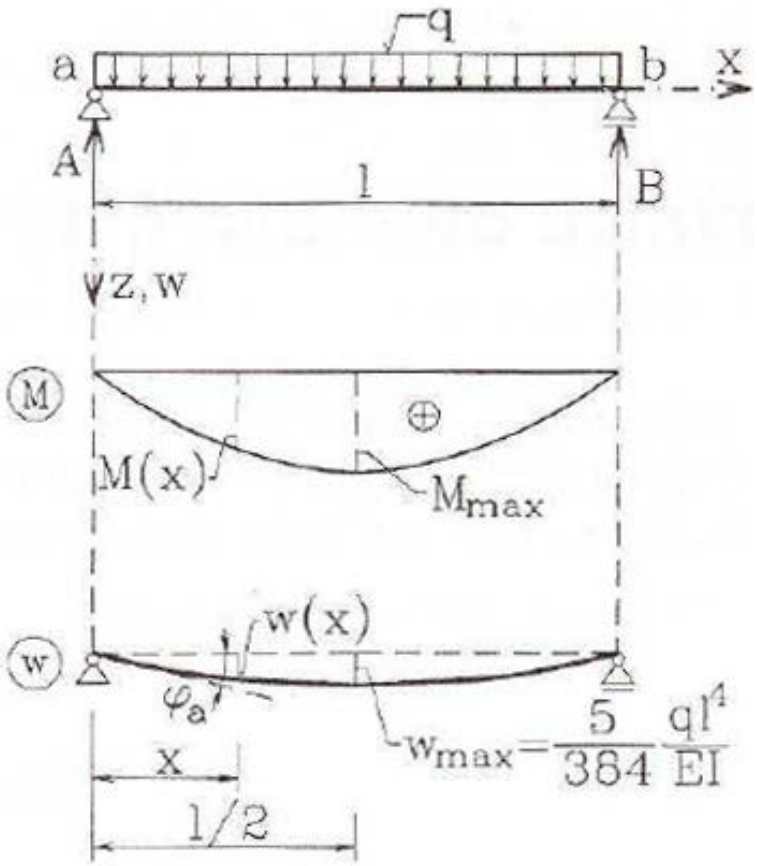
Integrační konstanty získáme uplatněním okrajových podmínek

Příklad - rovnoměrně zatížený prostý nosník

$$A = B = \frac{1}{2} ql$$

$$M = M(x) = \frac{1}{2} q\left(lx - x^2\right)$$

$$w'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{q}{2EI}\left(lx - x^2\right)$$

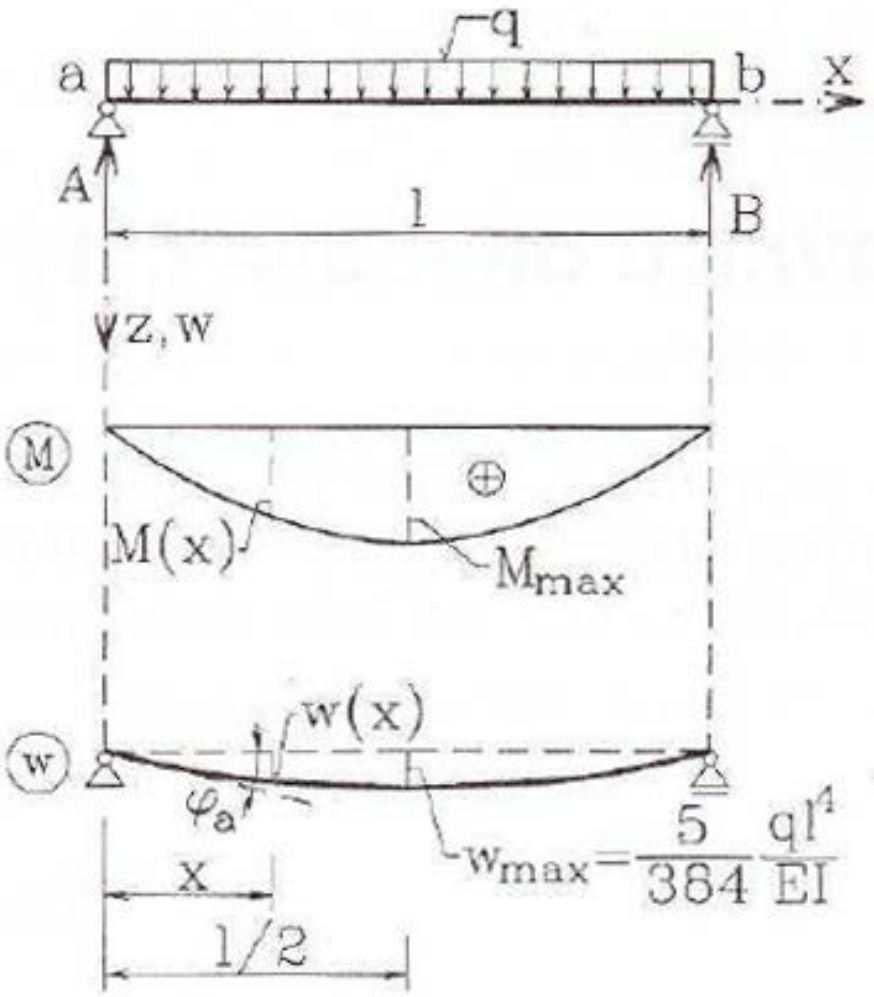


$$w'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{q}{2EI}\left(lx - x^2\right)$$

INTEGRACÍ :

$$w' = -\frac{q}{2EI}\left(\frac{1}{2}lx^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + c_1$$

$$w = -\frac{q}{EI}\left(\frac{1}{6}lx^3 - \frac{1}{12}x^4\right) + c_1 x + c_2$$



Okrajové podmínky a řešení

$$w(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$w(l) = 0 \Rightarrow -\frac{q}{2EI}\left(\frac{1}{6}l^4 - \frac{1}{12}l^4\right) + c_1 l \Rightarrow c_1 = \frac{ql^3}{24EI}$$

$$w = -\frac{q}{24EI}\left(2lx^3 - x^4\right) + \frac{ql^3}{24EI}x + 0$$

$$\boxed{w = \frac{q}{24EI} \cdot x\left(l^3 - 2lx^2 + x^3\right)}$$

$$\varphi = w' = \frac{q}{24EI}\left(l^3 - 6lx^2 + 4x^3\right)$$

$$w_{max}(x = l/2) = \boxed{\frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{EI}}$$

$$\varphi_a = -\varphi_b = \frac{ql^3}{24EI}$$

Číselné řešení

I 240

$I = 4250\ cm^2$

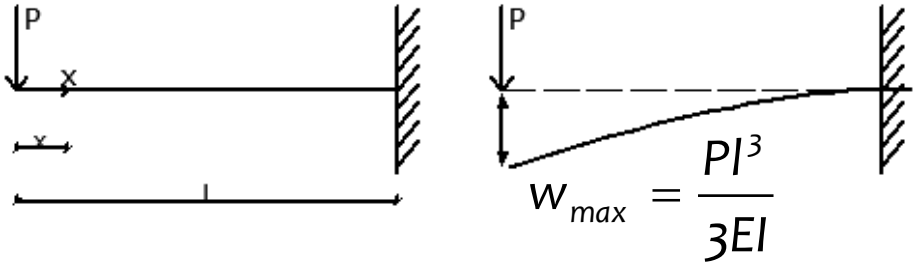
$E = 210 \cdot 10^3\ MPa$

$q = 12 kN \cdot m^{-1}$

$$w_{max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{12{,}0 \cdot 6^4}{210 \cdot 10^6 \cdot 4250 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0227m = 22{,}7mm$$

$$\varphi_a = 0{,}0121rad < \frac{l}{250} = \frac{6}{250} = 0{,}0240m$$

Příklad – konzola zatížená silou na volném konci



$$M = -P \cdot x$$

$$w'' = -\frac{M}{EI} = \frac{P}{EI} \cdot x$$

$$w' = \frac{P}{2EI} x^2 + c_1$$

$$w = \frac{P}{6EI} x^3 + c_1 x + c_2$$

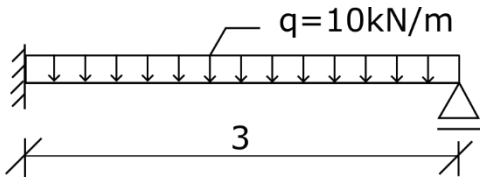
$$w'(l) = 0 \Rightarrow \frac{Pl^2}{2EI} + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{Pl^2}{2EI}$$

$$w(l) = 0 \Rightarrow \frac{Pl^3}{6EI} - \frac{Pl^3}{2EI} + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{Pl^3}{3EI}$$

$$\boxed{w = \frac{P}{6EI}\left(x^3 - 3l^2 x + 2l^3\right)}$$

Staticky neurčitá konstrukce

- Obecně lze využít $w^{IV} = q(x)$ a postupně integrovat + konstanty
- SN konstrukci lze také převést na SU konstrukci a využít až další 2 okrajové kinematické podmínky



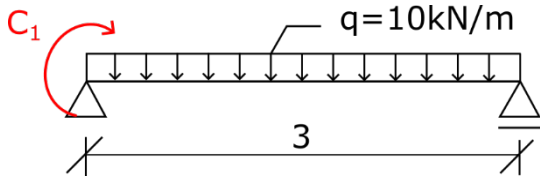
$$R_a = 15 - \frac{C_1}{3}$$

$$\mathrm{M} = -5x^2 + 15x - \frac{C_1}{3}x + C_1$$

$$\mathrm{w}'' = -\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} = 5x^2 - 15x + \frac{C_1}{3}x - C_1$$

$$\mathrm{EIw}' = \frac{5}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{C_1}{6}x^2 - C_1 x + C_2$$

$$\mathrm{EIw} = \frac{5}{12}x^4 - \frac{15}{6}x^3 + \frac{C_1}{18}x^3 - \frac{C_1}{2}x^2 + C_3$$

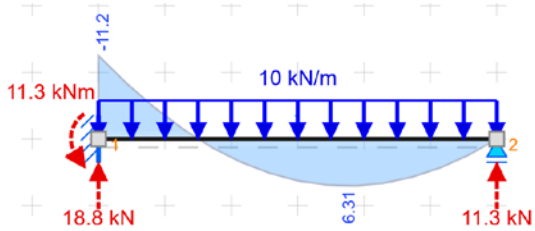


$$\mathrm{w}'(0) = 0 \Rightarrow \mathrm{c}_2 = 0$$

$$\mathrm{w}(0) = 0 \Rightarrow \mathrm{c}_3 = 0$$

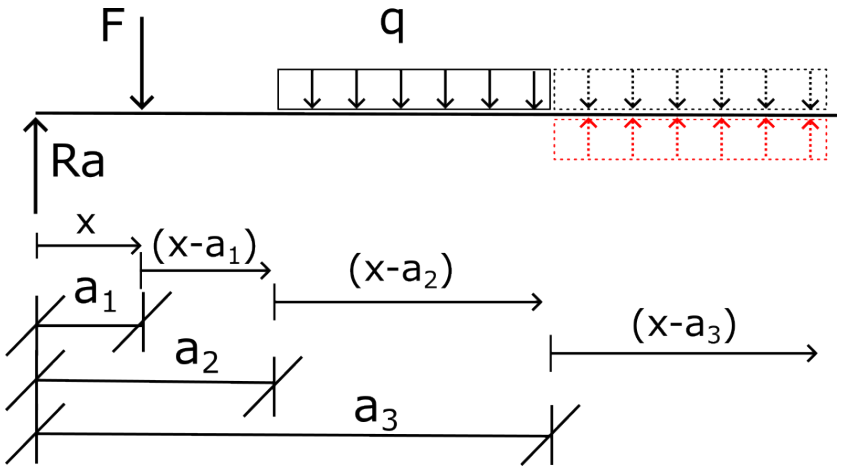
$$\mathrm{w}(3) = 0 \Rightarrow$$

$$0 = 33{,}75 - 67{,}5 + \frac{27}{18}C_1 - \frac{9}{2}C_1 \Rightarrow C_1 = -\,-11{,}25$$



Clebshova metoda

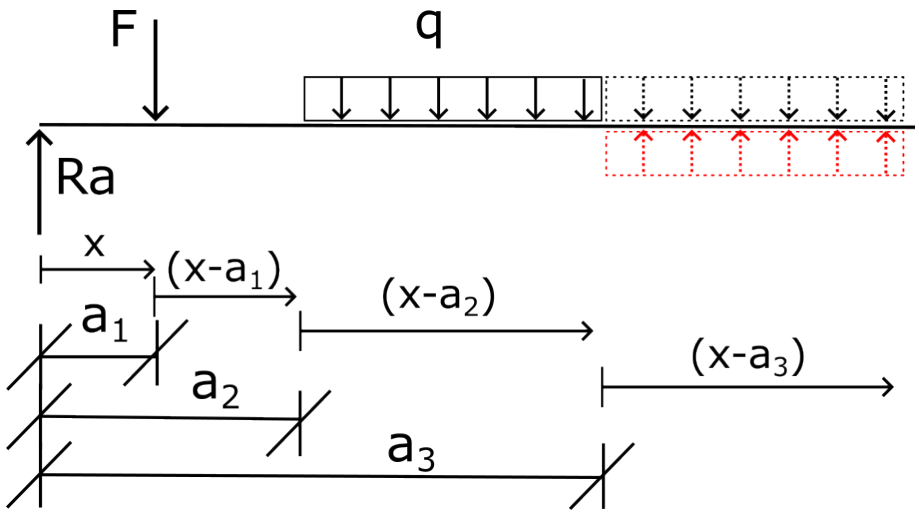
- Složitější případy lze integrovat pomocí Clebshovy metody (metody počátečních parametrů)
- Rozdělení integračního vztahu na několik intervalů
- Využití spojitosti průhybu a pootočení na rozhraní intervalů redukuje počet int. konstant na 2
- Vhodné pouze pro nosníky s EI=konst.



Clebshova metoda

Zásady:

1. Rozdělíme nosník na části.
2. Souř. sys. volíme jednotně pro celý nosník.
3. Všechny výrazy v pro ohybový moment v úseku *k*, musí zůstat i v *k+1.*



4. Pracujeme v lokálních souřadnicích intervalu, např. $(x - a_1)$, tyto dále neroznásobujeme.
5. Osamělý moment nutno integrovat ve tvaru $(x - a_i)$.
6. Po částech spojité zatížení nutno vhodně odečítat (superpozice)

Clebshova metoda - příklad

$$R_a = 78kN, R_b = 138kN$$

$$M(x) = 78x - \frac{1}{2}24x^2 + \Big| 138\,(x-7{,}5) + \frac{1}{2}24(x-7{,}5)^2$$

$$x > 7{,}5$$

$$EI\mathrm{w}'' = -78x + 12x^2 - \Big| 138\,(x-7{,}5) - 12(x-7{,}5)^2$$

$$x > 7{,}5$$

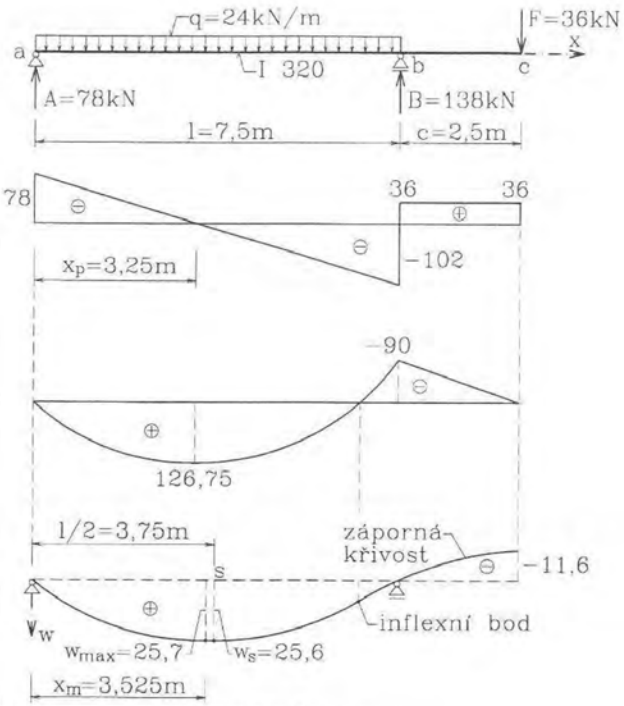
$$\mathrm{EIw}' = C_1 - 39x^2 + 4x^3 \Big| - 69\,(x-7{,}5)^2 - 4(x-7{,}5)^3$$

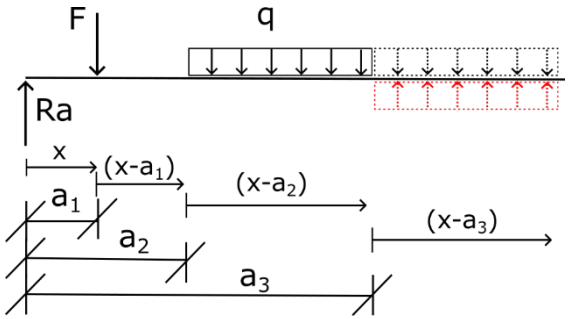
$$x > 7{,}5$$

$$EIw = C_1x + C_2 - 13x^3 + x^4 \Big| - 23\,(x-7{,}5)^3 - (x-7{,}5)^4$$

$$x > 7{,}5$$

$$\mathrm{w}(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$
$$\mathrm{w}(7{,}5) = 0 \Rightarrow c_1 = 309{,}375$$





Mohrova analogie

- integrace diferenciální rovnice zde není nutná
- hledání deformací se převádí na výpočet statických veličin
- vychází se z analogie mezi **dvěma skupinami diferenciálních vztahů**

$$w'' = -\frac{M}{EI} \qquad M'' = -q$$

$$w' = \varphi \qquad M' = V$$

- **Analogické úlohy:**
  - odvodit vztahy pro průhyb w ze známého průběhu ohybových momentů M (dělených ohybovou tuhostí EI)
  - odvodit ohybové momenty M z daného zatížení q

Mohrova analogie

Vhodně zvolený nosník (tzv. **duální – fiktivní**; různý od skutečného) zatížíme momentovým obrazcem, děleným ohybovou tuhostí EI

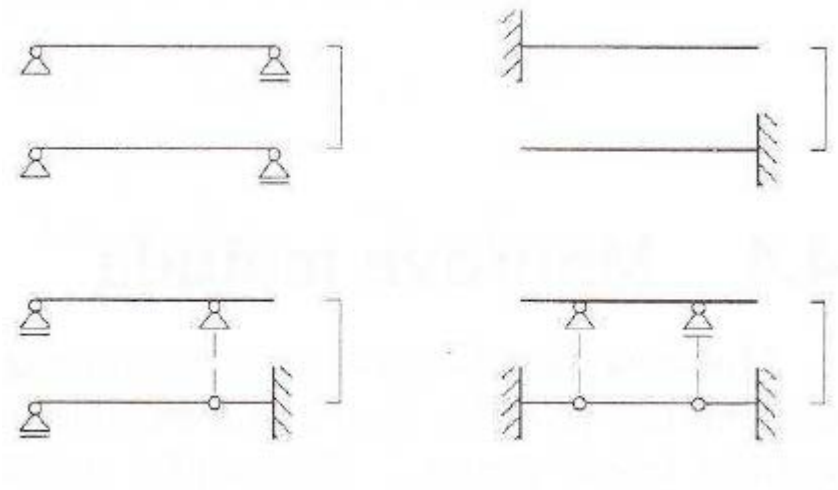
$$\bar{q} = \frac{M}{EI}$$

a určíme ohybové momenty M, jež od tohoto zatížení vzniknou. Pak platí:

$$\bar{M}'' = -\bar{q} = -\frac{M}{EI} = w''$$

Duální nosník

Nosník, který splňuje vůči M a V tytéž **okrajové podmínky**, jako plní skutečný nosník vzhledem k průhybu w a pootočení φ. Touto volbou je zajištěna vzájemná korespondence M a w i ve funkčních hodnotách a v prvních derivacích:



$$w = \overline{M}$$

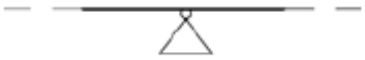
$$\varphi = \overline{V}$$

Příklady duálních nosníků

Mohrova věta

Průhyb *w* v určitém místě nosníku určíme jako ohybový moment na duálním nosníku, zatíženém momentovou plochou, dělenou ohybovou tuhostí EI. Pootočení určíme jako posouvající sílu V na duálním nosníku zatíženém momentovou plochou dělenou ohybovou tuhostí EI.

Přehled vnějších a vnitřních vazeb a jejich záměny při sestrojení fiktivního nosníku

Skutečný nosník		**Fiktivní nosník**	
Kinematické okrajové podmínky	Typ uložení	Statické okrajo-vé podmínky	Typ uložení
$w = 0$ $\varphi \neq 0$		$\tilde{M} = 0$ $\tilde{V} \neq 0$	
$w \neq 0$ $\varphi \neq 0$		$\tilde{M} \neq 0$ $\tilde{V} \neq 0$	
$w = 0$ $\varphi = 0$		$\tilde{M} = 0$ $\tilde{V} = 0$	
$w = 0$ $\varphi \neq 0$		$\tilde{M} = 0$ $\tilde{V} = 0$	
$w \neq 0$ $\varphi \neq 0$		$\tilde{M} \neq 0$ $\tilde{V} \neq 0$	

Postup při výpočtu

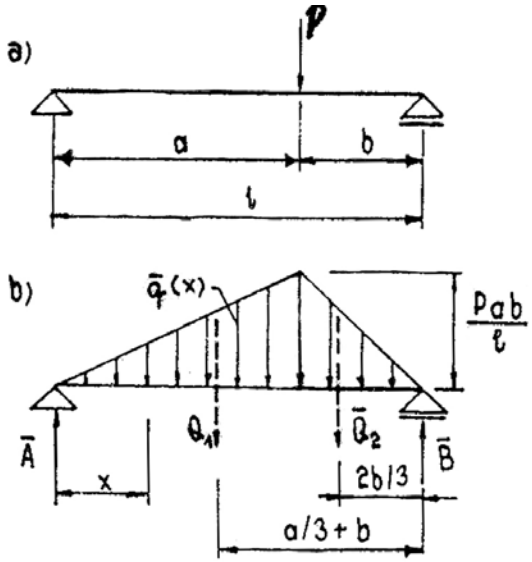
1. Vyřešíme daný nosník, určíme **průběh ohybových momentů**
2. Sestrojíme **duální nosník** a zatížíme jej momentovou plochou redukovanou EI, kladné ohybové momenty zavádíme jako kladné zatížení (shora dolů)
3. Vypočteme **ohybové momenty M na duálním nosníku** tam, kde hledáme průhyb skutečného nosníku a **posouvající síly V** v místě hledaných pootočení

Příklad – Prostý nosník stálého průřezu zatížený osamělým břemenem

fiktivní náhradní břemena

$$\overline{Q_1} = \frac{Pab}{l} \cdot \frac{a}{2}$$

$$\overline{Q_2} = \frac{Pab}{l} \cdot \frac{b}{2}$$

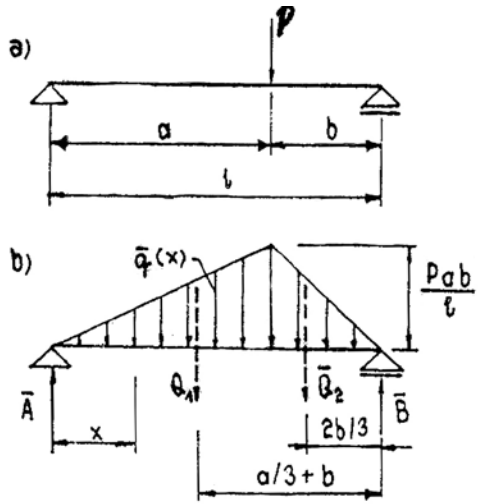


reakce fiktivního nosníku

$$\overline{A} = \frac{1}{l}\left[\overline{Q_1}\left(\frac{a}{3}+b\right)+\overline{Q_2}\,\frac{2}{3}b\right] = \frac{Pab}{6l}(l+b)$$

$$\overline{B} = -\frac{1}{l}\left[\overline{Q_1}\,\frac{2}{3}a+\overline{Q_2}\left(a+\frac{b}{3}\right)\right] = -\frac{Pab}{6l}(l+a)$$

Příklad – Prostý nosník stálého průřezu zatížený osamělým břemenem



$$w'(o) = \frac{\bar{A}}{EI} = \frac{Pab}{6lEI}(l+b)$$

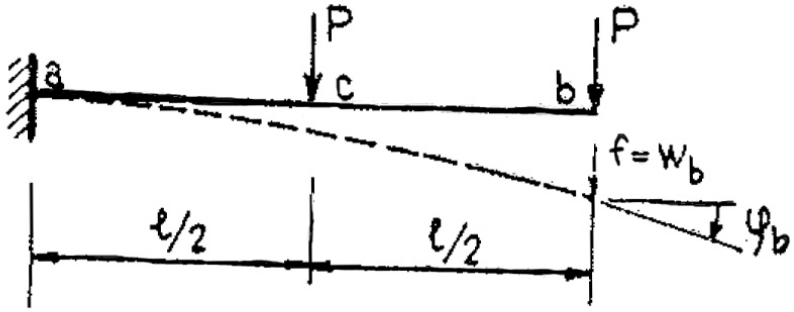
$$w'(l) = \frac{\bar{B}}{EI} = -\frac{Pab}{6lEI}(l+a)$$

$$w(a) = \frac{\bar{M}(a)}{EI} = \frac{1}{EI}\left(\bar{A}a - \bar{Q}_1\frac{a}{3}\right) = \frac{Pab}{6lEI}\left(al + ab - a^2\right) = \frac{Pa^2b^2}{3lEI}$$

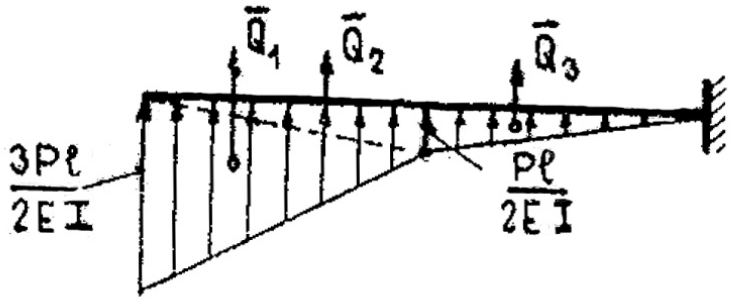
Příklad – konzola zatížená dvěma stejnými břemeny

$$M_c = -Pl/2$$

$$M_a = -3Pl/2$$



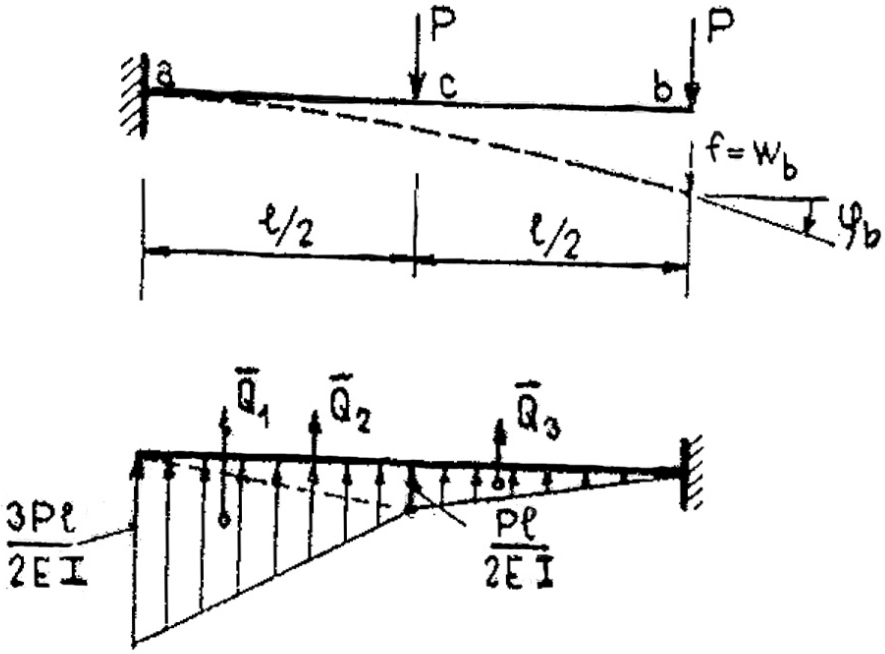
fiktivní náhradní břemena



$$\overline{Q_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{3Pl}{2EI} = \frac{3Pl^2}{8EI}$$

$$\overline{Q_2} = \overline{Q_3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{Pl}{2EI} = \frac{Pl^2}{8EI}$$

Příklad – konzola zatížená dvěma stejnými břemeny



$$\phi_b = \overline{V_b} = \overline{Q_1} + \overline{Q_2} + \overline{Q_3} =$$

$$= \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)\frac{Pl^2}{EI} = \frac{5}{8}\cdot\frac{Pl^2}{EI}$$

$$f = w_b = \overline{M_b} = \overline{Q_1}\cdot\frac{5}{6}l +$$

$$+\left(\overline{Q_2} + \overline{Q_3}\right)\frac{1}{2}l = \frac{3Pl^2}{8EI}\cdot\frac{5}{6}l +$$

$$+2\frac{Pl^2}{8EI}\cdot\frac{1}{2}l = \frac{7}{16}\cdot\frac{Pl^3}{EI}$$

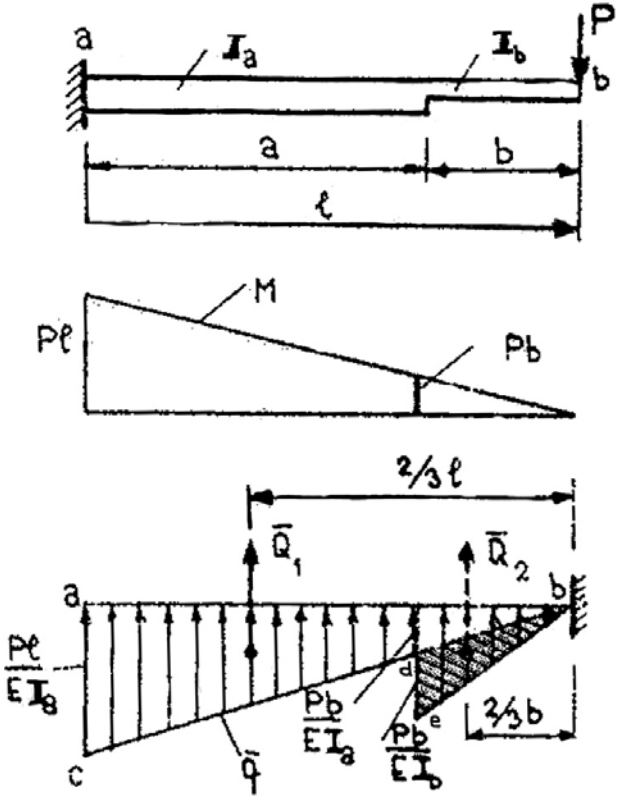
Příklad – Konzola proměnného průřezu

$EIa; EIb$

$$\Delta abc : \overline{Q_1} = \frac{1}{2} l \frac{Pl}{EIa} = \frac{Pl^2}{2EIa}$$

$$\Delta dbe : \overline{Q_2} = \frac{1}{2} b \left(\frac{Pb}{EIb} - \frac{Pb}{EIa} \right) =$$

$$= \frac{Pb^2}{2EIa} \left(\frac{I_a}{I_b} - 1 \right)$$



$$w_b = \overline{M_b} = \overline{Q_1} \frac{2}{3} l + \overline{Q_2} \frac{2}{3} b = \frac{Pl^2}{2EI_a} \cdot \frac{3}{2} l +$$

$$+ \frac{Pb^2}{2EI_a} \left(\frac{I_a}{I_b} - 1 \right) \cdot \frac{2}{3} b = \frac{Pl^3}{3EI_a} \left[1 + \frac{b^3}{l^3} \cdot \left(\frac{I_a}{I_b} - 1 \right) \right]$$

Přibližné numerické řešení obecnějších případů

- Rozdělme nosník na dostatečně malé úseky, pak lze křivočarý průběh q nahradit lomenou čarou a vše počítat numericky.

