VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

Pružnost a pevnost

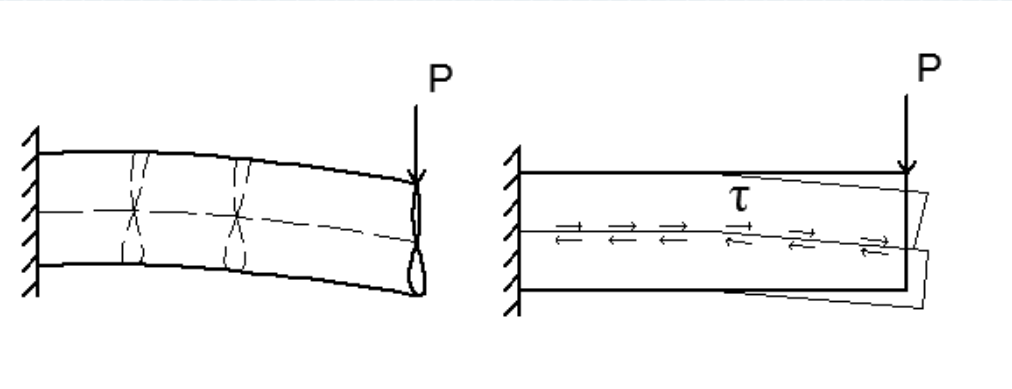
Přednášející: Doc. Ing. Lukáš Novák, Ph.D.

Autoři: Drahomír Novák, Lukáš Novák

Ústav stavební mechaniky

Smyková napětí za ohybu

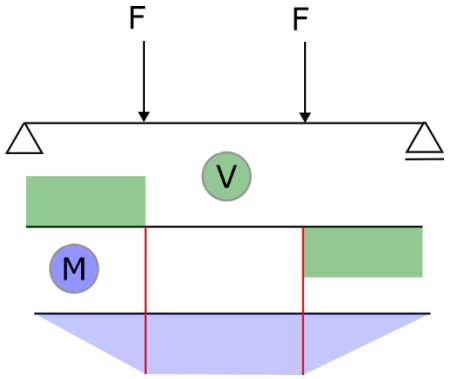
Smyková (tečná) napětí za ohybu u masivních prutů se snaží rovinu průřezu zprohýbat – **deplanace**. Takže hypotéza rovinných průřezů přesně neplatí.
Pro dlouhý a poddajný prut tato deplanace není významná.



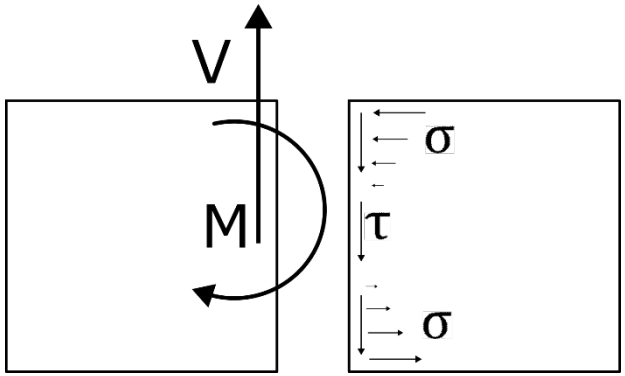
Vodorovná tečná napětí zabezpečují kompatibilní deformaci všech částí prutu při jeho ohybu.

Opakování: separace účinků

- Prostý ohyb pomocí dvojice sil na koncích nosníků spíše v laboratorních podmínkách
- Prakticky pouze na částech nosníku (4 bodový ohyb)

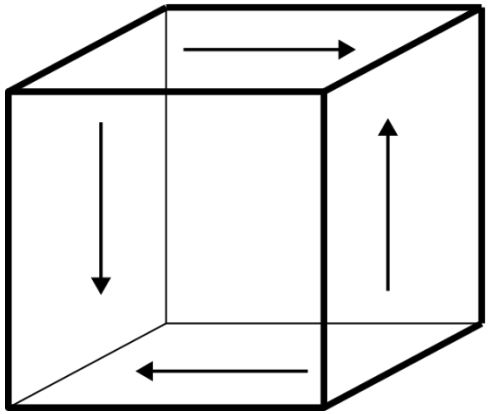


- Běžné případy tedy M+V, tudíž normálové σ a tangenciální τ
- Má tedy smysl vyšetřovat prostý ohyb?
  - Normálové napětí $\sigma = f(M)$
  - Tangenciální napětí $\tau = f(V)$
  - Separace účinků, lze tedy vyšetřovat odděleně

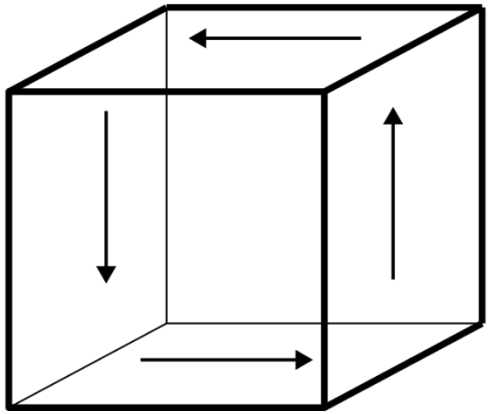


Opakování: vzájemnost smykových napětí

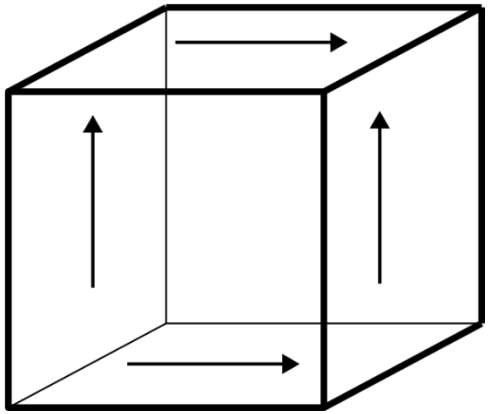
a)



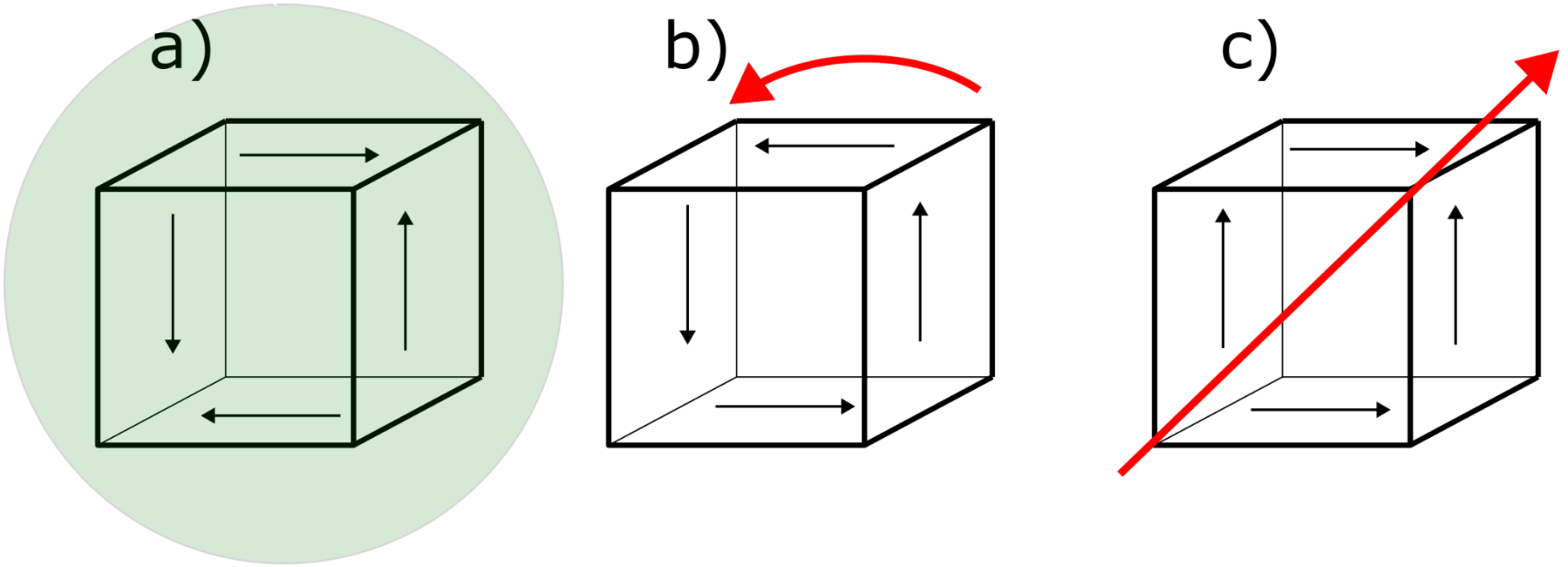
b)



c)



Opakování: vzájemnost smykových napětí



Opakování: vzájemnost smykových napětí

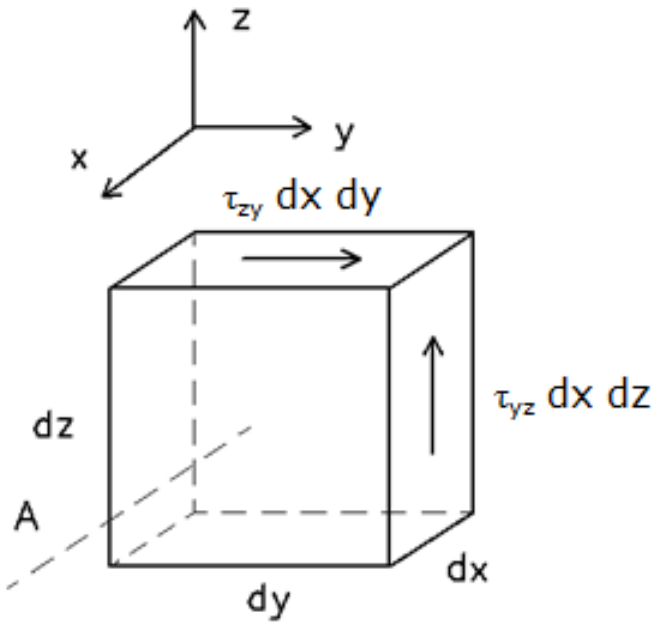
Tři momentové podmínky elementárního kvádru o hranách dx, dy, dz

MOMENT K OSE A: $\sum M_a = 0$

síla rameno

$$\tau_{yz} \cdot dx \cdot dz \cdot dy - \tau_{zy} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy}$$



Analogicky v ostatních směrech z celkem 9 složek je 6 **nezávislých** – pojem **vektoru napětí**

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$
$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

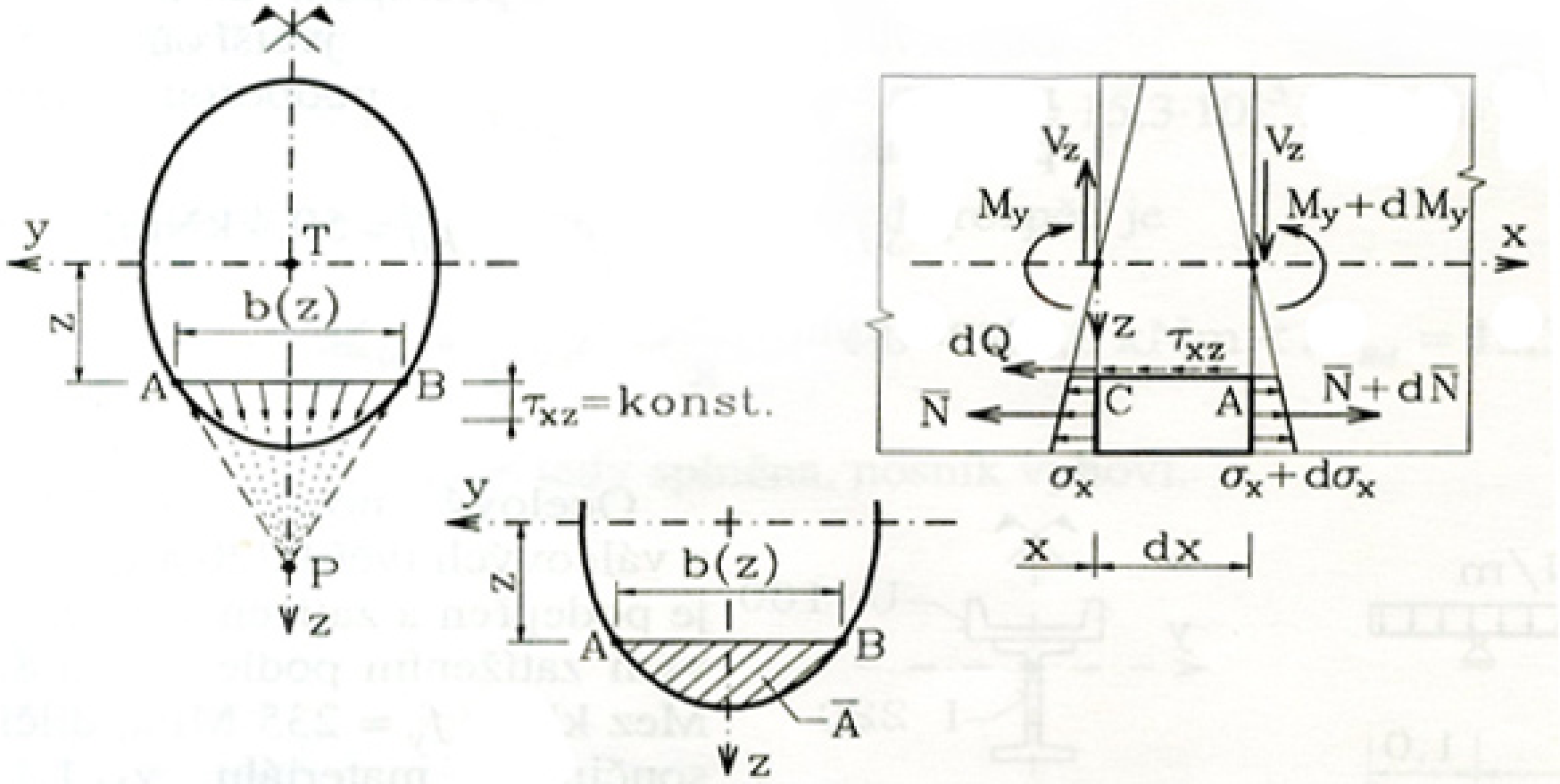
Předpoklady pro výpočet

Přibližné technické řešení smyku za ohybu sa opírá o tzv. **Grashofovy předpoklady**. Smyková napětí na přímce **z= konst.** (rovnoběžka s neutrální osou) mají tyto vlastnosti:

- **Svislá složka napětí je po šířce průřezu konstantní**
- **Jejich výsledné vektory směřují do společného bodu na ose symetrie, určeného průsečíkem tečen k obrysu průřezu**

Odvození z podmínky rovnováhy ve vodorovném směru

Grashofovy předpoklady (graficky)



Na odříznutou část $\overline{A}$ působí:

$$\overline{N} = \int_{\overline{A}} \sigma_x \cdot dA = \frac{M_y}{I_y} \int_{\overline{A}} z \cdot dA = \frac{M_y}{I_y} \cdot S_y$$

←statický moment **odříznuté** části

$$d\overline{N} = \frac{d\overline{N}}{dx} \cdot dx = \frac{d}{dx}\left(\frac{M_y}{I_y} \cdot S_y\right) dx = \frac{dM_y}{dx} \cdot \frac{S_y}{I_y} \cdot dx = V_z \frac{S_y}{I_y} dx$$

$$dQ = \tau_{zx} \cdot b(z) \cdot dx$$

Součtová podmínka rovnováhy

$$-dQ - \overline{N} + \overline{N} + d\overline{N} = o$$

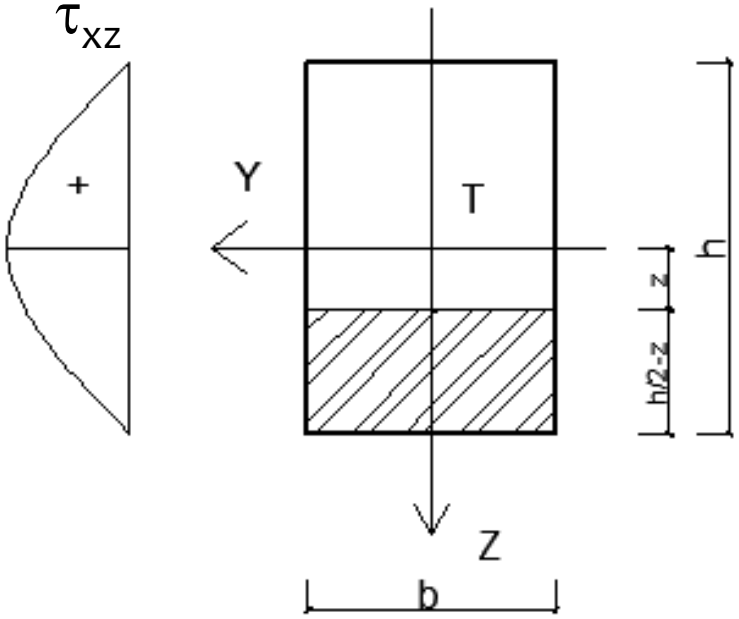
$$dQ = d\overline{N}$$

$$\tau_{zx} \cdot b(z) \cdot dx = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y} dx$$

Grashofův vzorec

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{V_z \cdot S_y}{b \cdot I_y}$$

Příklad – obdélníkový průřez



$$S_y = b\left(\frac{h}{2} - z\right)\cdot\left(z + \frac{h}{4} - \frac{z}{2}\right) = \frac{b}{8}\left(h^2 - 4z^2\right)$$

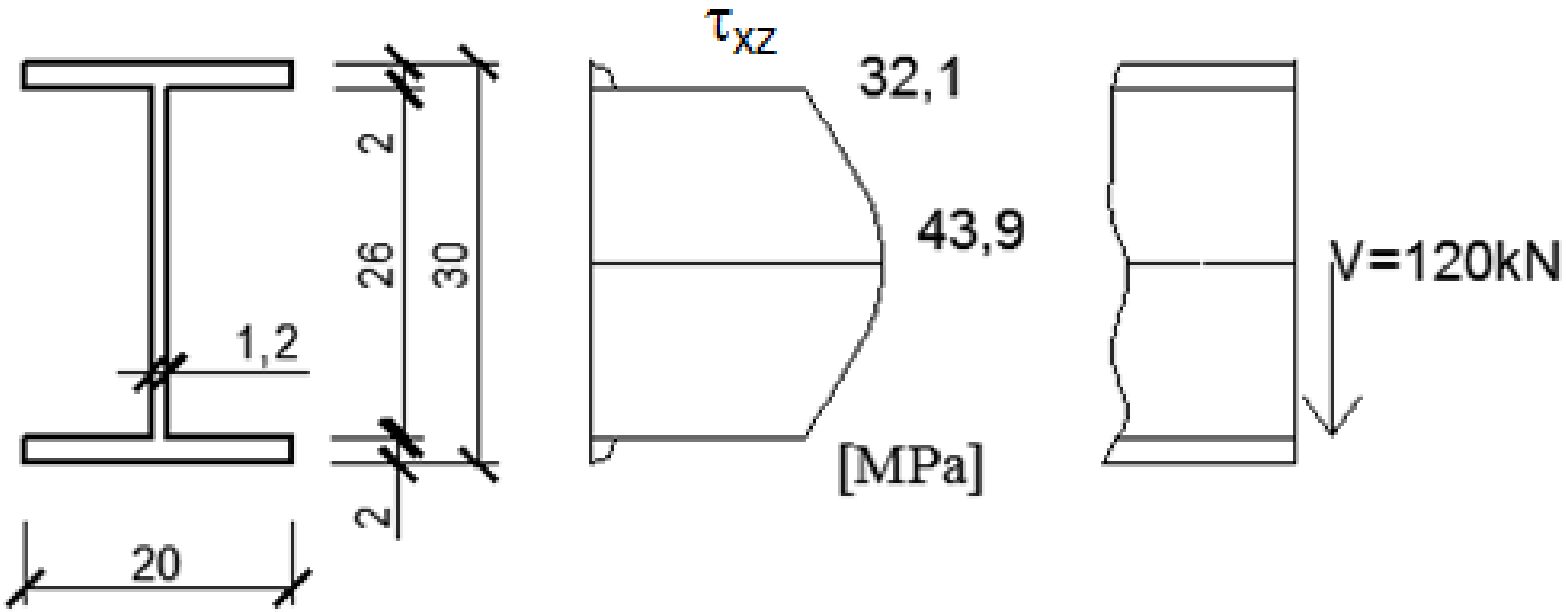
$$\tau_{xz} = \frac{V_z \dfrac{b}{8}\left(h^2 - 4z^2\right)}{6\cdot\dfrac{1}{12}bh^3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{V_z}{6h}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)$$

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2}\frac{V_z}{A}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)$$

max. τ_{xz} pro z = 0

$$max\,\tau_{xz} = \frac{3}{2}\frac{V_z}{A}$$

Příklad – I průřez



$$I = \frac{1}{12}\left(20 \cdot 30^3 - 18{,}8 \cdot 26^3\right) = \frac{1}{12}\left(540000 - 330428{,}8\right) = 17464cm^4$$

$$S_{y_s} = 20 \cdot 2 \cdot 14 = 560cm^3$$

$$S_{y_t} = 560 + 1{,}2 \cdot 13 \cdot 6{,}5 = 661cm^3$$

$$\tau_{xz} = \frac{120 \cdot 10^{-3} \cdot 560 \cdot 10^{-6}}{1{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot 17464 \cdot 10^{-8}} = 32{,}1MPa$$

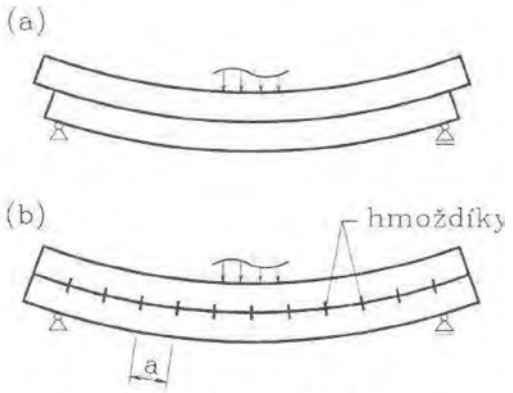
$$\tau_{xz} = \frac{120 \cdot 10^{-3} \cdot 661 \cdot 10^{-6}}{1{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot 17464 \cdot 10^{-8}} = 43{,}9MPa$$

Složené nosníky

- Složený nosník z několika podélných částí ($V \neq 0$)
- Je nutné zabezpěčit vzájemné spojení
- Využíváme hmoždinky, svary, šrouby apod.
- Předpoklad nepoddajného spojení
- Je nutné přenést síly jaké v plném nosníku zachycují smyková napětí

$$Q^* = b(z)\tau_{zx} = b(z)\frac{V_z \cdot \overline{S_y}}{b(z) \cdot I_y} = \frac{V_z \cdot \overline{S_y}}{I_y} \text{ [kN/m]}$$

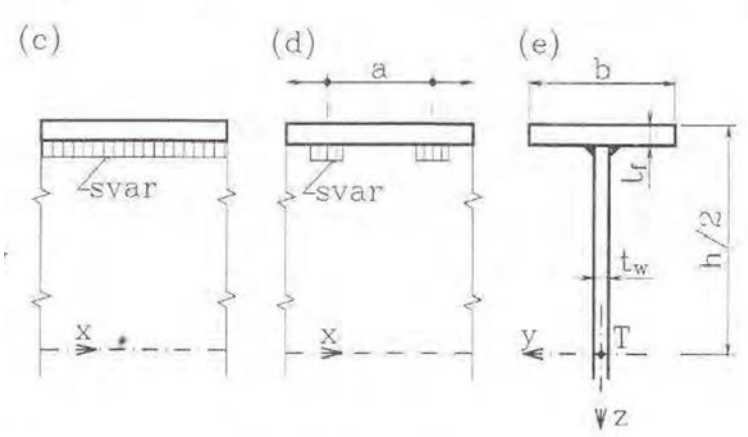
$$Q = Q^* \cdot a = \frac{V_z \cdot \overline{S_y}}{I_y} \cdot a \text{ [kN] } (a \text{ délka účinku spoj. prvku})$$



$\overline{S_y}$: stat. moment připojované části

Příklad: složený nosník

- Svařovaný nosník symetrického I průřezu
  - celková výška h=700mm
  - tl. stěny t_w=10mm
  - šířka pásnice b=270mm
  - tl. pásnice t_f=16mm
  - V_z=300kN



- Určete smyk. sílu působící na svary
  - a) průběžné
  - b) přerušované se vzájemnou vzdál. a=300mm

Příklad: složený nosník

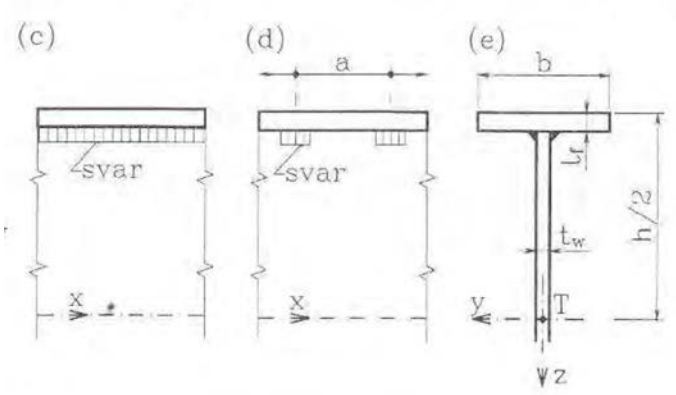
- Plocha pásnice A_f =bt$_f$=4320mm2
- $I_y \approx \frac{1}{12} t_w (h - 2t_f)^3 + 2A_f \left(\frac{h-t_f}{2}\right)^2$

$$I_y \approx \frac{1}{12} 10(700 - 32)^3 + 2 \cdot 4320(342)^2 = 1259 \cdot 10^6 mm^4$$

- $\overline{S_y} = A_f \left(\frac{h-t_f}{2}\right) = 4320 \cdot 342 = 1{,}477 \cdot 10^6 mm^4$

$$Q^* = \frac{V_z \cdot \overline{S_y}}{I_y} = \frac{300 \cdot 1{,}477 \cdot 10^6}{1259 \cdot 10^6} = 0{,}3251 kN/mm = 325{,}1 kN/mm$$

$$Q = Q^* \cdot a = \frac{V_z \cdot \overline{S_y}}{I_y} \cdot a = 325{,}1 * 0.3 = 95{,}7 kN$$



Smyková napětí v tenkostěnných prutech

Definice tenkostěnného prutu: t<<b, h<<l

- Otevřený průřez
- Uzavřený průřez

- Smyková napětí lze považovat za **konstantní po tloušťce**, vytvářejí tzv. **smykový tok.**
- Smyková napětí jsou rovnoběžná s obrysem průřezu

Aplikace Grashofovy teorie – vyšetřujeme napětí rovnoběžné s obrysem

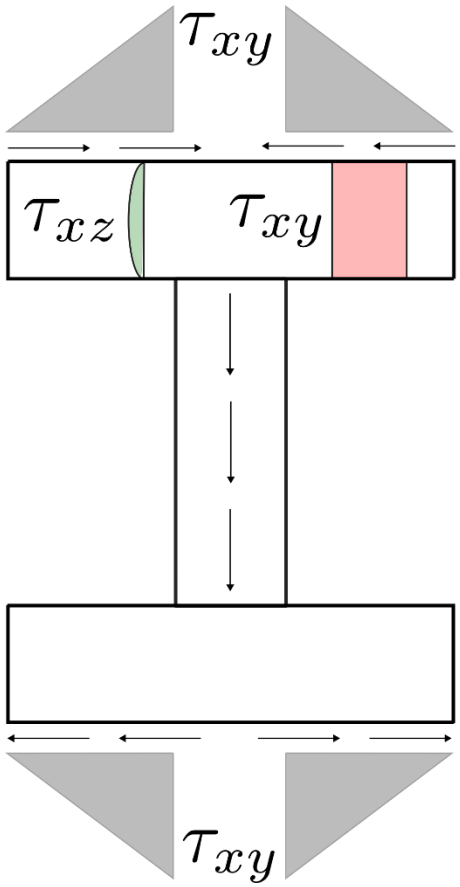
$$\tau = \frac{V_z \cdot S_y}{t \cdot I_y}$$

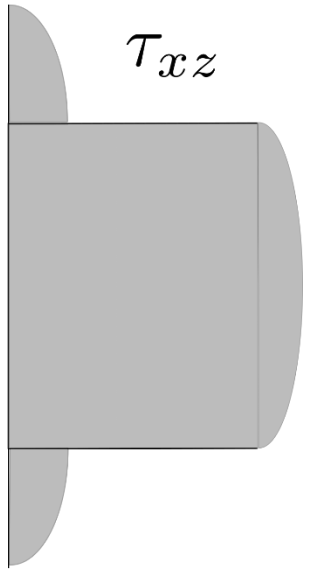
Tenkostěnné otevřené průřezy

- τ_x v rovině kolmé k x:
  - Svislá část: τ_{xz}
  - Vodorovná část: τ_{xy}

- τ_{xy} se mění lineárně s y
- τ_{xy} konst. po tl. Příruby

- τ_{xz} v celé šířce stálá
- τ_{xz} po tl. Parabola
- při malé tl. příruby zanedbatelná

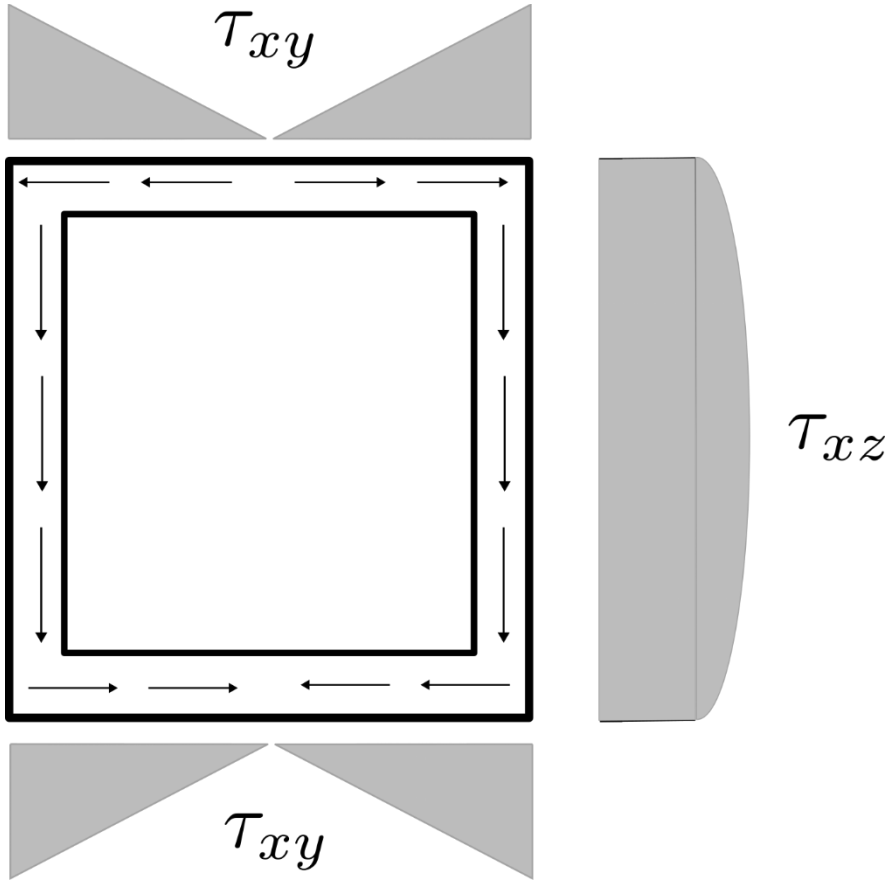




$$\tau = \frac{V_z \cdot S_y}{t \cdot I_y}$$

Tenkostěnné uzavřené průřezy

- Výpočet smykových napětí představuje staticky neurčitou úlohu
- Vyjímka: dvoukomůrkové nosníky s rovinou symetrie, zatížené v této rovině. Smyková napětí na rovině symetrie jsou rovna nule.



Střed smyku

Bod v průřezu, kterým musí procházet výsledný vektor posouvající síly$\{V\}=\{0,V_y,V_z\}^T$ aby nenastalo kroucení prutu.

- Dvojnásobně symetrický průřez: střed smyku = těžiště
- Jedna osa symetrie: střed smyku leží na této ose
- Masivní průřezy: kroucení vzniklé ztotožněním středu smyku s těžištěm lze zanedbat – vzniklá přídavná tečná napětí jsou malá
- Tenkostěnné průřezy: pozor, nelze pominout, tečná napětí velká

Střed smyku C-profilu

Na přírubě:

$$S_y(s) = s \cdot t_f \cdot \frac{h_o}{2}$$

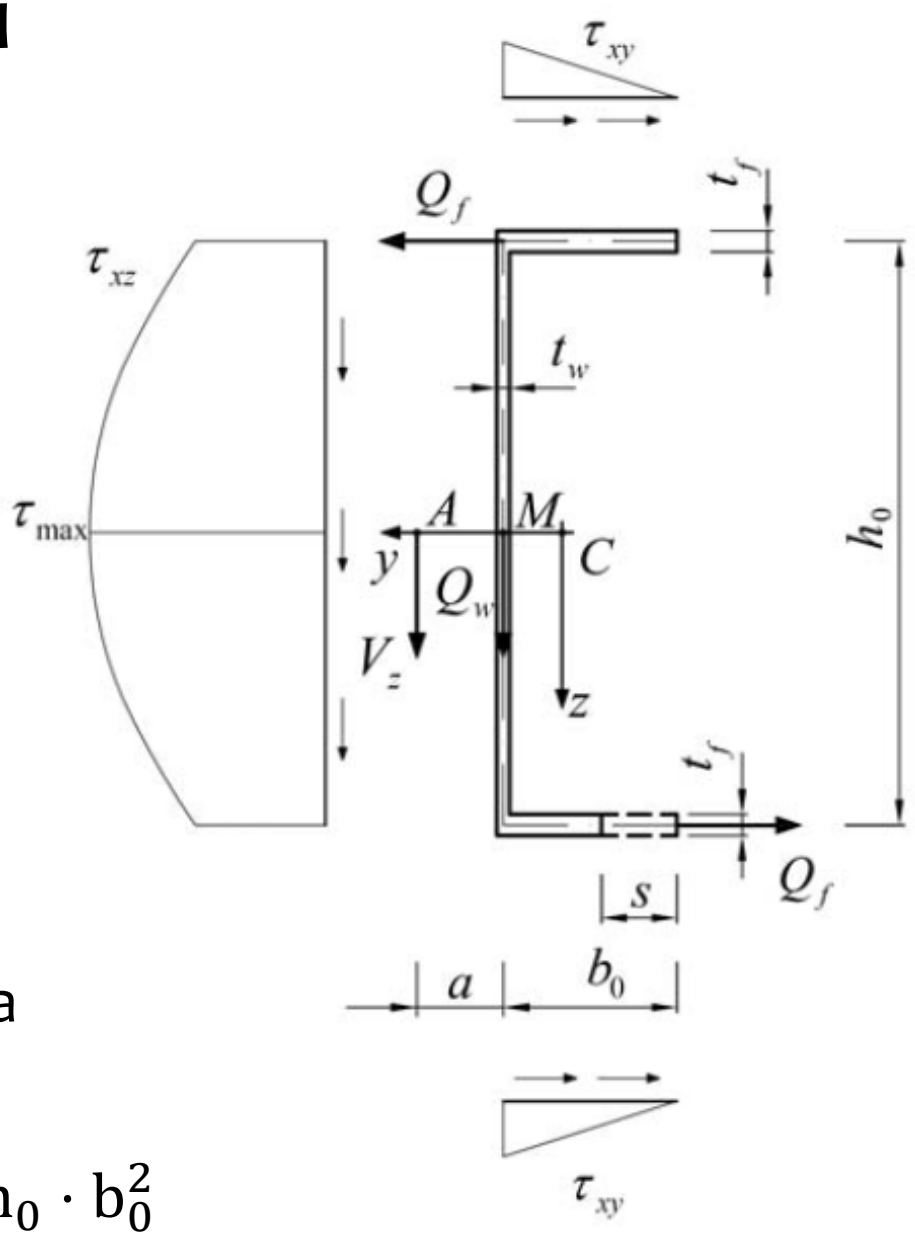
$$\tau_{xy} = \frac{V \cdot S_y}{t_f \cdot I_y} = \frac{V}{2I_y} \cdot h_o s$$

Max pro s=b_o

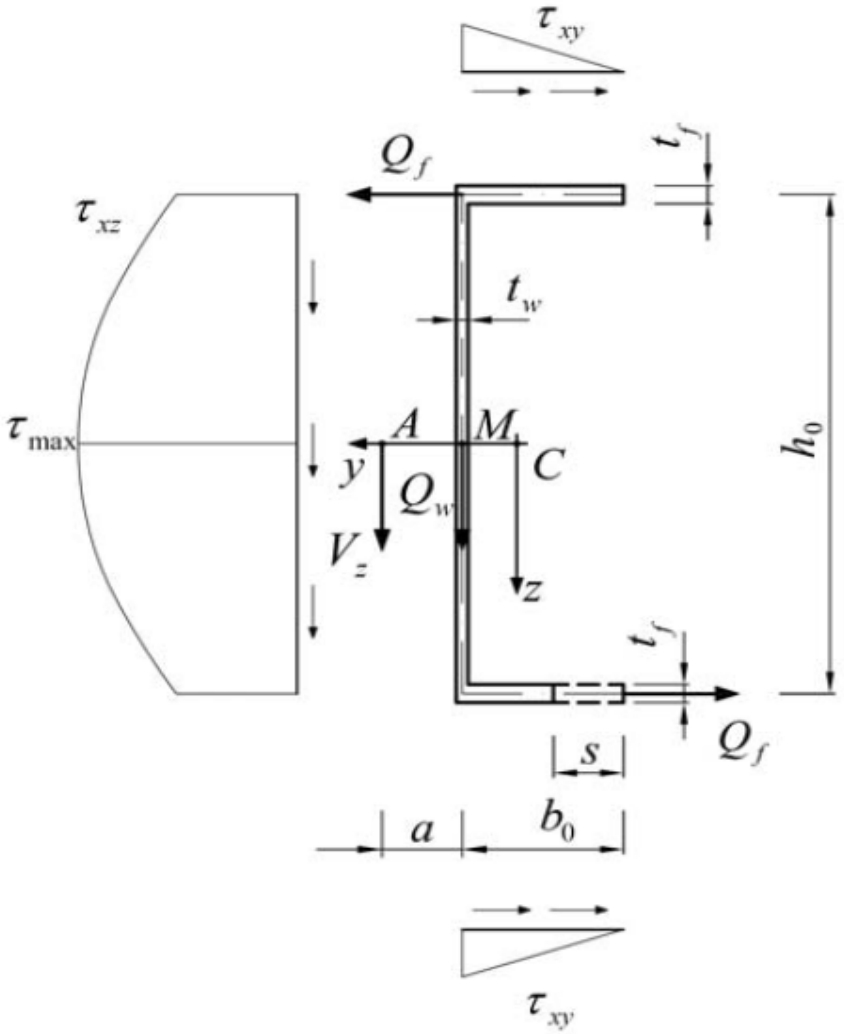
$$\tau_p = \frac{V}{2I_y} \cdot h_o \cdot b_o$$

Celková vodorovná výslednice na každé z přírub

$$Q_f = \frac{1}{2} t_f \cdot b_0 \cdot \tau_p = \frac{V}{4I_y} \cdot t_f \cdot h_0 \cdot b_0^2$$



Střed smyku C –profilu



Moment obou sil v přírubách (dvojice sil) je Q_f .h_o, výslednice svislých sil ve stěně je ovšem posouvající síla V_z, takže výslednice všech 3 sil je svislá síla V posunutá o vzdálenost **a,** což definuje **polohu středu smyku** S (od osy stěny).

$$a = \frac{Q_f \cdot h_o}{V_z} = \frac{1}{4I_y} t_f \cdot b_o^2 \cdot h_o^2$$

Typické polohy středu smyku

U svazkových průřezů v jejich průsečíku

