VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

Pružnost a pevnost

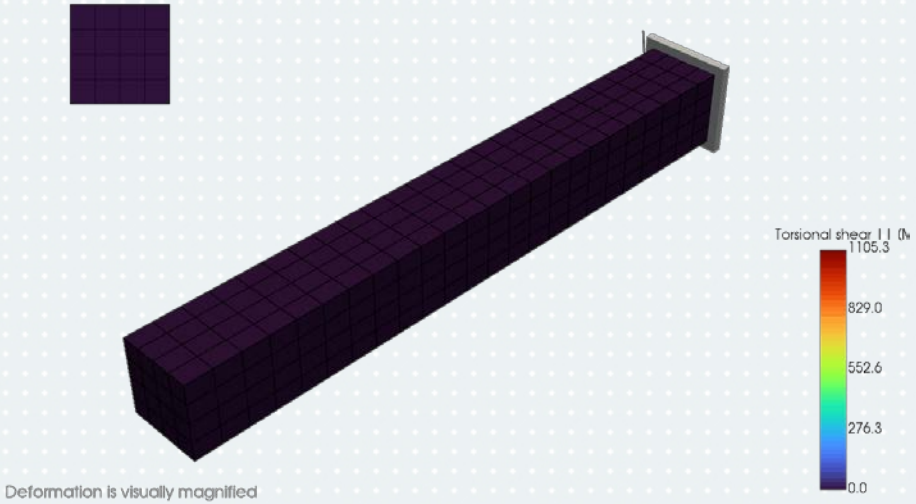
Přednášející: Doc. Ing. Lukáš Novák, Ph.D.

Autoři: Drahomír Novák, Lukáš Novák

Ústav stavební mechaniky

Kroucení

- **volné kroucení** - nic nebrání deplanaci (ve skutečnosti jen teoretické povahy)
- **vázané (ohybové) kroucení** – deplanace průřezu omezena nějakými vazbami



Volné kroucení

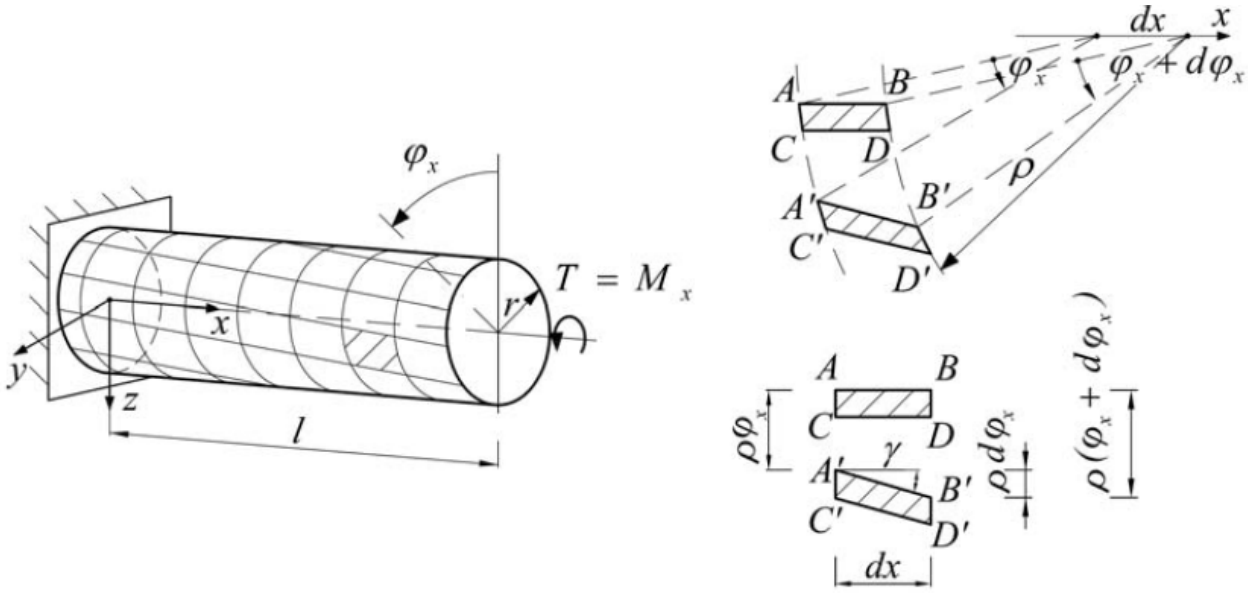
- vetknutý prizmatický prut, v x=l působí **zkrucující moment** K_k
- v průřezu x vznikne jedinečná složka vnitřních sil **kroutící moment** $M_x = M_k$

$$M_k = \int_A \left(y\tau_{xz} - z\tau_{xy} \right) dA$$

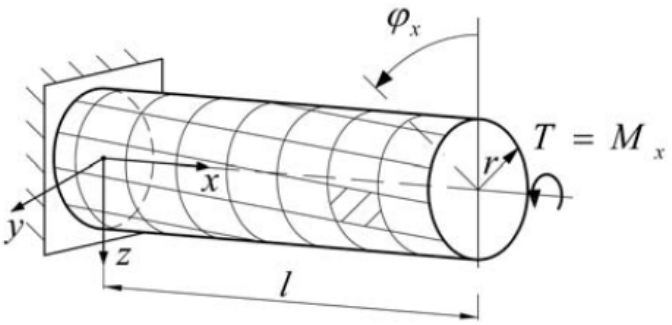
- je zřejmé, že složky smykových napětí hrají hlavní roli v úloze volného kroucení prutu
- v důsledku zkrucování prutu se průřezy navzájem **pootáčejí** kolem osy prutu x a zároveň se ve směru této osy **zprohýbají**, vzniká tzv. **deplanace**

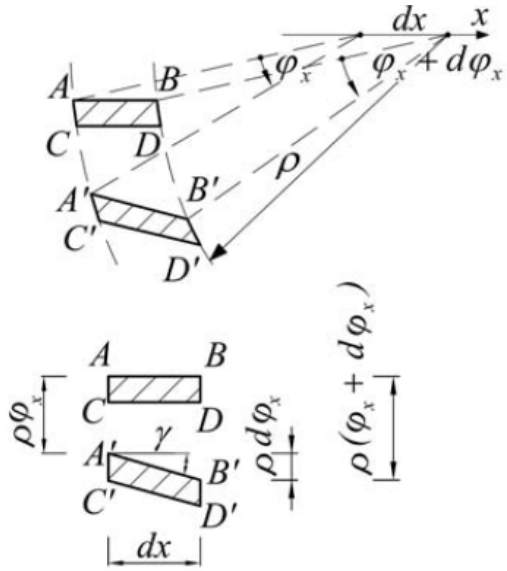
Kruhový a mezikruhový průřez

- pro rotačně souměrný průřez (tj. kruhový a mezikruhový) platí tyto deformační hypotézy
  - průřezy zůstávají **rovinné** i po deformaci
  - průřezy zůstávají **tuhé** ve své rovině (průvodiče se nezkřiví)



Kruhový a mezikruhový průřez





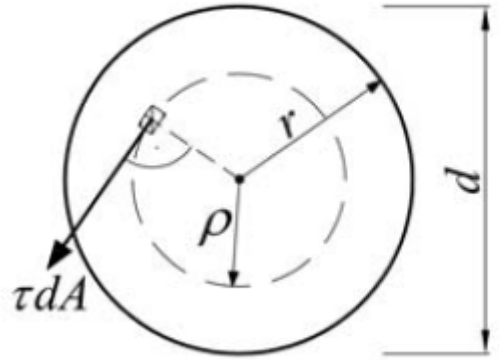
zkosení $\gamma = \gamma(\rho) = \dfrac{\rho d\varphi_x}{dx} = \rho\vartheta$

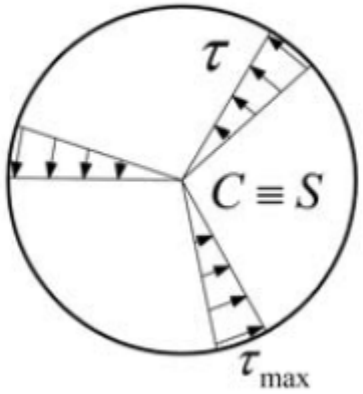
poměrný úhel zkroucení $\vartheta = \dfrac{d\varphi_x}{dx}$

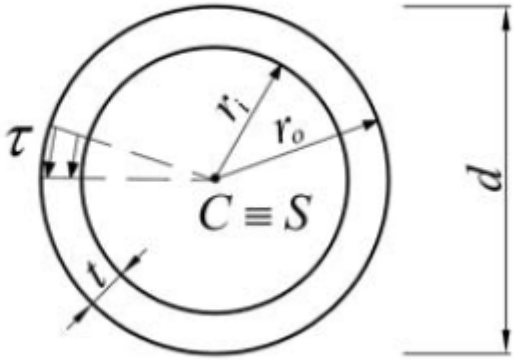
z Hookova zákona $\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \vartheta \cdot \rho$

Kruhový a mezikruhový průřez

Z uvedených deformačních hypotéz vyplývá, že výsledné smykové napětí je **lineárně** závislé na délce průvodiče a směřuje **kolmo k průvodiči**.







Ze statické podmínky

$$M_k = \int_A \rho\tau dA = \int_A \rho G\vartheta\rho dA = G\vartheta\int_A \rho^2 dA = GI_P\vartheta$$

$$\vartheta = \frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{M_k}{GI_p}$$

Kruhový a mezikruhový průřez

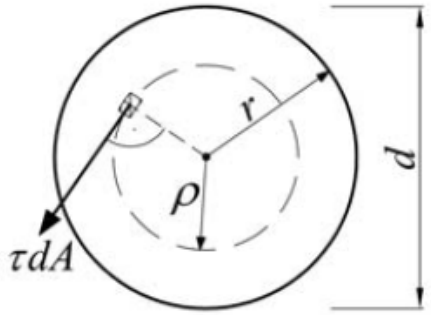
$$I_p = \frac{\pi}{32} d^4$$

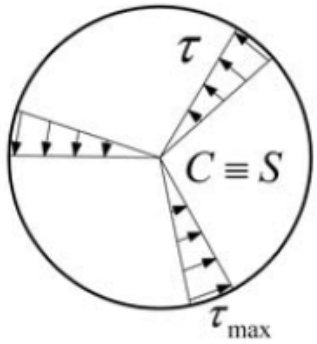
$$\tau = G\vartheta\rho = G \cdot \frac{M_k}{GI_p} \cdot \rho$$

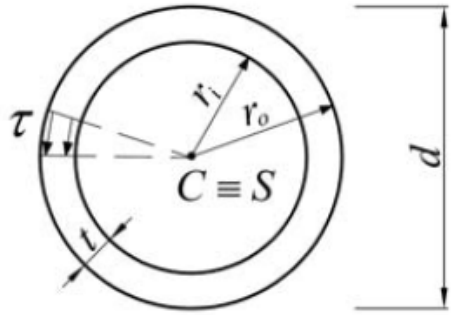
$$W_k = \frac{I_p}{d/2} = \frac{\pi}{16} \cdot d^3$$

$$\tau = \frac{M_k}{I_p} \cdot \rho$$

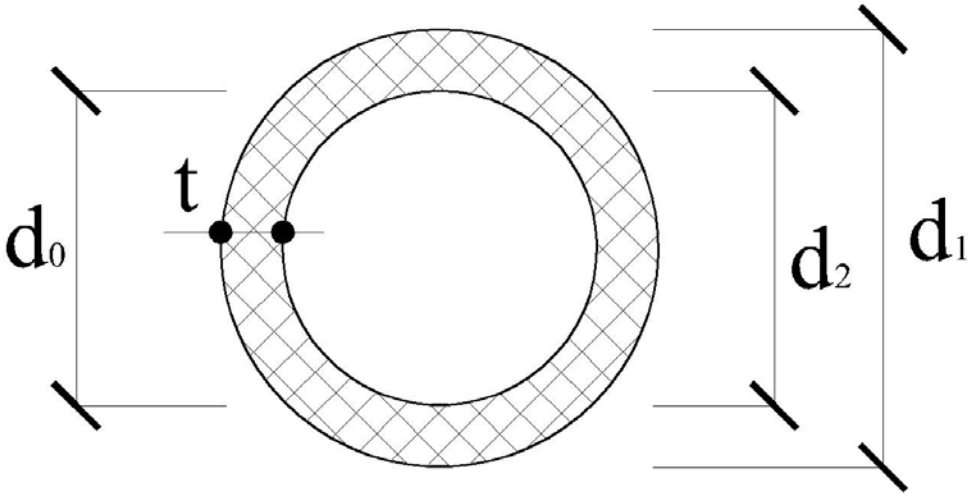
$$\tau_{max} = \frac{M_k}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_k}{W_k}$$







Příklad - mezikruží (trubka)



$$I_p = \frac{\pi}{32}\left(d_1^4 - d_2^4\right)$$

$$W_k = \frac{\pi}{16 d_1}\left(d_1^4 - d_2^4\right)$$

$$t << d_o$$

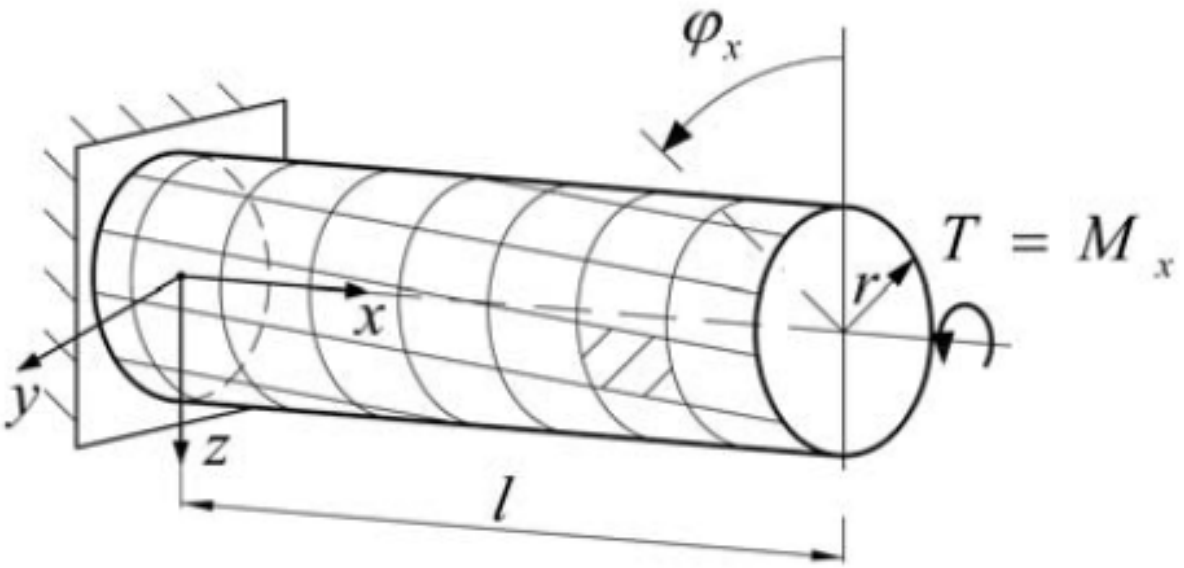
$$I_p \approx \frac{\pi}{4} t\, d_o^3$$

$$W_k \approx \frac{\pi}{2} t\, d_o^2$$

Deformace

úhel zkroucení

$$\frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{M_x}{G\,I_p}$$



Prut stálého průřezu

M_x = konst

$$\varphi_x = \int \frac{M_x}{G\, I_p}\, dx = \frac{M_x}{G\, I_p} \cdot x + c_1$$

okrajové podmínky

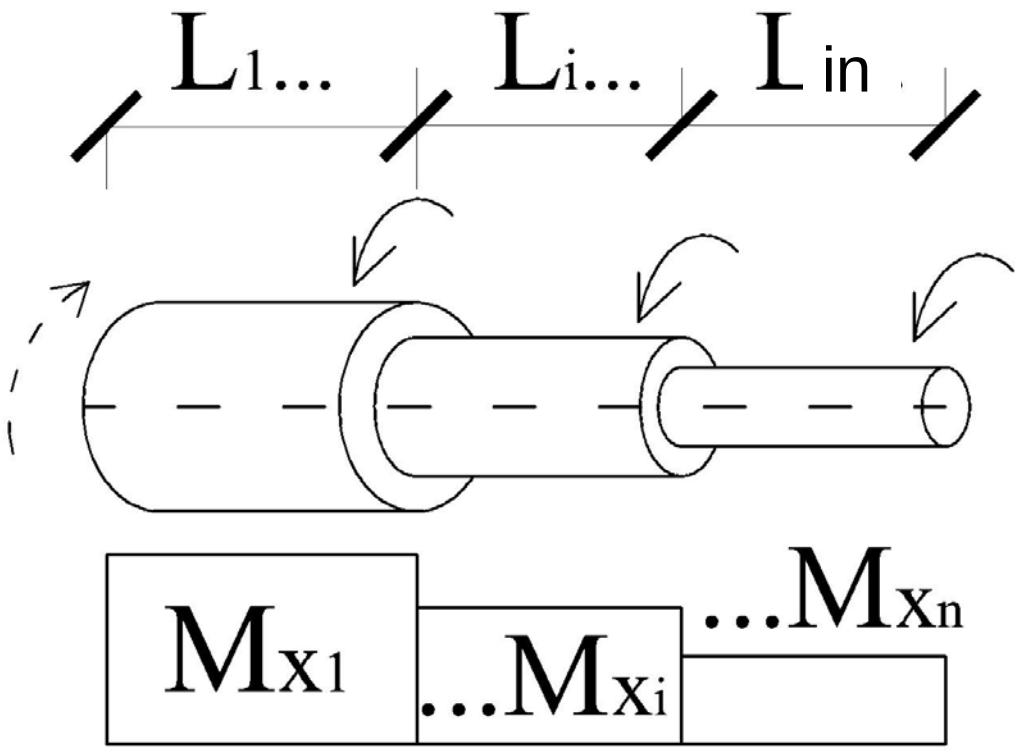
$$\varphi_x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\varphi_x = \frac{M_x \cdot x}{G\, I_p}$$

na konci :

$$\varphi_x(l) = \frac{M_x \cdot l}{G\, I_p}$$

Prut po úsecích konstantního průřezu a kroutícího momentu



$$\varphi_x(l) = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{xi} \cdot l_i}{G \cdot I_{pi}}$$

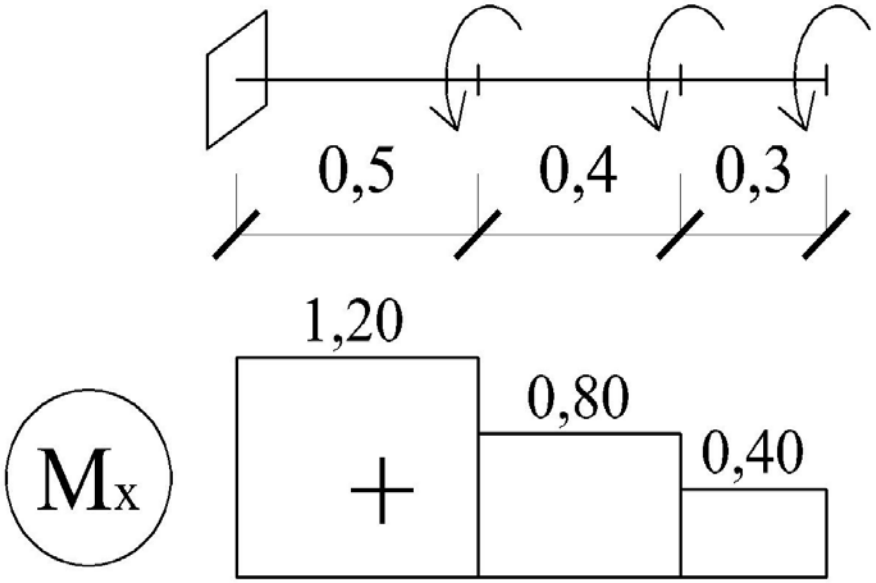
Příklad – hřídel kruhového průřezu

Ø 40 mm, ocel

$$W_k = \frac{\pi}{16} \cdot 4{,}0^3 = 12{,}57\text{cm}^3$$

$$I_p = \frac{\pi \cdot 4^4}{32} = 25{,}13\text{cm}^4$$

$$\tau_{max} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-3}}{12{,}57 \cdot 10^{-6}} = 95{,}5\text{MPa}$$

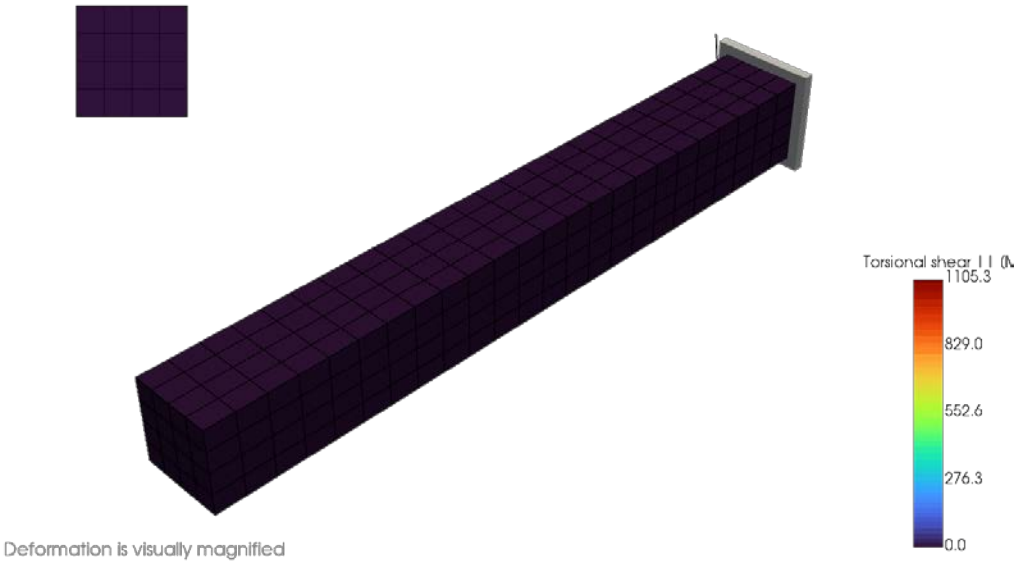


$$\phi_x(l) = \frac{1}{GI_p}\sum_1^3 M_{xi} \cdot l_i = \frac{1}{81 \cdot 10^6 \cdot 25{,}13 \cdot 10^{-8}}(1{,}2 \cdot 0{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}3) =$$

$$= 0{,}0080 \text{ rad } (1{,}15°)$$

Masivní pruty nekruhového průřezu

- U prutu masivního průřezu neplatí předpoklad zachování rovinnosti průřezu – dochází k **deplanaci** (zborcení, zakřivení).
- volné a vázané kroucení, dále jen volné kroucení



Základní diferenciální rovnice volného kroucení

- podrobně viz skripta str. 112 (matematická teorie kroucení)
- neznámá smyková napětí řešíme zavedením tzv. **Prandtlovy funkce kroucení F(y,z)**, jež je spojena se smykovým napětím vztahy:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z} \qquad \tau_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y}$$

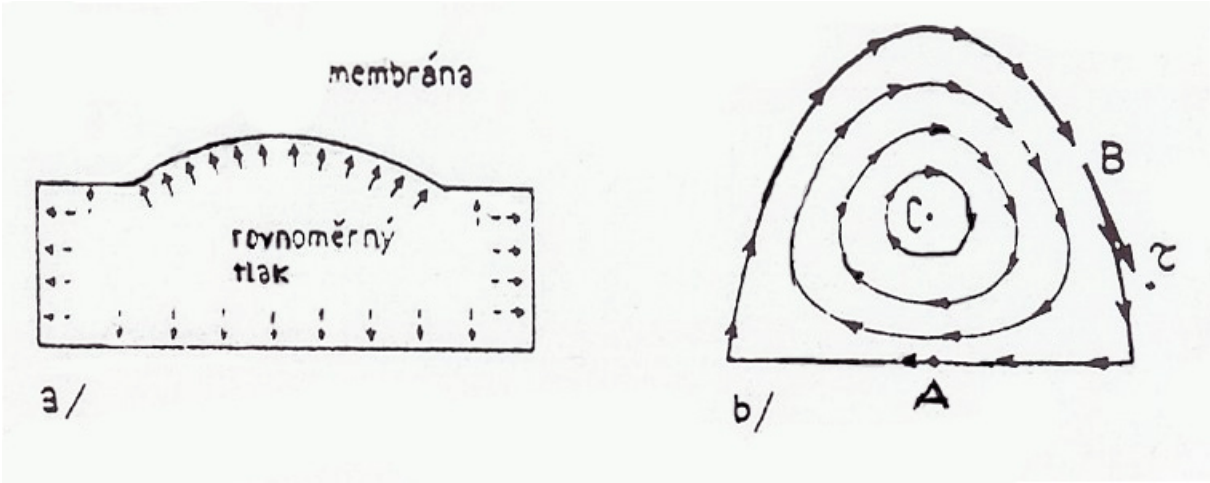
- Dále musí splňovat podmínku kompatibility, což je hledaná diferenciální rovnice (**Poissonova rovnice**)

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -2G\vartheta$$

Řešení: analyticky (**řady**), numericky (**metoda sítí, metoda konečných prvků**)

Membránová analogie

1. **Směr** smykových napětí v krouceném prutu je dán tečnami k vrstevnicím membrány
2. **Velikost napětí** je úměrná spádu membránové plochy
3. **Tuhost průřezu** v kroucení je úměrná objemu vrchlíku membrány



Obdélníkový průřez

Výsledky matematického řešení pro některé běžnější typy průřezů převedeny na tvar

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_k}$$

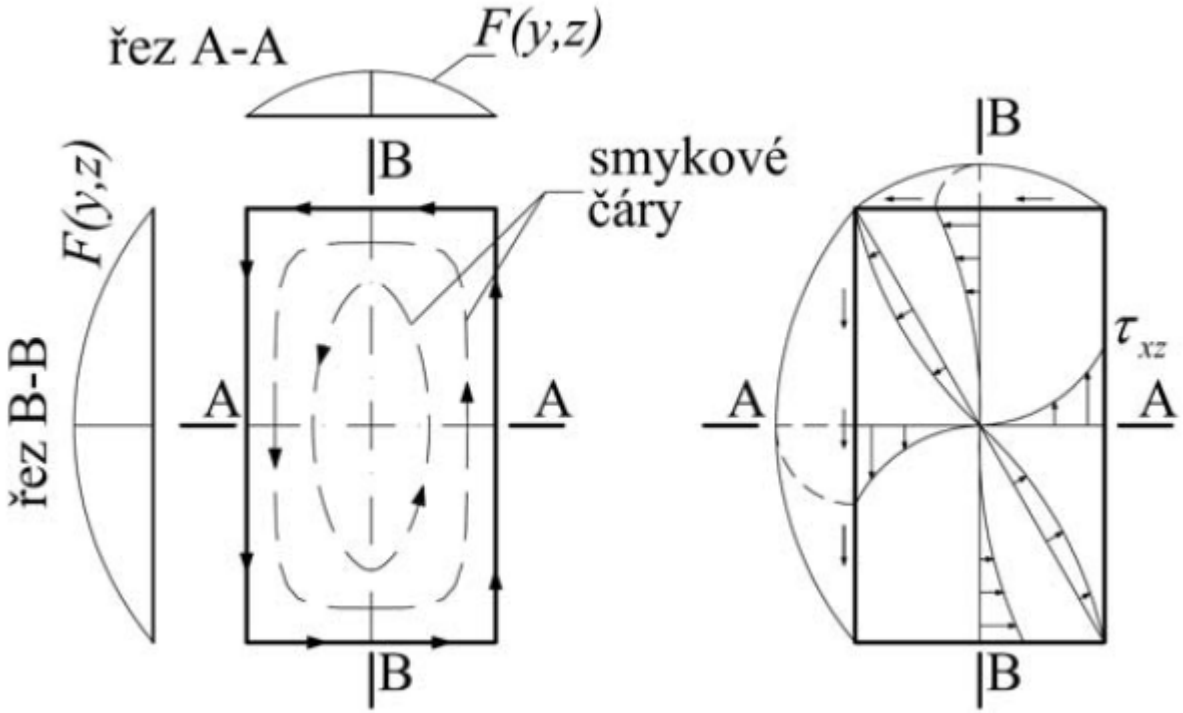
$$\vartheta = \frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{M_x}{GI_k}$$

W_k [cm³; m³] průřezový modu v kroucení

I_k [cm⁴; m⁴] moment tuhosti v kroucení

pro kruhový průřez platí: $I_k = I_p$

Obdélníkový průřez



$$W_k = \alpha \cdot b^2 \cdot h$$

$$I_k = \beta \cdot b^3 \cdot h$$

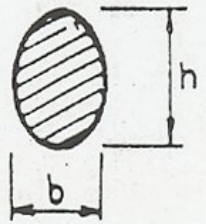
Hodnoty koeficientů α a β

h/b	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
α	0,1406	0,154	0,166	0,177	0,187	0,196	0,204	0,211
β	0,208	0,214	0,219	0,223	0,227	0,231	0,234	0,237

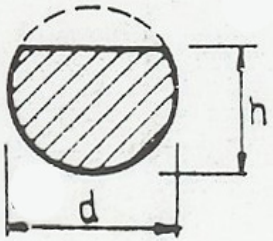
h/b	1,8	1,9	2,0	2,5	3,0	5,0	10	∞
α	0,217	0,223	0,229	0,249	0,263	0,291	0,312	1/3
β	0,240	0,243	0,249	0,258	0,267	0,292	0,312	1/3

W_k a J_k pro různé průřezy

elipsa

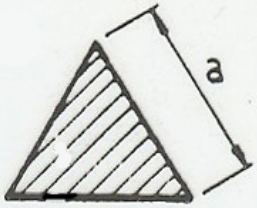


$$J_k = \frac{\pi b^3 h}{16(b^2+h^2)} \qquad W_k = \frac{\pi b^2 h}{16}$$



$$J_k = \frac{d}{16}\left(2{,}6\,\frac{h}{d} - 1\right) \qquad W_k \approx \frac{d^3}{8}\,\frac{2{,}6\,\frac{h}{d} - 1}{0{,}3\,\frac{h}{d} + 0{,}7}$$

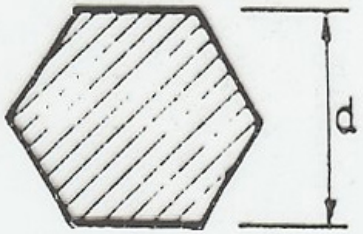
rovnostranný trojúhelník



$$J_k = \frac{\sqrt{3}}{80}\,a^4 \qquad W_k = \frac{a^3}{20}$$

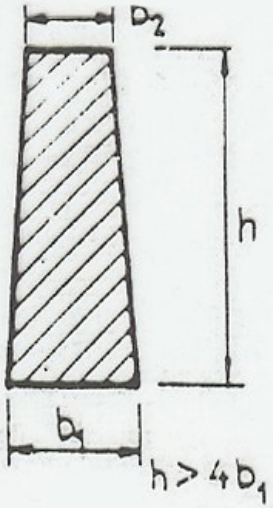
W_k a J_k pro různé průřezy

pravidelný šestiúhelník



$$J_k \approx 0{,}115\, d^4$$

$$W_k \approx 0{,}188\, d^4$$



$$J_k \approx \frac{h\left(b_1^4 - b_2^4\right)}{12\left(b_1 - b_2\right)} - 0{,}105\left(b_1^4 + b_2^4\right)$$

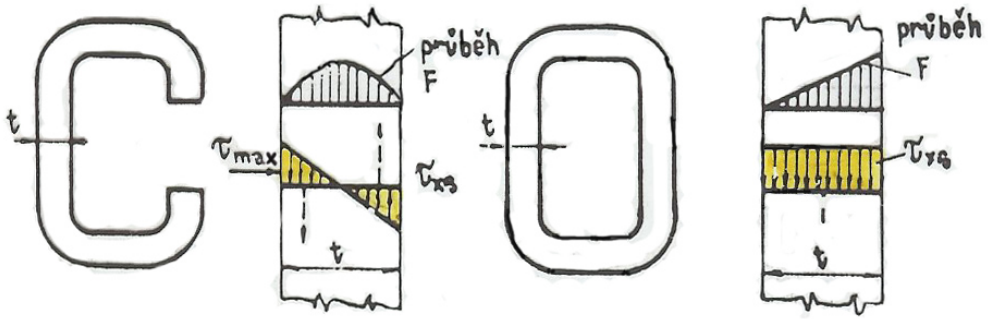
$$W_k \approx \frac{J_k}{b_1}$$

Tenkostěnné pruty otevřeného a uzavřeného průřezu

- kroucení prutů zejména otevřeného průřezu je složitým jevem, při němž vznikají často normálová napětí – jde o tzv. **ohybové vázané kroucení**
- **volné kroucení** – deplanace (borcení) je umožněna a nevznikají výrazná normálová napětí
- kroucení prutů otevřeného a uzavřeného průřezu je **principielně odlišné** což vyplývá z průběhu vyklenuté plochy F nad těmito průřezy

Tenkostěnné pruty otevřeného a uzavřeného průřezu

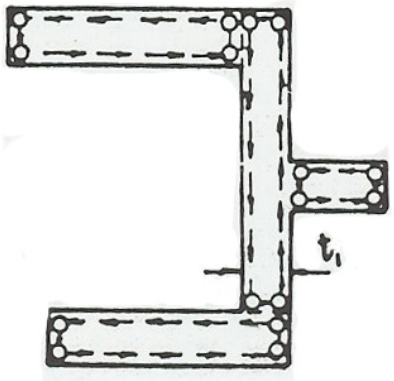
- **Otevřený průřez** – lineární rozdělení tečných napětí po tloušťce, na střednici je nulové
- **Uzavřený průřez** – téměř konstantní rozdělení tečných napětí po tloušťce

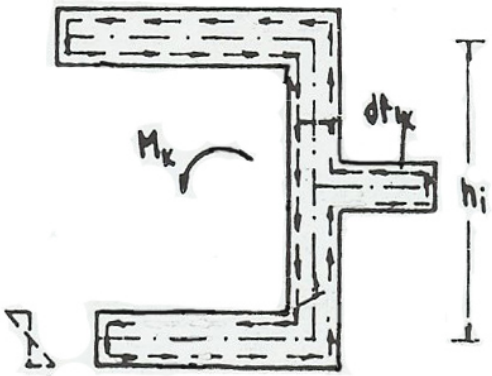


- Je zřejmé, že prut s **uzavřeným průřezem má větší odolnost proti kroucení** než prut s průřezem otevřeným.
- Jednoduchá přibližná řešení je možno použít v důsledku tenkostěnnosti prutů

Tenkostěnné pruty otevřeného průřezu (volné kroucení)

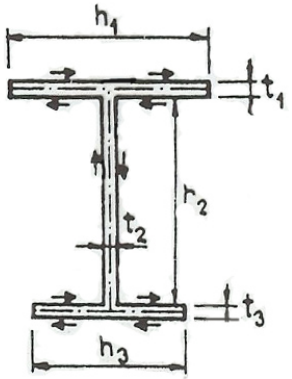
- pokládáme přibližně za složené d dílčích velmi protáhlých obdélníků a úlohu řešíme sumarizací

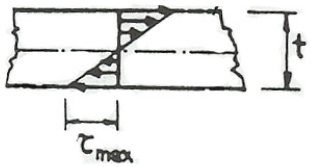




$$W_k = I_k / t_{max}$$

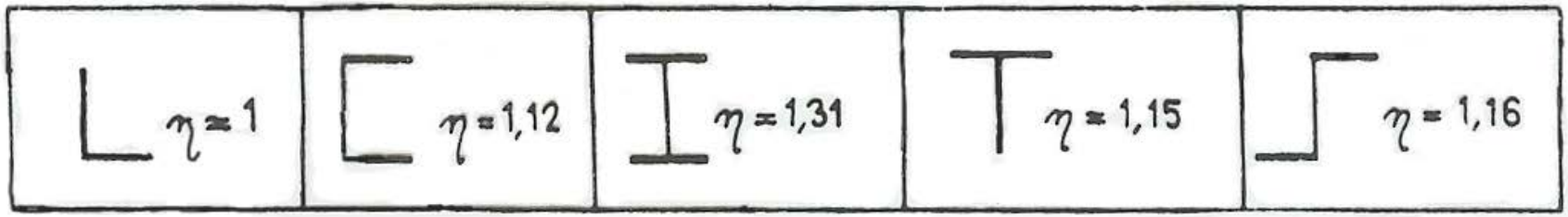
$$I_k = \frac{\eta}{3} \sum t_i^3 \cdot h_i$$

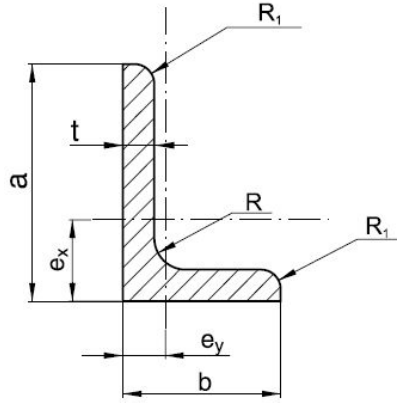




Korekční koeficienty

- korekční koeficienty pro válcované profily podle Foppla (zohledňuje existenci zaoblení)

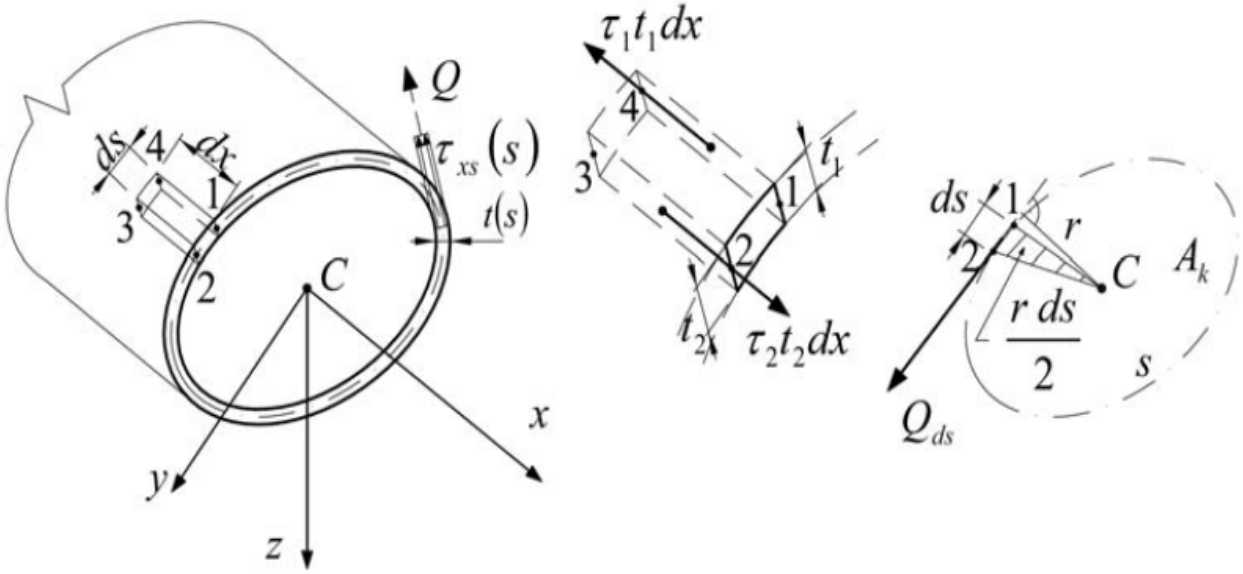




Tenkostěnné pruty uzavřeného průřezu

- vzniká **smykový tok**, obíhající po uzavřené střednici, jeho intenzita je konstantní
- maximální smykové napětí vzniká v nejužším místě

$$\tau_1 t_1 dx = \tau_2 t_2 dx$$
$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2$$
$$Q = \tau t \Rightarrow \text{konst.}$$
$$\text{smykový tok } Q \left[\text{kNm}^{-1}\right]$$



= výslednice sil na tloušťku t

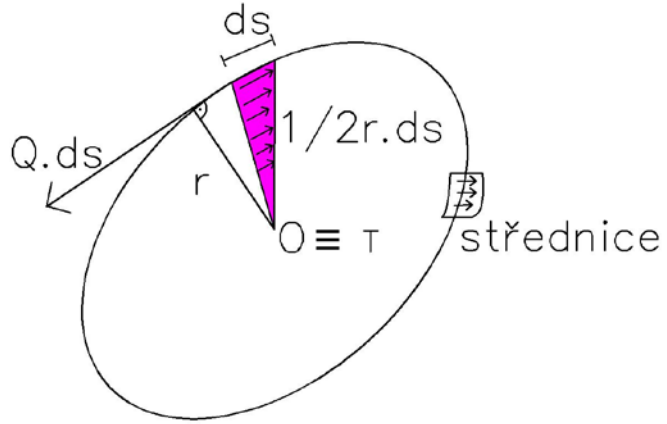
Integrace momentových účinků

$$M_x = \oint_S dM_x = \oint_S Q\, r\, ds =$$

$$= Q \oint_S r\, ds = Q\, 2A_o$$

$$\tau = \frac{Q}{t} = \frac{M_x}{2A_o t}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{2A_o t_{min}} = \frac{M_x}{W_k}$$



$$W_k = 2A_o t_{min} \qquad I_k = \frac{4A_o^2}{\oint_S \frac{ds}{t}}$$

r ... kolmá vzdálenost k tečně (ne průvodič)

A_o ... plocha ohraničená střednicí průřezu (ne plocha průřezu)

Moment tuhosti v kroucení tzv. **Bredtova tuhost** plyne z deformační podmínky; podrobněji viz skr. str. 119

Numerický příklad

$$\oint_S \frac{ds}{t} = \sum \frac{h}{t} = \frac{30}{3} + 2 \cdot \frac{40}{1} + \frac{30}{2} = 105$$

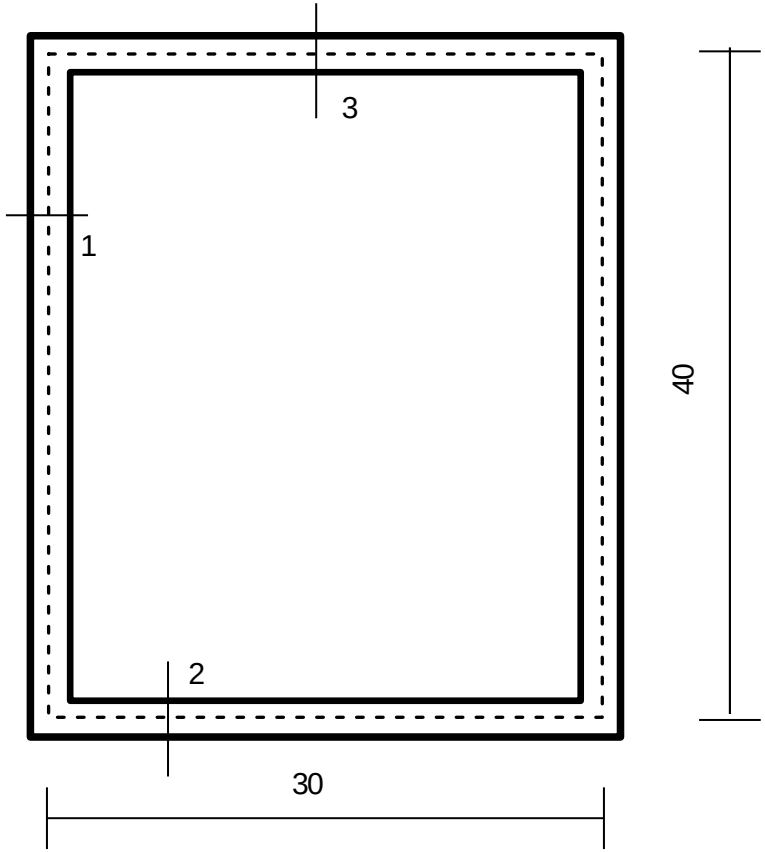
$$A_o = 30 \cdot 40 = 1200\,cm^2$$

$$W_k = 2A_o t_{min} =$$

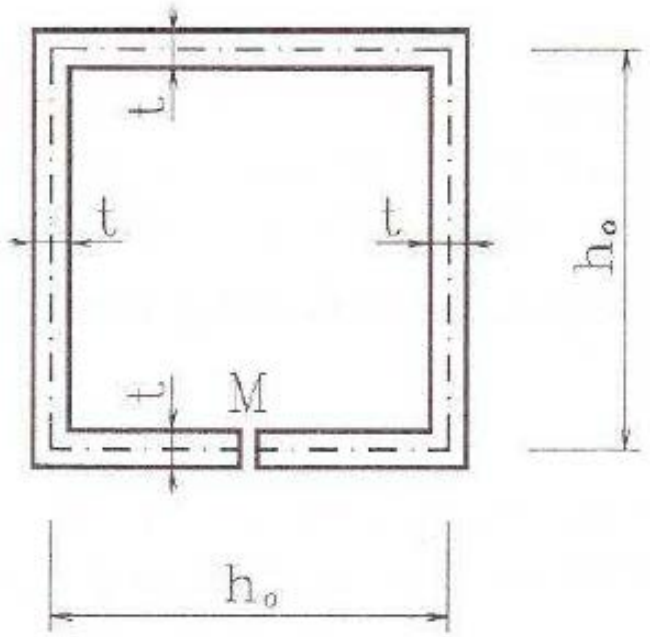
$$= 2 \cdot 1200 \cdot 1 = 2400\,cm^3$$

$$I_k = \frac{4A_o^2}{\oint \frac{ds}{t}} =$$

$$= \frac{4 \cdot 1200^2}{105} = 54857\,cm^4$$



Srovnání s otevřeným průřezem



$$I_k = \frac{1}{3}\left(3^3 \cdot 30 + 2 \cdot 1^3 \cdot 40 + 2^3 \cdot 30\right)$$

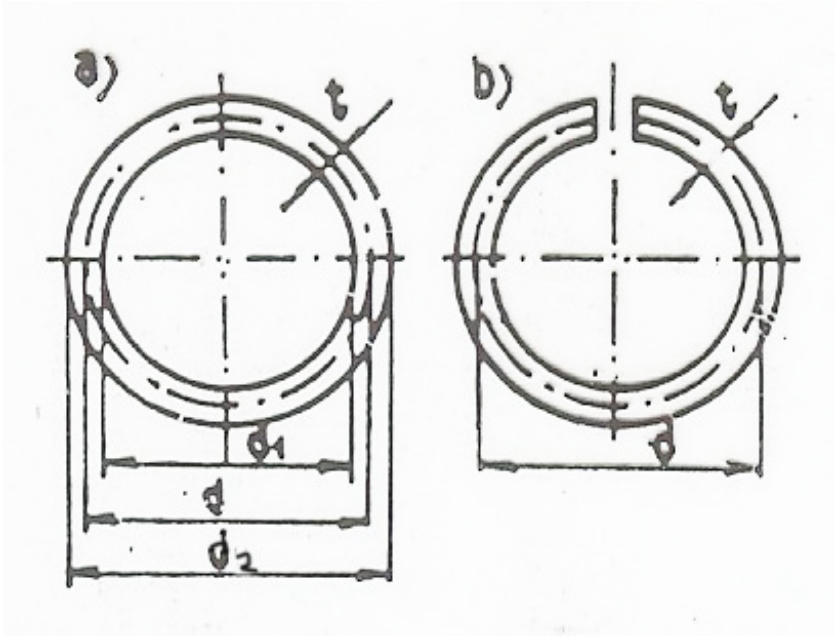
$$= \frac{1}{3} 1130 = 376{,}7\,\mathrm{cm}^4$$

$(145 \times$ méně$)$

$$W_k = {}^{I_k}/_{t_{max}} = \frac{376{,}7}{3} = 125{,}6\ \mathrm{cm}^3$$

$(19 \times$ méně$)$

Příklad: tenkostěnná kruhová trubka



$$a)\quad I_k = I_p = \frac{\pi}{32}\left[d_2^4 - d_1^4\right] =$$

$$= \frac{\pi}{32}\left[(d+t)^4 - (d-t)^4\right] = \frac{\pi d^3}{4} t$$

$$b)\quad I_k = \frac{1}{3}\oint_s t^3 ds = \frac{1}{3} t^3 \pi d = \frac{\pi}{3} d t^3$$

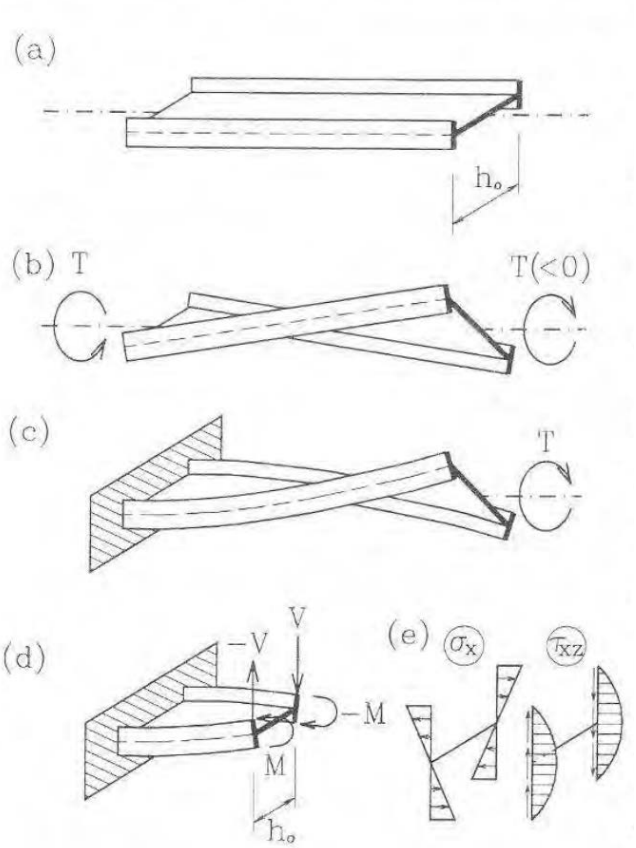
$$\frac{a)}{b)} = \frac{I_p}{I_k} = \frac{3}{4}\left(\frac{d}{t}\right)^2 >> 1$$

$$a)\quad \tau = \frac{2M_k}{\pi\, t\, d^2}$$

$$b)\quad \tau = \frac{3M_k}{\pi\, t^2\, d} \qquad \frac{a)}{b)} = \frac{2}{3}\frac{t}{d}$$

Vázané ohybové kroucení

- vázané ohybové kroucení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu
- **bráněno deplanaci** – pak vznikají normálová napětí vlivem ohybu dílčích stěn (pásnic)
    - okrajové podmínky
    - vyztužení
    - způsob zatížení
    - průřezové změny



$$\text{BIMOMENT}$$
$$\mathrm{B} = M \cdot h_0$$