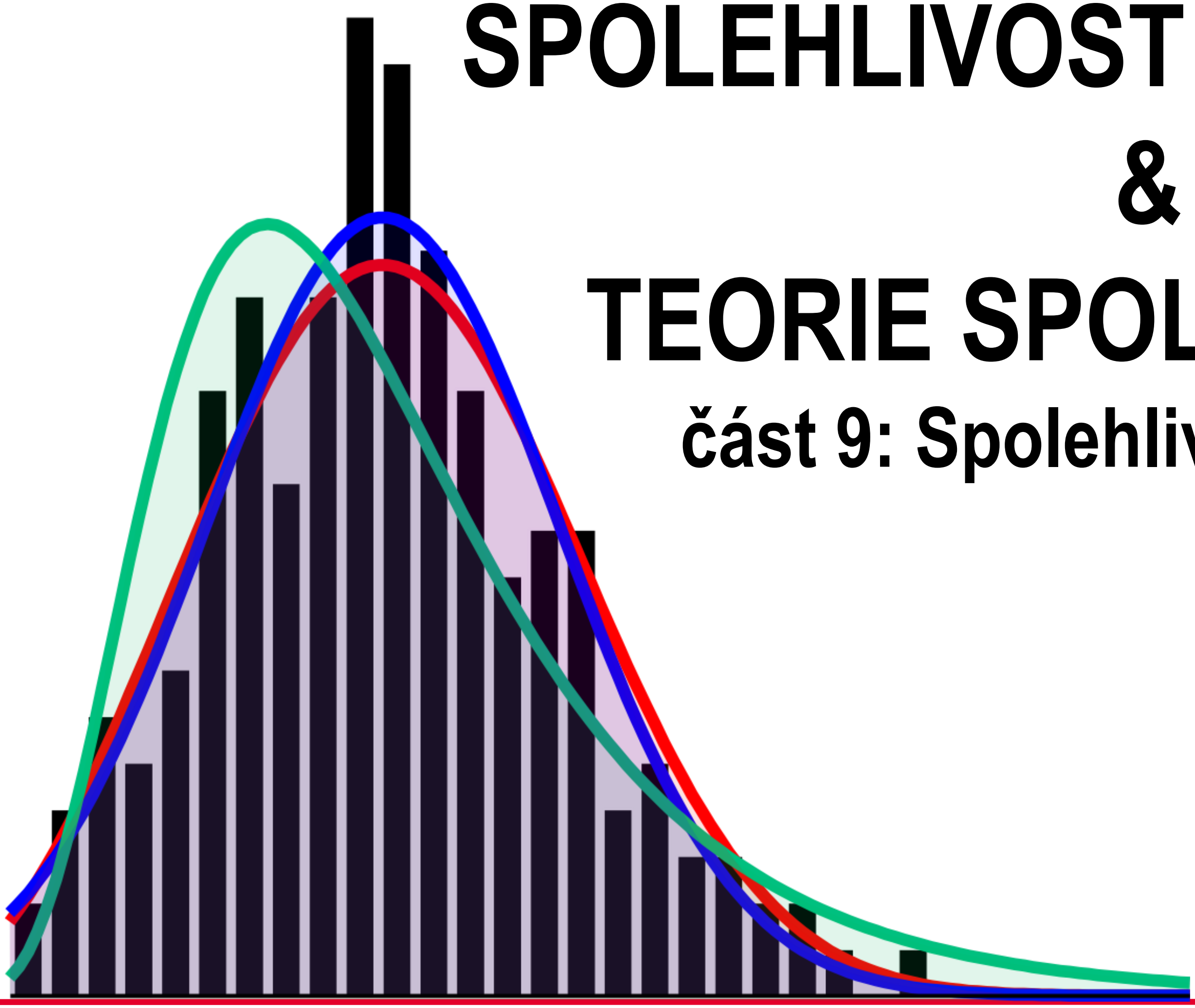


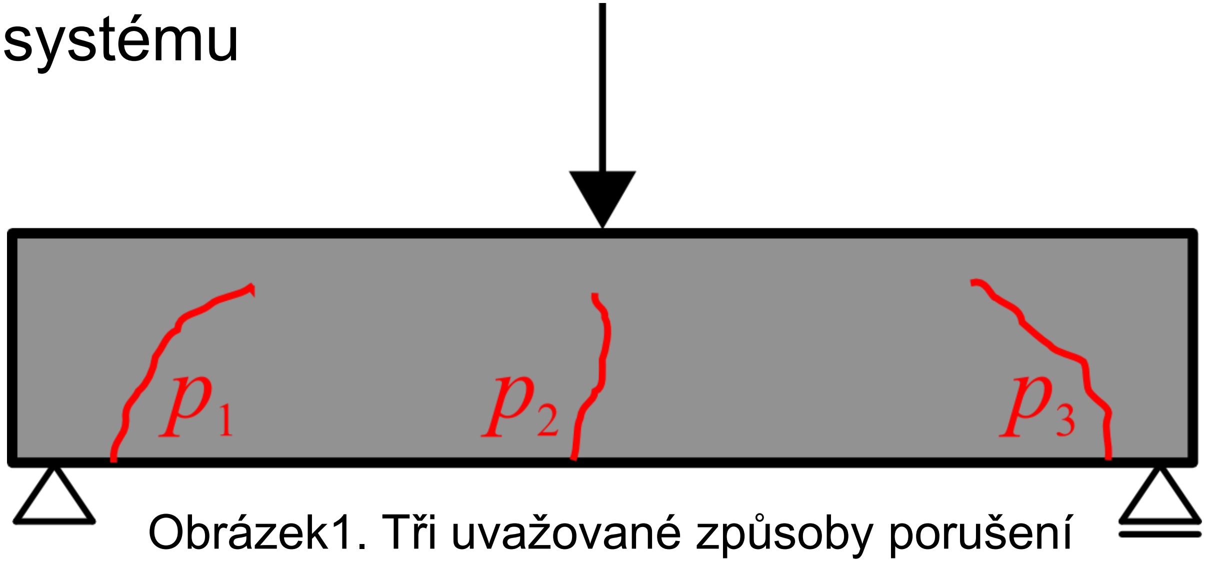
SPOLEHLIVOST KONSTRUKCÍ
&
TEORIE SPOLEHLIVOSTI
část 9: Spolehlivost systémů

Drahomír Novák
Jan Eliáš

čast 9
Spolehlivost systémů

Systém nespolehlivých komponent

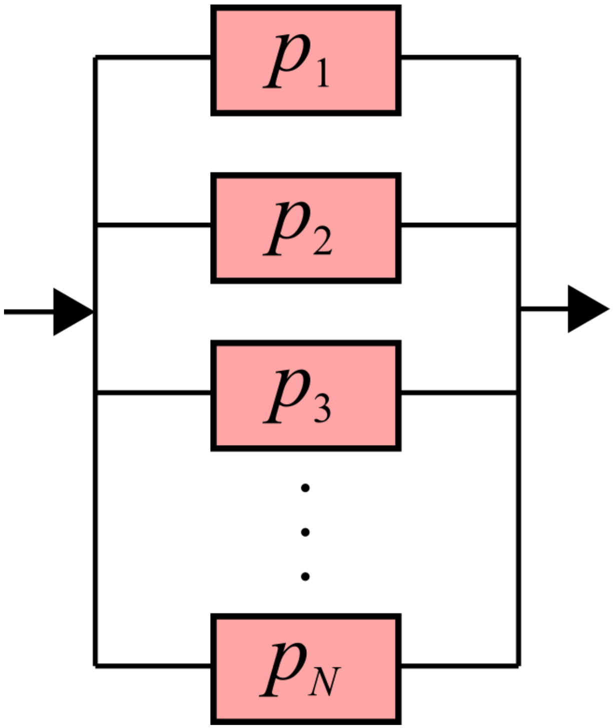
- většinou máme systém komponent, kde každá z nich může selhat
- $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_N$ – rezervy spolehlivosti pro N komponent (mohou být vzájemně závislé či nezávislé)
- $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_N$ – pravděpodobnosti poruchy N komponent
- G, p_f – rezerva spolehlivosti a pravděpodobnost poruchy celého systému



Obrázek1. Tři uvažované způsoby porušení

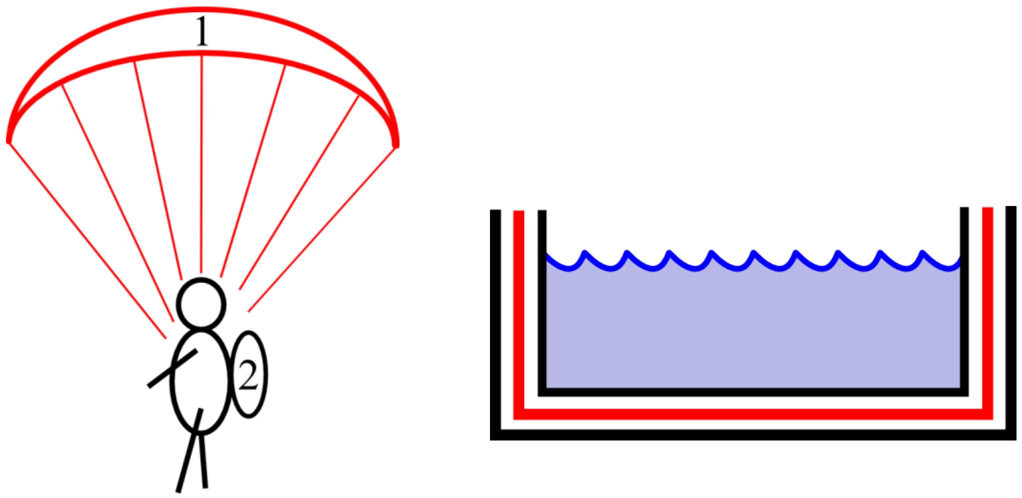
Paralelní systémy

– systém selže pouze když selžou všechny jeho komponenty



Obrázek 2. Schéma paralelního systému

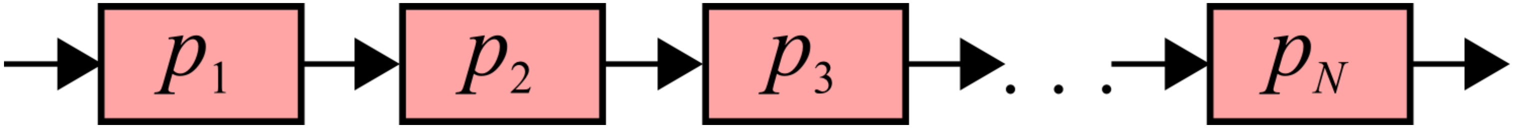
– parašutista s dvěma padáky
– vodní nádrž se záchytnými nádržemi
– staticky neurčité konstrukce



Obrázek 3. Příklady paralelních systémů

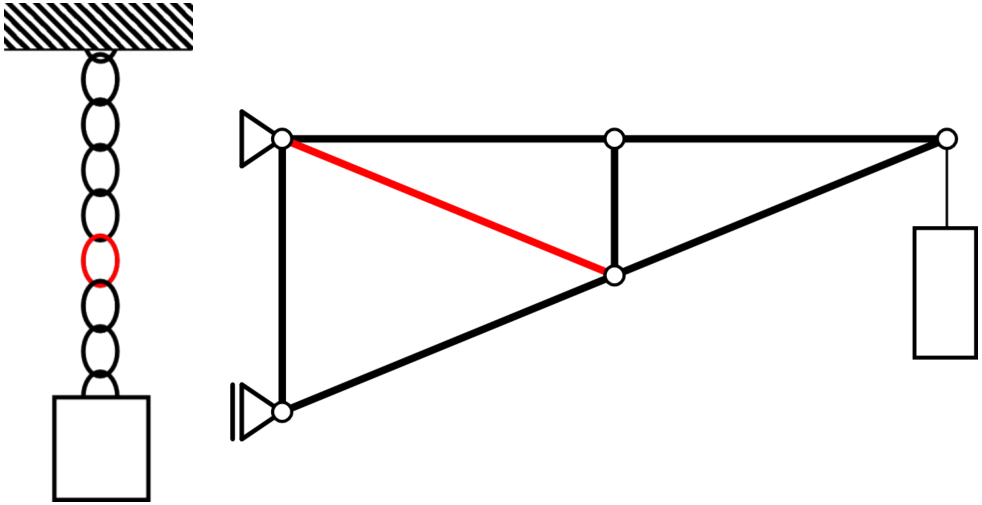
Sériové systémy

– systém selže kdykoliv selže kterákoliv jeho komponenta



Obrázek 4. Schéma sériového systému

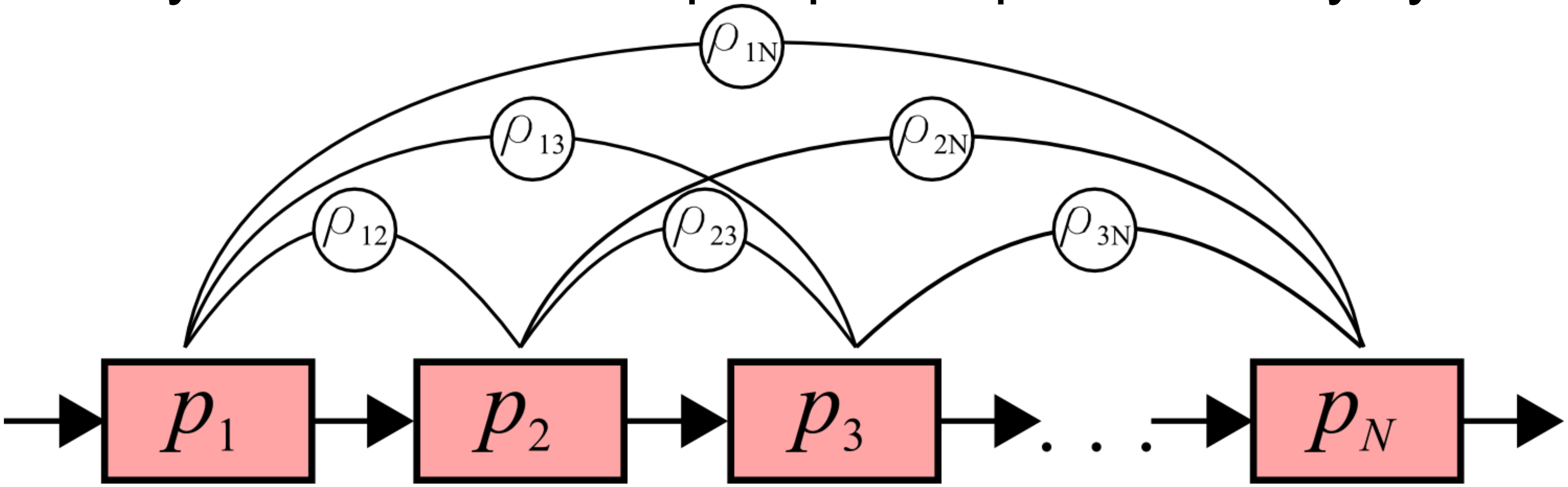
– řetěz v tahu
– staticky určité konstrukce



Obrázek 5. Příklady sériových systémů

Závislé komponenty

- Nezávislý systém má rezervy spolehlivosti svých komponent vzájemně nezávislé
- Pozitivně korelovaný systém má rezervy spolehlivosti svých komponent vzájemně nezávislé nebo pozitivně korelované
- Negativně korelovaný systém má alespoň jeden pár rezerv spolehlivosti svých komponent negativně korelovaný
- analytické řešení dostupné pouze pro nezávislý systém

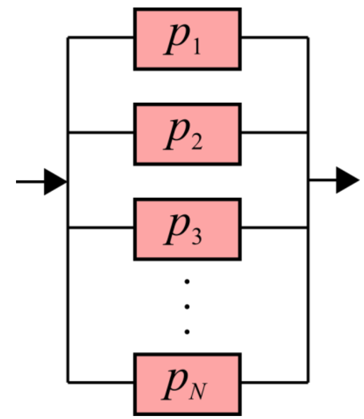


Obrázek 6. Vzájemná korelace

Paralelní systémy

- pravděpodobnost, že všechny nezávislé komponenty selžou je jednoduše

$$\boxed{p_f = \prod_{i=1}^{N} p_i}$$



- pozitivně závislé komponenty jsou horší, protože pokud jedna selže, ostatním se zvyšuje pravděpodobnost selhání

$$p_f \leq \min(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_N)$$

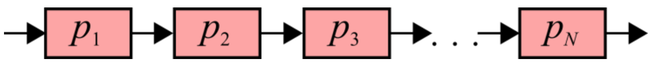
- negativně závislé komponenty jsou lepší, protože pokud jedna selže, ostatním se snižuje pravděpodobnost selhání

$$p_f > 0$$

Sériové systémy

– pravděpodobnost, že všechny nezávislé komponenty vydrží

$$r = \prod_{i=1}^{N} r_i \Rightarrow 1 - p_f = \prod_{i=1}^{N} (1 - p_i)$$



$$\boxed{p_f = 1 - \prod_{i=1}^{N} (1 - p_i)} \approx \sum_{i=1}^{N} p_i$$

pokud jsou všechny p_i malé

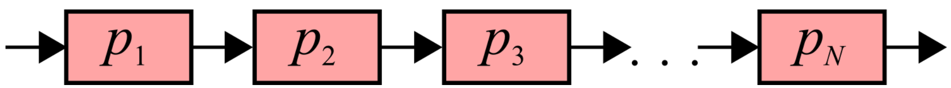
– pozitivně závislé komponenty jsou lepší, protože pokud jedna vydrží, ostatním se zvyšuje pravděpodobnost že vydrží také

$$p_f \geq \max(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_N)$$

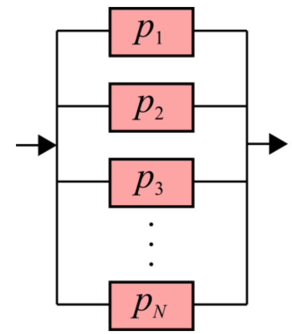
– negativně závislé komponenty jsou horší, protože pokud jedna vydrží, ostatním se zvyšuje pravděpodobnost že selžou

$$p_f < 1$$

Shrnutí



komponenty v sérii



paralelní komponenty

negativní závislost

$$p_f < 1$$

$$p_f = 1 - \prod_{i=1}^{N} (1 - p_i)$$

pozitivní

$$p_f \geq \max_{i=1}^{N}(p_i)$$

pozitivní závislost

$$p_f \leq \min_{i=1}^{N}(p_i)$$

$$p_f = \prod_{i=1}^{N} p_i$$

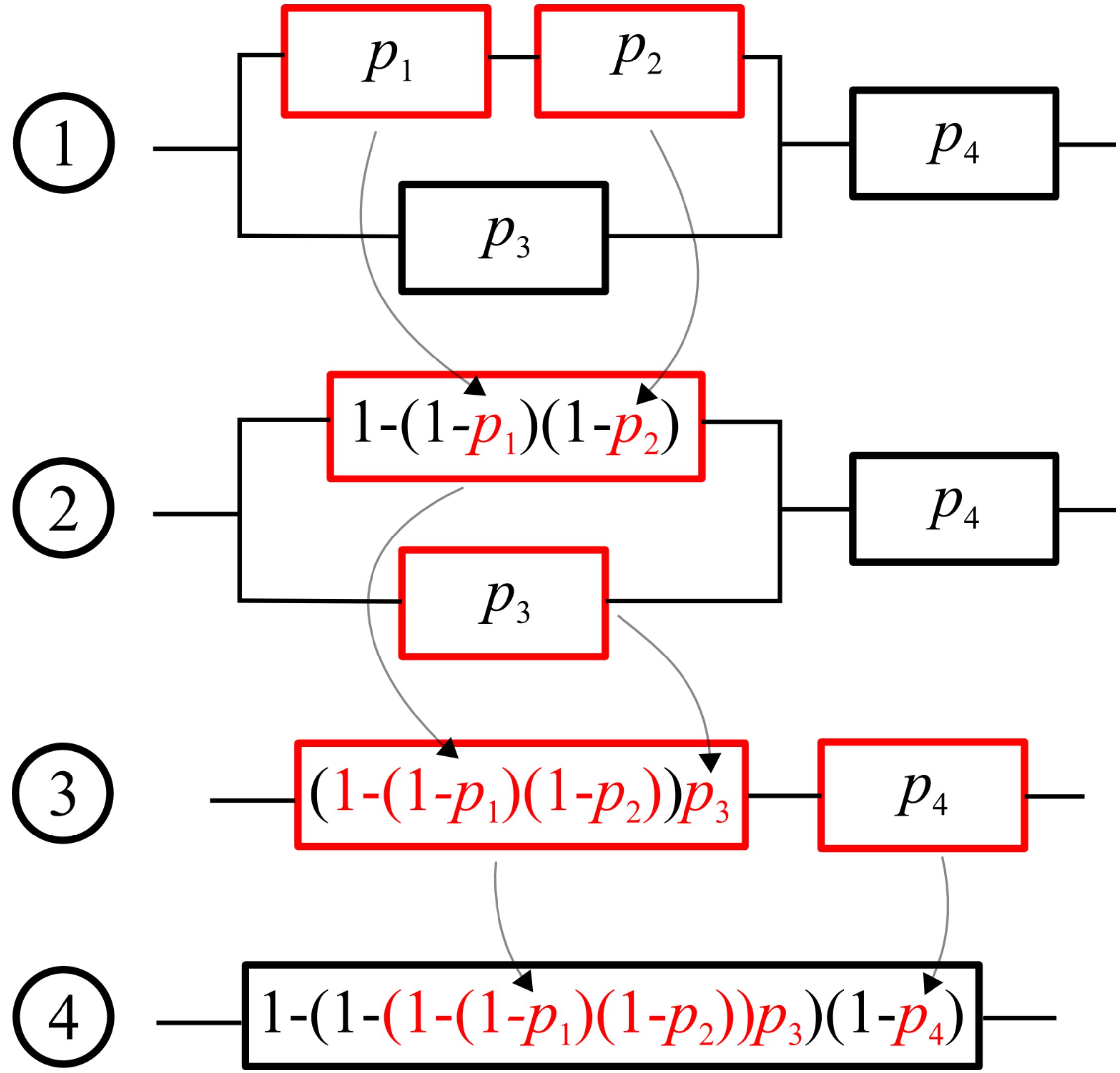
nezávislé

$$p_f > 0$$

negativní

Sériové-paralelní kombinované systémy

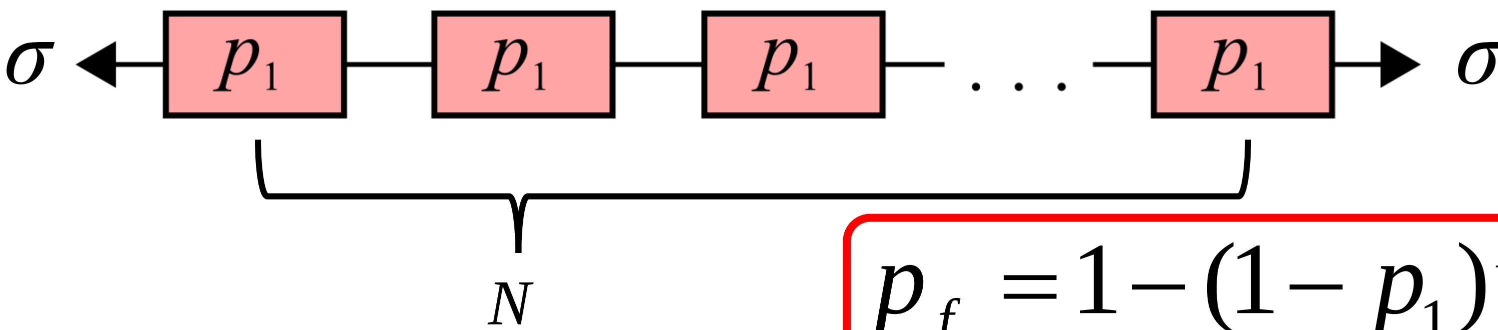
- nejčastější typ systémů
- v případě nezávislosti komponent lze pravděpodobnost poruchy určit redukcí sériových a paralelních částí krok po kroku



Obrázek 7. Nezávislý kombinovaný systém

Weibullova teorie porušení (Weibull 1931)

- řetěz N identických nezávislých komponent pod napětím σ
- pravděpodobnost každé z komponent je p_1



Obrázek 8. Weibullův řetěz

$$\boxed{p_f = 1-(1-p_1)^N}$$

- každá z komponent má Weibullovo rozdělení pevnosti

$$p_1 = F_{\text{strength}}(\sigma) = 1-\exp\left(-\left\langle\frac{\sigma}{s_0}\right\rangle^m\right)$$

pak:

$$\boxed{p_f = 1-\exp\left(-\left\langle\frac{\sigma}{s_0}\right\rangle^m N\right)}$$

Závislost střední hodnoty pevnostu na N

– řetěz má také Weibullovo rozdělení s odlišným param. měřitka

$$p_f = 1 - \exp\left(-\left\langle \frac{\sigma}{s_0} \right\rangle^m N \right) = 1 - \exp\left(-\left\langle \frac{\sigma}{s_1} \right\rangle^m \right), \text{ where } s_1 = \frac{s_0}{\sqrt[m]{N}}$$

– střední hodnota a variační koeficient takového rozdělení

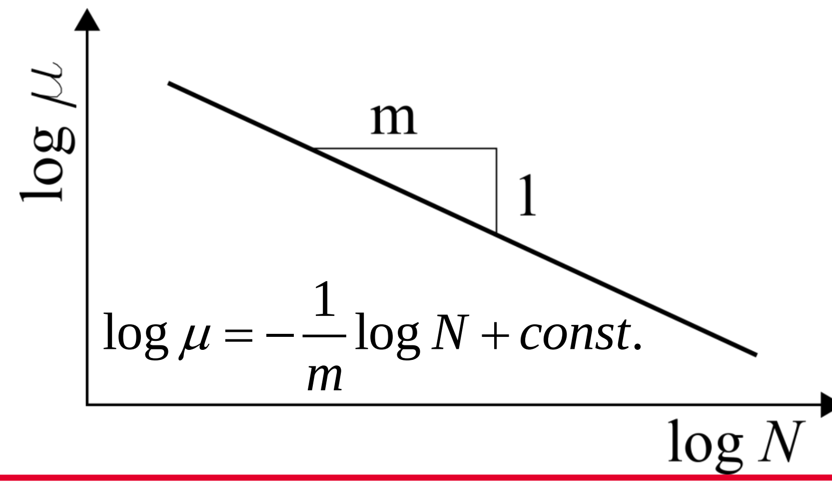
$$\mu = \frac{s_0}{\sqrt[m]{N}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{m} \right), \quad \nu = \sqrt{\frac{\Gamma(1+2/m)}{\Gamma^2(1+1/m)} - 1}$$

nezávislý na N

– střední pevnost závislá na délce řetězu

pokud m=6

N=1	μ=10 MPa
N=10	μ=6.8 MPa
N=100	μ=4.64 MPa
N=1000	μ=3.16 MPa
N=10000	μ=2.15 MPa



Obrázek 9. Weibullův vliv velikosti

Obecný tvar tělesa a zatížení

– těleso z identických nezávislých komponent

– pravděpodobnost poruchy každé z komponent $p_1(\sigma_i)$ závisí na napjatosti komponenty σ_i

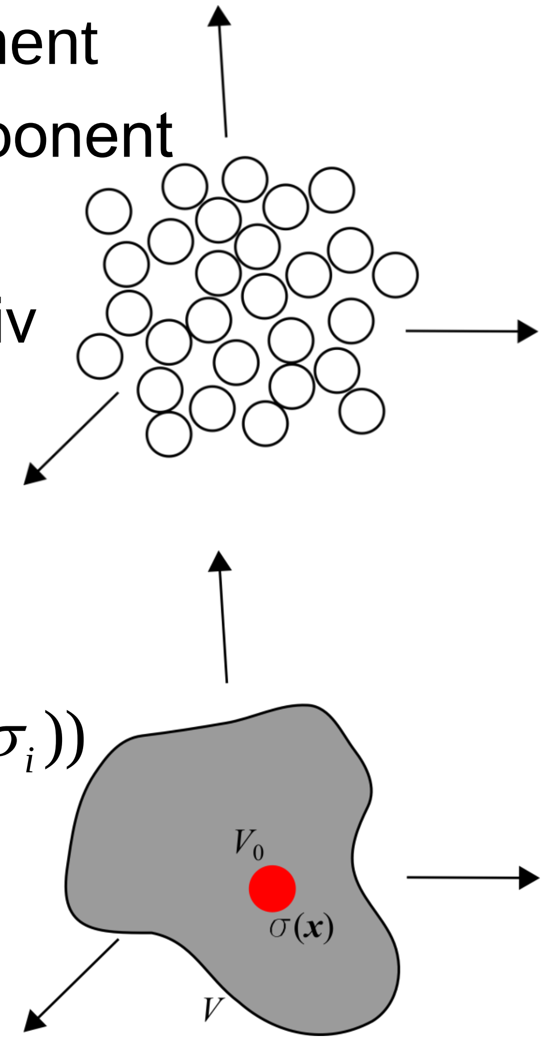
– konstrukce selže kdykoliv selže kterákoliv z komponent

$$1 - p_f = \prod_{i=1}^{N} 1 - p_1(\sigma_i)$$

$$\ln(1 - p_f) = \ln\left(\prod_{i=1}^{N} 1 - p_1(\sigma_i)\right) = \sum_{i=1}^{N} \ln(1 - p_1(\sigma_i))$$

– v limitním případě

$$\ln(1 - p_f) = \int_V \ln(1 - p_1(\bar{\sigma}(\boldsymbol{x}))) \frac{\mathrm{d}V}{V_0}$$



Obrázek10. Obecný tvar tělesa a zatížení

Obecný tvar tělesa a zatížení

- funkce c transformuje tensor napětí na realné číslo

$$\bar{\sigma}(\boldsymbol{x}) = c(\sigma(\boldsymbol{x}))$$

- nejjednodušší forma = nejvyšší hlavní napětí

$$\bar{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \sigma_I(\boldsymbol{x})$$

- pak

$$p_f = 1 - \exp\left[\int_V \ln(1 - p_1(\bar{\sigma}(\boldsymbol{x})))\frac{\mathrm{d}V}{V_0}\right]$$

- předpokládejme, že p_1 má Weibullovo rozdělení

$$p_1(\sigma_I(\boldsymbol{x})) = 1 - \mathrm{e}^{-\left\langle \frac{\sigma_I(\boldsymbol{x})}{s_0} \right\rangle^m}$$

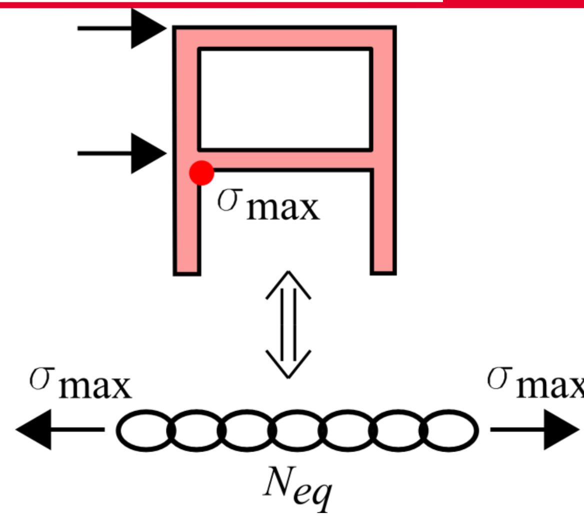
pak

$$\boxed{p_f = 1 - \exp\left[-\int_V \left\langle \frac{\sigma_I(\boldsymbol{x})}{s_0} \right\rangle^m \frac{\mathrm{d}V}{V_0}\right]}$$

Ekvivalence konstrukce a řetězu

– rovnici můžeme přepsat jako

$$p_f = 1 - \exp\left[-\left\langle \frac{\sigma_{\max}}{s_0} \right\rangle^m N_{eq} \right]$$



Obrázek11. Equivalency to chain

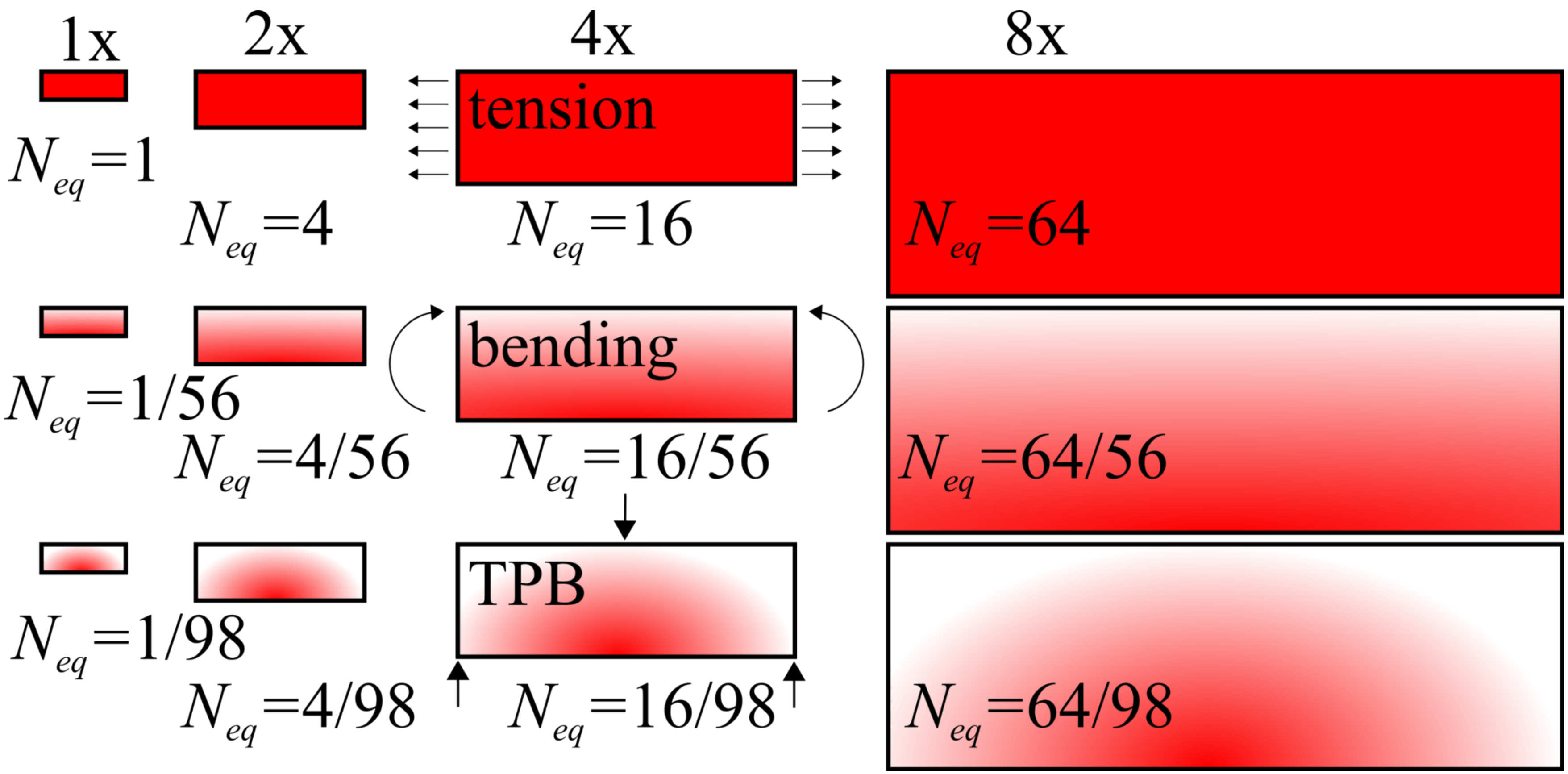
kde $\sigma_{\max}$ je libovolně zvolená kladná konstanta (typicky maximální napětí) a N_{eq} je ekvivalentní počet článků řetězu pod $\sigma_{\max}$

$$N_{eq} = \int_V \left\langle \frac{\sigma_I(\boldsymbol{x})}{\sigma_{\max}} \right\rangle^m \frac{\mathrm{d}V}{V_0}$$

– každá konstrukce je (z pravděpodobnostního hlediska) ekvivalentní řetězu o délce N_{eq} pod napětím $\sigma_{\max}$

Příklad ekvivalentní délky řetězu

– maximální napětí je ve všech konstrukcích stejné, m=6



Obrázek 12. Ekvivalentní délky řetězu pro různá namáhání

Komentář k Weibullově teorii

- předpoklady neplatí pro železobetonové konstrukce
  - konstrukce nejsou křehké – lokální porucha nevede k poruše celé konstrukce, protože napětí je přerozděleno výztužnými tyčemi (nejedná se o sériový systém)
  - pevnost materiálu v jednotlivých bodech není nezávislá - ale spíše pozitivně korelovaná s vyšší korelací pro body, které jsou si blíže a s nižší korelací pro vzájemně vzdálenější body
  - skutečná pevnost materiálu má pravděpodobně Weibullovo rozdě-lení pouze na levém ocase, zbytek rozdělení by měl být Normální
- jak pracují normy s Weibullovým vlivem velikosti?
  - Pro větší konstrukce je většinou požadován vyšší stupeň bezpečnosti. Navíc, přeceněný součinitel vlastní tíhy má výraznější vliv u velkých konstrukcí.
- jak pracují se závislostí p_f na napjatosti v tělese?
  - Nijak, pracují jen s maximálním napětím $\sigma_{\max}$.