VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

Pružnost a pevnost

Přednášející: Doc. Ing. Lukáš Novák, Ph.D.

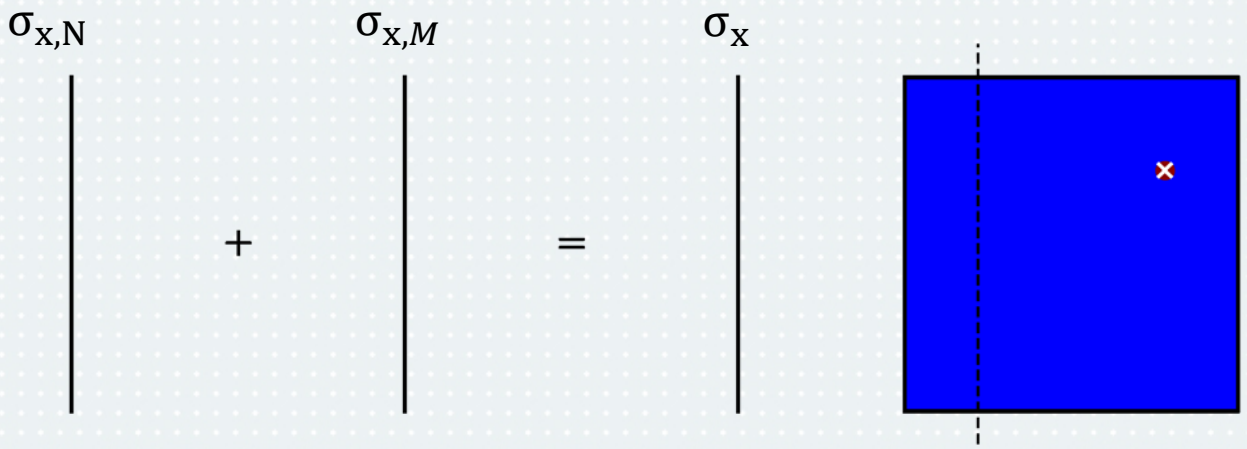
Autoři: Drahomír Novák, Lukáš Novák

Ústav stavební mechaniky

Mimostředný tah a tlak

- Výsledný účinek vnějších sil lze vyjádřit normálovou silou N rovnoběžnou (nikoli totožnou) s podélnou osou prutu.
- Obecná kombinace tahu (tlaku) s ohybem

N≠0 $M_y \neq 0$ $M_z \neq 0$



Opakování: prostorový ohyb

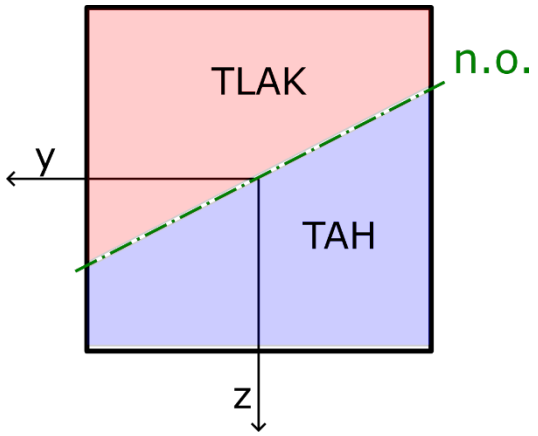
- Zatížení neleží v rovině prutu
- Souřadnice y,z volíme v hlavních centrálních osách

$$\sigma_x(z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

$$\sigma_x(y) = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

$$\sigma_x(y,z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

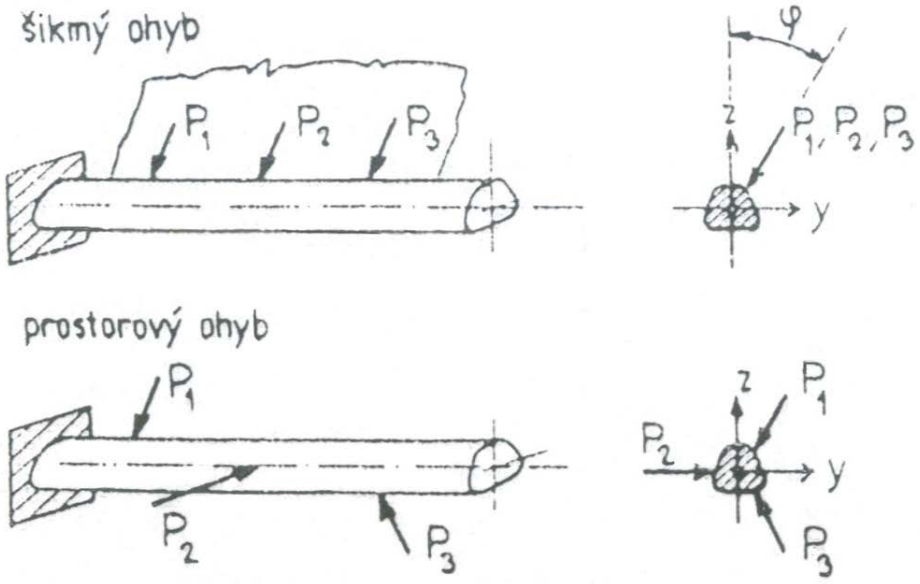
- Neutrální osa prochází těžištěm
- Obecně nesplývá s žádnou z hlavních centrálních os



Šikmý a prostorový ohyb

- **šikmý ohyb**: vnější síly leží v jedné rovině avšak tato rovina není totožná nebo rovnoběžná s některou z hlavních rovin prutu, tj. rovina zatížení neprochází některou z hlavních setr. os průřezu a je odkloněna o úhel

- **prostorový ohyb**: vnější zatížení neleží ve společné rovině



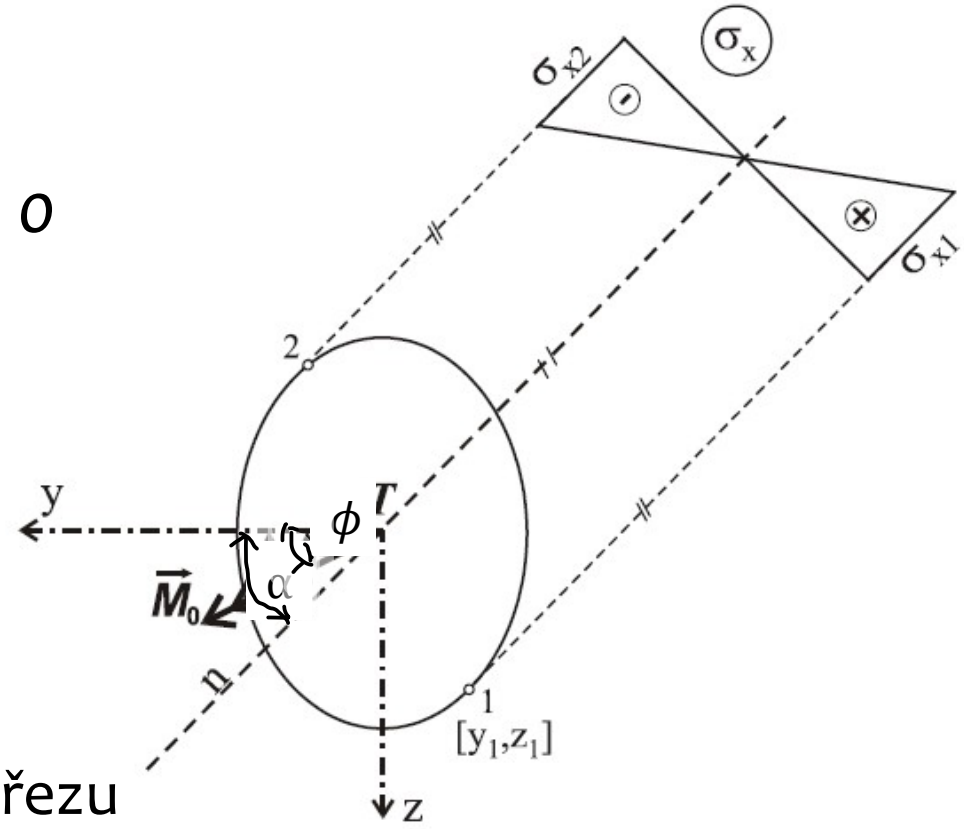
Šikmý a prostorový ohyb

V obou případech namáhání

$N_x = 0; \quad M_y \neq 0; \quad M_z \neq 0$

a složky ohybového momentu lze vyjádřit

$$M_y = M \cdot \cos\phi$$
$$M_z = M \cdot \sin\phi$$



M... je výsledný moment v průřezu

Normálová napětí

$$\sigma_x(y,z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

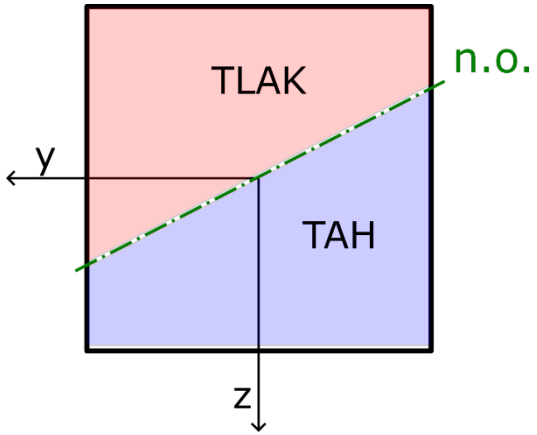
Neutrální osa

rovnice neutrální osy – z podmínky nulových normálových napětí $\sigma_x = 0$

$$\frac{M \cdot \cos\phi}{I_y} \cdot z = \frac{M \cdot \sin\phi}{I_z} \cdot y$$

po úpravě

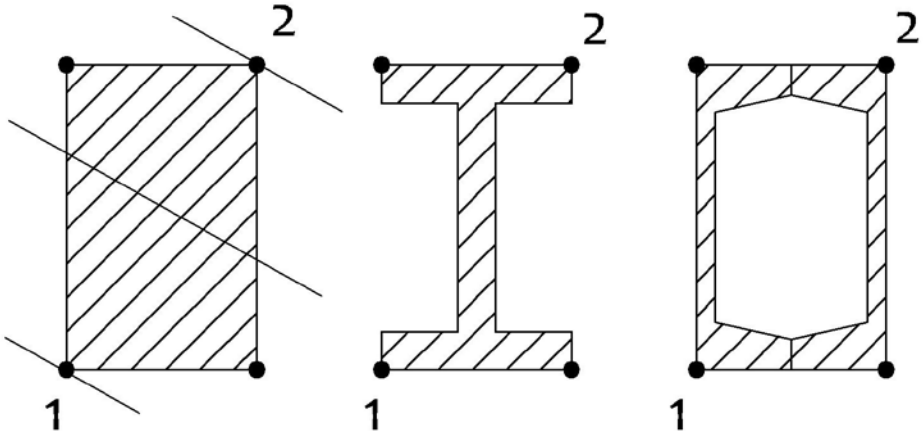
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{z}{y} = \frac{M_z}{M_y}\frac{I_y}{I_z} = \operatorname{tg}\phi\ \frac{I_y}{I_z}$$



Neutrální osa není kolmá k rovině zatížení!

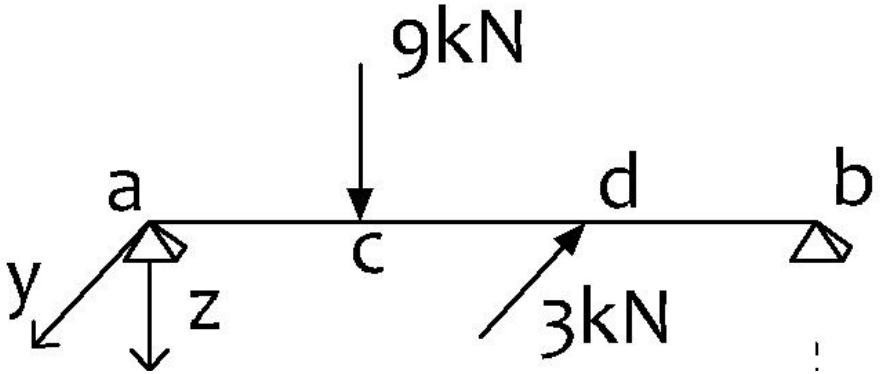
Extrémní napětí

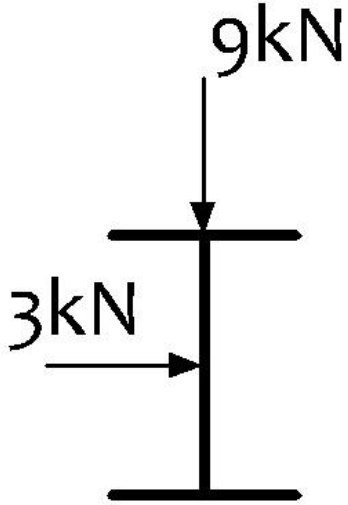
vznikají v bodech nejvíce vzdálených od neutrální osy. U průřezu s dvěma osami symetrie, obsahujícími i vrcholy opsaného obdélníka jsou extrémní napětí.



$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z}$$

Příklad – ocelový válcový profil



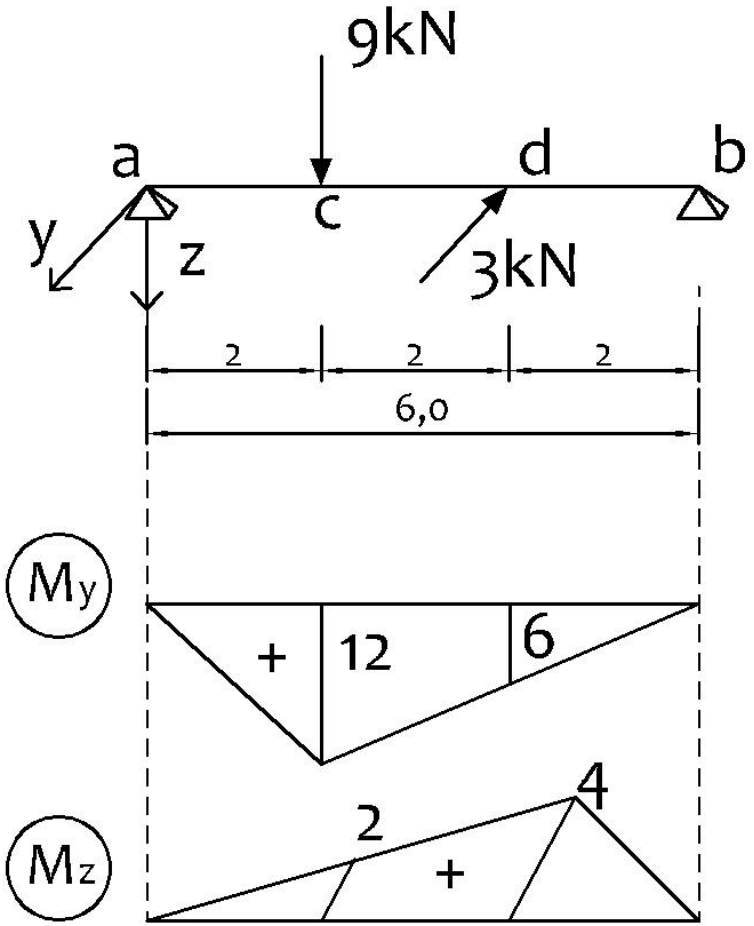


PROFIL I200

$W_y = 214\ cm^3$ $I_y = 2140\ cm^4$

$W_z = 26{,}0\ cm^3$ $I_z = 117{,}0\ cm^4$

Příklad – ocelový válcový profil



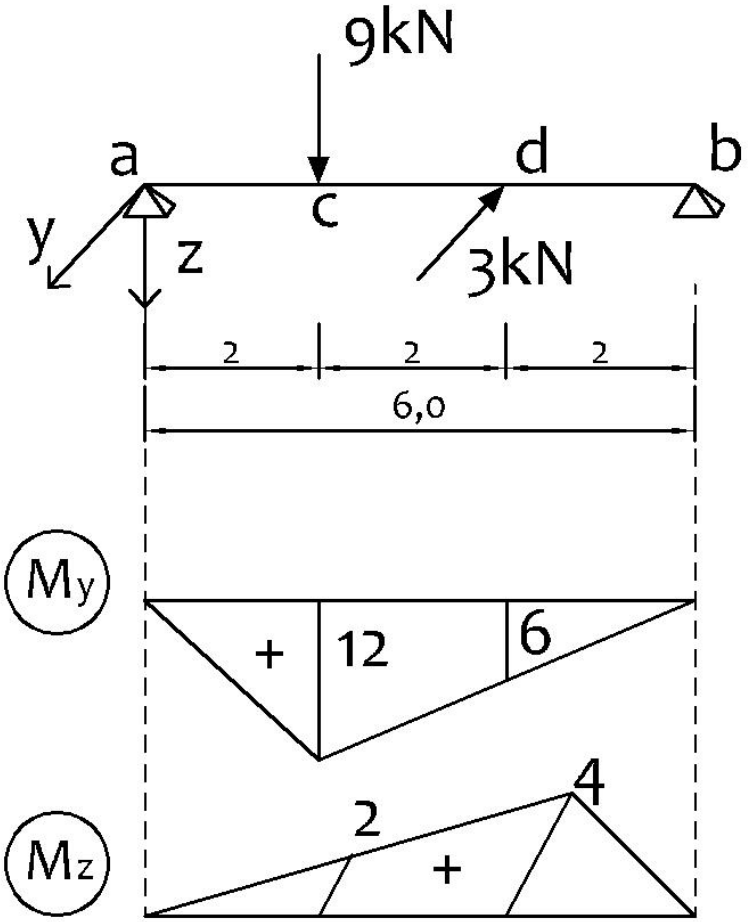
Řez c :

$$\sigma_{max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} =$$

$$= \frac{12 \cdot 10^{-3}}{214 \cdot 10^{-6}} + \frac{2 \cdot 10^{-3}}{26{,}0 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 56{,}1 + 76{,}9 = 133{,}0 \ MPa$$

Příklad – ocelový válcový profil



Řez d:

$$\sigma_{max} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{214 \cdot 10^{-6}} + \frac{4 \cdot 10^{-3}}{26{,}0 \cdot 10^{-6}} =$$

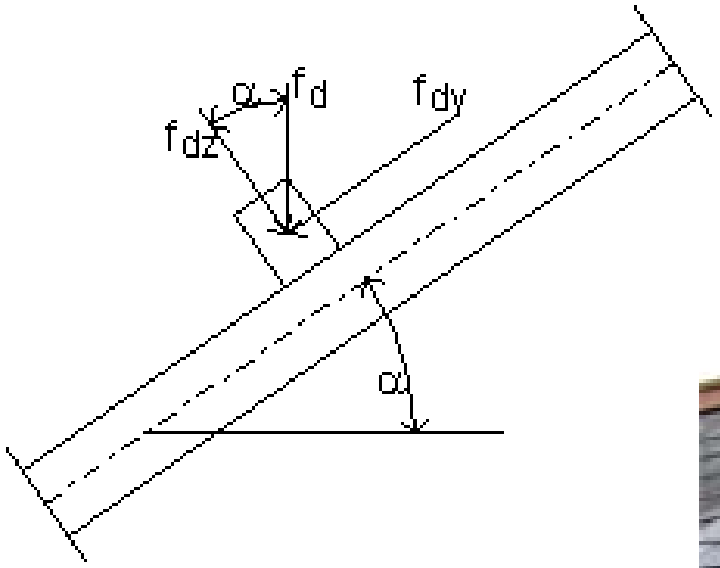
$$= 28{,}0 + 153{,}8 = 181{,}9 \text{ Mpa}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\phi \frac{I_z}{I_y} = \frac{M_z}{M_y} \cdot \frac{I_y}{I_z} =$$

$$= \frac{4}{6} \cdot \frac{2140}{117} = 12.1937 \cdots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 85.3°$$

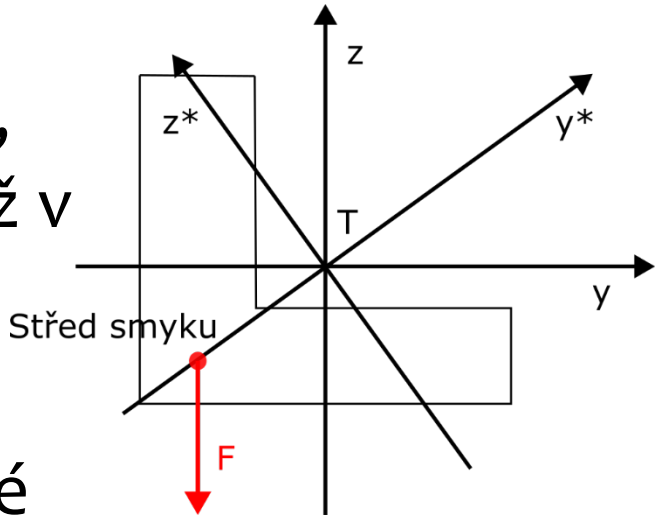
Namáhání střešních prvků





Obecný šikmý ohyb

- Zatížení v jedné společné rovině, jež prochazí osou prutu, ale není hlavní rovinou.
- Ohybová čára je rovinnou křivkou, neleží však v rovině zatížení, nýbrž v rovině kolmé k neutrální ose.
- Pokud nerozkládáme zatížení do směru hl. os y* a z*, lze normálové napětí určit:



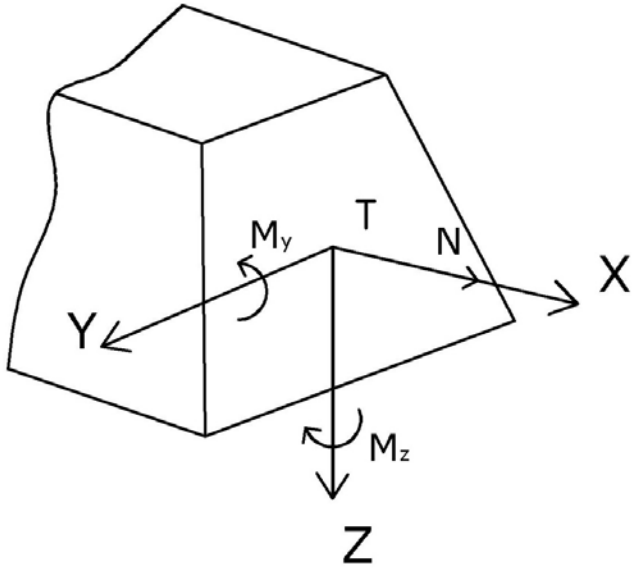
$$\sigma_x(y,z) = \frac{M_y I_z + M_z D_{yz}}{I_y\ I_z - D_{y,z}^2} \cdot z - \frac{M_z I_y + M_y D_{yz}}{I_y\ I_z - D_{y,z}^2} \cdot y$$

Mimostředný tah a tlak

Neleží – li výsledný momentový vektor ani v jedné hlavní centrální ose průřezu a **N ≠ 0** je rovina normálového napětí σ_x zcela **obecně** skloněna k rovině průřezu

Obecná kombinace tahu (tlaku) s ohybem

N≠0 $M_y \neq 0$ $M_z \neq 0$



Superpozice

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

Tahové (tlakové) centrum

Vnitřní síly v průřezu můžeme redukovat na **jedinou sílu**, jejíž paprsek prochází mimo těžiště (mimostředně či excentricky).

Bod C – **tahové (tlakové) centrum** C (y_c, z_c)

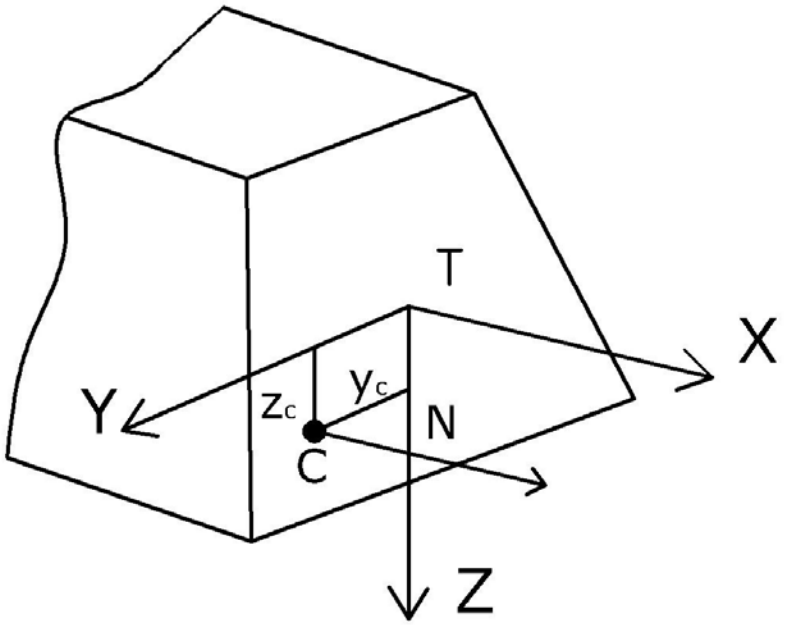
$$y_c \cdot N = -M_z$$

$$z_c \cdot N = M_y$$

$$I_y = A \cdot i_y^{\,2} \qquad I_z = A \cdot i_z^{\,2}$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot z_c}{A \cdot i_y^{\,2}} \cdot z + \frac{N \cdot y_c}{A \cdot i_z^{\,2}} \cdot y$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{z_c \cdot z}{i_y^{\,2}} + \frac{y_c \cdot y}{i_z^{\,2}}\right)$$

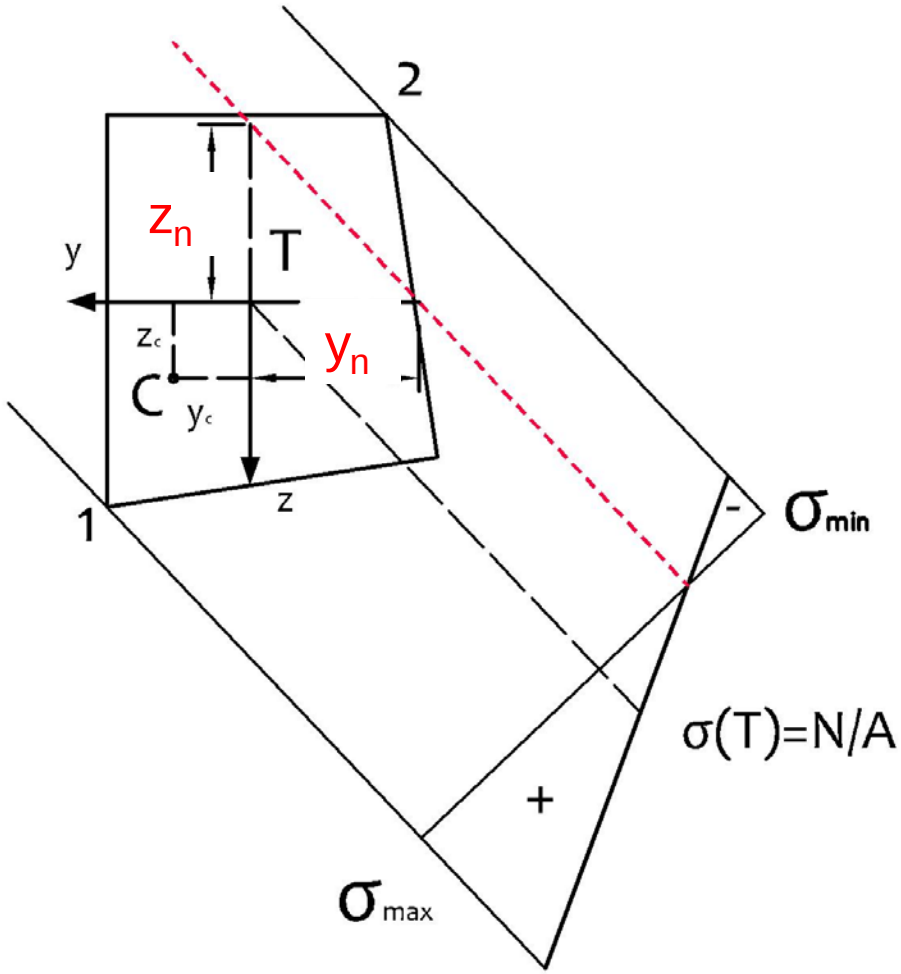


Neutrální osa

Rovnice neutrální osy z podmínky $\sigma_x = 0$

$$\frac{y}{-i_z^2 / y_c} + \frac{z}{-i_y^2 / z_c} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{y_n} + \frac{z}{z_n} = 1$$



Znamínka „-“ – neutrální osa neprochází kvadrantem, kde působí mimostředná síla

$$y_n = \frac{-i_z^2}{y_c} \qquad z_n = \frac{-i_y^2}{z_c}$$

Extrémní normálová napětí

souřadnice nejvzdálenějších bodů od neutrální osy. (y_k, $-z_k$)

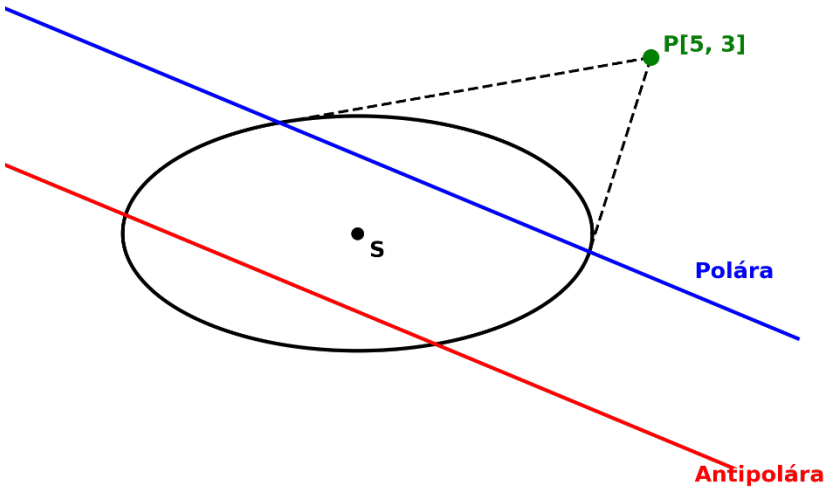
Body lze snadno identifikovat vedením tečen k průřezu, rovnoběžných s neutrální osou

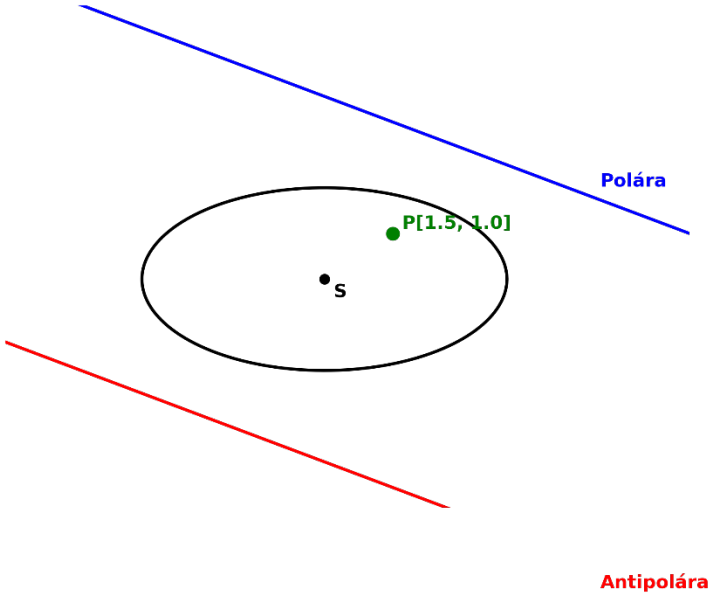
$$\sigma_{x,k} = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{y_c}{i_z^{\,2}} \cdot y_k + \frac{z_c}{i_y^{\,2}} \cdot z_k\right), (k = 1,2)$$

Neutrální osa a elipsa setrvačnosti

- Neutrální osa je antipolárou centra tlaku vzhledem k centrální elipse setrvačnosti.
- Antipolára: přímka souměrná k poláře elipsy setrvačnosti, vzhledem ke středu této elipsy

$$1 + \frac{z_c \cdot z}{i_y^{\,2}} + \frac{y_c \cdot y}{i_z^{\,2}} = 0$$



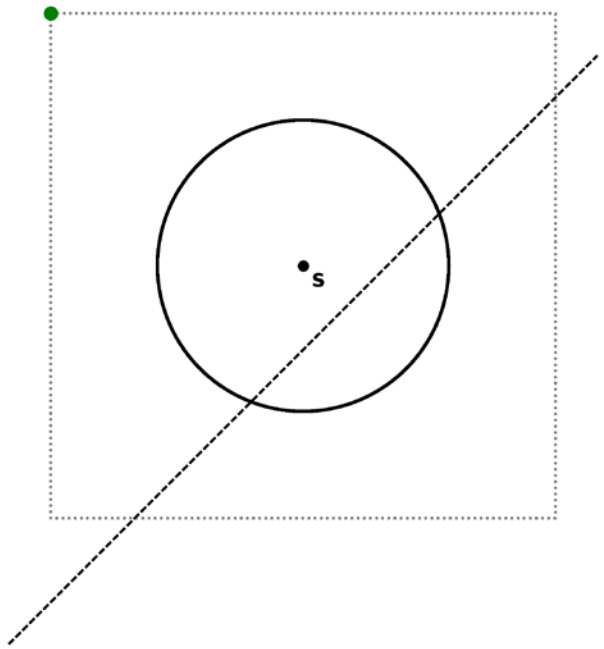


Neutrální osa a elipsa setrvačnosti

- Ukázka postupné tvorby neutrální osy (antipoláry) pro body na hraně čtvercového průřezu.

$$1 + \frac{z_c \cdot z}{i_y^{\,2}} + \frac{y_c \cdot y}{i_z^{\,2}} = 0$$

- Jaký význam má oblast vymezená jednotlivými neutrálními osami?



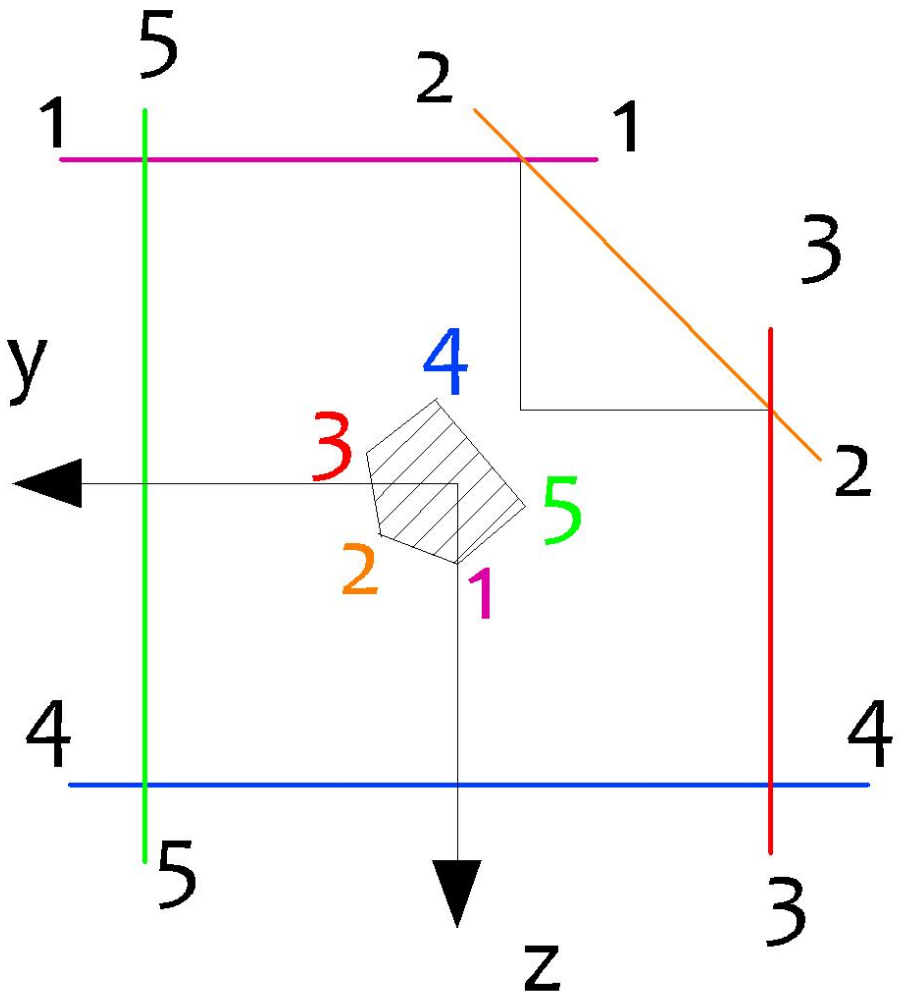
Jádro průřezu

je oblast v okolí těžiště průřezu, **do níž musí padnout působiště mimostředně působící síly**, aby napětí v celém průřezu mělo shodné znaménko – tj. **neutrální osa neprotíná průřez**

Jádrovou čáru (okraj jádra) určíme postupným kladením neutrální osy do okraje průřezu (tečných ploch) – opsaný mnohoúhelník.

K jednotlivým polohám pak určujeme zpětně polohu působiště excentrické síly.

Jádro průřezu

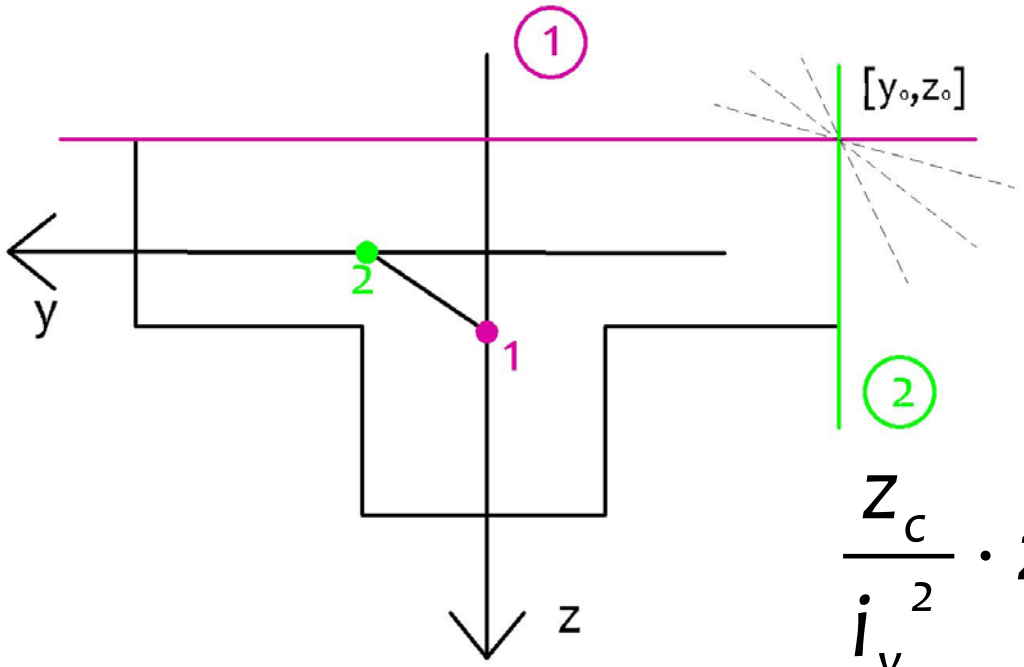


$$y_{c,i} = \frac{-i_z^{\,2}}{y_{N,i}}$$

$$z_{c,i} = \frac{-i_y^{\,2}}{z_{N,i}}$$

Ke konstrukci jádra průřezu

Zvolme bod $[y_o, z_o]$ konkrétně vrchol opsaného obdélníka

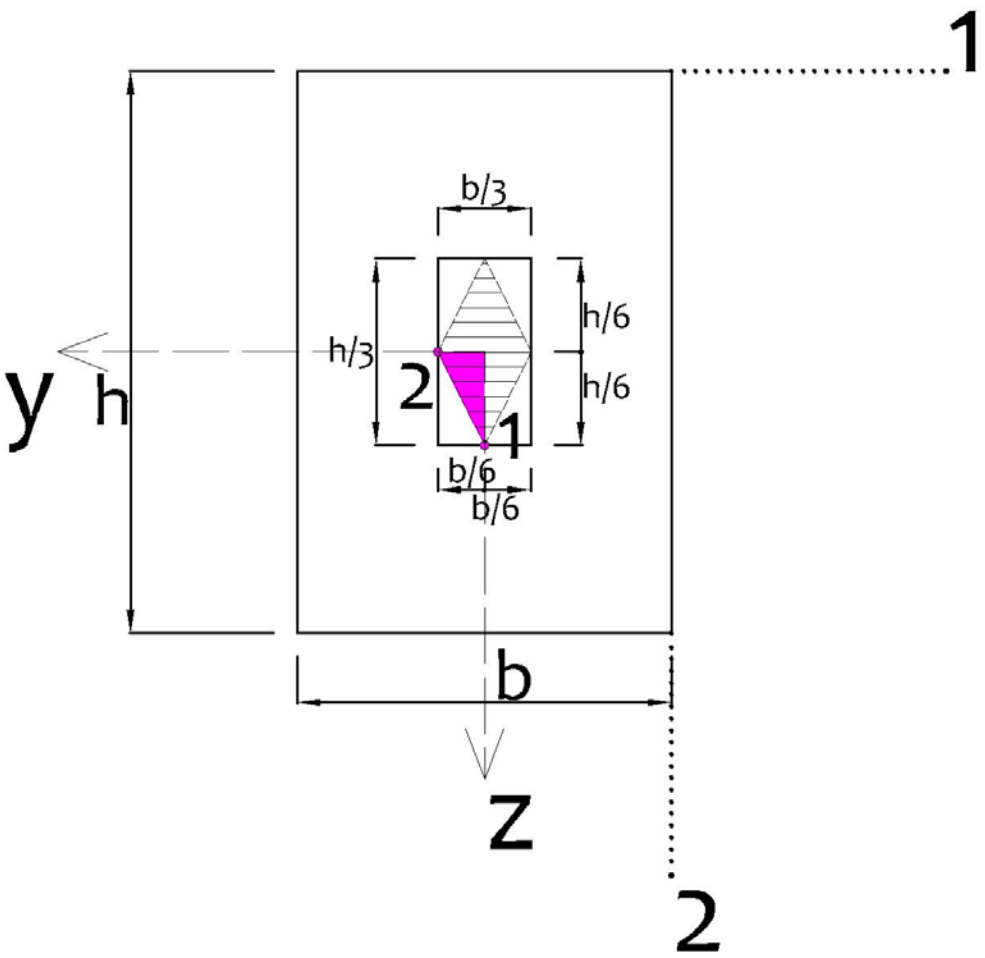


$$\frac{z_c}{i_y^{\,2}} \cdot z_o + \frac{y_c}{i_z^{\,2}} \cdot y_o + 1 = 0$$

Rovnici lze interpretovat takto: **otáčí-li se neutrální osa kolem bodu $[y_o, z_o]$ pohybuje se působiště síly po přímce (1-2)**

Obdélník

$$i_y^2 = \frac{1}{12}h^2 \qquad i_z^2 = \frac{1}{12}b^2$$



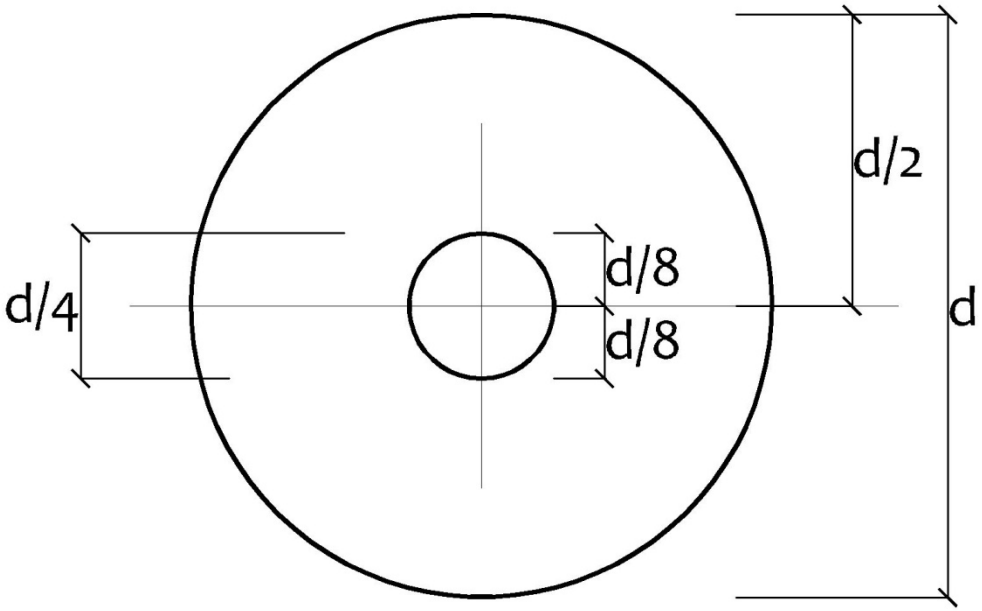
$$y_{N1} = \infty \qquad z_{N1} = -\frac{h}{2}$$

$$z_{c1} = -\frac{h^2/12}{(-h/2)} = h/6$$

$$y_{N2} = -\frac{b}{2} \qquad z_{N2} = \infty$$

$$y_{c2} = -\frac{b^2/12}{(-h/2)} = \frac{b}{6}$$

Kruh



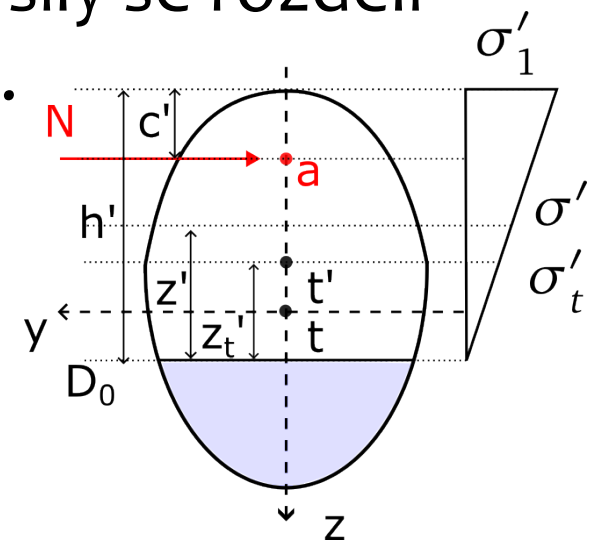
$$i^2 = \frac{I}{A} = \frac{\frac{\pi}{64} d^4}{\frac{\pi}{4} d^2} = \frac{d^2}{16}$$

$$i = \frac{d}{4}$$

$$z_N = -\frac{d}{2} \Rightarrow z_c = \frac{-d^2/16}{-d/2} = \frac{d}{8}$$

Excentrický tlak za vyloučení tahu

- Některé materiály (beton) působí velmi špatně v tahu.
- Excentrický tlak mimo jádro průřezu způsobuje tah v části průřezu.
- Taženou část zanedbáme, tlakové síly se rozdělí po zbývající části (lineární průběh).
- Nulová osa D_o vs neutrální osa
  - nejsou shodné
  - N.O. z podmínek rovnováhy na celém průřezu



Excentrický tlak za vyloučení tahu

$$\int_0^{h'} z' dA' = S_0 \qquad \int_0^{h'} z'^2 dA' = I_0$$

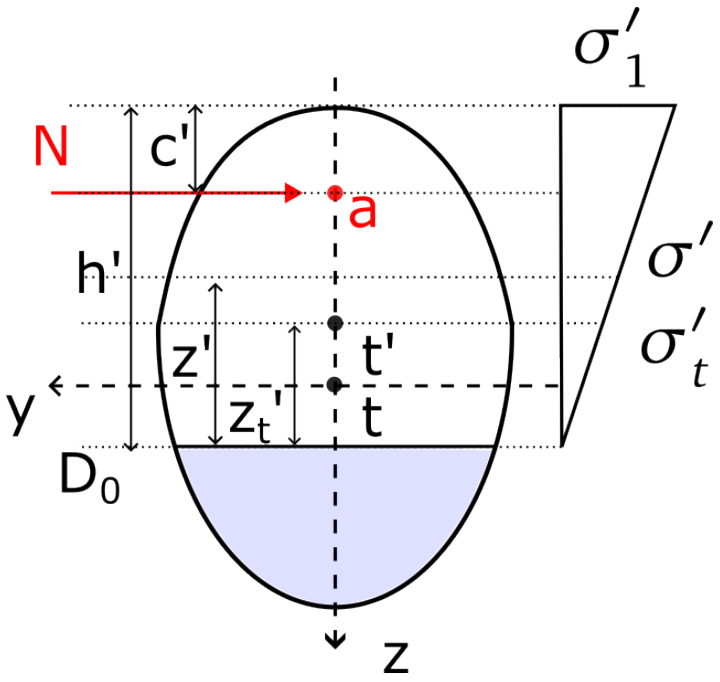
Působící průřez — Plocha působící části

- Obecně platí z momentové podmínky k nulové ose:

$$h' - c' = \frac{I_0}{S_0}$$

- Následně lze stanovit *h`* jako funkci *c`*.
- Krajní napětí lze poté psát jako:

$$\sigma_1' = \frac{N}{A'} \cdot \frac{h'}{z_t'}$$



Excentrický tlak za vyloučení tahu

$$\int_0^{h'} z' dA' = S_0 \qquad \int_0^{h'} z'^2 dA' = I_0$$

Působící průřez — Plocha působící části

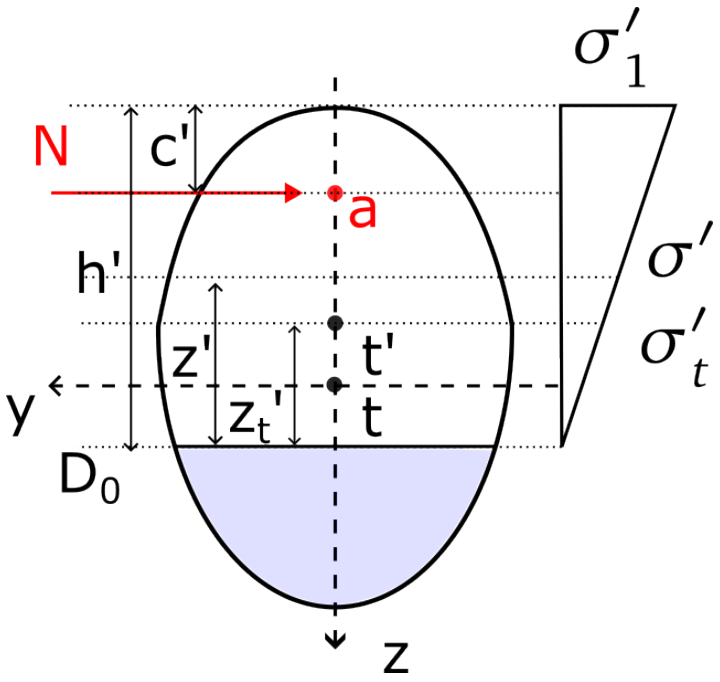
- Pro obdélníkový průřez:

$$S_0 = \frac{bh'^2}{2} \qquad I_0 = \frac{bh'^3}{3}$$

$$h' - c' = \frac{\frac{bh'^3}{3}}{\frac{bh'^2}{2}} = \frac{2h'}{3}$$

$$h' = 3c'$$

$$\sigma'_1 = \frac{N}{A'} \cdot \frac{h'}{z'_t} = \frac{N}{h'b} \cdot \frac{h'}{\frac{h'}{2}} = \frac{2N}{3bc'}$$



Výška vzdorující části je rovna trojnásobku vzdálenosti tlakového centra od okraje průřezu