VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

Pružnost a pevnost

Přednášející: Doc. Ing. Lukáš Novák, Ph.D.

Autoři: Drahomír Novák, Lukáš Novák

Ústav stavební mechaniky

Literatura a rozdělení předmětu

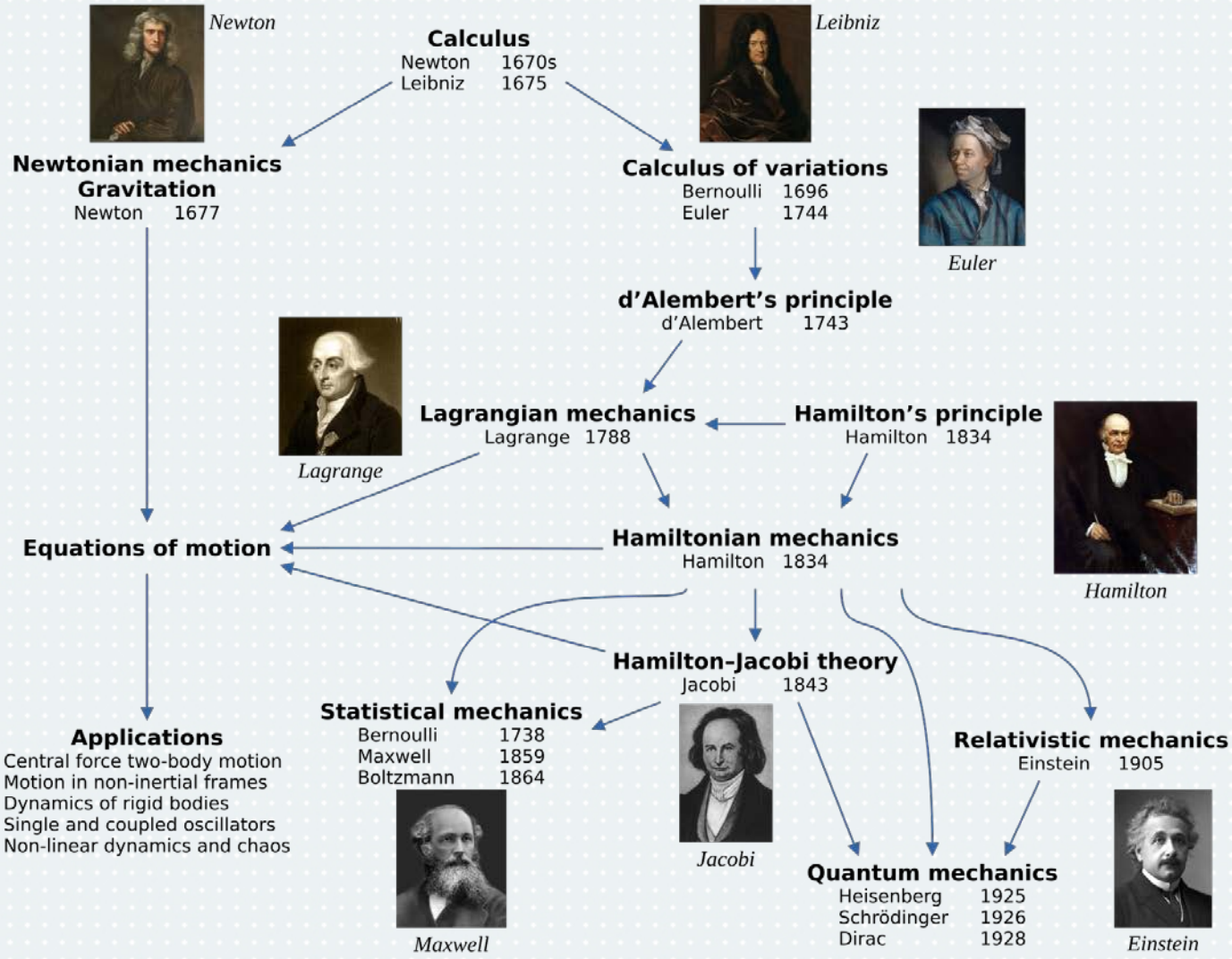
Doporučená literatura

- **S. Šmiřák Pružnost a plasticita I**
- R. Servít a kol. Pružnost a pevnost ve stavitelství I
- R. Servít, E. Doležalová, M. Crha Teorie pružnosti a plasticity I
- B. Hlavinková, M. Mrázková Pružnost a pevnost I Přehled teorie a příklady

Pružnost a pevnost se dělí:

- Matematická teorie
  - Diferenciální a matematická analýza
  - Obecná teorie
  - Výpočetní metody (MKP)
- **Technická nauka**
  - Zjednodušené modely pro praktické výpočty
  - Také elementární pružnost (pruty)
- Experimentální nauka
  - Na základě zkoušek

Stojíme na ramenou obrů



Významné osobnosti pružnosti

- staří stavitelé – zkušenosti
- 17.století – první rozvoj pružnosti a pevnosti (zámořský obchod, hutnictví, těžba – potřeba řešit otázky pevnosti staveb a lodí)



Robert Hooke

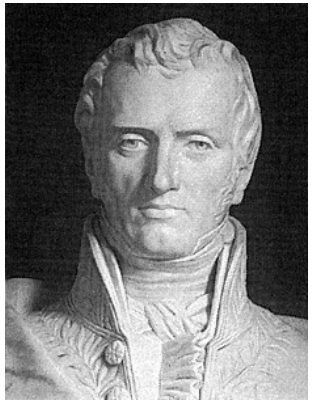
- **Galileo Galilei** – pokusy vedoucí k závislosti rozměrů nosníku a zatížením, které unese
- **Robert Hooke** (1635 – 1703) – formulace zákona přímé úměry mezi napětím a deformací
- **Thomas Young** (1773 – 1829) experimentální zjišťování modulu pružnosti pro různé materiály



Thomas Young

Významné osobnosti pružnosti

- **Simoón Denis Poisson** (1781 – 1840) – zjistil, že poměr v jakém se těleso příčně zužuje je stálý



Luis Navier

- **Luis Navier** (1785 – 1836) - vyslovil hypotézu, že rovinné průřezy ohýbaných nosníků zůstanou rovinnými i po deformaci

- **Leonard Euler** (1707 – 1783) – úlohy o stabilitě tlačených prutů



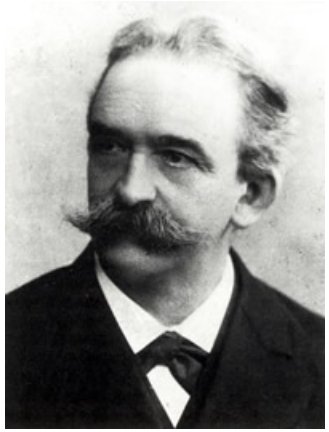
Leonard Euler

- **Saint Venant** (19. stol.) – autor principu „místních poruch“ v okolí působiště soustředného břemene

Významné osobnosti pružnosti



L. Cauchy



Otto Mohr

- **L. Cauchy** (1789 – 1857) - zavedl pojem bodové napjatosti a hlavního napětí, zakladatel moderní teorie matematické pružnosti
- **Otto Mohr** (1835 – 1918) – věty o ohybových čárách nosníků, dodnes se používá jeho kružnice pro zjišťování napětí v různých řezech vedených bodem
- **B. G. Galerkin** (1871 – 1945) – rozvoj variačních metod mechaniky

Základní pojmy

Základním úkolem PP je vyšetřovat:

- **napětí** – intenzitu vnitřních sil (normálové, smykové)
- **deformace** – geometrické změny rozměrů a tvaru
- **stabilitu** – schopnost zatížené konstrukce vracet se po dočasném vychýlení do původního stavu
- **pevnost (únosnost)** – schopnost odporovat vnějším vlivům (zatížení) bez porušení
- **použitelnost** – schopnost plnit danou funkci
- **bezpečnost** – ochrana před nepřístupnými následky poruchy

*Pružnost: po odlehčení se těleso vrací do původního tvaru a velikosti.

Základní pojmy

- Řešení napjatosti a deformace:
  - v oboru pružných deformací – **teorie pružnosti**
  - v oboru plastických (trvalých) deformací – **teorie plasticity**

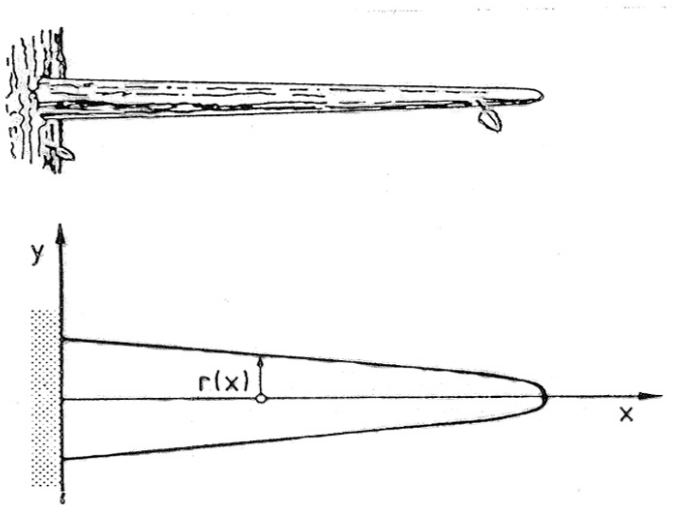
- Teorie pružnosti a plasticity je součástí **mechaniky kontinua pevné fáze**
  - **kontinuum -** spojité prostředí tělesa, vyplněné spojitě rozloženou hmotou jak před deformací tak po ní

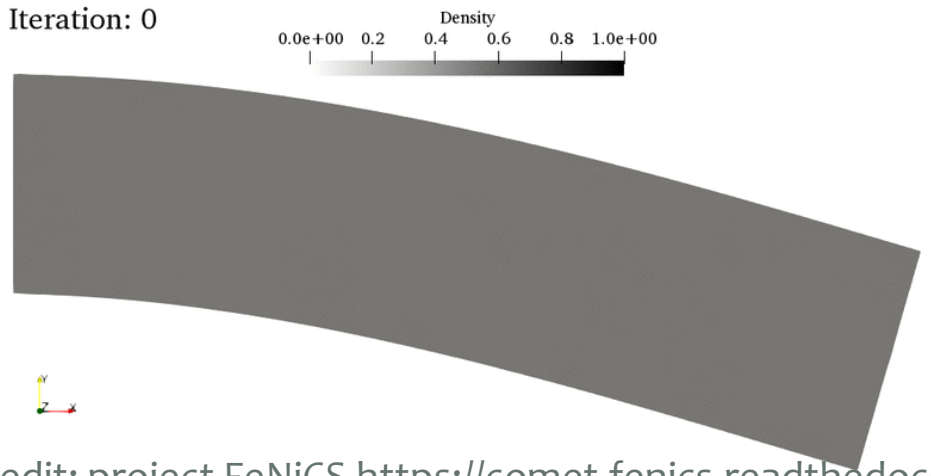
- Působením **vnějších sil** se poddajná tělesa deformují, jednotlivé body tělesa se přemisťují – těleso mění svůj **tvar a objem**.
- V tělese vzniknou **vnitřní síly** spojitě se měnící v kontinuu. Měřítkem intenzity těchto sil je **napětí**.

Syntéza a cíl

- **Syntéza**
  - stavební mechanika
  - pružnost
  - materiál
  - výpočtový model
  - optimalizace
  - spolehlivost

Příroda a optimální tvar

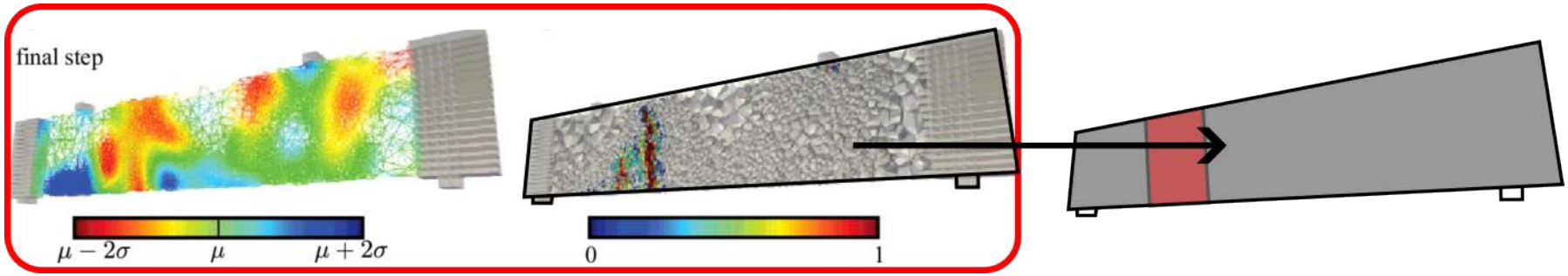




Credit: project FeNiCS https://comet-fenics.readthedocs.io

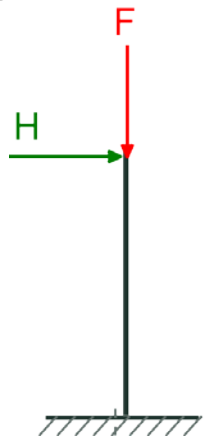
Zjednodušující předpoklady

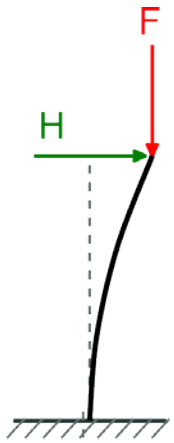
1. **Spojitost látky** – látka (materiál) zaplňuje spojitě objem tělesa (předpoklad kontinua, nerespektuje se mikrostruktura)
2. **Homogenita** – materiál má shodné vlastnosti ve všech místech tělesa (neplatí např. u železobetonu)
3. **Izotropie** – materiál má shodné vlastnosti ve všech směrech, neplatí např. u dřeva (ortotropie, anizotropie)



Zjednodušující předpoklady

4. **Malé deformace** – deformace jsou velmi malé relativně vůči rozměrům konstrukce, to umožňuje přijmout řadu zjednodušení. Jde o tzv. teorii malých deformací. Poměrně velké deformace vyžadují popis nelineárními vztahy – geometricky nelineární úloha.







Teorie I. řádu

Rovnováha na nedeformované konstrukci.

Teorie II. řádu

Rovnováha na deformované konstrukci, malé rotace.

Konečné deformace

Zohlednění velkých posunů a pootočení.

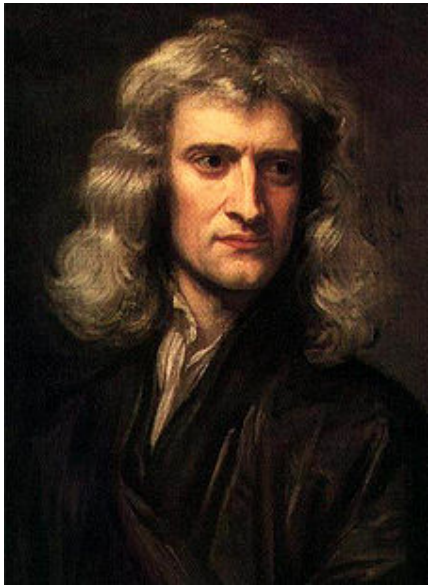
Zjednodušující předpoklady

5. **Lineární pružnost** – materiál je lineárně pružný, tj.
   - po odlehčení se vrací do původního stavu
   - vztah mezi napětím a deformacemi je lineární - přímá úměrnost
6. **Počáteční nenapjatost** – napětí vznikající v důsledku výrobního procesu neuvažujeme (např. v důsledku válcování, odlévání aj.)
7. **Statické zatěžování** – pozvolný nárůst vnějších účinků, dynamické účinky zanedbáváme

Princip superpozice

Účinky různých zatížení lze vyšetřovat odděleně a výsledky jednotlivých vlivů sečíst. To dovoluje pouze geometrická a fyzikální linearita a teorie I. řádu.

U nelineárních úloh superpozici nelze použít!!!



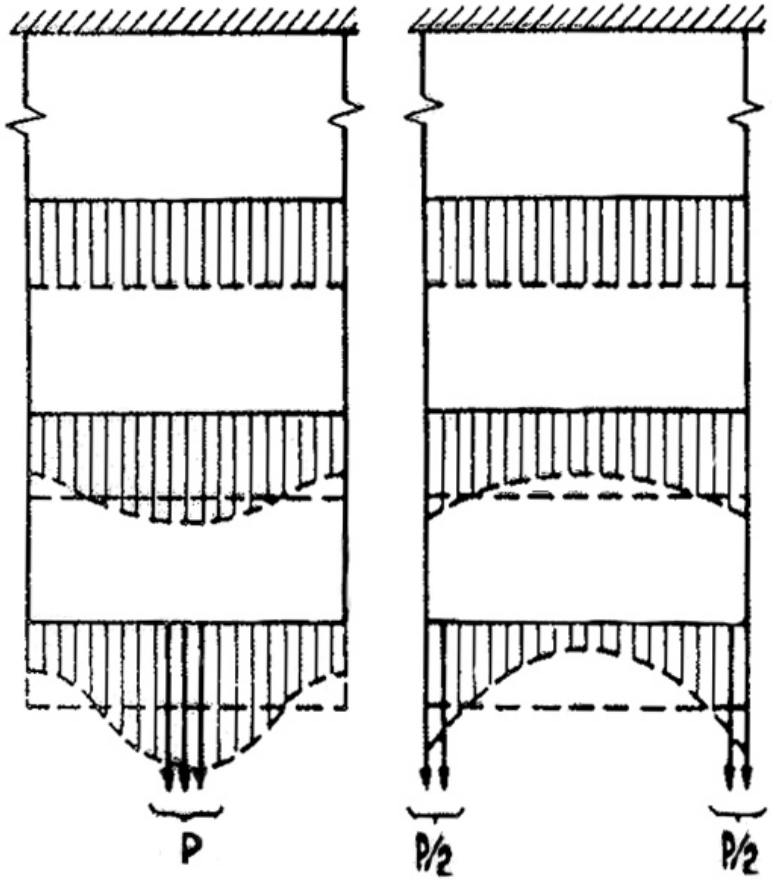
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i.$$

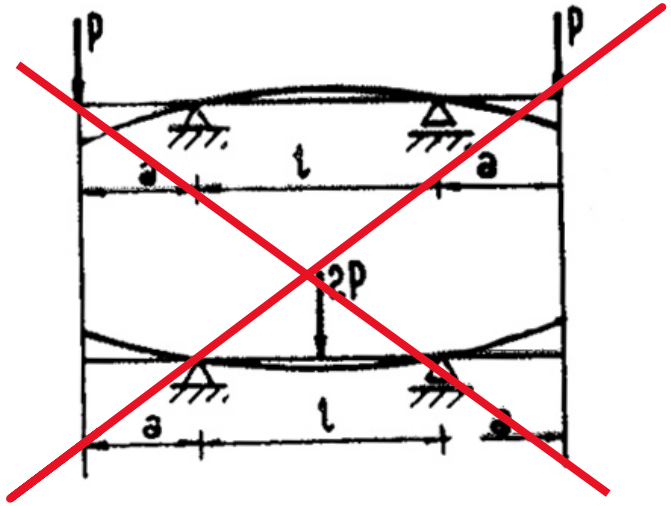
Newton formuloval princip superpozice ve svém díle, jako nezávislý doplněk předchozích tří pohybových zákonů.

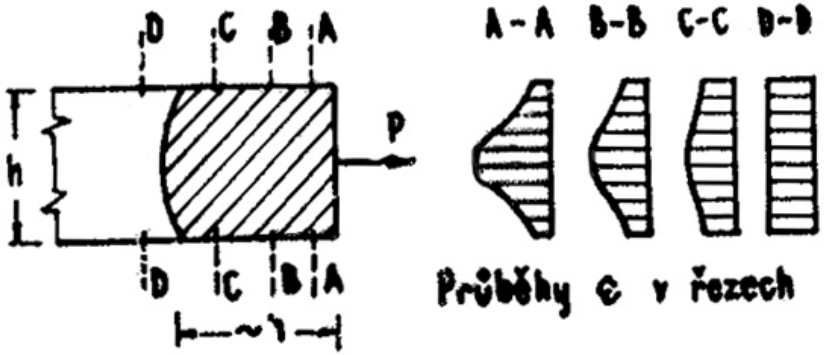
Saint-Venantův princip lokálnosti

- nazývaný také princip lokality
- v oblasti přiložení zatížení vznikají v tělese místní deformace a napětí závislé na rozdělení zatížení
- **staticky ekvivalentní soustavy** zatížení vyvodí přibližně stejné účinky v těch částech tělesa, které jsou **dostatečně vzdálené** od míst přiložení zatížení
- platnost tohoto principu byla ověřena experimentálně i výpočty
- význam: dovoluje zaměnit složité formy zatížení na hranici tělesa jednodušším zatížením, staticky ekvivalentním

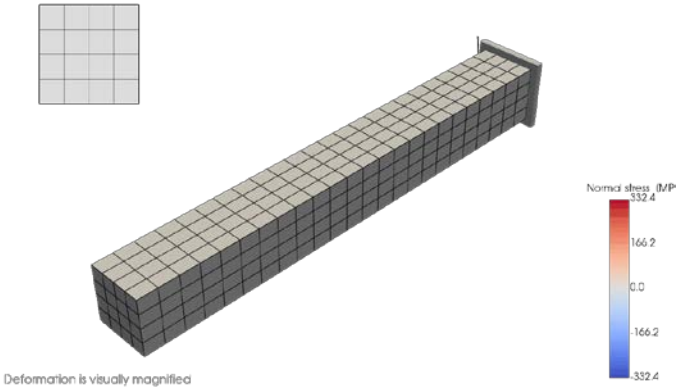
Saint-Venantův princip lokálnosti

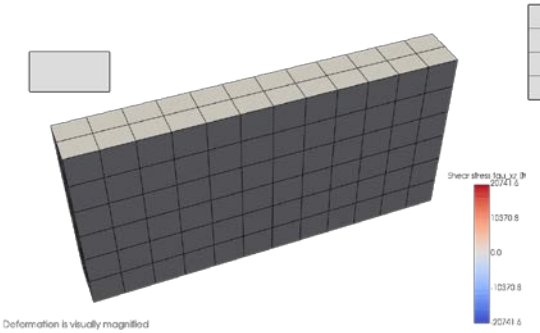


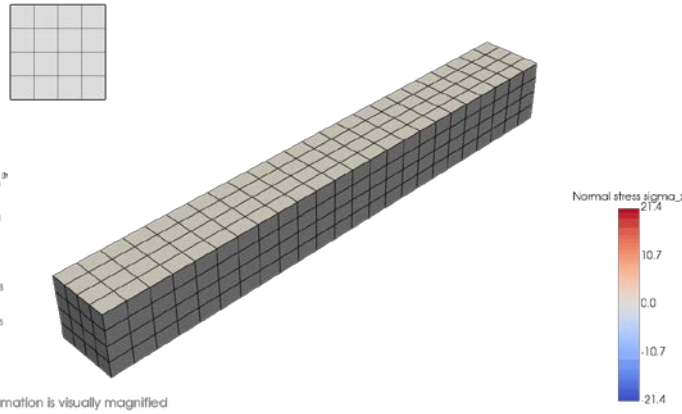


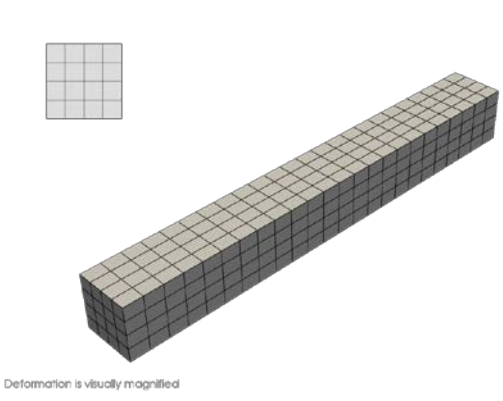


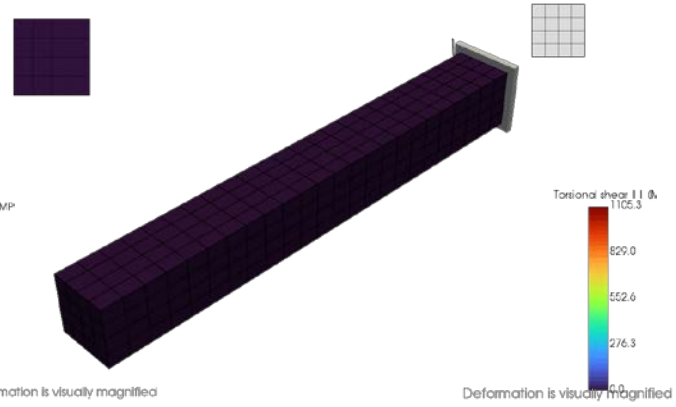
Základní případy namáhání

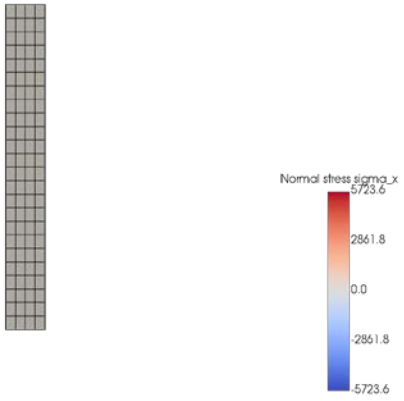






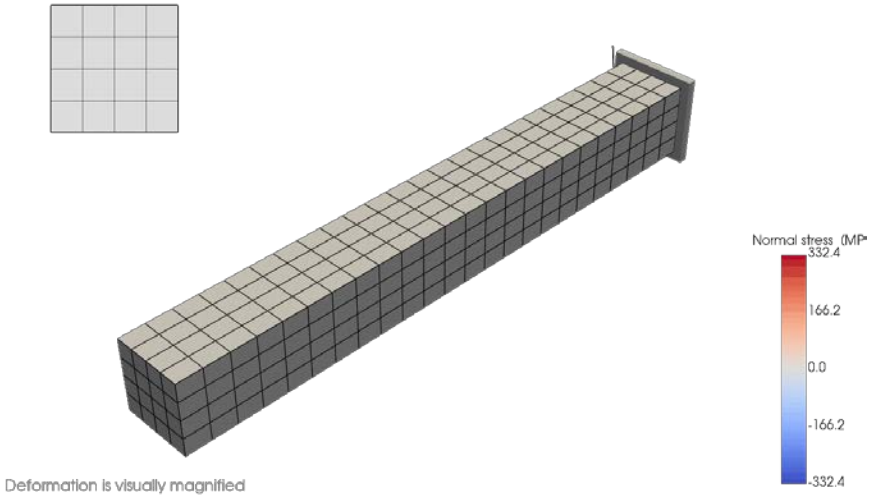




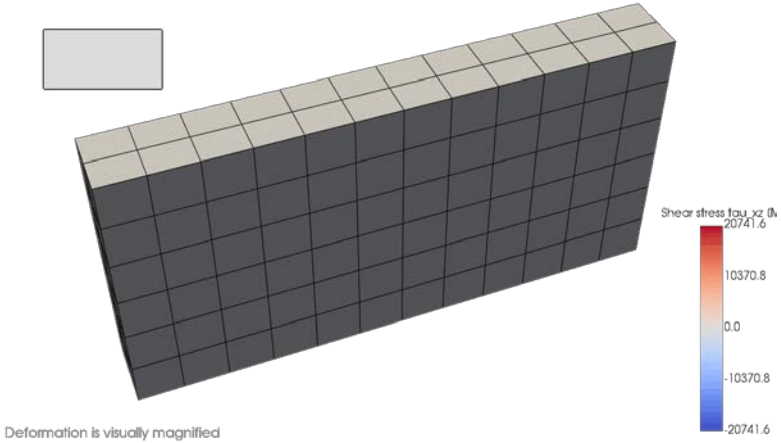


Základní případy namáhání

- **Prostý tah a tlak** – výslednice vnějšího zatížení leží v ose prutu, v průřezu vzniká jen normálová síla

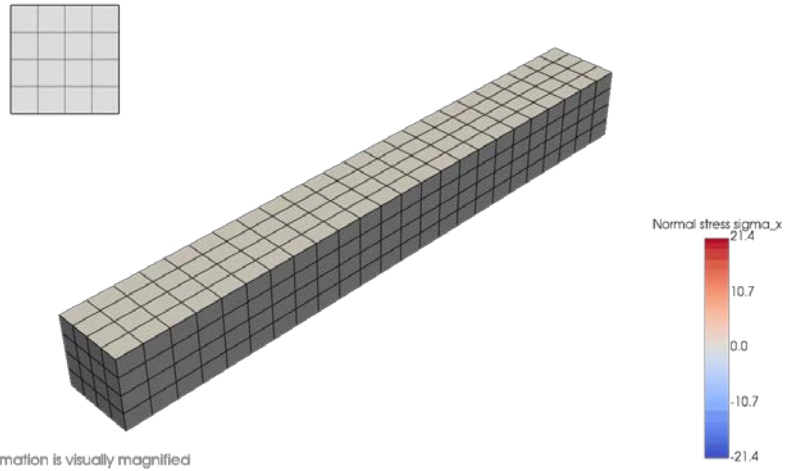


- **Prostý smyk** – v čisté podobě se nevyskytuje, případy kdy vliv posouvající síly převažuje, k porušení dojde usmýknutím (střihem)

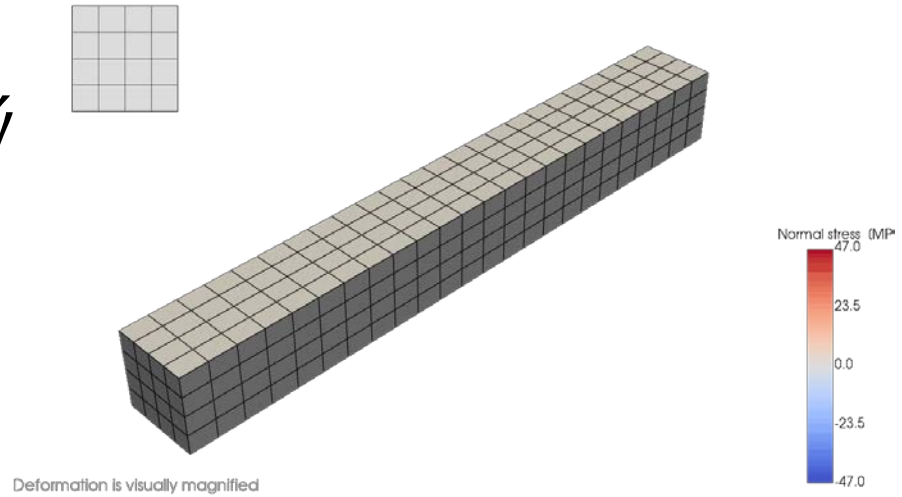


Základní případy namáhání

Prostý ohyb – v průřezu vzniká pouze ohybový moment, posouvající síla je nulová

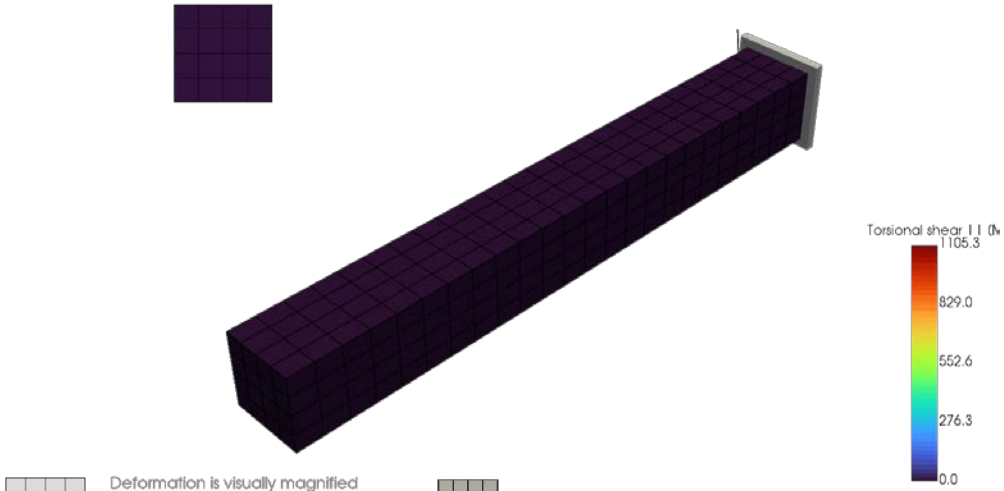


Příčný ohyb – vyvoláván příčným zatížením, ohybový moment a posouvající síla (technický ohyb)

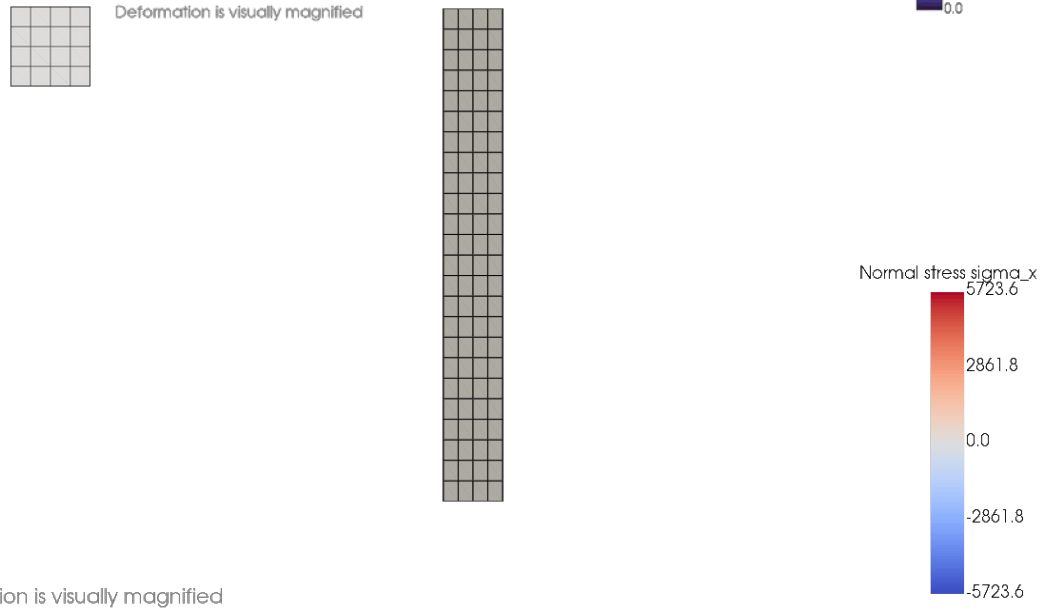


Základní případy namáhání

Prosté kroucení – vyvozeno dvojicemi sil, vzniká jen kroutící moment



Vzpěrný tlak – prut vlivem své štíhlosti vybočuje, otázky stability prutu, prakticky velký význam



Modelování konstrukcí

Tvorba výpočtového modelu – klíčový krok řešení!

Jedná se o idealizaci tvaru, materiálu, okrajových podmínek, působení zatížení i prostředí, ve kterém se konstrukce nachází.



Zatížení

Tři skupiny vnějších sil:

- **soustředné** síly (síly působící na malé ploše, např. tlak kola na kolejnici, MN)
- **povrchové** síly (např. tlak větru, MN/m^2, MN/m)
- **objemové** síly (vztahují se k bodům tělesa, např. gravitační síly – vlastní hmotnost, MN/m^3)

Klasifikace podle doby působení:

- **stálá** zatížení (vlastní hmotnost konstrukce)
- **nahodilá** zatížení (vítr, sníh, doprava, zemětřesení)

Zatížení je charakterizováno velikostí a charakterem její změny v čase – **statické a dynamické** zatížení, **stacionární a nestacionární.**

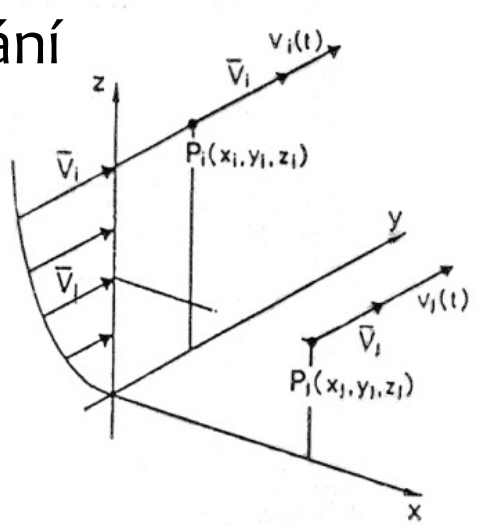
Reálná zatížení konstrukcí

Prakticky všechny druhy zatížení mají **náhodný** charakter – náhodné veličiny a náhodné procesy

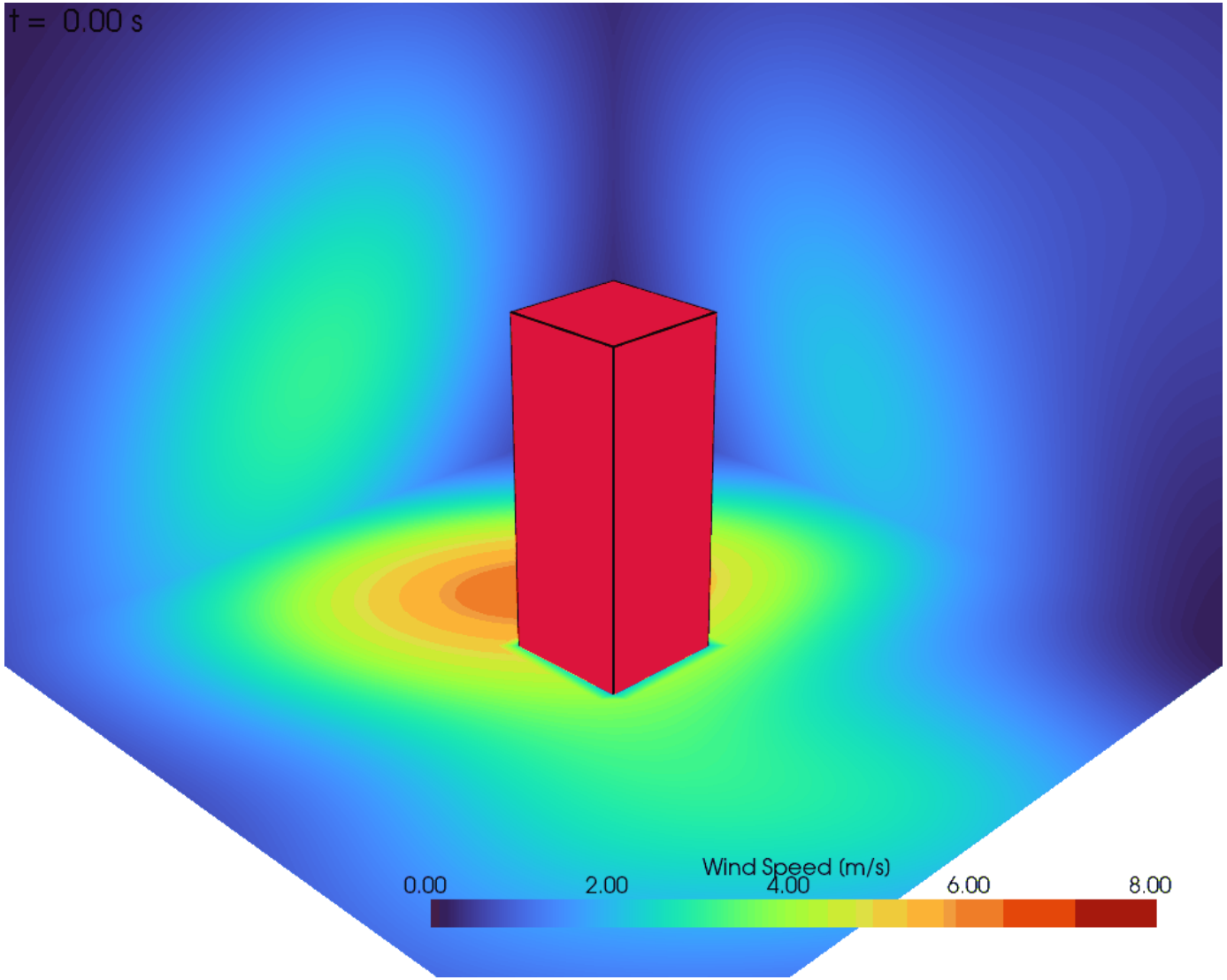
Vliv okolního prostředí konstrukce – nejčastěji nerovnoměrné oteplení konstrukce

Reologické změny – dotvarování a smršťování

Deterministické a statistické modely



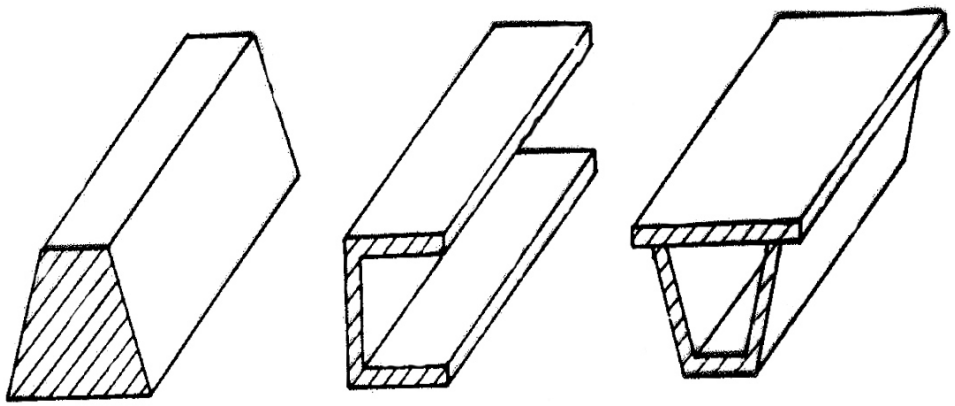
Příklady – rychlost větru



Geometrie

Schematizací geometrického tvaru konstrukcí či jejich prvků lze zpravidla zjednodušit matematický popis jejich silového a deformačního chování.

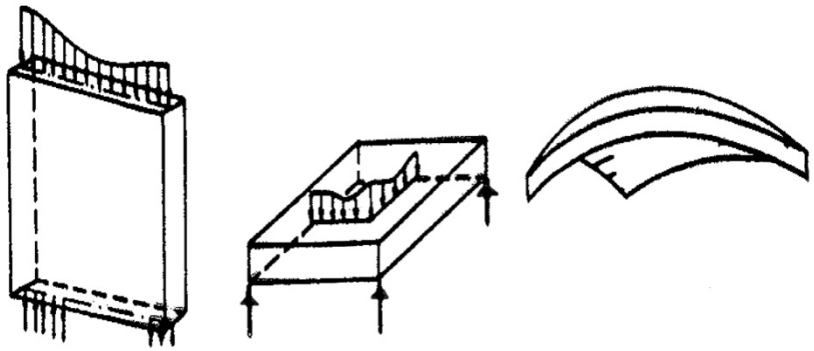
- **masivní pruty** – příčné rozměry jsou srovnatelné a třetí rozměr – délka prutu – je řádově větší
- **tenkostěnné pruty** – malé tloušťky stěn ve srovnání s délkou prutu
  - otevřený průřez
  - uzavřený průřez (komůrkový)



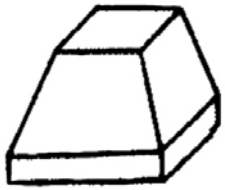
Geometrie

plošné konstrukční prvky – dva rozměry řádově stejné, třetí rozměr – tloušťka je řádově menší

- stěny
- desky
- plošné konstrukce prostorové (skořepiny)



- **masivní tělesa (bloky)** – trojrozměrné nosné útvary s řádově stejnými rozměry
  (např. masivní základové bloky)



Materiál

vnější a vnitřní síly – **silové** faktory

posuny a deformace – **deformační** faktory

souvislost mezi nimi popisují tzv. **fyzikální vztahy materiálů**

rozmanitost fyzikálně-mechanických vlastností materiálů

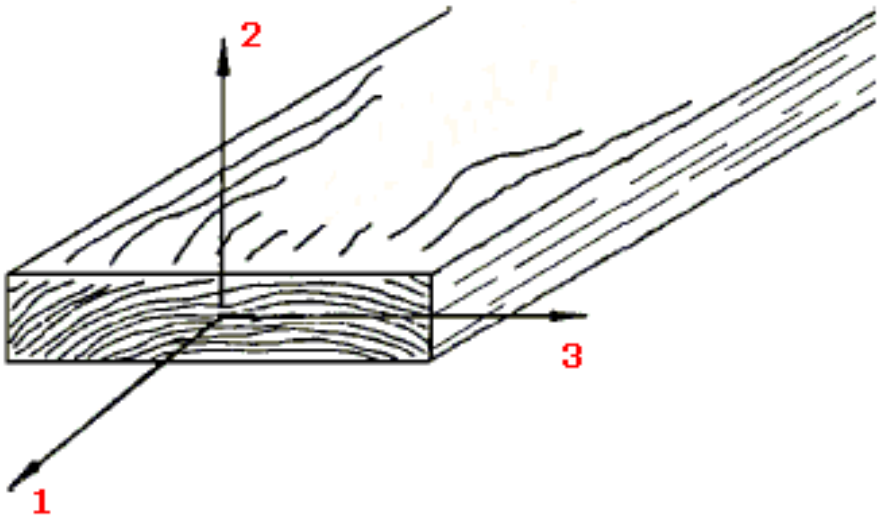
homogenní

nehomogenní

izotropní

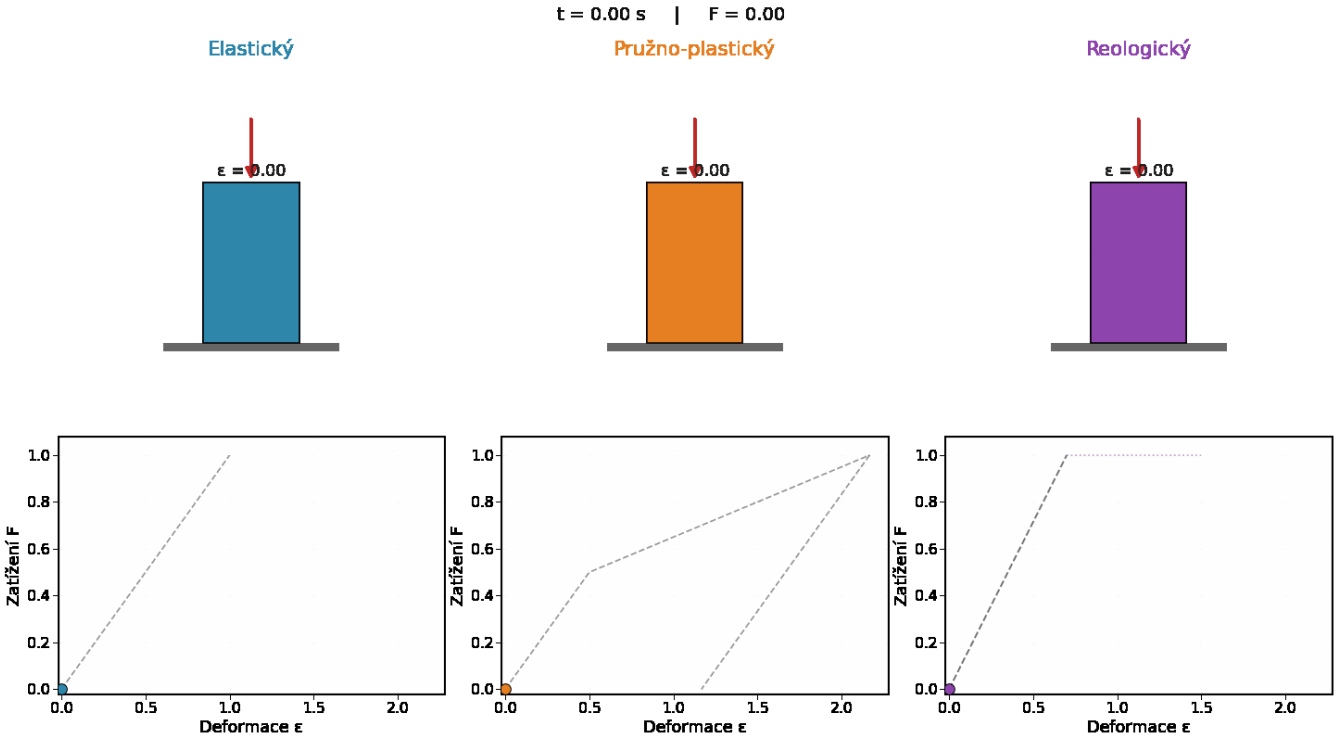
ortotropní

anizotropní



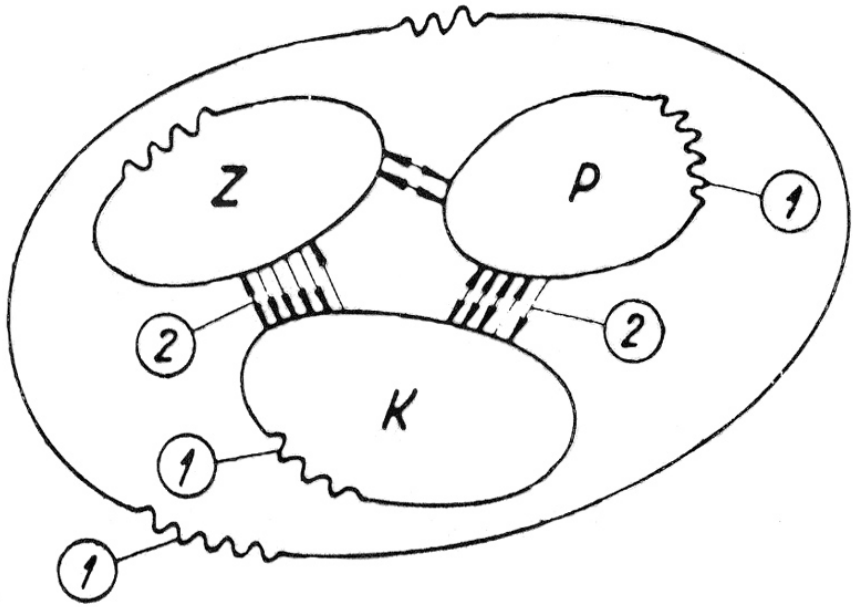
Přetvárné vlastnosti materiálů

- **pružné** – jednoznačná závislost mezi napětím a deformacemi, nezávisle na tom jestli se zatěžuje nebo odlehčuje
- **plastické** – po odtížení část trvale zdeformována
- **reonomní** – deformace a napětí se mění s časem (rheos – tečení)



Spolehlivost, normy a dimenzování

Spolehlivost je vlastnost plnit požadované funkce v požadovaném časovém úseku.



Teorie spolehlivosti stavebních konstrukcí

Spolehlivostí prvky, spolehlivostní soustavy

Spolehlivostní soustava
„konstrukce, zatížení, prostředí“

Mezní stavy konstrukce –
únosnost, použitelnost, trvanlivost

Podmínky spolehlivosti

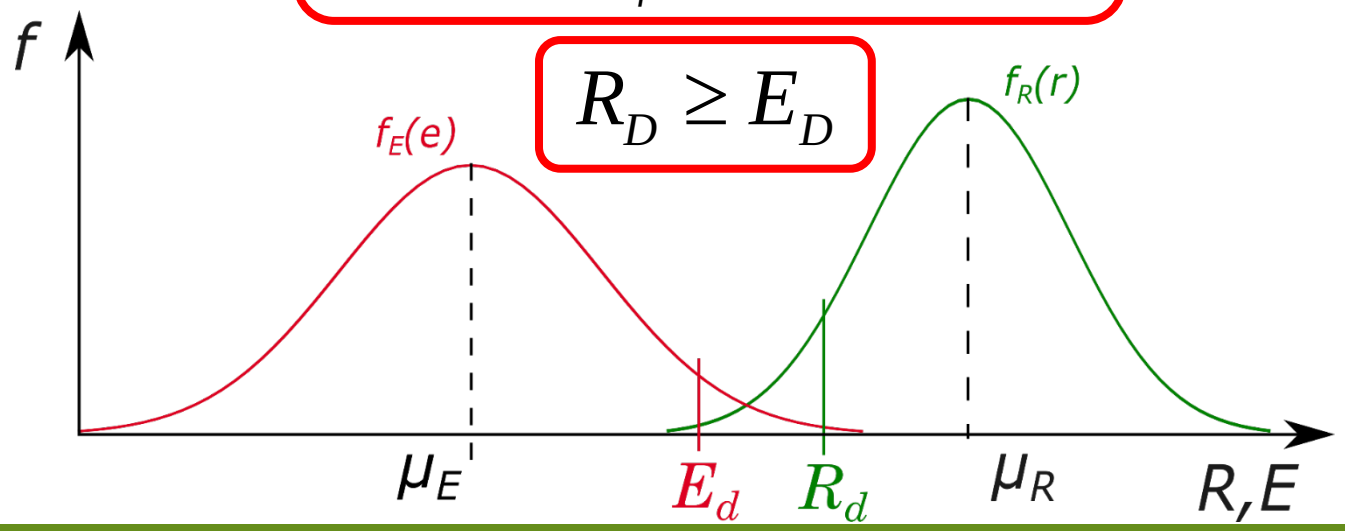
Akce E – účinek zatížení (např. ohybový moment uprostřed rozpětí prostého nosníku, průhyb desky, kmitání stropního prvku, šířka trhliny, atd.)

Bariéra R – odpor konstrukce, či mezní hodnota, kterou akce nesmí překročit

$$P_f = P(R - E < 0) = P(Z < 0)$$

$$p_f \leq p_d$$

$$R_D \geq E_D$$



Podmínky spolehlivosti

$$X_d = \eta X_k / \gamma_M$$

- γ_M je dílčí součinitel spolehlivosti materiálu nebo výrobku daný v EN 1992 až 1999; obsahuje nejistotu materiálu, zatížení i modelové nejistoty

$$\gamma_M = \gamma_m \gamma_{Rd}$$

- η *je* převodní součinitel vystihující účinek doby trvání zatížení, vliv objemu a rozměrů, účinky vlhkosti, teploty aj.
- X_k je charakteristická hodnota stanovená jako 5%(95%) kvantil
- X_d je kvantil odpovídající bezpečnostním požadavkům

$$R_D \geq E_D$$

Neznamená nulovou pravděpodobnost poruchy!



Následky působení hurikánu Katrina na konstrukci byli velice podobny následkům zemětřesení v japonské Niigate (1964), nahoře



Most *Almöbron po zřícení způsobené nárazem lodi na sypký náklad v roce 1980, postaven 1960.*



Zřícení mostu v Janově následkem zanedbání údržby, nevhodného návrhu a extrémní bouře, Itálie 2018



Zřícení mostu v Baltimore, Maryland (2024) důsledkem nárazu nákladní lodě do pilíře.

Napětí

- **Pojem napětí** – jeden z klíčových pojmů pružnosti

- **vnější síly** – působí na těleso zvenčí
- **vnitřní síly** – působí mezi jednotlivými částmi tělesa navzájem (např. v průřezu prutu složky N, V, M, T)

- Předpoklad spojitosti látky (kontinuum) umožňuje předpokládat také spojitost rozložení vnitřních sil uvnitř tělesa.

➢ Lze tedy definovat jejich **intenzitu na jednotku plochy - napětí**

Vnitřní síly a napětí v průřezu prutu

Systém elementárních sil v průřezu prutu je staticky ekvivalentní složkám vnitřních sil

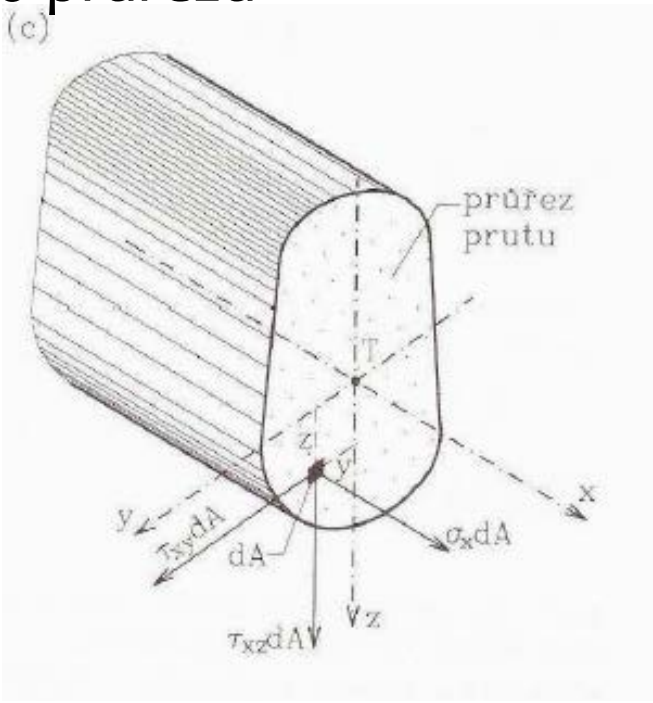
Elementární síly a jejich integrace po průřezu

DIFERENCIÁL PLOCHY

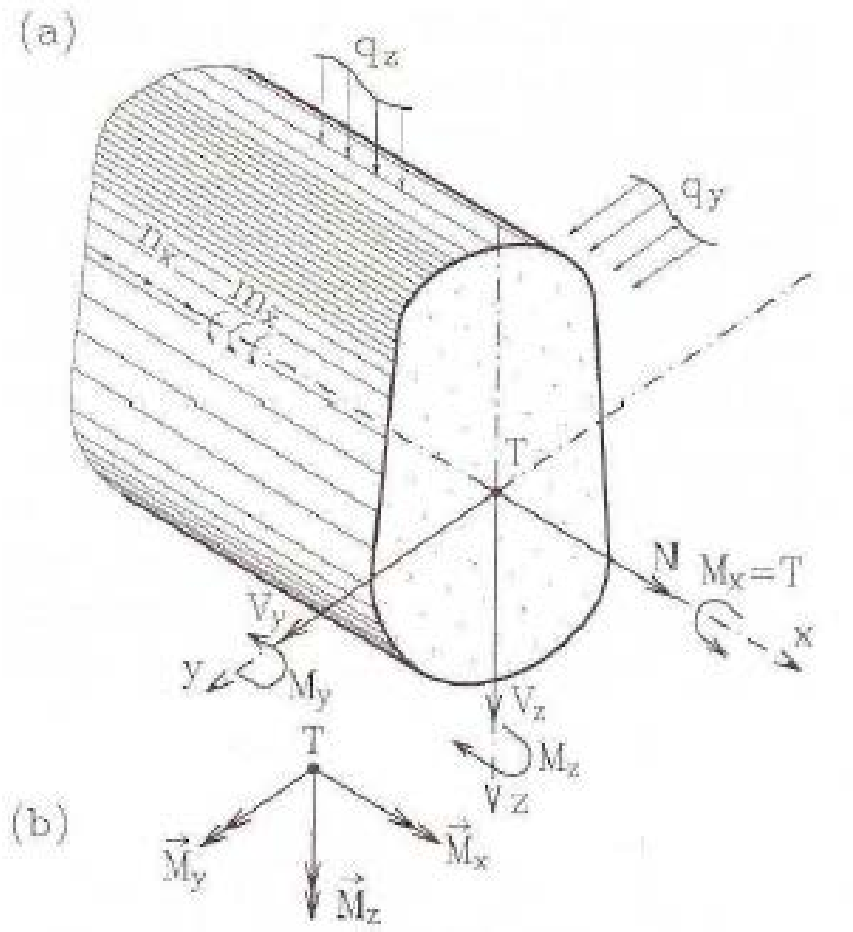
$dF \equiv dA$

ELEMENTÁRNÍ SÍLY

$\sigma_x\, dA$, $\tau_{xy}\, dA$, $\tau_{xz}\, dA$



Vnitřní síly a napětí v průřezu prutu



$$N = N_x = \int_A \sigma_x dA$$

$$V_y = \int_A \tau_{xy} dA$$

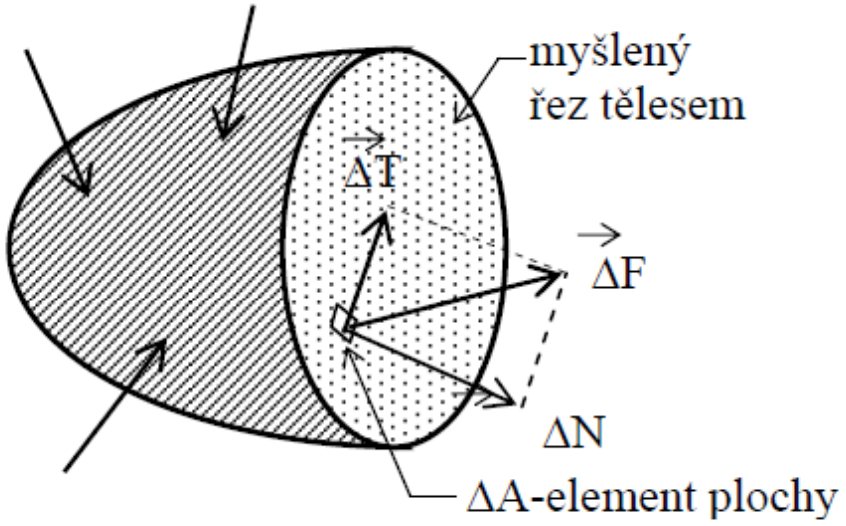
$$V_z = \int_A \tau_{xz} dA$$

$$M_z = -\int_A \sigma_x \cdot y \, dA$$

$$M_x = \int_A \left(\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z\right) dA$$

$$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \; dA$$

Napětí



Celkové napětí rozkládáme z praktických důvodů na σ a τ, tedy na:

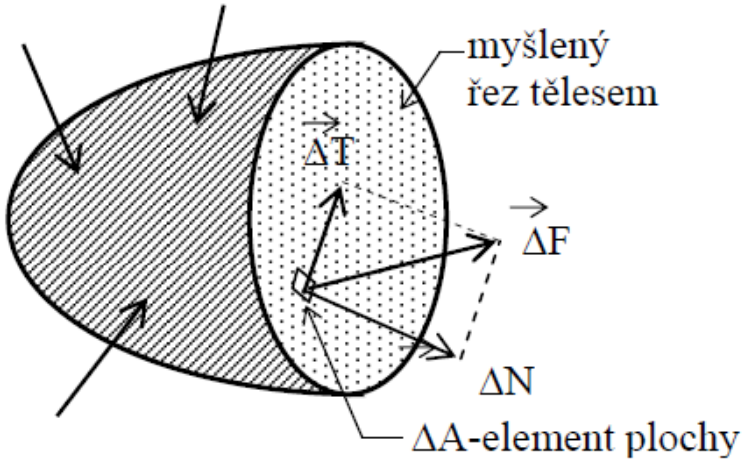
- **normálové napětí**

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \frac{dN}{dA}$$

- **tečné napětí**

$$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} = \frac{dT}{dA}$$

Rozměr napětí



Pascal Pa = N/m^2 = Nm^{-2}

Prakticky užíváme kPa = 10^3 Pa

Mpa = 10^6 Pa

GPa = 10^9 Pa

Dřívější jednotka 1 kp/cm^2 = 0,1 Mpa

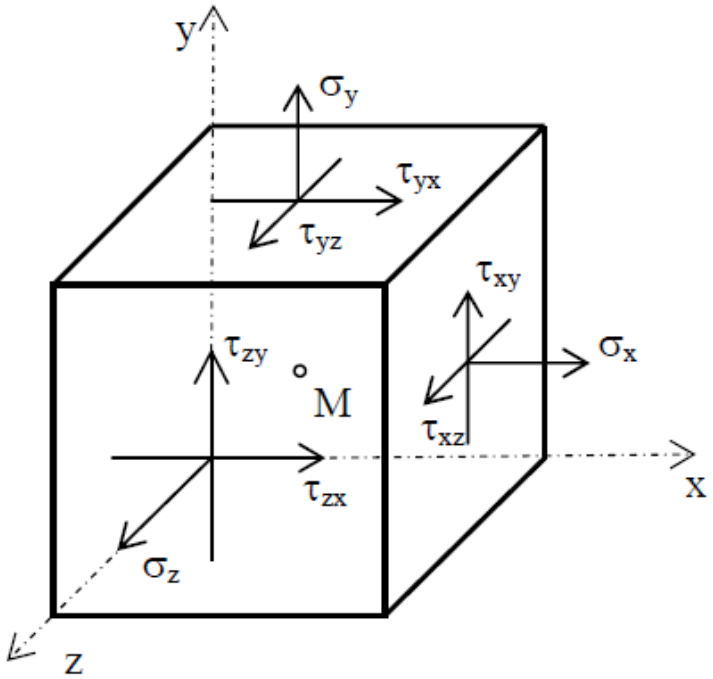
U.S. jednotka ksi(kip per square inch) 1ksi = 6890 kPa

kip (1000 pounds)

Označování složek napětí

v kartézském souřadnicovém systému je **napjatost v bodě tělesa** popsána maticí $[A_\sigma]$, tj. **tenzorem napětí**

$$[A_\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



σ_i… i… index normály plošky a směru (II osa)
τ_{ij} … i… index normály (kde)
j… index směru (kam)

- složky tenzoru napětí jsou obecně funkcemi všech proměnných x, y, z
- znaménková konvence: kladný smysl na kladných ploškách souhlasně se smyslem os

Vzájemnost smykových napětí

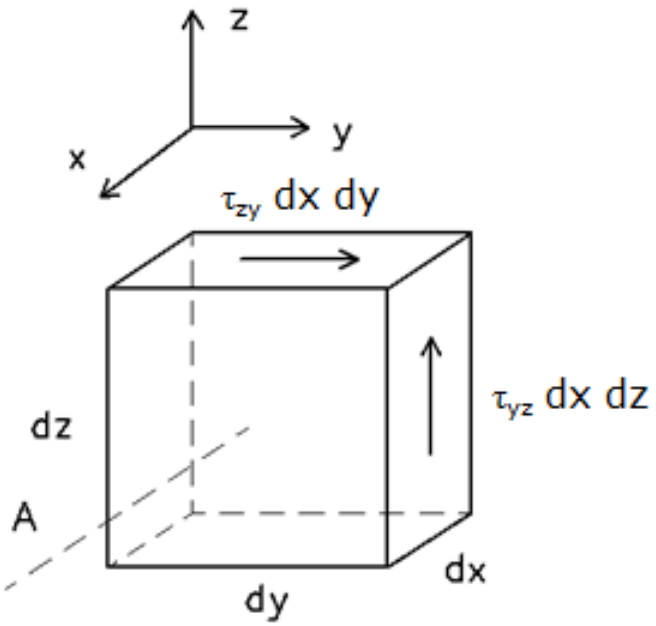
Tři momentové podmínky elementárního kvádru o hranách dx, dy, dz

MOMENT K OSE A: $\sum M_a = 0$

síla rameno

$$\tau_{yz} \cdot dx \cdot dz \cdot dy - \tau_{zy} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy}$$



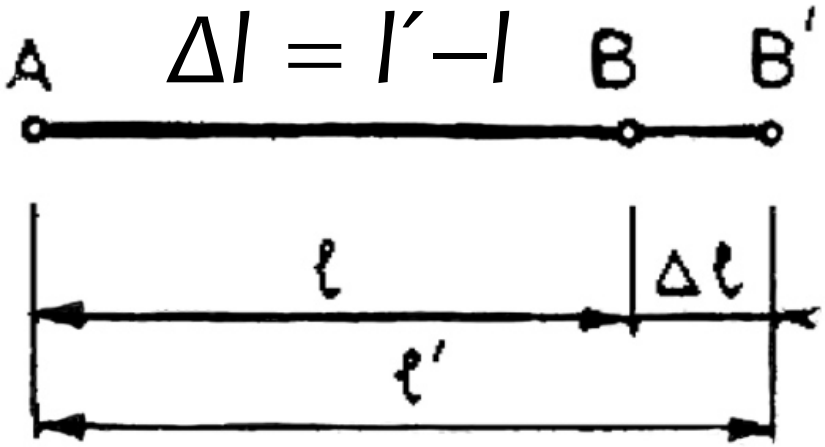
Analogicky v ostatních směrech z

celkem 9 složek je 6 **nezávislých** – pojem **vektoru napětí**

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$
$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

Poměrné protažení (zkrácení)

v důsledku zatížení se tělesa **deformují**
deformace rozlišujeme **délkové** a úhlové

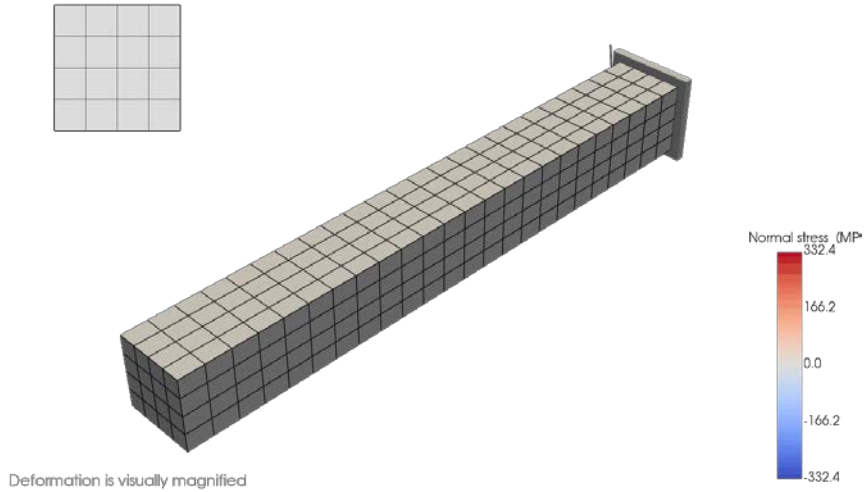


Délková deformace

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{l}$$

v osách x, y, z:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}; \varepsilon_y \ldots; \varepsilon_z \ldots$$



Poměrná úhlová změna

v důsledku zatížení se tělesa deformují

deformace rozlišujeme délkové a **úhlové**

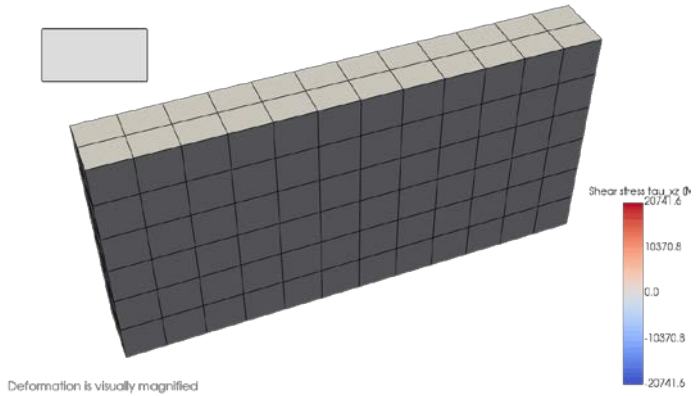
$$\gamma_{xy}; \gamma_{yz}; \gamma_{zx}$$

Úhlová deformace

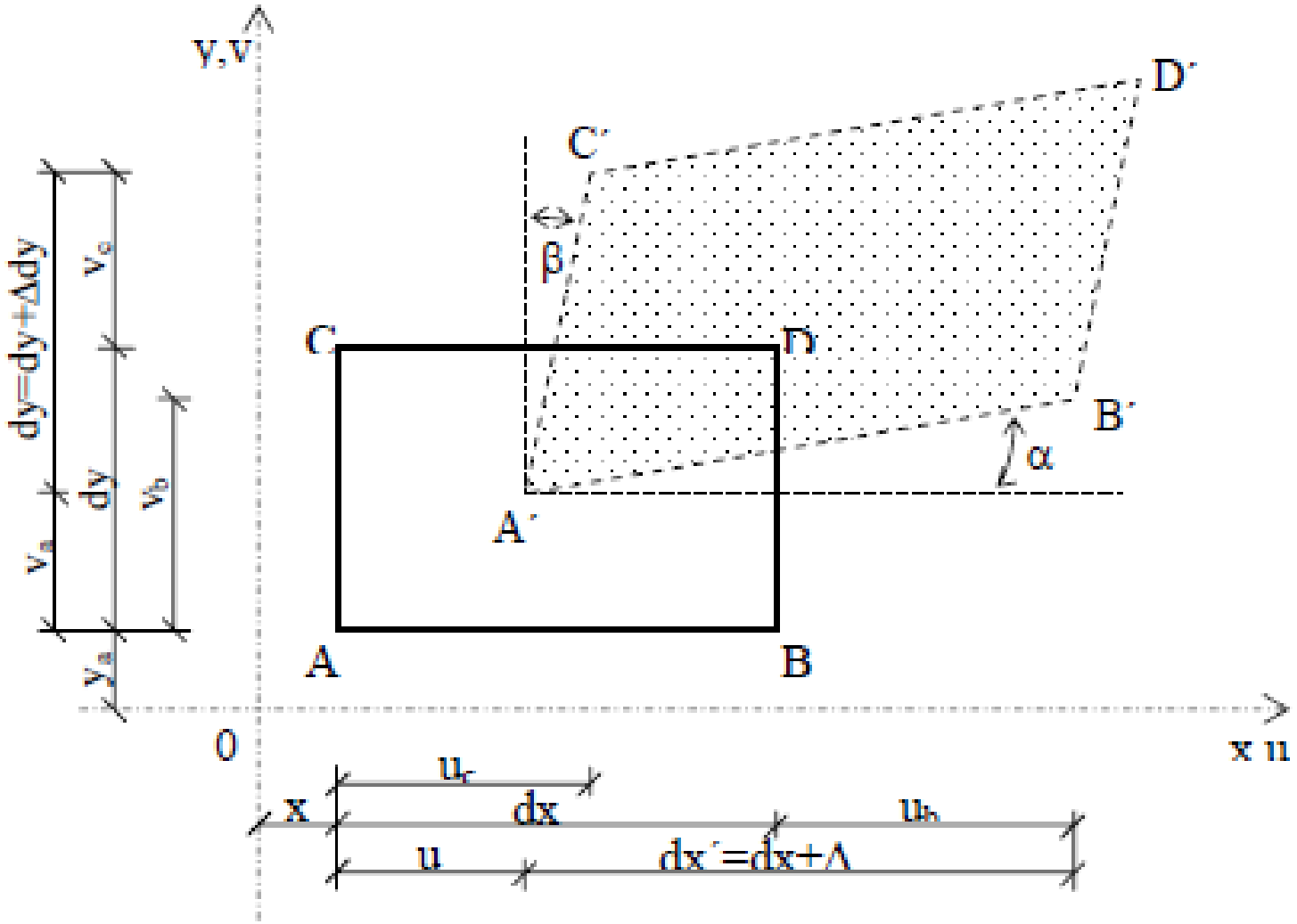
$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\Delta}{h} \qquad \boxed{\gamma \approx \frac{\Delta}{h}}$$

Tenzor deformace $[A_\varepsilon]$ (3,3)
Vektor deformace $\{\varepsilon\}^T$ (6,1)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$



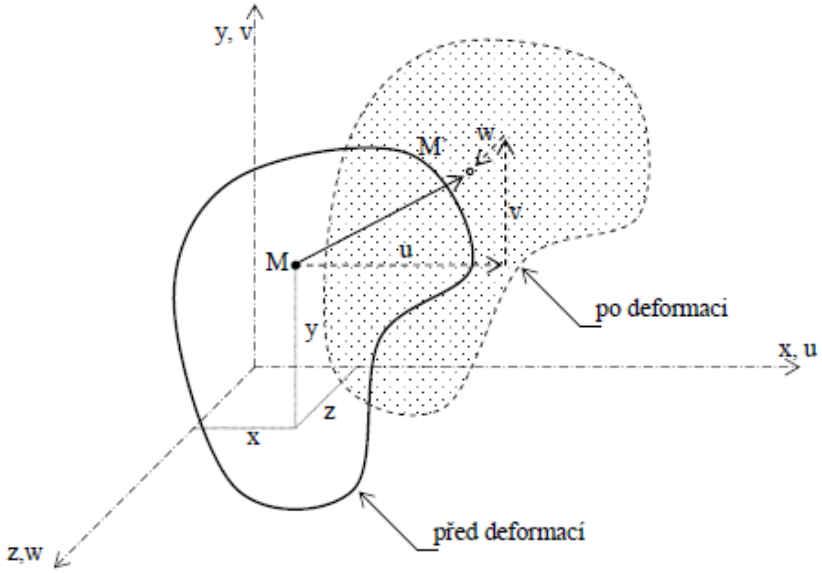
Poměrné délkové a úhlové deformace



Posuvy

Stav tělesa v deformovaném stavu lze popsat jednoznačně definujeme-li posuv každého bodu pomocí jeho složek do os:

$$u = u(x, y, z)$$
$$v = v(x, y, z)$$
$$w = w(x, y, z)$$



Vztah mezi posuvy u, v, w a deformacemi (tenzorem deformace) určují tzv. geometrické rovnice v diferenciálním tvaru (odvozený později).

Obecná nauka pro různé materiály

Spolu se stavební mechanikou vytváří PP teoretické základy pro navrhování a posuzování konstrukcí:

- betonových
- ocelových
- dřevěných
- konstrukcí z nových materiálů
- kompozitních





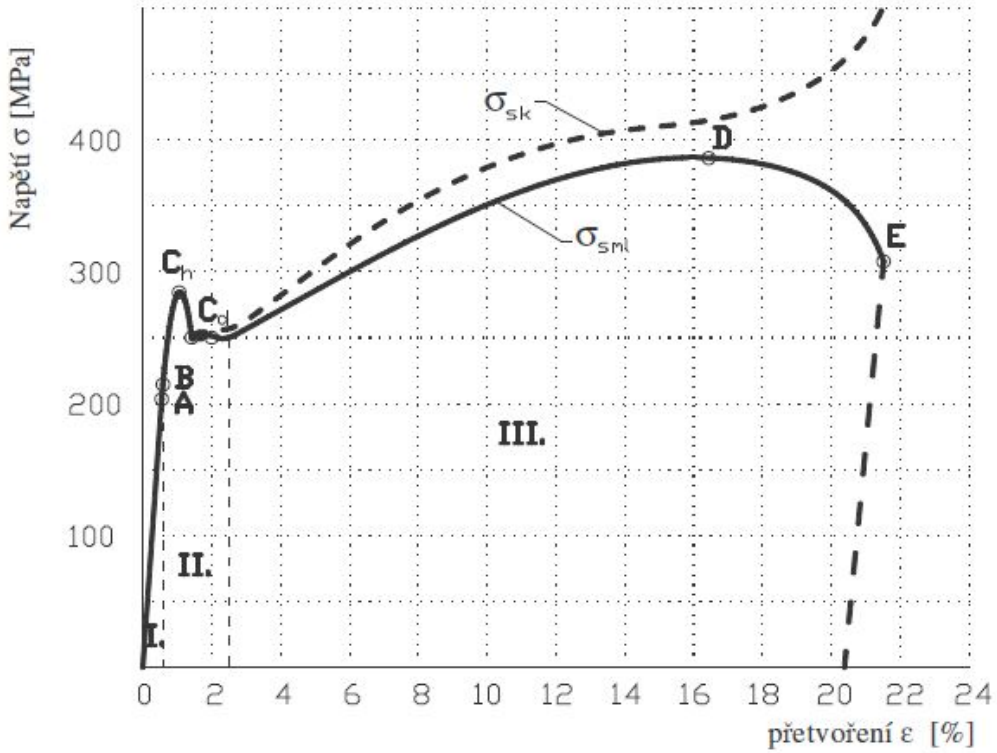
Pracovní diagramy materiálů

Závislost mezi napětími a deformacemi - zkoušky materiálu

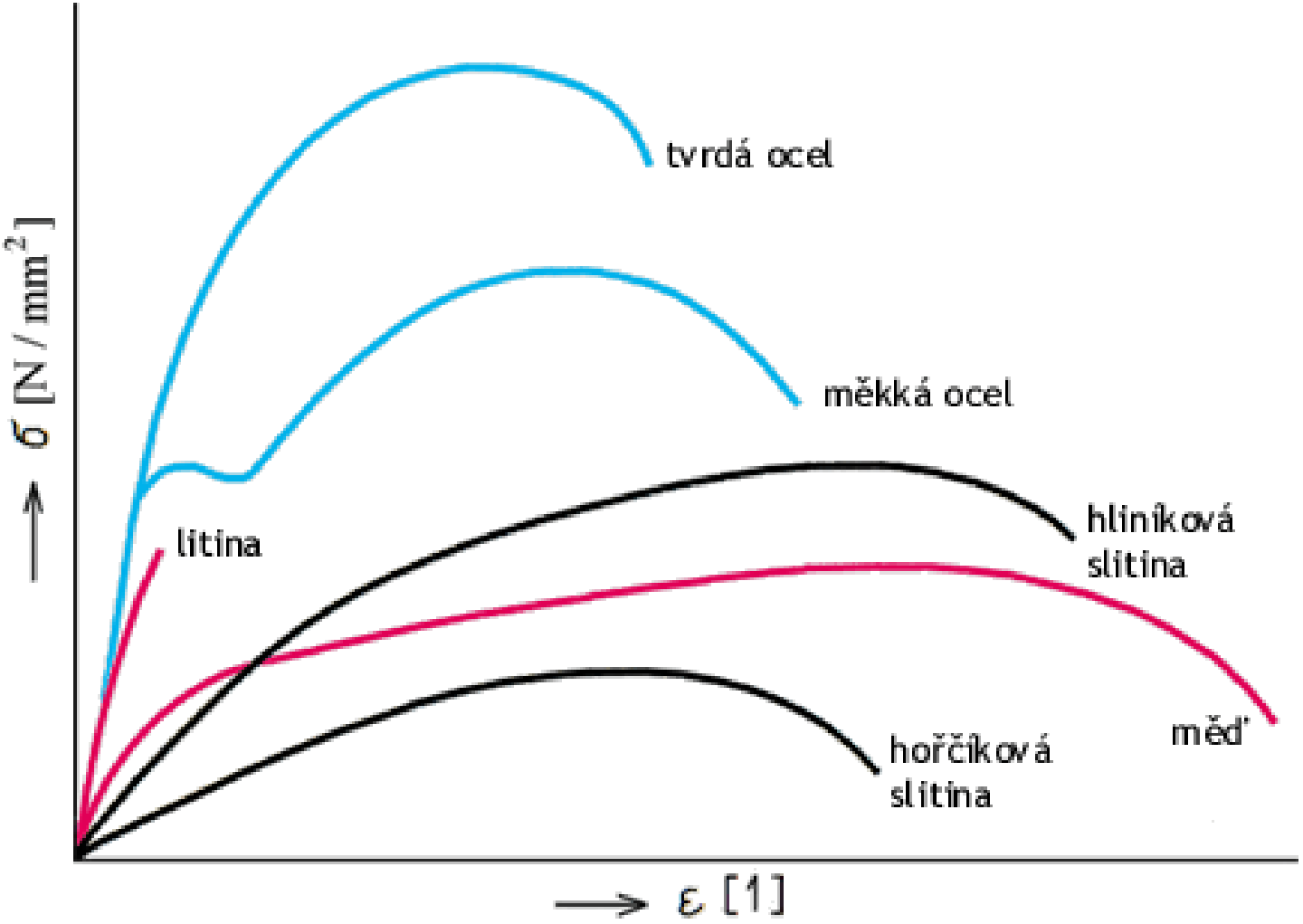
Typická je tahová zkouška (zkušební zařízení – tahací lis)

bod A – **mez úměrnosti**
bod B – **mez pružnosti**
bod C – **horní a dolní mez kluzu**
bod D – **mez pevnosti**
bod E - **mez porušení**

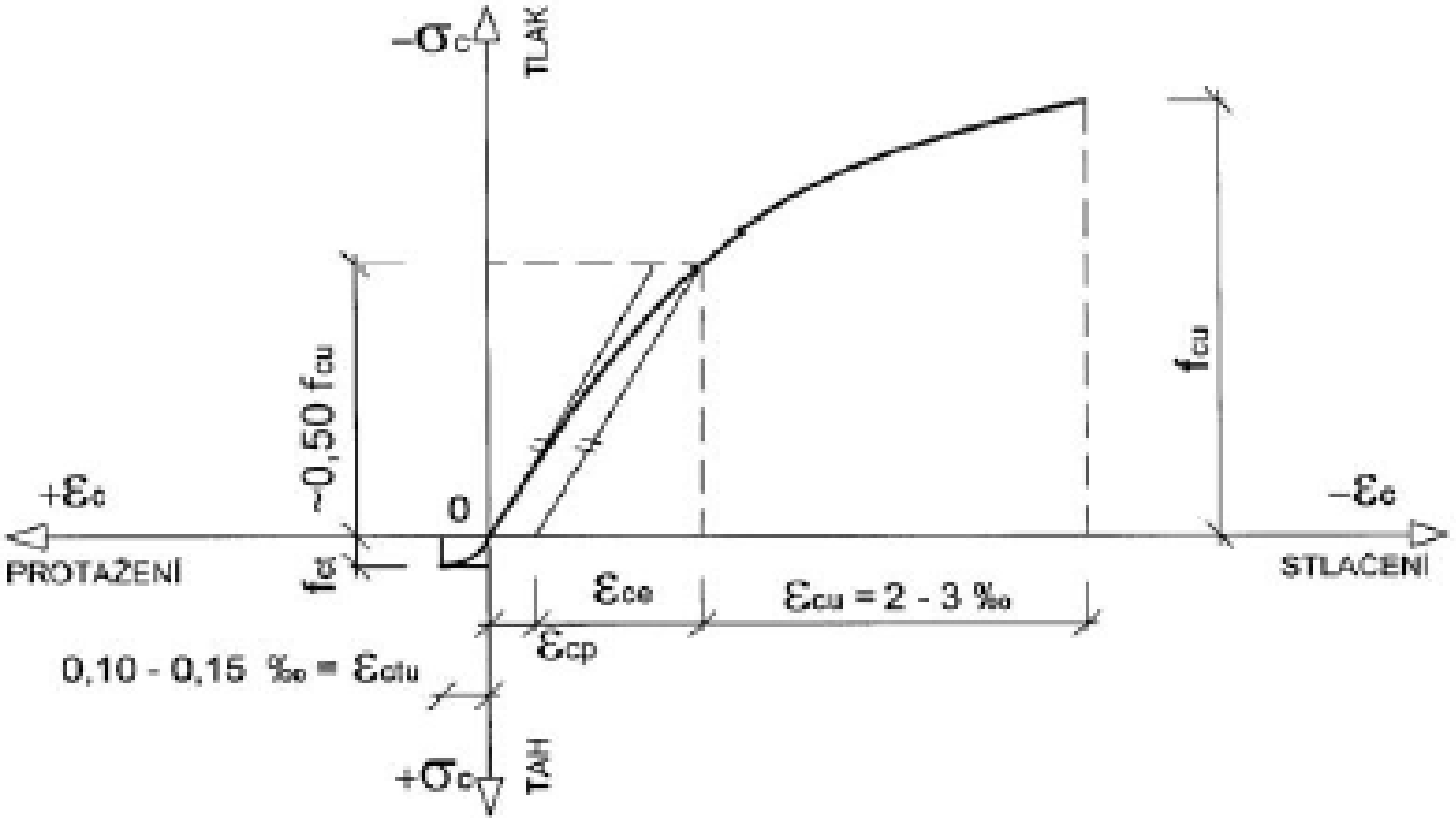
I. Pružný obor
II. Plastický obor
III. Obor změkčení



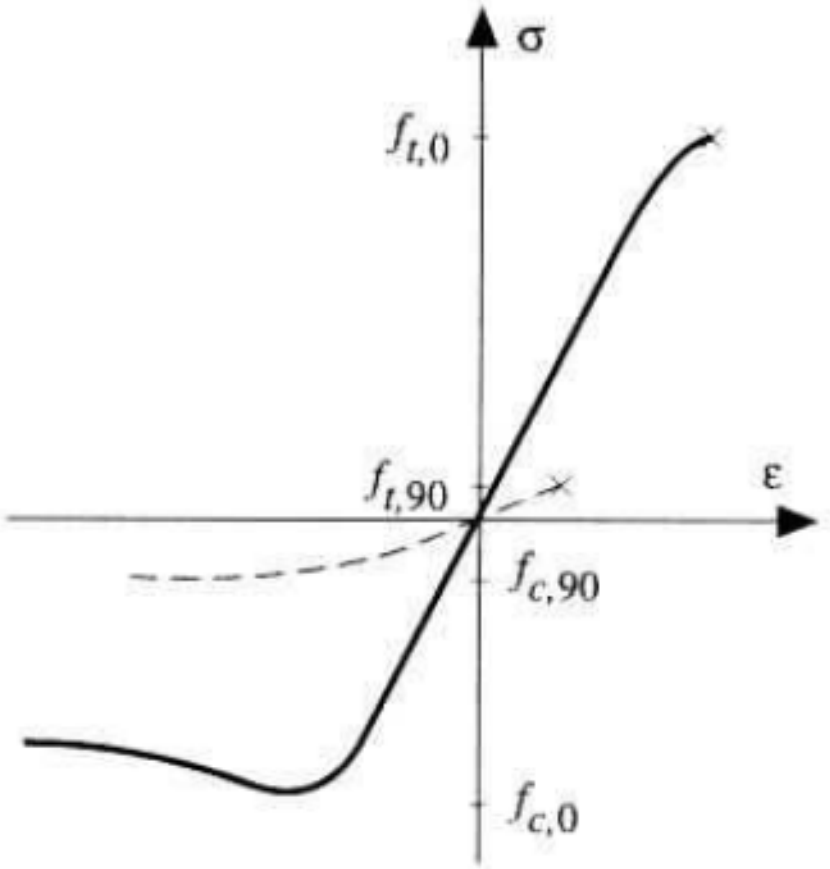
Srovnání materiálů - ocel



Srovnání materiálů - beton



Srovnání materiálů - dřevo



plná čára – namáhání dřeva **rovnoběžně** s vlákny

čárkovaná čára – namáhání dřeva **kolmo** na směr vláken

Hookův zákon

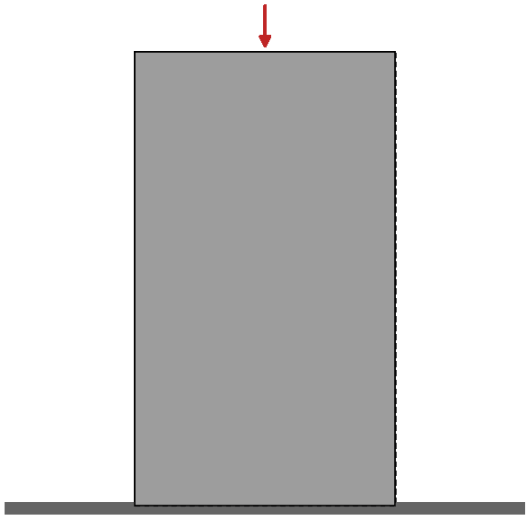
V určitém rozmezí (do meze úměrnosti, pokud jej lze vysledovat) platí přibližně lineární vztah – tj. tzv. **Hookův zákon**.

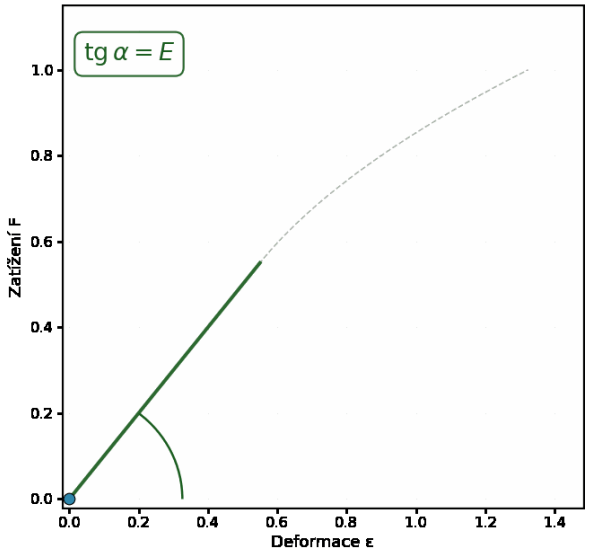
Pro tah (tlak)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Analogicky pro smyk

$$\tau = G \cdot \gamma$$





Modul pružnosti v tahu E a ve smyku G

- má rozměr napětí
- informativní orientační hodnoty:

materiál	modul pružnosti	
	E	G
ocel	210 GPa	81 GPa
beton	20-40 GPa	0,5-2,5 MPa
dřevo (II)	10 GPa	0,6 Gpa
dřevo(⊥)	0,3 GPa	
dural	72 GPa	
sklo	70 GPa	



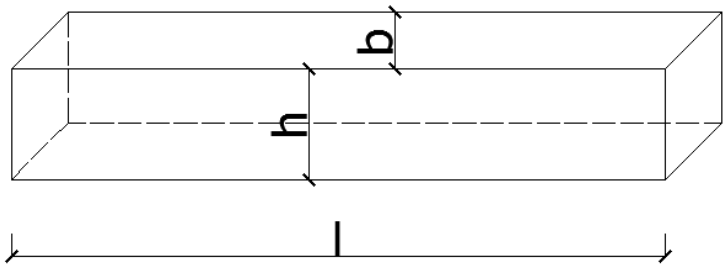
Příčné zkrácení

Při tahovém namáhání (prutu, prvku) v jednom směru dochází:

k protažení ve směru tahu (podélném směru)

ke zkrácení v příčném směru

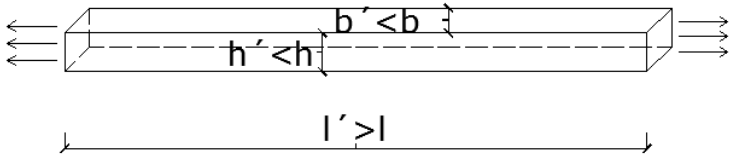
před deformací



$$\varepsilon' = \frac{b' - b}{b} = \frac{h' - h}{h}$$

$$\varepsilon = \frac{l' - l}{l}$$

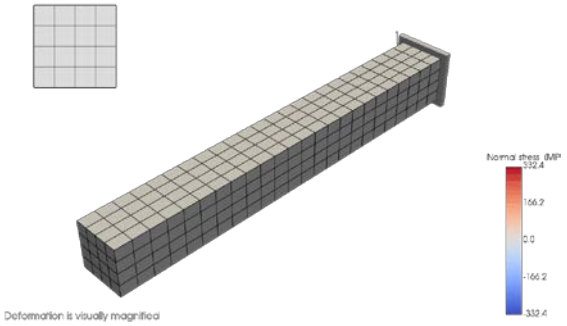
po deformaci tahem



$$\varepsilon' = -\upsilon \cdot \varepsilon$$

Poissonův součinitel

- bezrozměrná veličina
- též součinitel příčného zkrácení či Poissonovo číslo
- vždy $0 \leq \upsilon \leq 0{,}5$



$$\upsilon = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$$



ocel 0,25 – 0,33

beton 0,15 – 0,20

korek 0

Vztah mezi elastickými konstantami

- Lze dokázat, že el. konstanty nejsou nezávislé, ale že u izotropní látky mezi nimi platí vztah:

$$G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$$

- u **ortotropie** je počet pružných konstant vyšší – **9** nezávislých složek
- u nehomogenního materiálu rozlišujeme konstanty jednotlivých mater.
- Obecnější formulace Hookova zákona v rovině, prostoru (dále)
- např. ocel: $\upsilon = 0{,}3$ E=210 000 MPa

$$G = \frac{210000}{2(1+0{,}3)} = 81000MPa$$

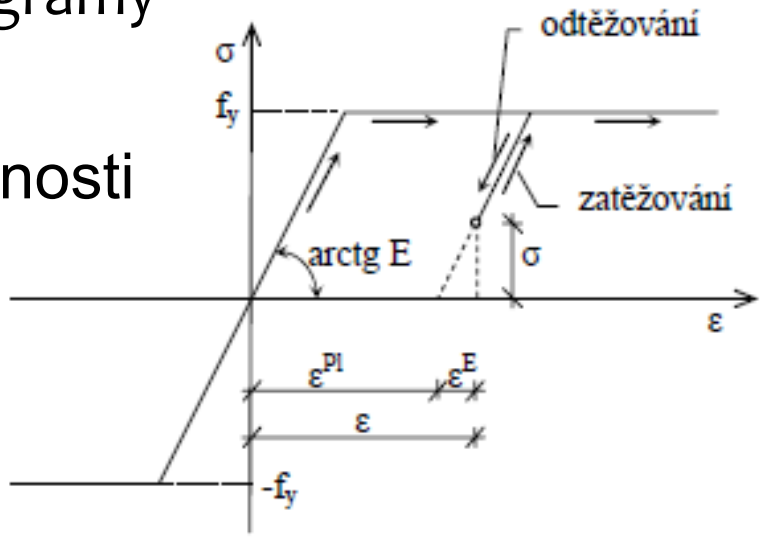
Ideálně pružnoplastický materiál

Plasticita – na rozdíl od křehkých materiálů mají tvárné materiály schopnost tvárně se deformovat a to bez porušení

tato vlastnost se využívá při určování **únosnosti konstrukcí**

teorie plasticity a mezních stavů

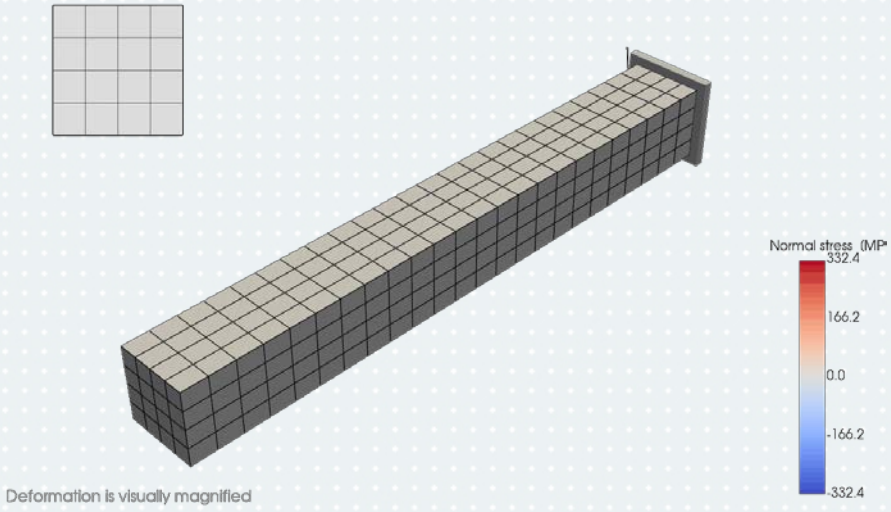
- definuje modely pro pracovní diagramy
- různé modely materiálů
- neplatí předpoklad lineární pružnosti



f_y = teoretické mezní napětí

Prostý tah a tlak

- v průřezu působí jen normálová síla, všechny ostatní složky vnitřních sil jsou rovny nule
- složky vnitřních sil závislé na smykových napětích jsou nulové **(V_y, V_z, M_x)** z toho plyne, že smyková napětí jsou nulová **($\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$)**



$$N \neq 0$$

$$V_y = 0$$

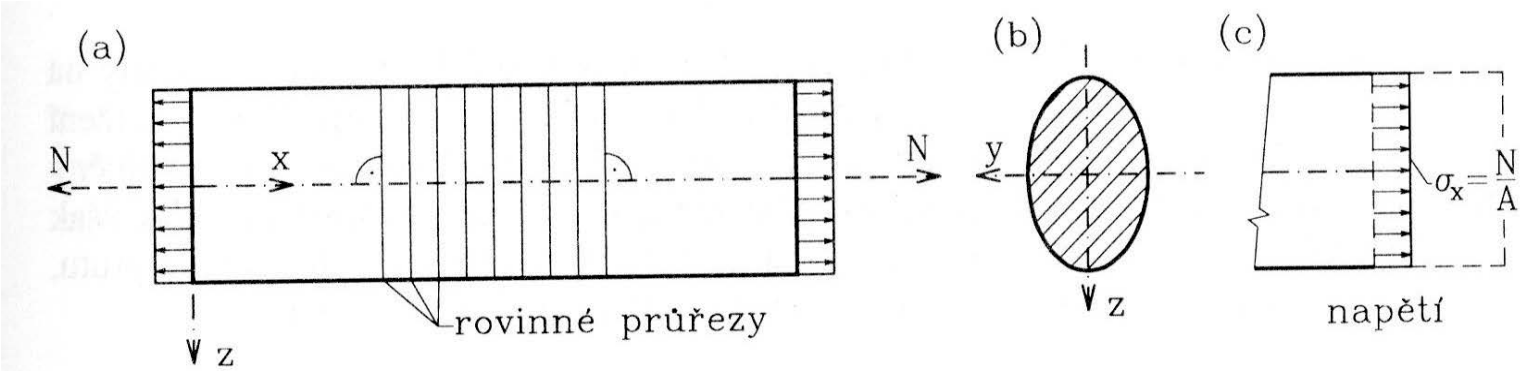
$$V_z = 0$$

$$M_x = M_y = M_z = 0$$

Y, Z – hlavní centrální osy setrvačnosti

Napětí v příčném průřezu

- z laboratorních zkoušek plyne, že protažení jsou v místech vzdálených od poruch (Saint Venantův princip lokálnosti) konstantní (ε = konstantní)
- Bernoulliova hypotéza
  - Příčné průřezy zůstávají rovinné a kolmé k ose prutu i po deformaci
  - Podélná vlákna na sebe vzájemně netlačí
- Protože platí Hookův zákon pak také platí, že σ = konst.



Odvození normálového napětí

$$N = N_x = \int_A \sigma_x dA = \sigma_x \int_A dA = \sigma_x \cdot A$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA = \sigma_x \left(\int_A z dA \right) = \sigma_x \cdot S_y = 0$$

$$M_z = -\int_A \sigma_x y dA = -\sigma_x \left(\int_A y dA \right) = -\sigma_x \cdot S_z = 0$$

$$S_y = S_z = 0$$

Osy *y* a *z* jsou těžištní (centrální), k těžištním osám jsou statické momenty průřezu $S_Y = S_z = 0$.

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

Dimenzování taženého prutu

- **Bezpečný návrh taženého prutu:** normálové napětí nesmí přesáhnout tzv. **návrhovou pevnost R_d**

$$R_d = \frac{f_{yk}}{\gamma_M}$$

- Dimenzovat = navrhovat rozměry a materiál, tak aby platila nerovnost

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \leq R_d$$

Skutečná pevnost, průměrná, charakteristická, návrhová

Přetvoření taženého prutu

- Protažení prutu

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{EA}$$

- Celkové protažení

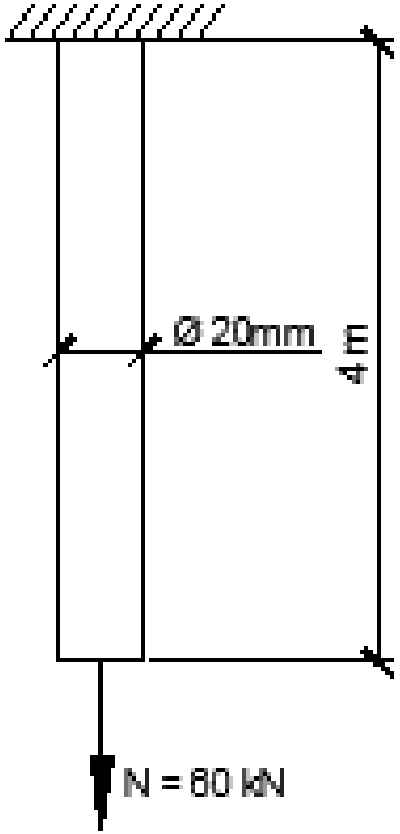
$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon_x dx = \int_0^l \frac{N}{EA} dx$$

- Prut stálého průřezu a materiálu tažený konstantní silou

$$\Delta l = \frac{N}{EA} \int_0^l dx = \frac{Nl}{EA}$$

Numerický příklad I

Ocelový prut průřezu 20 mm je zatížený silou N= 60 kN. Vlastní tíha se neuvažuje.



$$A = \pi \frac{d^2}{4} = \pi \cdot \frac{2^2}{4} = 3{,}14\,\mathrm{cm}^2 = 3{,}14 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{60 \cdot 10^{-3}\,(\mathrm{MN})}{3{,}14 \cdot 10^{-4}\,(\mathrm{m}^2)} = 191{,}1\,\mathrm{MPa}$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{60 \cdot 10^{-3} \cdot 4{,}0}{210000 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-4}} = 0{,}0036\,\mathrm{m} = 3{,}6\,\mathrm{mm}$$

Přetvoření taženého prutu

- Protažení prutu

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{EA}$$

- Celkové protažení

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon_x dx = \int_0^l \frac{N}{EA} dx$$

Tuhost průřezu

- Prut stálého průřezu a materiálu tažený konstantní silou

$$\Delta l = \frac{N}{EA} \int_0^l dx = \frac{Nl}{EA}$$

Poddajnost prutu
(tuhost prutu)$^{-1}$

Obecný případ tahu (tlaku)

EA - tuhost průřezu při tahu (tlaku)

l/EA - poddajnost prutu (prodloužení vyvozené jednotkovým zatížením)

EA/l – tuhost prutu (síla potřebná k jednotkovému protažení)

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \longrightarrow \boxed{d\Delta l = du = \frac{N(x)dx}{EA(x)}}$$

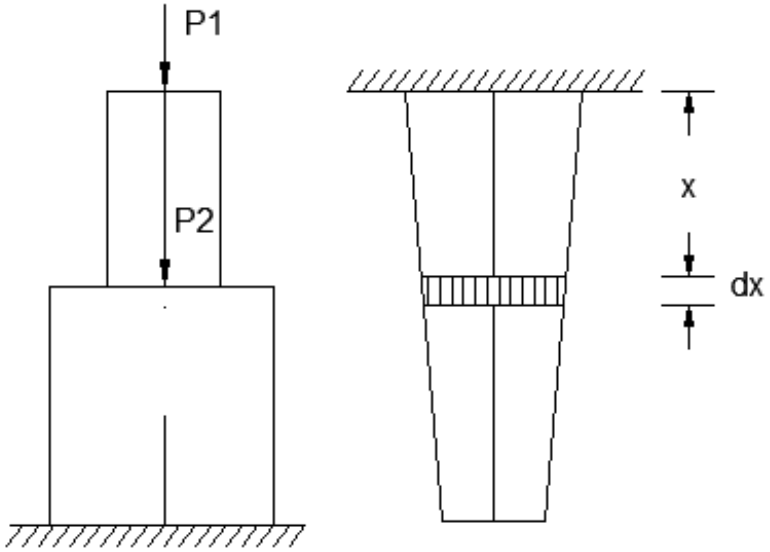
N = N(x) spojitě se měnící normálová síla po délce prutu

A = A(x) plocha průřezu se spojitě mění po délce prutu

Protažení stanovíme integrací po délce prutu: $\Delta l = u = \int_0^l \frac{N(x)dx}{EA(x)}$

Pruty sestávající se z několika částí

- Zatížení různými osovými silami – normálová síla se nespojitě mění
- Různé průřezové plochy
- Integrace přechází na algebraický součet



$$\Delta l = u = \int_0^l \frac{N(x)dx}{EA(x)} \longrightarrow \boxed{\Delta l = \sum_{i=1}^{h} \frac{N_i l_i}{EA_i}}$$

Prut stálého průřezu zatížený vlastní tíhou

- objemová tíha: γ = ... [kNm^{-3}]

$$N = N(x) = \gamma \cdot A \cdot x$$

$$N(l) = Q = \gamma \cdot A \cdot l$$

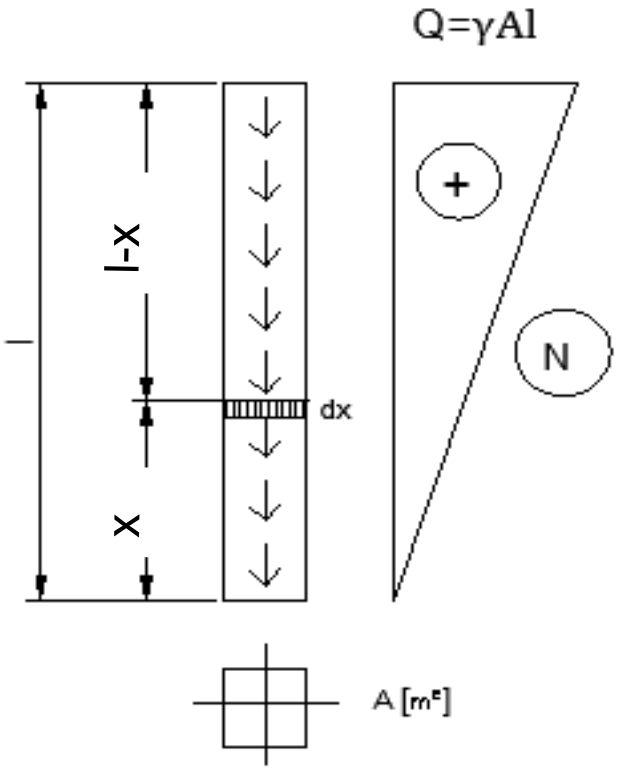
$$\sigma_x = \frac{N(x)}{A} = \gamma \cdot x$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{x=l} = \gamma \cdot l$$

$$\Delta l = \int_o^l \frac{N}{EA} dx = \frac{\gamma}{E} \int_o^l x dx = \frac{\gamma}{E} \left[\frac{x^2}{2} \right]_o^l = \frac{\gamma \cdot l^2}{2E}$$

$$Q = \gamma A l$$

$$\Delta l = \frac{Ql}{2EA}$$



Prut stálého průřezu zatížený vlastní tíhou

$$N = N(x) = \gamma \cdot A \cdot x$$

- objemová tíha: γ = ... [kNm^{-3}]

$$N(l) = Q = \gamma \cdot A \cdot l$$

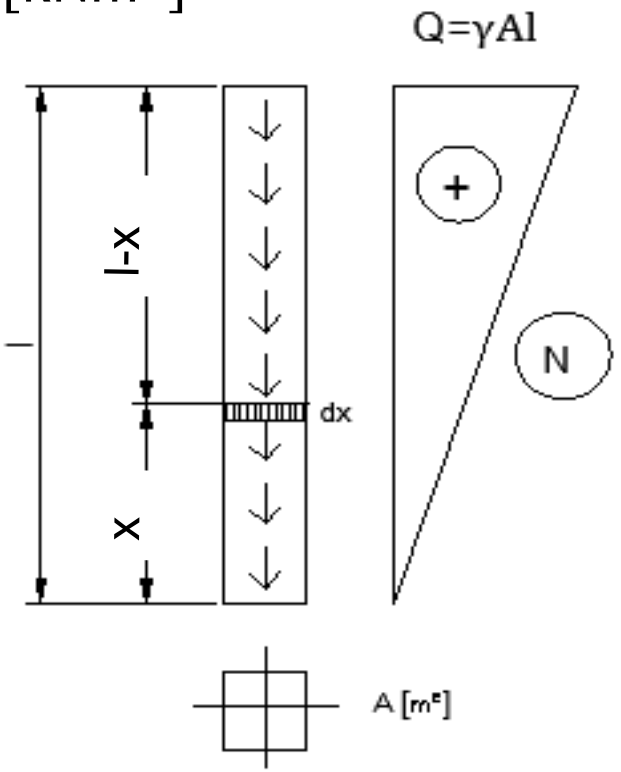
$$\sigma_x = \frac{N(x)}{A} = \gamma \cdot x$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{x=l} = \gamma \cdot l$$

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EA} dx = \frac{\gamma}{E} \int_0^l x dx = \frac{\gamma}{E} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l = \frac{\gamma \cdot l^2}{2E}$$

$$Q = \gamma A l$$

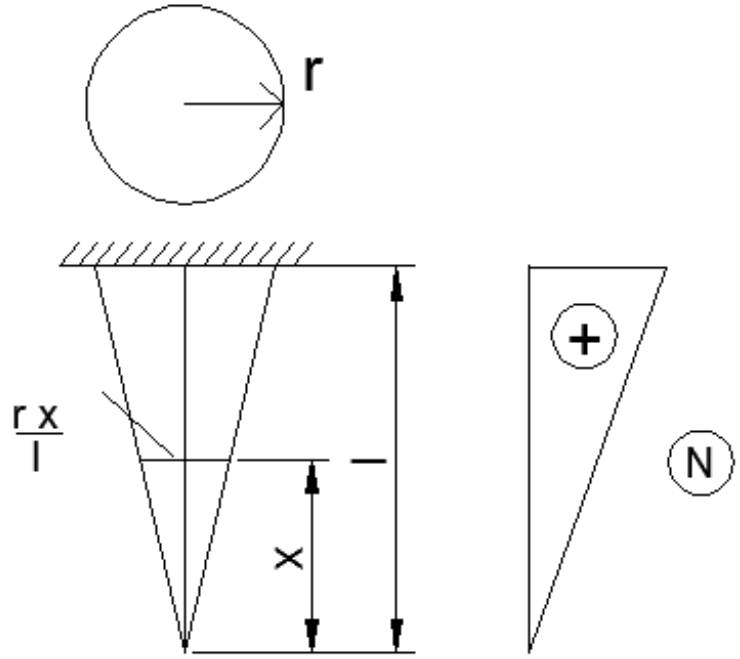
$$\Delta l = \frac{Ql}{2EA}$$



Protažení prizmatického prutu od vlastní tíhy je rovno polovině protažení od koncové síly rovné tíze prutu – tedy jako od průměrné hodnoty N.

Prut s lineárně proměnným poloměrem zatížený vlastní tíhou

prut tvaru kužele (kruhový průřez)



poloměr $$r(x) = r\frac{x}{l}$$

průřezová plocha

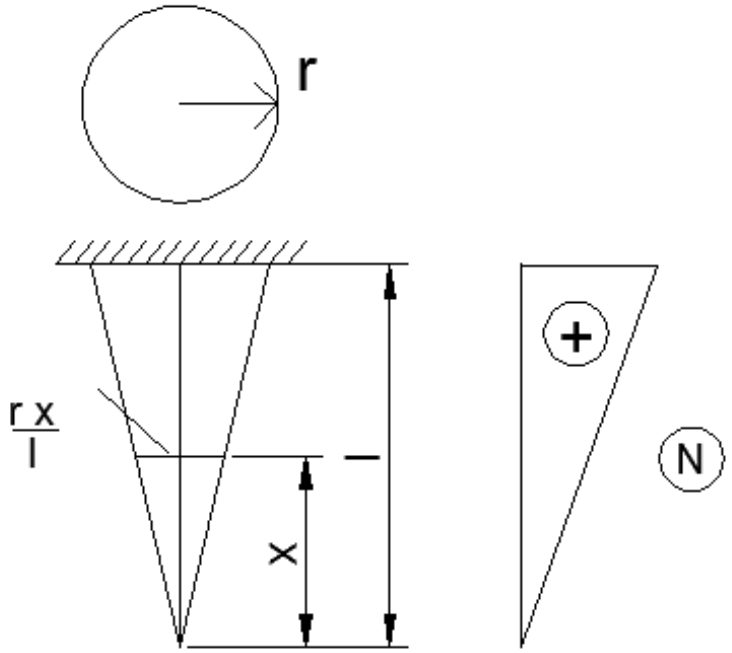
$$A(x) = \pi \cdot r^2(x) = \pi \cdot r^2 \frac{x^2}{l^2}$$

objem odříznuté spodní části

$$V(x) = \int_o^x A(x)dx = \frac{\pi \cdot r^2}{l^2}\int_o^l x^2 dx = \frac{\pi \cdot r^2}{3l^2}x^3$$

Prut s lineárně proměnným poloměrem zatížený vlastní tíhou

normálová síla $N(x) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\gamma \cdot r^2}{l^2} \cdot x^3$



napětí

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\gamma \cdot r^2}{l^2} \cdot x^3}{\pi \cdot r^2 \frac{x^2}{l^2}} = \frac{1}{3} \gamma \cdot x$$

celkové prodloužení

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EA} dx = \int_0^l \frac{\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\gamma \cdot r^2}{l^2} \cdot x^3}{E \cdot \pi \cdot r^2 \frac{x^2}{l^2}} dx = \frac{\gamma}{3E} \int_0^l x dx = \frac{\gamma}{3E} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l = \frac{\gamma \cdot l^2}{6E}$$

Staticky neurčité případy tahu (tlaku)

- **Obsahuje více vnitřních a vnějších vazeb** než je zapotřebí ke zrušení všech stupňů volnosti – staticky neurčitá soustava
- **Podmínky rovnováhy nestačí** k určení podporových reakcí či osových sil v prutech
- **Nutno pracovat s deformačními podmínkami** - jejich počet odpovídá stupni statické neurčitosti
- Vztahy mezi silovými a deformačními veličinami zprostředkuje Hookův zákon

3 druhy rovnic:
Statické - podmínky rovnováhy
Geometrické - geometrické vztahy mezi deformacemi
Fyzikální – vztah statických a geometrických veličin

Tuhý zavěšený nosník

Tuhost EA je u všech prutů stejné

$\mathbf{A_i = A;\ E_i = E}$

Statické podmínky

$\mathbf{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4 = 3F}$

$\mathbf{V_a + N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = F}$

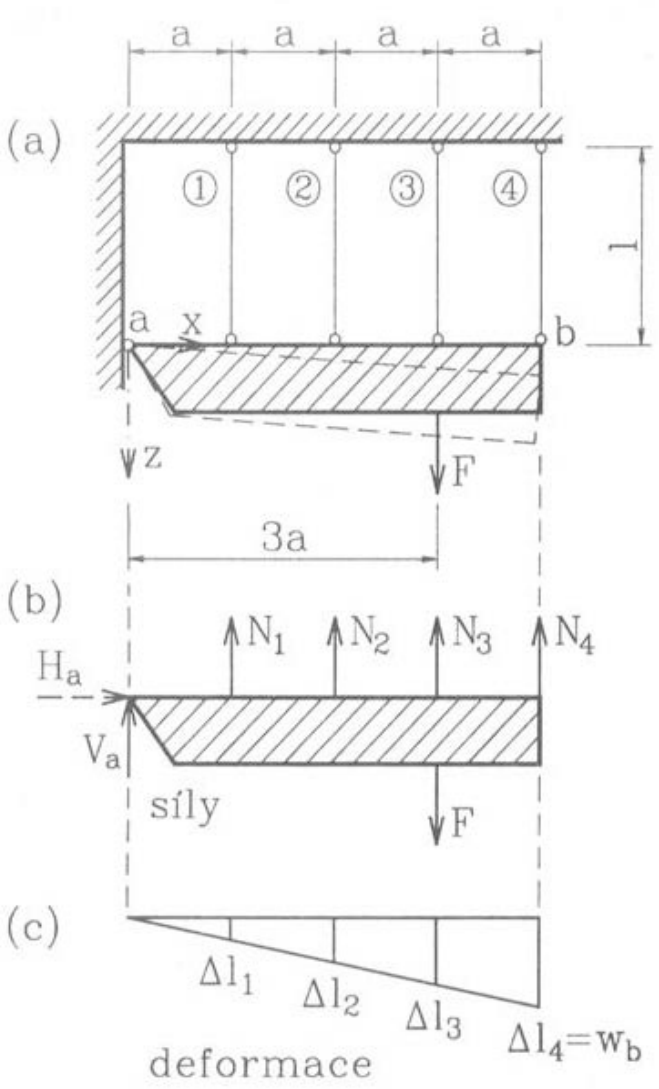
$\mathbf{H = 0}$

Deformační podmínky v geometrickém tvaru (z úměry)

$\mathbf{\Delta l_2 = 2\Delta l_1}$ $\mathbf{\Delta l_3 = 3\Delta l_1}$

$\mathbf{\Delta l_4 = 4\Delta l_1}$

$$\Delta l_i = \frac{N_i l}{EA}$$



Tuhý zavěšený nosník

Využitím fyzikálních vztahů

$$\frac{N_2 l}{EA} = 2\frac{N_1 l}{EA} \Rightarrow N_2 = 2N_1$$

$$\text{analogicky}: N_3 = 3N_1; N_4 = 4N_1$$

To jsou **deformační podmínky** vyjádřené pomocí sil!

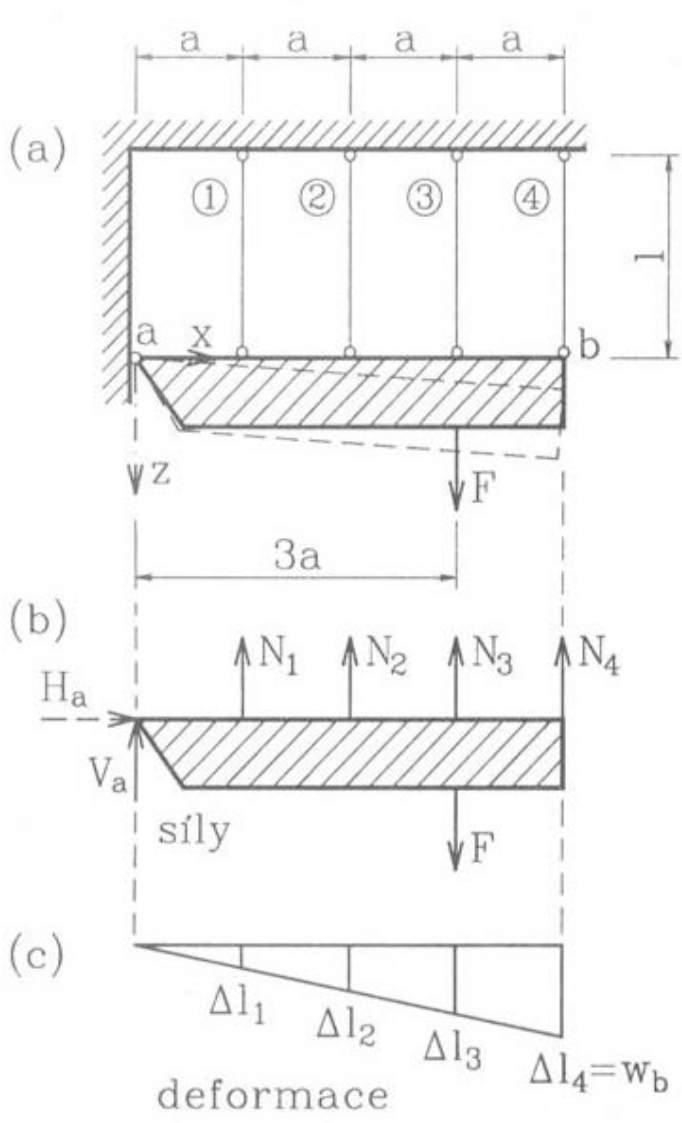
Dosazením do:

$$N_1 + 2 \cdot 2N_1 + 3 \cdot 3N_1 + 4 \cdot 4N_1 = 3F$$

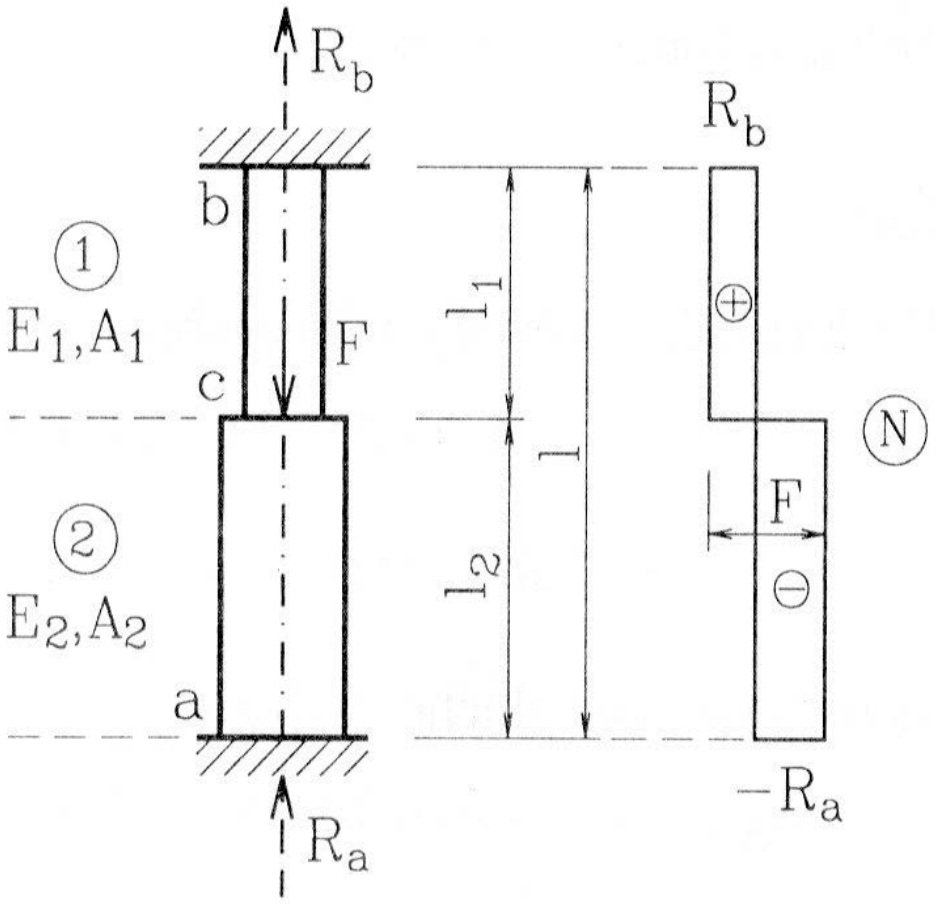
$$\Rightarrow N_1 = 0{,}1F$$

Pak z deformačních podmínek:

$$N_2 = 0{,}2F; N_3 = 0{,}3F; N_4 = 0{,}4F$$



Oboustranně vetknutý prut



$$R_a + R_b - F = 0$$

Deformační podmínka

$$\Delta l = 0$$

$$\Delta l = \frac{-R_a \cdot l_2}{EA} + \frac{R_b \cdot l_1}{EA} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_a \cdot l_2 = R_b \cdot l_1$$

$$R_a = F\frac{l_1}{l}; R_b = F\frac{l_2}{l}$$

Vliv objemových změn

Vliv změny teploty na deformaci prutu

- Změna teploty způsobuje změnu objemu a tvaru tělesa
- SU konstrukce $\sigma_x^T = 0$
- SN konstrukce: vznikají vnitřní síly v důsledku přebytečných počtů vazeb $\sigma_x^T \neq 0$

Koeficient teplotní roztažnosti α_T - poměrná změna délky příslušicí jednotkové změně teploty

Vliv objemových změn

Prodloužení prutu vlivem teploty (stálá změna teploty)

$$\Delta l_T = \int_o^l \varepsilon_x dx = \int_o^l \alpha_T T dx = \alpha_T T l \qquad \alpha_T T = \varepsilon$$

Vetknutím prutu zabráníme tomuto prodloužení - vznikne jednoosá napjatost

$$\sigma_x^T = -E\alpha_T T$$

Osová síla

$$N_x^T = \sigma_x^T A = -EA\alpha_T T$$

Příklad – síla v kolejnici

Ocel, $\Delta t = 30°C$

$\sigma = -1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 210\,000 \cdot 30 = -75{,}6$ MPa

Síla v kolejnici průřezu A = 56,6 cm^2

$N = -75{,}6 \cdot 56{,}6 \cdot 10^{-4} = -0{,}428$ MN



*ΔT = 40 − 10 = 30 K. V kolejnici vzniká tlakové napětí.