VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

Pružnost a pevnost

Přednášející: Doc. Ing. Lukáš Novák, Ph.D.

Autoři: Drahomír Novák, Lukáš Novák

Ústav stavební mechaniky

Napětí v ohýbaných nosnících

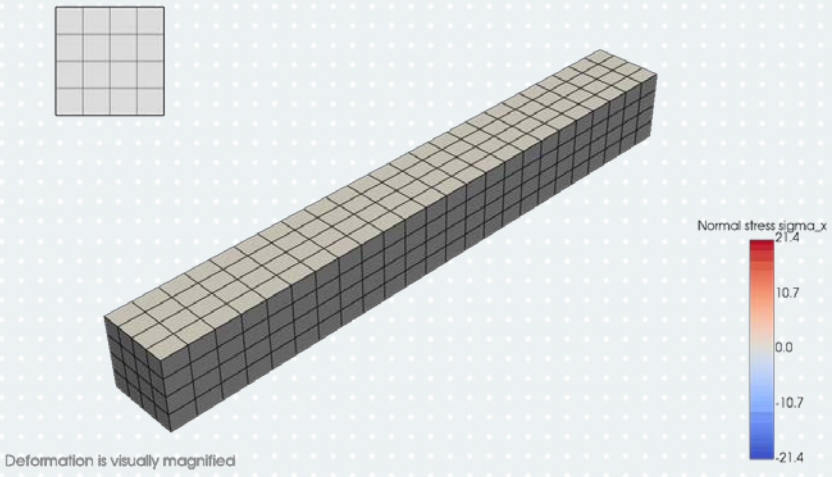
Normálové napětí za ohybu

- Nejčastější namáhání ve stavební praxi
- Ohybové momenty M_y, M_z, (posouvající síla)
- Tyto vnitřní síly jsou **výslednicemi normálové složky napětí**
- Přímá osa prutu přechází v **prostorovou křivku**

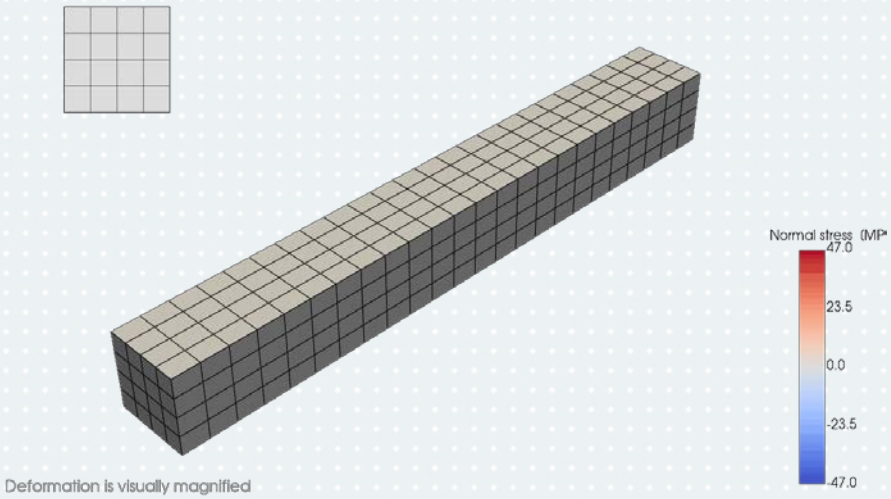
Předpoklad: deformace ε_x řádově větší oproti zbývajícím složkám tenzoru deformace

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$$

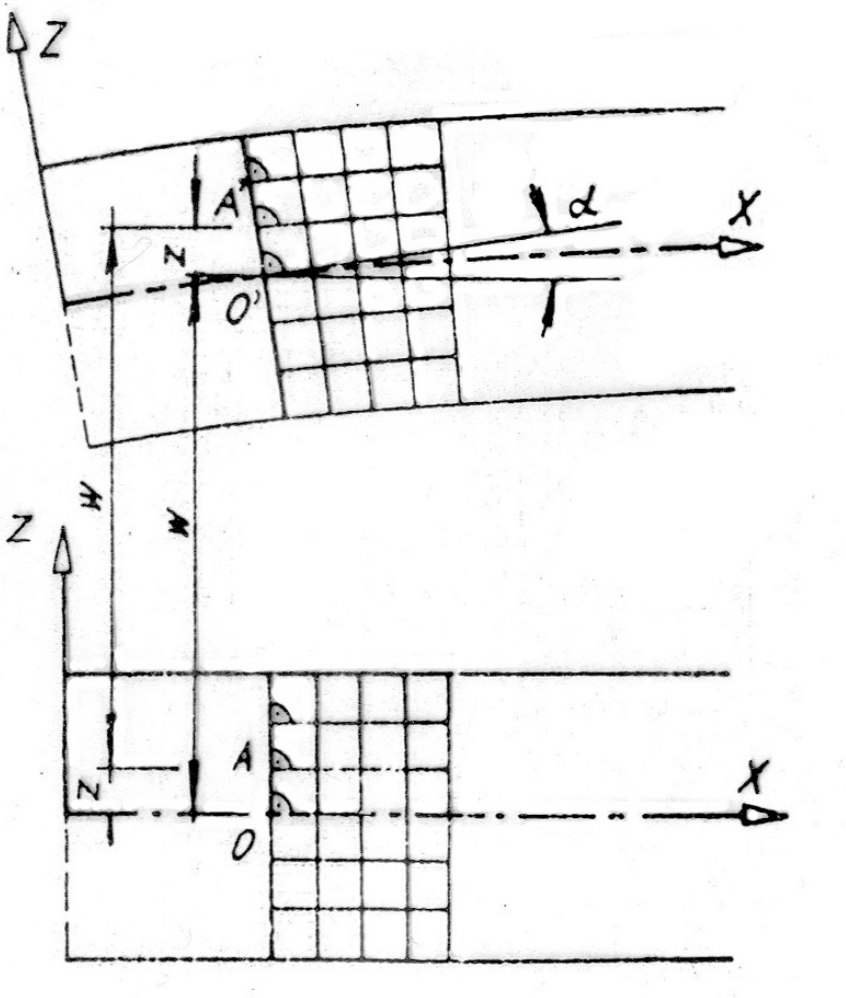


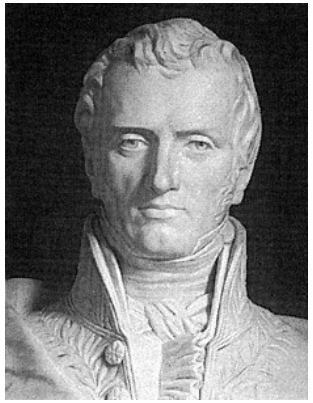
Prostý ohyb: působí jen M, posouvající síly jsou nulové.



Příčný ohyb: vyvoláván příčným zatížením, M a V

Bernoulli- Navierova hypotéza





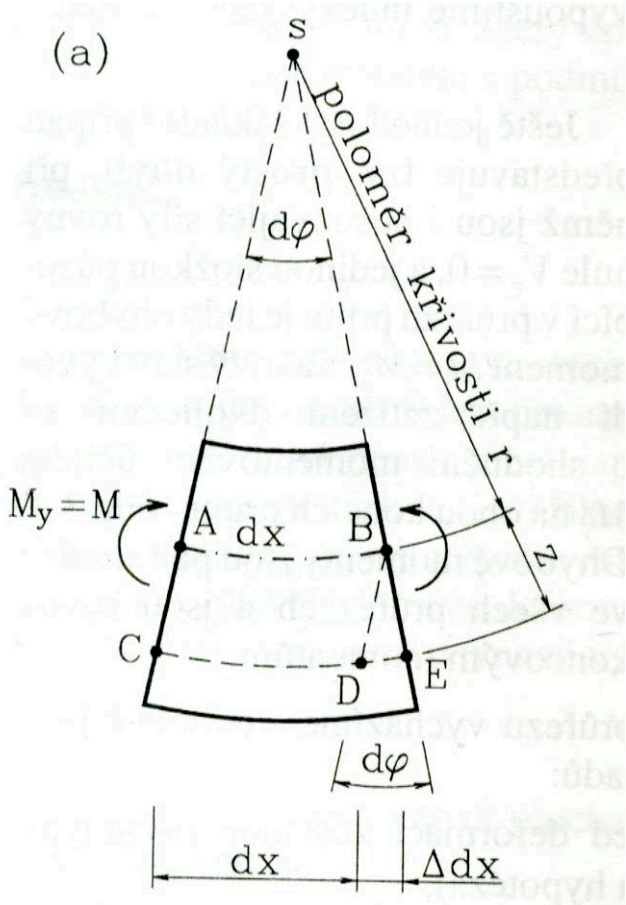
Luis Navier

Průřezy rovinné a kolmé k ose prutu před deformací zůstávají při ohybu rovinné a kolmé k ose i po deformaci.

(zákon zachování rovinnosti průřezů)

Geometrické podmínky

Využití Bern. hypotézy k odvození geometrických vztahů:



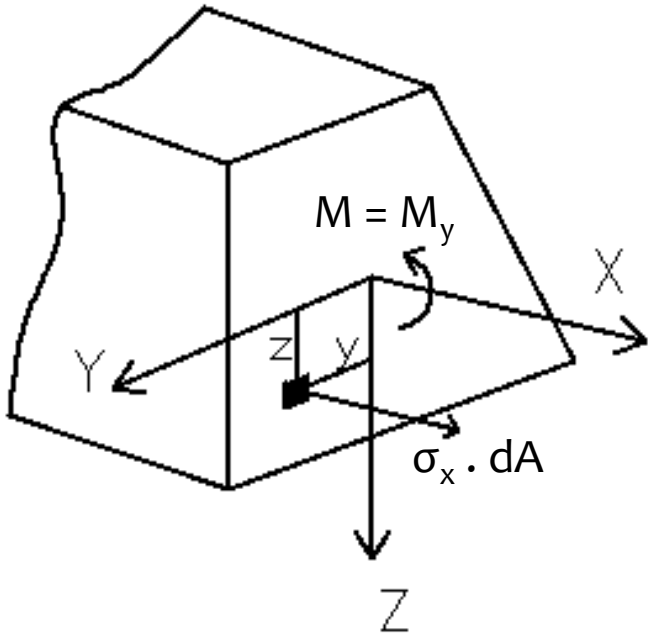
$$\mathrm{d}x = r \cdot \mathrm{d}\phi$$

$$\Delta \mathrm{d}x = \mathrm{z} \cdot \mathrm{d}\phi$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{z d\varphi}{r d\varphi} = \frac{z}{r}$$

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = \frac{E}{r} \cdot z$$

Statické podmínky:



$$N_x = \int_A \sigma_x dA = \frac{E}{r}\int_A z \cdot dA = \frac{E}{r} \cdot S_y = o$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z \cdot dA = \frac{E}{r}\int_A z^2 \cdot dA = \frac{E}{r} \cdot I_y$$

$$M_z = -\int_A \sigma_x y \cdot dA = -\frac{E}{r}\int_A yz \cdot dA = -\frac{E}{r} \cdot D_{yz} = o$$

První rovnice je splněna, když $\mathbf{S_y = 0}$, což je splněno u těžištní (centrální) osy: **neutrální osa prochází těžištěm**

Třetí rovnice je splněna když $\mathbf{D_{yz} = 0}$ (deviační moment), tj. jsou-li **y a z hlavní osy setrvačnosti** (předpoklad)

Fyzikální podmínky

Vztah pro křivost deformované osy prutu (ohybové čáry)

$$M_y = \int_A \sigma_x z \cdot dA = \frac{E}{r} \int_A z^2 \cdot dA = \frac{E}{r} \cdot I_y \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{M_y}{EI_y}$$

Normálové napětí (dosazením do Hookova zákona)

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = \frac{E}{r} \cdot z$$

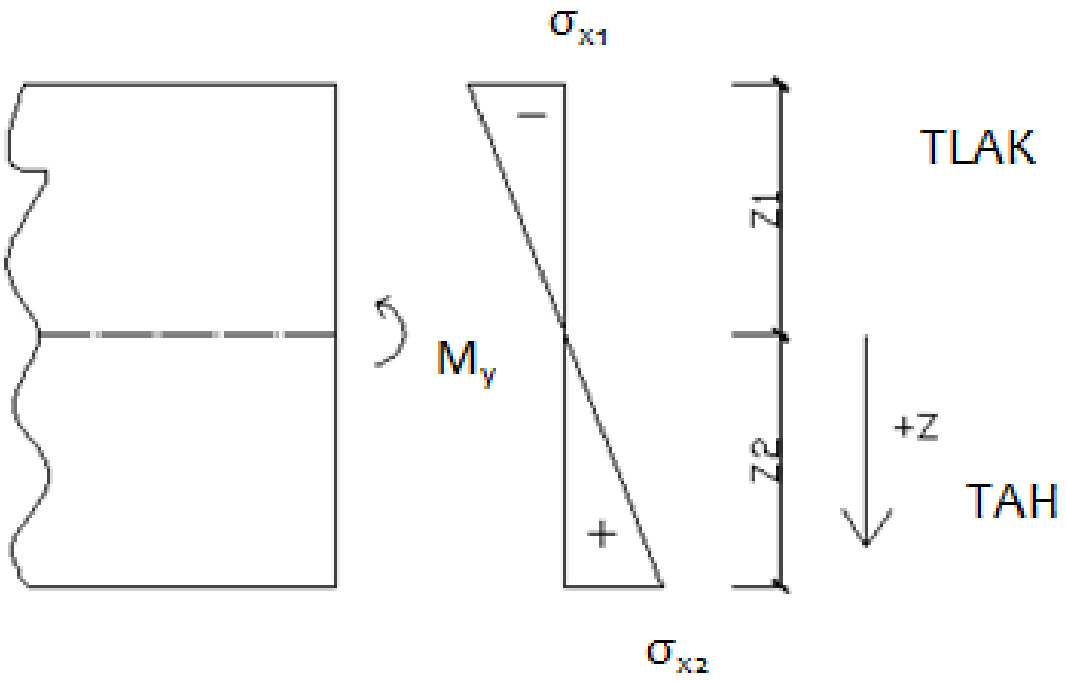
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{z d\phi}{r d\phi} = \frac{z}{r}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z}$$

- Normálová napětí jsou tedy lineární po výšce průřezu (extrémní hodnoty v krajních bodech)

Normálové napětí

Průběh normálového napětí je po výšce průřezu lineární, extrémní je v krajních bodech (přímkách) průřezu.

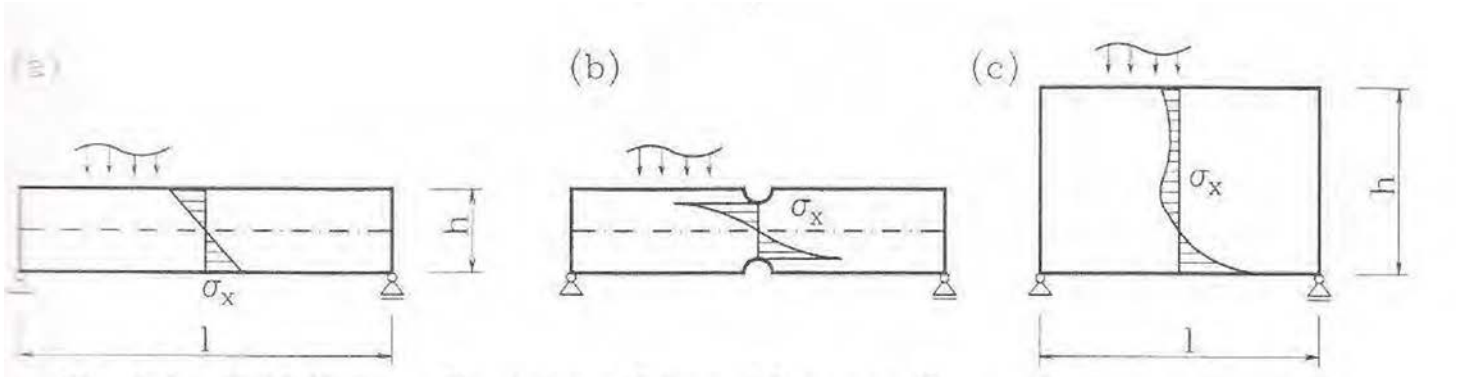


$$\sigma_{x1} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_1$$

$$\sigma_{x2} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_2$$

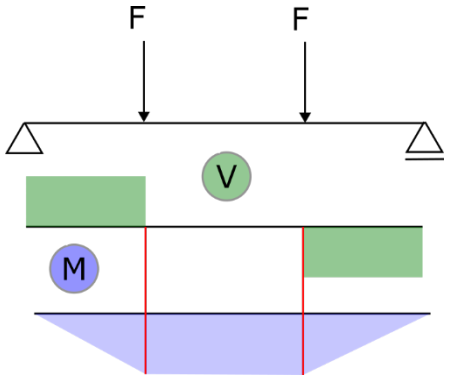
Předpoklady řešení

- Přesné řešení pro **prostý ohyb,** zatížení konců nosníku dvojicí sil způsobem shodným s rozložením vnitřních sil (přímkovým) – jinak dle **Saint Venantova principu**.
- U příčného ohybu pouze přibližné řešení, kvůli zkosení vlivem smykových napětí (neplatnost **Bernoulliovy hypotézy**). Není významný rozdíl u nosníků $L > 5h$.

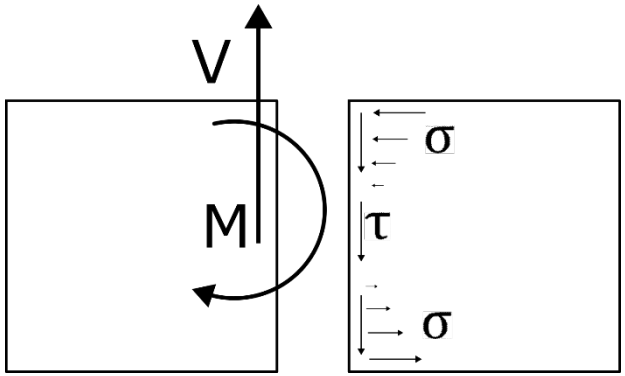


Prostý ohyb a příčný ohyb

- Prostý ohyb pomocí dvojice sil na koncích nosníků spíše v laboratorních podmínkách
- Prakticky pouze na částech nosníku (4 bodový ohyb)



- Běžné případy tedy M+V, tudíž normálové σ a tangenciální τ
- Má tedy smysl vyšetřovat prostý ohyb?
  - Normálové napětí $\sigma = f(M)$
  - Tangenciální napětí $\tau = f(V)$
  - Separace účinků, lze tedy vyšetřovat odděleně



Návrh a posouzení ohýbaných nosníků

- **Průřezový modul W**

Pojem průřezového modulu pro horní a dolní okraj průřezu.

Rozměr [m^3,cm^3, mm^3] W je vždy kladný.

$$W_{y1} = \frac{I_y}{|z_1|} \qquad W_{y2} = \frac{I_y}{z_2}$$

Napětí v kladných vláknech

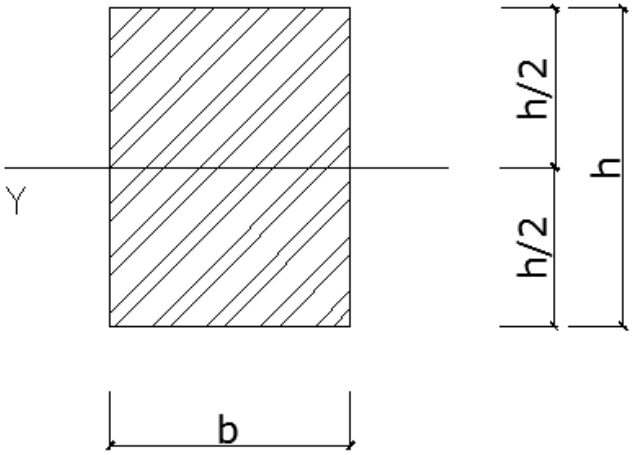
$$\sigma_{x1} = \frac{M_y}{W_{y1}} \qquad \sigma_{x2} = \frac{M_y}{W_{y2}}$$

Průřez symetrický k ose y

$z_1 = z_2$ $W_y = W_{y1} = W_{y2}$

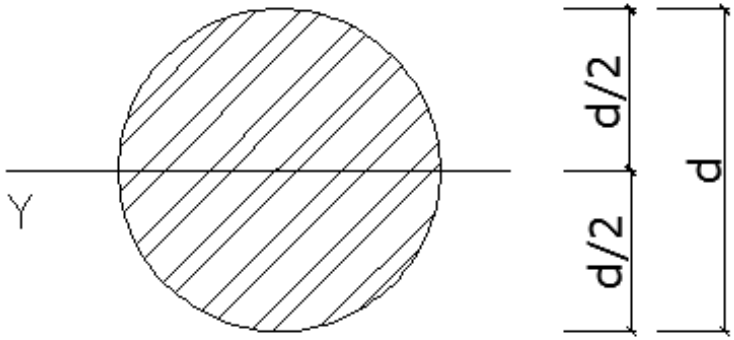
$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \pm \frac{M_y}{W_y}$$

Průřezové moduly pro konkrétní geometrii



$$I_y = \frac{1}{12} b h^3$$

$$W_y = \frac{\frac{1}{12} b h^3}{\frac{1}{2} h} = \frac{1}{6} b h^2$$

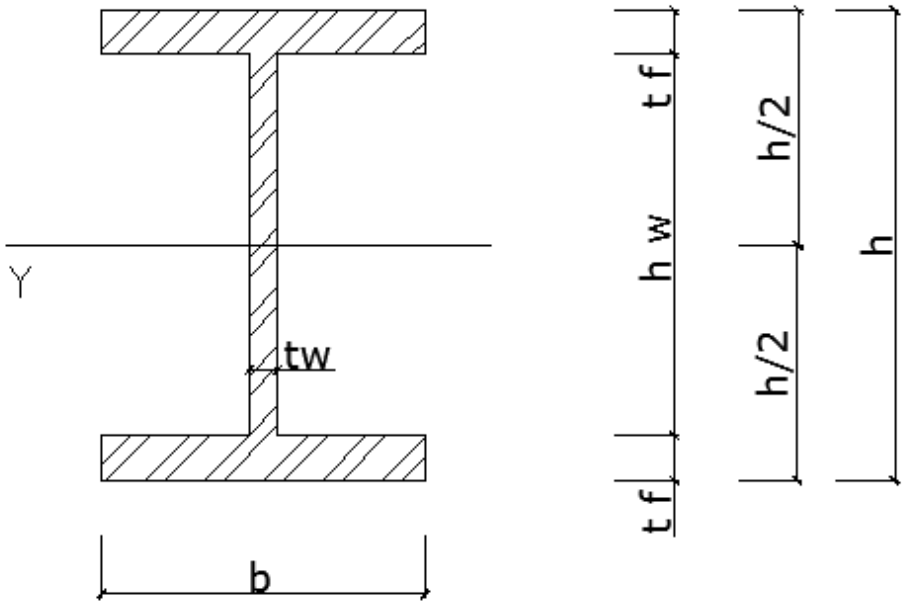


$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$W = \frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{32}$$

Jsou takové průřezy optimální pro prostý ohyb? (využití materiálu)

Průřezové moduly pro konkrétní typy průřezů



$$I = \frac{1}{12}\left[bh^3 - (b-t)\cdot h_s^3\right]$$

$$W_y = \frac{1}{6h}\left[bh^3 - (b-t_w)(h-2t_f)^3\right]$$

$$W_z = \frac{1}{6h}\left[2t_f b^3 + (h-2t_f)\cdot t_w^3\right]$$

Poznámka: průřezové moduly **nelze získat sečítáním dílčích W částí!**

Postup při dimenzování na ohyb

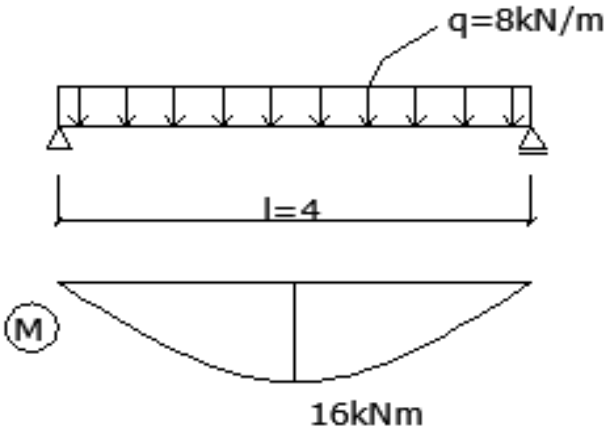
1. Určíme průběh **ohybových momentů** M (zde M_y) a vyhledáme extrémní hodnoty
2. Pro **návrhovou** pevnost daného materiálu stanovíme minimální potřebnou hodnotu průřezového modulu - **nutný W**

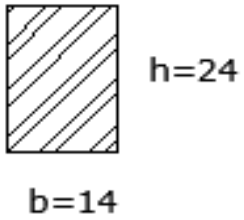
$$W_h = \frac{|M_{max}|}{R_d}$$

3. **Navrhneme vhodný průřez tak, aby** $W \geq W_h ; (W = min(W_1, W_2))$
4. **Posoudíme navržený průřez**

$$|\sigma_x| \leq R_d$$

Příklad – dřevěný trám





$$R_d = 12\text{MPa}$$

$$M_{max} = \frac{1}{8}ql^2 = \frac{1}{8}\cdot 8 \cdot 4^2 = 16\text{kNm}$$

$$W_n = \frac{M}{R_d} = \frac{16{,}0 \cdot 10^{-3}}{12}$$

$$= 1333 \cdot 10^{-6}\text{m}^3$$

$$= 1333\text{cm}^3$$

$$W = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}\cdot 0{,}7 \cdot h^3 = 1333$$

$$\Rightarrow h = 22{,}5$$

$$b = 15{,}8$$

Návrh: 14x24 cm $\longrightarrow$ $W = \frac{1}{6}14 \cdot 24^2 = 1344cm^3 \succ W_h$

Posouzení: $\sigma = \frac{16{,}0 \cdot 10^3}{1344 \cdot 10^{-6}} = 11{,}9MPa \leq R_d$

Nehomogenní průřez

Nosníky složené ze dvou **různých materiálů** (železobetonové nosníky, spřažené ocelobetonové nosníky, vrstevnaté nosníky – **kompozity**)

- **modul pružnosti** je po průřezu **proměnný**
- často je však po konečných částech průřezu konstantní

Normálová napětí: Za předpokladu platnosti hypotézy rovinných průřezů, lze provést zobecnění zavedením **pojmu náhradních veličin**

$$\hat{A} = \int_A E(y,z) \cdot dA$$

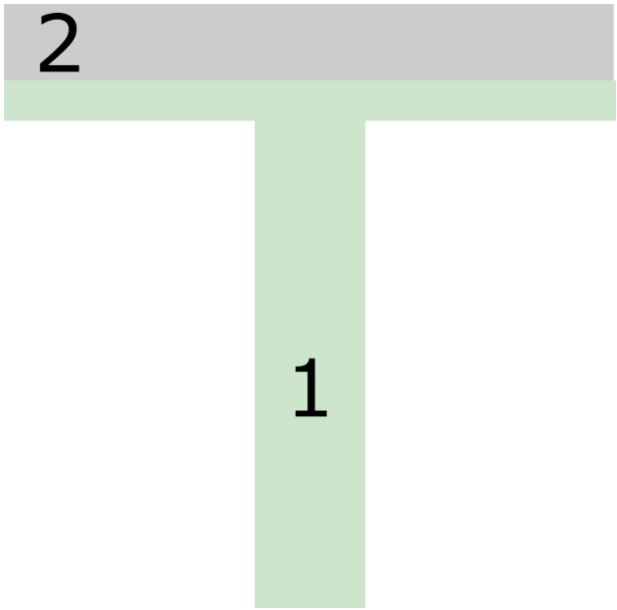
$$\hat{I}_y = \int_A E(y,z) \cdot z^2 dA \qquad \hat{I}_z = \int_A E(y,z) \cdot y^2 dA$$

E po konečných částech konstantní

$$\sigma_x = E(y,z) \cdot \left(\frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{\hat{I}_z} \cdot y + \frac{M_y}{\hat{I}_y} \cdot z \right)$$

Nehomogenní průřez

$$\sigma_x = h_p \frac{M_y \cdot z}{\sum_i h_i \cdot I_{y_i}}$$



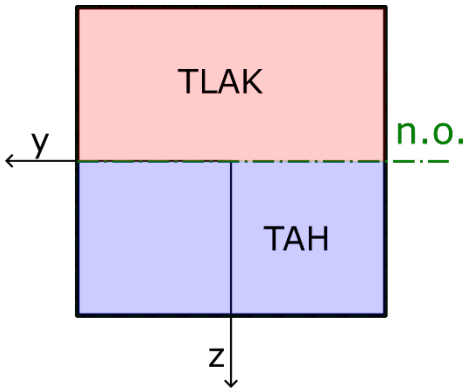
$$\hat{A} = \sum_i h_i \cdot A_i$$

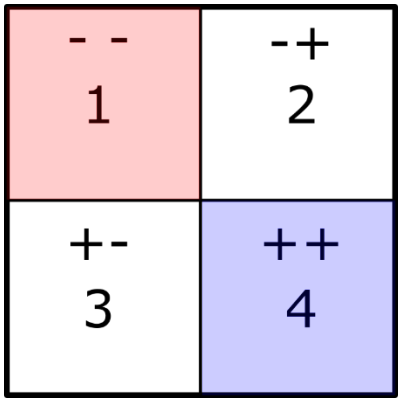
$h_p = E(y,z)/E_o$ ..... Redukční poměr pro místo (y, z)
$h_i = E_i / E_o$ ..... Redukční poměr částí s E=konst.
E_o ..... Konstanta (E jedné z částí)
I_{yi} ..... Moment setrvačnosti části i

Prostorový ohyb

Ohyb v rovině x-z

- Kladný moment My vyvolá
  - Tah pro z<0
  - Tlak pro z>0

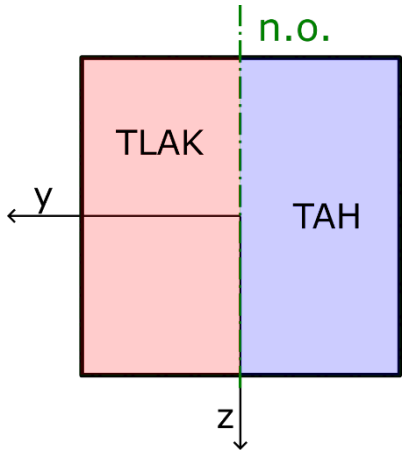




$$\sigma_x(z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

Ohyb v rovině x-y

- Kladný moment Mz vyvolá
  - Tah pro y<0
  - Tlak pro y>0



$$\sigma_x(y) = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

Prostorový ohyb

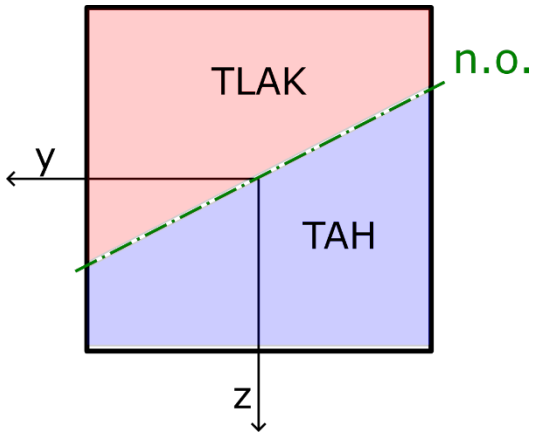
- Zatížení neleží v rovině prutu
- Souřadnice y,z volíme v hlavních centrálních osách

$$\sigma_x(z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

$$\sigma_x(y) = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

$$\sigma_x(y,z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

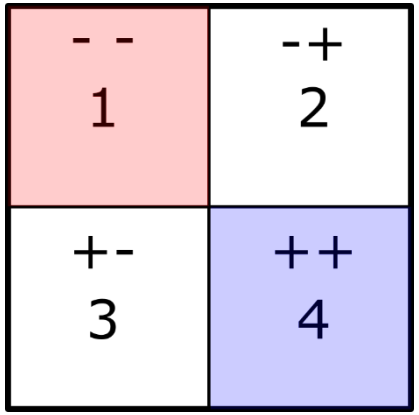
- Neutrální osa prochází těžištěm
- Obecně nesplývá s žádnou z hlavních centrálních os



Příklad: Prostorový ohyb

Dřevěný vodorovný trám – prostý nosník

- L=4,5m
- Vlastní tíha + stálé zatížení g=6kN/m (kladný smysl)
- Tlak větru ve vodorovné rovině q=1,8kN/m (kladný smysl)



Navrhněte rozměry b:h=5:7, Rd=12MPa

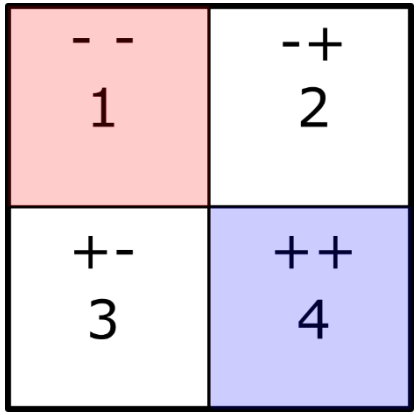
- Jaké je místo maximálního (minimálního napětí)?
- Účinek rovnoměrného zatížení My a Mz?
- Poměr Wy a Wz?

$$\sigma_x(y,z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

Příklad: Prostorový ohyb

- **Jaké je místo maximálního (minimálního napětí)?**

Pokud mají momenty kladný smysl, jsou maxima v 1 a 4



- Účinek rovnoměrného zatížení My a Mz?

$$M_{y,max} = \frac{1}{8} g L^2 = \frac{1}{8} \cdot 6 \cdot 4{,}5^2 = 15{,}19 kNm$$

$$M_{z,max} = \frac{1}{8} q L^2 = \frac{1}{8} \cdot 1{,}8 \cdot 4{,}5^2 = 4{,}56 kNm$$

$$\sigma_{max} = \frac{1}{W_y} \left(M_{y,max} + \frac{W_y}{W_z} M_{z,max} \right)$$

$$W_y = \frac{1}{6} b h^2$$

$$W_z = \frac{1}{6} h b^2$$

$$\sigma_x(y,z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

Příklad: Prostorový ohyb

- Poměr Wy a Wz?

$$\sigma_{max} = \frac{1}{W_y}\left(M_{y,max} - \frac{W_y}{W_z} M_{z,max}\right)$$

$$\frac{W_y}{W_z} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

$$W_y = \frac{M_{y,max} + 1{,}4 M_{z,max}}{\sigma_{max}}$$

- - 1	-+ 2
+- 3	++ 4

$$W_y = \frac{15{,}19 \cdot 10^3 + 1{,}4 \cdot 4{,}56 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^6} = 1{,}8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$$

$$W_y = \frac{1}{6} b h^2$$

$$W_z = \frac{1}{6} h b^2$$

$$W_y = \frac{1}{6} b h^2 = 1800\ cm^3$$

$$\sigma_x(y,z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

Příklad: Prostorový ohyb

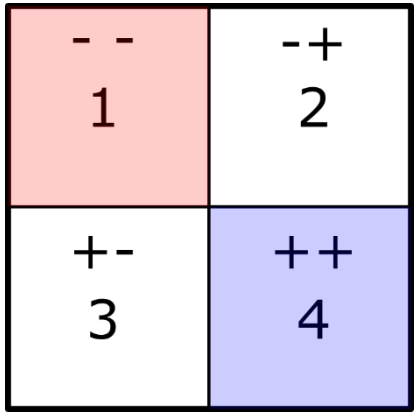
- Dosazení poměru b:h=5:7

$$W_y = \frac{1}{6} b h^2 = 1800\ cm^3$$

$$W_y = \frac{5}{42} h^3 = 1800\ cm^3$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{42 \cdot 1800}{5}} = 24{,}72\ cm$$

$$b = \frac{5}{7} h = 17{,}65\ cm$$



$$W_y = \frac{1}{6} b h^2$$

$$W_z = \frac{1}{6} h b^2$$

- Návrh a posouzení průřezu 25x18cm

$$W_y = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} \cdot 180 \cdot 250^2 = 1{,}875 \cdot 10^{-3} \mathrm{m}^3$$

$$W_z = \frac{1}{6} h b^2 = \frac{1}{6} \cdot 250 \cdot 180^2 = 1{,}350 \cdot 10^{-3} \mathrm{m}^3$$

$$\sigma_{max} = \frac{1}{W_y} \left(M_{y,max} + \frac{W_y}{W_z} M_{z,max} \right) = 11{,}48 MPa < \boldsymbol{R_d = 12 MPa}$$

A co na to AI?

První pokus – nekonzistentní jednotky

$$R_d = 12\,\text{MPa}$$

Po dosazení:

$$\frac{15{,}1875}{(245/6)x^3} + \frac{4{,}55625}{(175/6)x^3} \leq 12\,\text{MPa}$$

Při jednotkách kNm a m³ dostaneme:

$$\sigma = \frac{0{,}52815}{x^3}\,\text{kN/m}^2$$

a tedy

$$\frac{0{,}52815}{x^3} \leq 12000\,\text{kN/m}^2$$

z čehož:

$$x \geq 0{,}006634\,\text{m}$$

4. Potřebné rozměry

$$b = 5x = 0{,}03317\,\text{m}$$

$$h = 7x = 0{,}04644\,\text{m}$$

tedy čistě matematicky:

$$\boxed{b \times h \approx 33 \times 46\,\text{mm}}$$

Druhý pokus – výpočetní chyba

To je samozřejmě **nereálný konstrukční průřez** pro dřevěný trám délky 4,5 m. Důvodem je velmi nízká zadaná hodnota $R_d = 12\,\text{MPa}$? Ne — právě naopak, při výpočtu výše jsem ji použil jako **12 MPa**, ale vyšel příliš malý průřez kvůli chybě v převodu jednotek v mezikroku. Správně je potřeba uvést momenty v **Nmm** a moduly v **mm³**.

Přepočítám tedy návrh konzistentně:

$$M_y = 15{,}1875\,\text{kNm} = 15{,}1875 \cdot 10^6\,\text{Nmm}$$

$$M_z = 4{,}55625 \cdot 10^6\,\text{Nmm}$$

Pro $b = 5x,\ h = 7x$ v **mm**:

$$\frac{15{,}1875 \cdot 10^6}{245x^3/6} + \frac{4{,}55625 \cdot 10^6}{175x^3/6} = 12$$

odkud:

$$x \approx 66{,}34\,\text{mm}$$

a tedy

$$\boxed{b \approx 332\,\text{mm}}$$

$$\boxed{h \approx 464\,\text{mm}}$$

Výsledek

Pro kombinovaný ohyb a zadané $R_d = 12\,\text{MPa}$:

$$\boxed{\mathbf{b \times h \approx 330 \times 465\,mm}}$$

Co na to AI?

Třetí pokus

- Upozornění na nekonzistentní jednotky a chybu ve výpočtu modulu průřezu
- Návrh již vede na korektní hodnoty 180x250

- Závěr: AI je jako kalkulačka, nejvíce pomůže tomu, kdo již umí počítat ☺

$$\frac{15\,187\,500}{(245/6)x^3} + \frac{4\,556\,250}{(175/6)x^3} \leq 12$$

Po úpravě:

$$\frac{371\,755{,}1}{x^3} + \frac{156\,214{,}3}{x^3} \leq 12$$

$$\frac{527\,969{,}4}{x^3} \leq 12$$

tedy

$$x^3 \geq 43\,997{,}45$$

a

$$x \geq \sqrt[3]{43\,997{,}45}$$

$$\boxed{x = 35{,}32 \text{ mm}}$$

Proto:

$$b = 5x = 176{,}6 \text{ mm}$$

$$h = 7x = 247{,}2 \text{ mm}$$

Výsledný minimální průřez

$$\boxed{b \times h = 177 \times 247 \text{ mm}}$$

Pro praktický návrh bychom tedy mohli uvažovat například:

$$\boxed{180 \times 250 \text{ mm}}$$