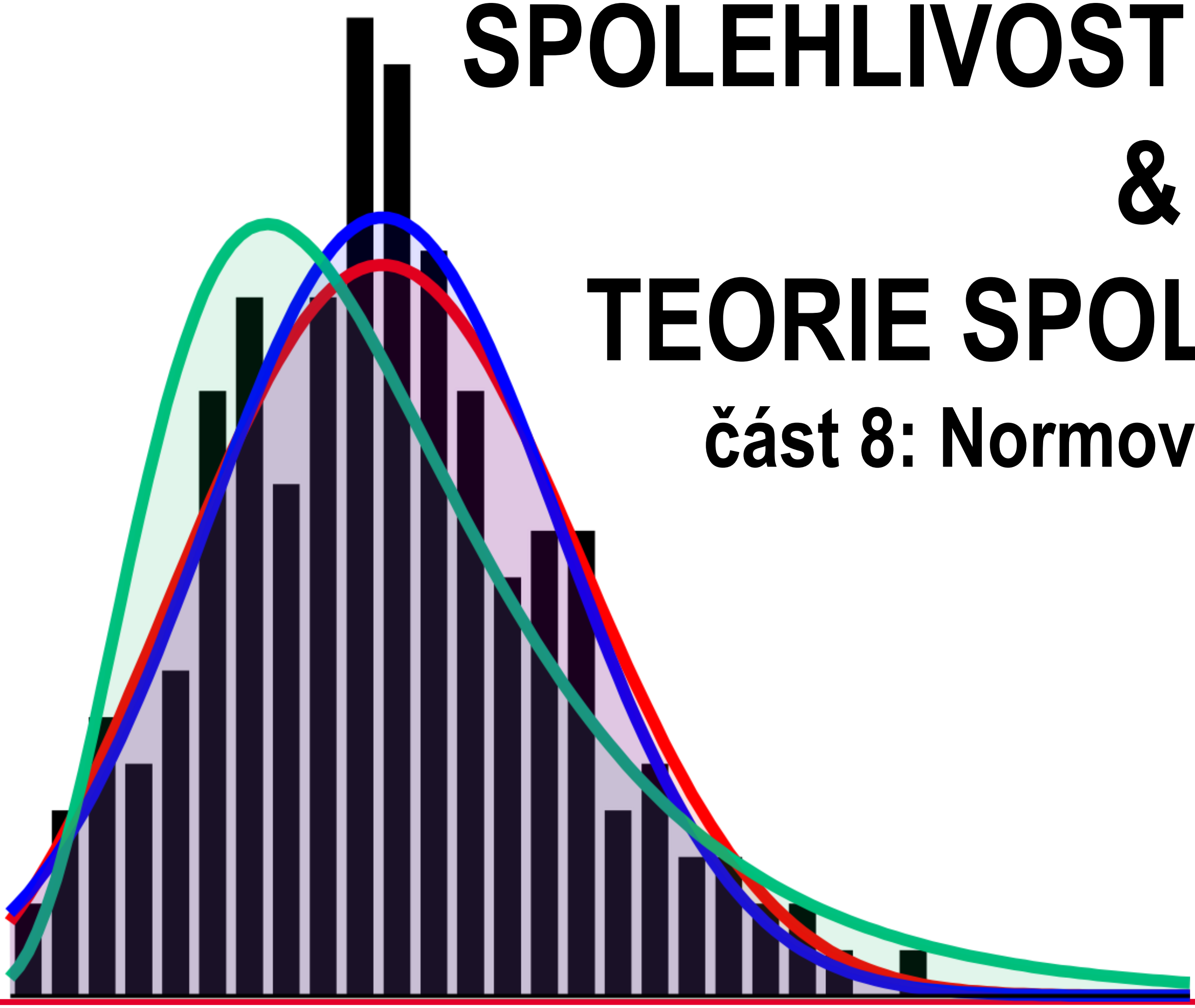


SPOLEHLIVOST KONSTRUKCÍ
&
TEORIE SPOLEHLIVOSTI
část 8: Normové předpisy II

Drahomír Novák
Jan Eliáš
Lukáš Novák

část 8

Normové předpisy II

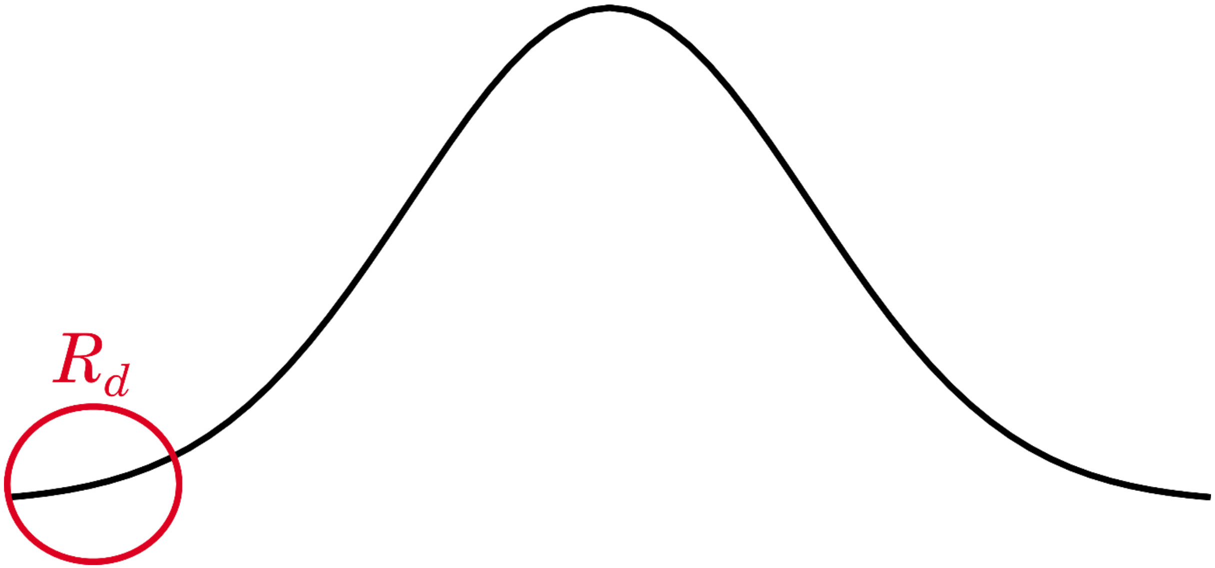
Čtyři úrovně spolehlivostních metod

- I. úroveň (EUROKÓDY)
  - každá základní veličina vstupuje do výpočtu pouze jedinou (návrhovou) hodnotou
- II. Úroveň (POLO-PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODY)
  - každá základní veličina je zde popsána dvěma statistickými parametry (obvykle střední hodnotou a směrodatnou odchylkou)
- III. úroveň (PLNĚ PRAVDĚPODOBNOSTNÍ PŘÍSTUP)
  - všechny základní veličiny jsou popsány vhodným teoretickým modelem rozdělení pravděpodobnosti
- IV. Optimalizace nákladů a spolehlivosti (Cost-Risk analysis)
  - uvažuje navíc ekonomickou stránku problému

Čtyři úrovně spolehlivostních metod

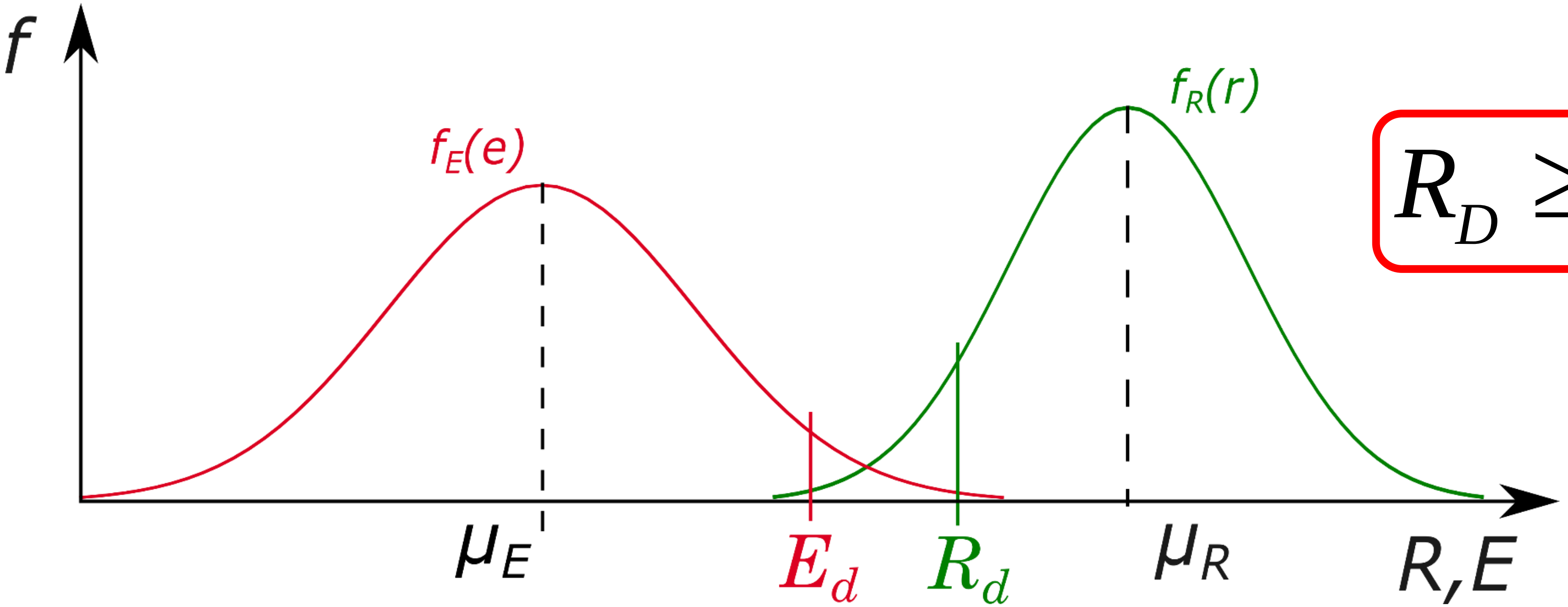
- I. úroveň (EUROKÓDY)
  - každá základní veličina vstupuje do výpočtu pouze jedinou (návrhovou) hodnotou
- II. Úroveň (POLO-PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODY)
  - každá základní veličina je zde popsána dvěma statistickými parametry (obvykle střední hodnotou a směrodatnou odchylkou)
- III. úroveň (PLNĚ PRAVDĚPODOBNOSTNÍ PŘÍSTUP)
  - všechny základní veličiny jsou popsány vhodným teoretickým modelem rozdělení pravděpodobnosti
- IV. Optimalizace nákladů a spolehlivosti (Cost-Risk analysis)
  - uvažuje navíc ekonomickou stránku problému

I. úroveň - Eurokód



Spolehlivostní pozadí

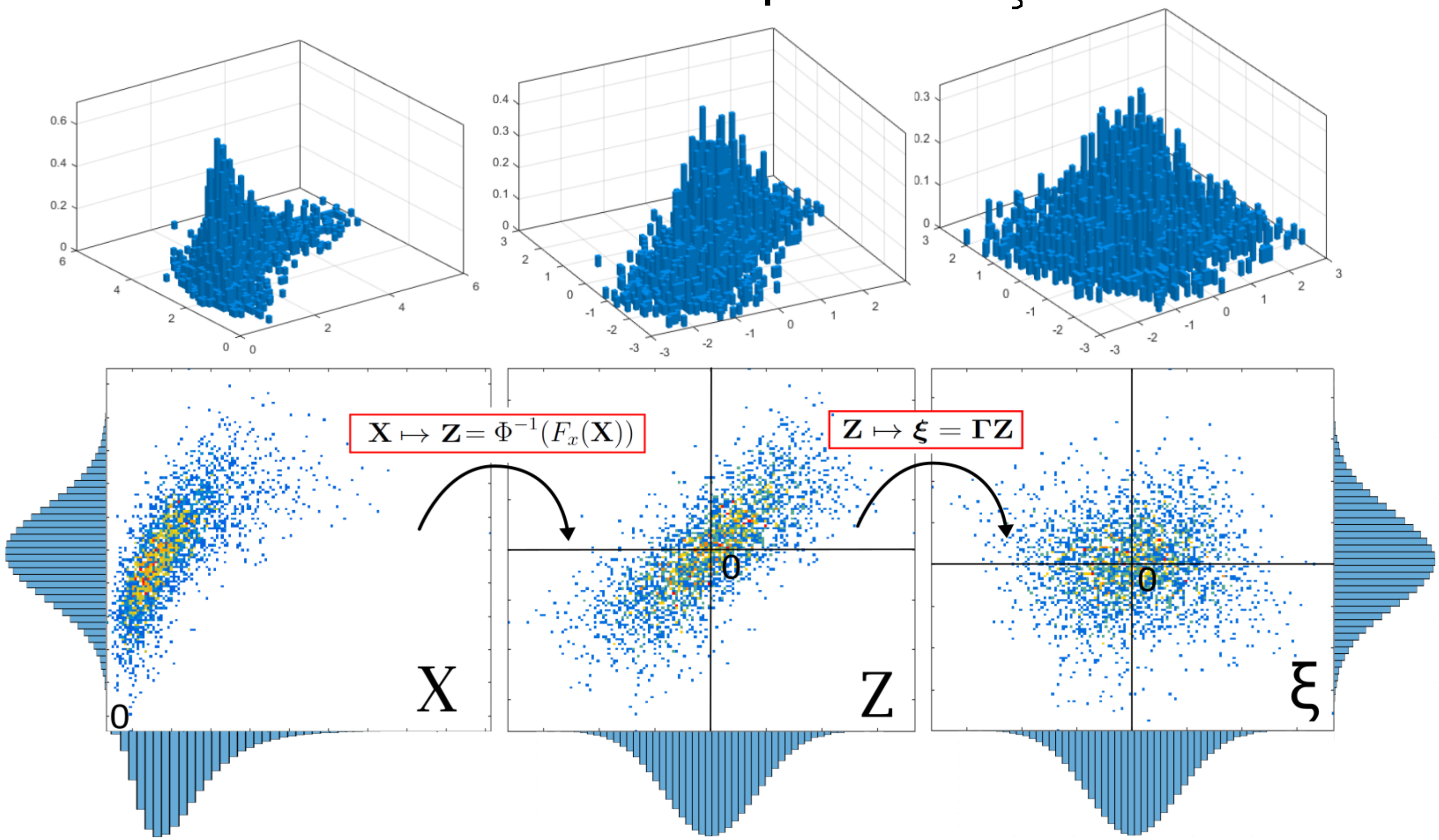
- odolnost R a účinky zatížení E jsou dvě náhodné veličiny
- návrhová odolnost R_D: fce návrhové pevnosti atd.
- návrhové účinky zatížení E_D : fce návrhových zatížení atd.
- dílčí součinitelé bezpečnosti odvozeny na základě FORM



$$\boxed{R_D \geq E_D}$$

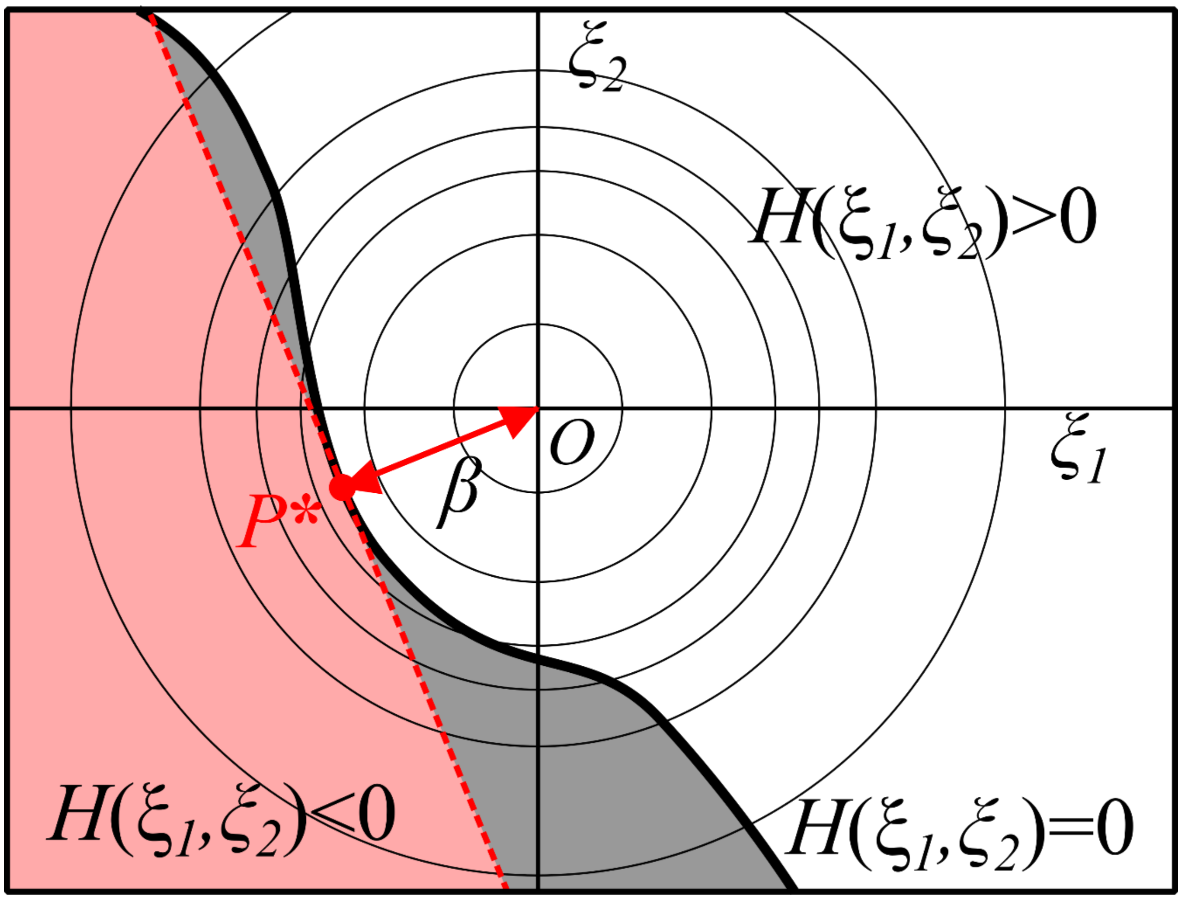
First Order Reliability Method

1. Transformace náhodných veličiny do standardního normálního nekorelovaného prostoru ξ



First Order Reliability Method

2. Linearizace v návrhovém bodě ***P**** (Taylorův rozvoj)



First Order Reliability Method

2. Linearizace v návrhovém bodě ***P****** (Taylorův rozvoj)

$$g(\boldsymbol{\xi}) = Z = g(P^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} (\xi_i - P_i^*)$$

$$g(P^*) = 0 \rightarrow \boxed{Z = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} \xi_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} P_i^*}$$

First Order Reliability Method

3. Nejkratší vzdálenost k počátku soustavy souřadnic β

Hessova forma (hyper)plochy:
$$\frac{a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_0}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = 0$$

Vzdálenost k počátku soustavy:
$$\beta = \left| \frac{a_0}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right|$$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} \xi_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} P_i^* \rightarrow \boxed{\beta = \frac{-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} P_i^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} \right]^2}}}$$

Citlivostní součinitele FORM

Směrové kosiny jako citlivostní součinitele vstupních veličin

Hessova forma (hyper)plochy:
$$\frac{a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_0}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = 0$$

Směrové kosiny:
$$\alpha_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}} \qquad \alpha_2 = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} \xi_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} P_i^* \rightarrow \boxed{\alpha_i = \frac{\dfrac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[\dfrac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} \right]^2}}}$$

Zobecnění FORM pro funkce R a E

$$\boxed{g(\mathbf{X}) = g_R(R_1,\ldots,R_i,\ldots,R_m) - g_E(E_1,\ldots,E_j,\ldots,E_n)}$$

- Za předpokladu nezávislých veličin lze odvodit směrové kosiny pro *R* a *E*:

$$\alpha_{R_i} = \frac{\dfrac{\partial g_R(r^*)}{\partial R_i}\sigma_{R_i}}{\sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\left(\dfrac{\partial g_R(r^*)}{\partial R_i}\sigma_{R_i}\right)^2}_{\sigma_R^{*\,2}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial g_E(e^*)}{\partial E_j}\sigma_{E_j}\right)^2}_{\sigma_E^{*\,2}}}}$$

Zobecnění FORM pro funkce R a E

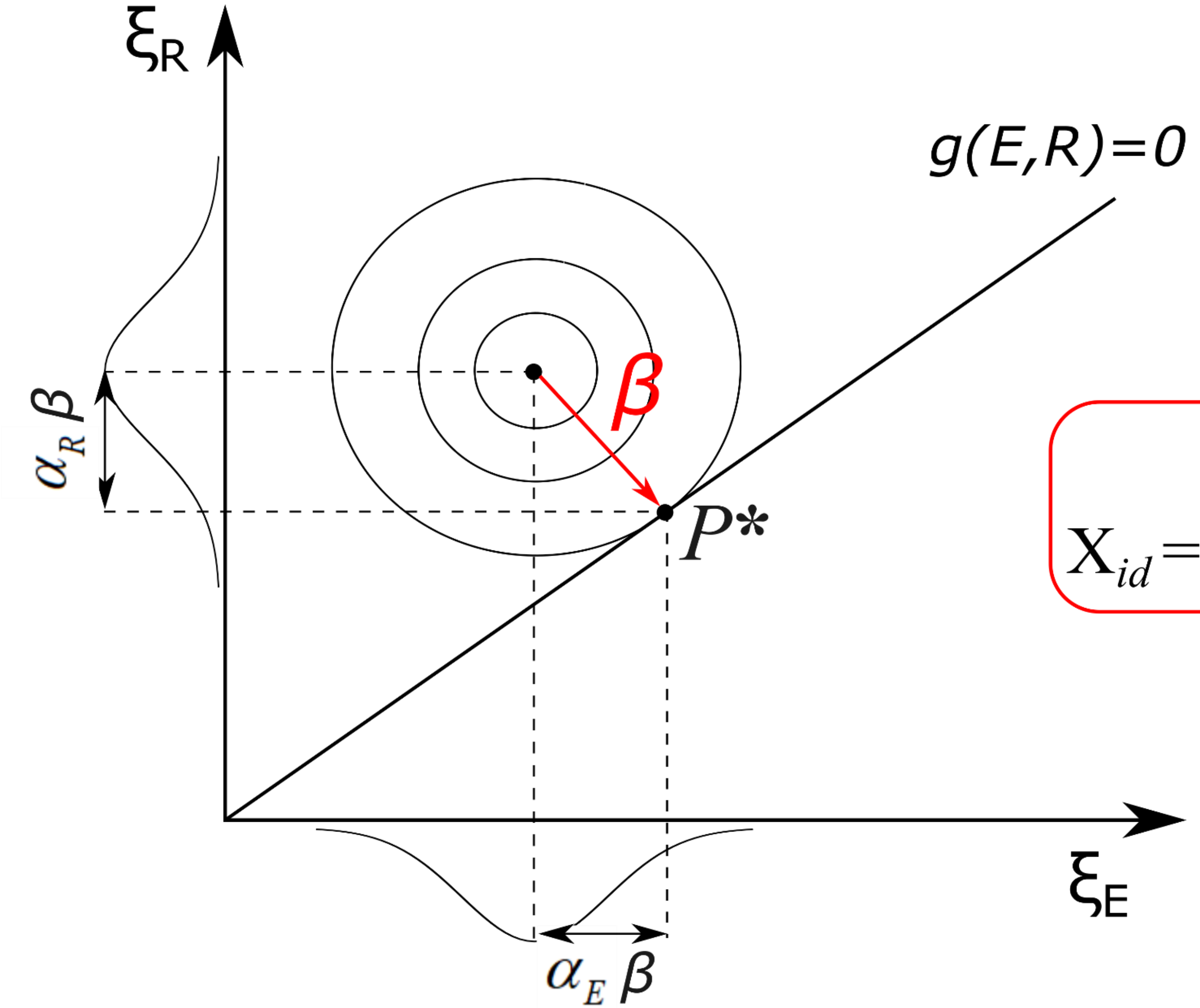
- **Vliv veličiny *R_i* na variabilitu funkce odolnosti**

$$\alpha_{R_i} = \boxed{\frac{\sigma_R^*}{\sqrt{\sigma_R^{*2} + \sigma_E^{*2}}}} \cdot \boxed{\frac{\dfrac{\partial g_R(r^*)}{\partial R_i}\sigma_{R_i}}{\sigma_R^*}} = \alpha_R \cdot \alpha_{R_i}$$

- **Vliv odolnosti *R* konstrukce na celkovou variabilitu**

- Stejný postup vede na: $\alpha_{E_i} = \alpha_E \cdot \alpha_{E_i}$

Grafické znázornění FORM



$$P_i^* = -\alpha_i \beta$$

$$X_{id} = F_i^{-1}[\Phi(-\alpha_i \beta)]$$

FORM a Eurocode

- Návrhový bod je určen souřadnicemi v ξ:

$$P_i^* = -\alpha_i \beta$$

- V Eurocode byly statisticky stanoveny obecné hodnoty:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_R &= 0.8 \\ \alpha_E &= -0.7 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \alpha_{R_1} &= \alpha_{E_1} = 1.0 \\ \alpha_{R_i} &= \alpha_{E_j} = 0.4 \end{aligned}}$$

- Dle EN 1990 použitelné v hranicích:

$$0.15 < \frac{\sigma_E}{\sigma_R} < 7.6$$

Návrhová hod. materiálových vlastností

$$X_d = \eta X_k / \gamma_M$$

- γ_M je dílčí součinitel spolehlivosti materiálu nebo výrobku daný v EN 1992 až 1999; obsahuje nejistotu materiálu i modelové nejistoty

$$\gamma_M = \gamma_m \gamma_{Rd}$$

- η převodní součinitel vystihující účinek doby trvání zatížení, vliv objemu a rozměrů, účinky vlhkosti, teploty aj.
- X_k je charakteristická hodnota stanovená jako 5% kvantil
- X_d je kvantil odpovídající bezpečnostním požadavkům

Podstata návrhových hodnot dle EC

- odhad návrhové hodnoty materiálových vlastností X_d na základě EN 1990 příloha D „Navrhování pomocí zkoušek“
- odhad kvantilu za předpokladu Lognormální rozdělení

$$X_{id} = \mu_X \exp\left(-\alpha_{R_i}\beta\frac{\sigma_X}{\mu_X}\right)$$

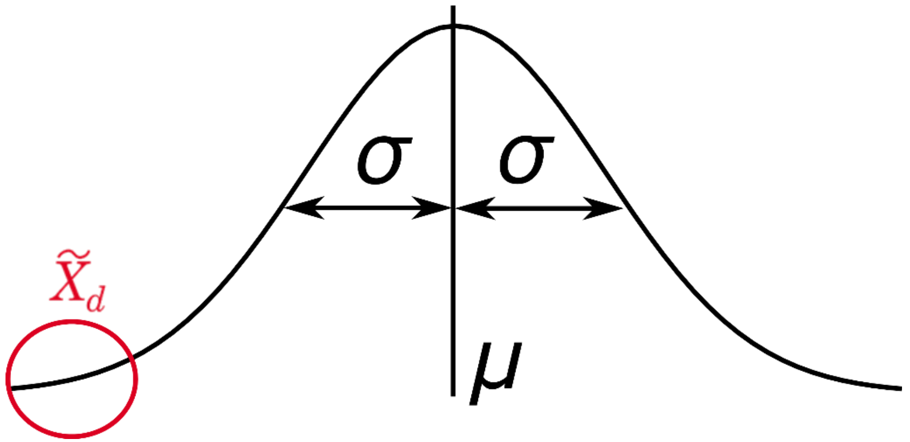
- odhad rozptylu

$$\sigma_X^2 \approx \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2$$

- odhad střední hodnoty

$$\mu_X \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

- FORM $\rightarrow \alpha_R = 0.8$



Cílová spolehlivost podle EC 1

Tabulka 1. EuroCode cílové pravděpodobnosti poruchy – mezní stavy únosnosti

následky	jeden rok	životnost
RC3 (velké)	5.2 1.0×10^{-7}	4.3 8.5×10^{-6}
RC2 (střední)	4.7 1.3×10^{-6}	3.8 7.2×10^{-5}
RC1 (malé)	4.2 1.3×10^{-5}	3.3 4.8×10^{-4}

$$\frac{\beta_{\text{lim}}}{p_{\text{lim}}}$$

Tabulka 2. EuroCode cílové pravděpodobnosti poruchy – mezní stavy použitelnosti

následky	jeden rok	životnost
RC2 (střední)	2.9 0.00187	1.5 0.0668

Stanovení návrhových hodnot materiálových vlastností

– dle EN 1990 úprava kvantilu $\alpha_R \beta$ dle počtu provedených zkoušek materiálu (nejistota odhadu statistických momentů)
– nutno zahrnout nejistoty modelu odolnosti konstrukce

$$X_d = \frac{X_d}{\gamma_{Rd}} \qquad \gamma_M = \frac{X_k}{X_d}$$

Dílčí součinitele bezpečnosti materiálu jsou odvozeny pomocí teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Jejich úprava je možná pomocí laboratorních zkoušek a měření.

Odvození dílčích součinitelů v EN

– $\alpha_R = 0.8 \quad \beta = 3.8$

– $V_X = \sqrt{V_m^{\,2} + V_G^{\,2} + V_f^{\,2}}$

$$X_d = \mu_X \exp\left(-\alpha_{R_i} \beta V_X\right)$$
$$X_k = \mu_X \exp\left(-1.64 V_f\right)$$

– CoV modelových nejistot V_m
– CoV geometrických nejistot V_G
– CoV materiálových nejistot V_f

Materiál	V_m	V_G	V_f	V_X
Beton	0.05	0.05	0.15	**0.166**

$$\gamma_M = X_k / X_D = \exp\left(-1.64 \cdot 0.15 + 0.8 \cdot 3.8 \cdot 0.166\right) = 1.3$$

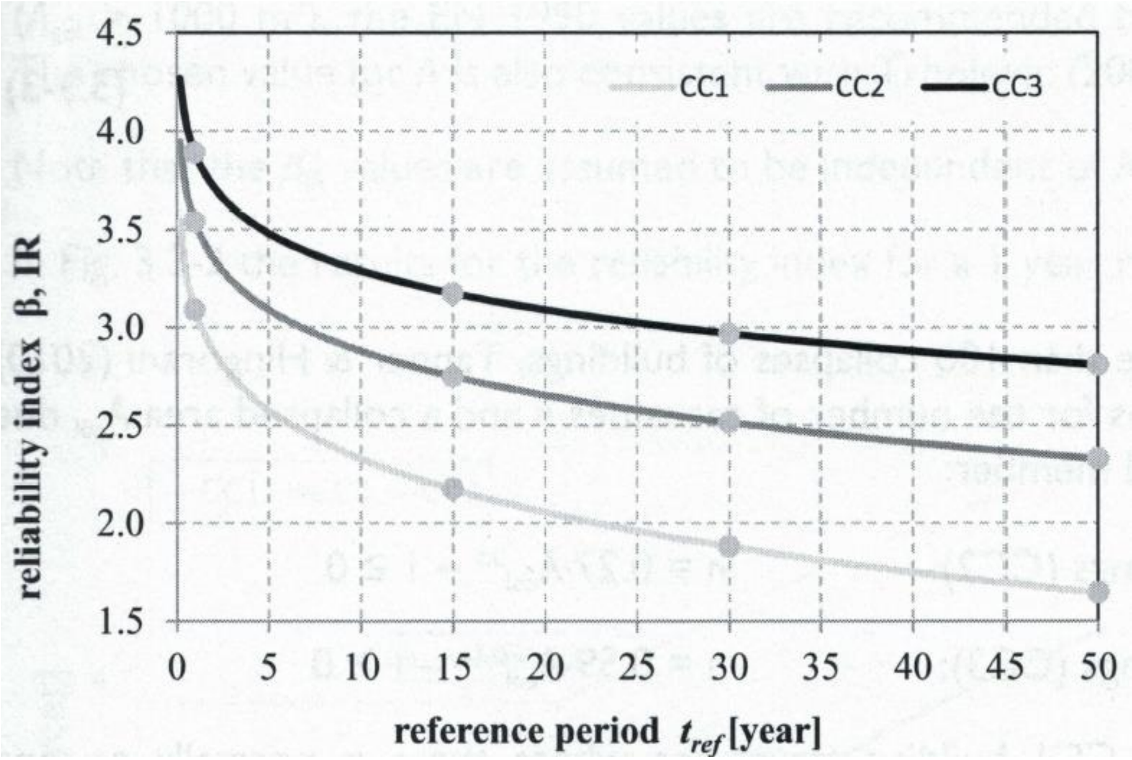
$$\eta = 1.15 \rightarrow \gamma_C = \gamma_M \cdot \eta = 1.3 \cdot 1.15 \approx \underline{\underline{1.5}}$$

Návrhová životnost konstrukcí a dílčí součinitelé bezpečnosti

- ISO 2394, JCSS: PMC 2001
- stejný princip, jen upravit cílový index spolehlivosti
- Fib Bulletin 80:
  - **Bezpečnost** osob
  - Ekonomické následky

$$X_d = \mu_X \exp\left(-\alpha_{R_i} \beta \frac{\sigma_X}{\mu_X}\right)$$

$$\beta_t = \Phi^{-1}\left\{\Phi\left(\beta_{annual}\right)^t\right\}$$



[Převzato z *fib* Bulletin 80]

Dílčí součinitelé pro existující kce

- Fib Bulletin 80: „Partial factor methods for existing concrete structures“; ISO 2394
  - úprava cílového indexu spolehlivosti
  - úprava statistických parametrů
  - úprava součinitele modelových nejistot (geometrické nejistoty)
    - běžně: $\gamma_{Rd2} = 1.05$
    - důkladné měření: $\gamma_{Rd2} = 1.00$

$$X_d = \mu_X \exp\left(-\alpha_R \beta \frac{\sigma_X}{\mu_X}\right)$$

$$X_d = \frac{X_d}{\gamma_{Rd}}$$

$$\gamma_{Rd} = \frac{1}{1 - \alpha_R \beta V_{\theta R}}$$

$$\gamma_{Rd} = \underbrace{\gamma_{Rd1}}_{\text{nejistoty modelu}} \underbrace{\gamma_{Rd2}}_{\text{nejistoty geometrie}}$$

Dílčí součinitelé pro existující kce

- Statistické momenty jednotlivých veličin a modelových nejistot v souladu s Eurocode lze nalézt např. ve fib Bulletin 80, JCSS: PCM 2001

[Převzato z *fib* Bulletin 80]

Variable	Notation	Type	μ_X / X_k	V_X
Load effects				
Self-weight of *in situ* concrete	g_{sw}	N	1.00	0.04
Other permanent actions	g_{pa}	N	1.00	0.10
Imposed floor loads (sum of sustained and transient loads)	q_{imp}	Gumbel	0.68	0.26
Model uncertainties for load effect calculations:				
– bending moments	$\theta_{E,M}$	LN	1.00	0.10
– axial forces	$\theta_{E,N}$	LN	1.00	0.05
– shear forces	$\theta_{E,V}$	LN	1.00	0.10
Resistance variables				
Concrete compressive strength	f_c	LN	1.24	0.18
Yield strength of reinforcing steel	f_{ys}	LN	1.12	0.053
Area of reinforcing steel	A_s, A_{sw}	N	1.00	0.02
External dimensions of RC cross-sections	a, b, h, b_w	N	1.00	0.03
Effective depth	d	N	1.00	0.04
Resistance model uncertainties:				
– Bending moments	$\theta_{R,M}$	LN	1.00	0.05
– Axial compression	$\theta_{R,N}$	LN	1.00	0.05
– Tensile force in the web	$\theta_{R,Vs}$	LN	1.00	0.05
– Diagonal compression in the web	$\theta_{R,Vc}$	LN	1.40	0.25

Úprava součinitelů pro účinky zatížení

- stejná podstata jako u odolnosti konstrukce
- proměnná zatížení zpravidla stejná (žádné nebo neprůkazné doplňující statistické informace)
- dílčí součinitele pro stálé zatížení lze upravit na základě získaných informací (měření)

$$\boxed{\gamma_G = \gamma_{Ed,G}\gamma_g}$$

nejistoty modelu   nejistoty účinků zatížení

- úprava součinitele modelových nejistot:
  - příznivé účinky: $\gamma_{Ed,G} = 1.00$
  - nepříznivé účinky: $\gamma_{Ed,G} = 1.07$

$$\gamma_{Ed} = \left(\frac{\mu_{\theta E}}{\theta_{Ek}}\right)\exp(-\alpha_E \beta V_{\theta E})$$

Úprava součinitelů pro účinky zatížení

- úprava součinitele nejistot účinků zatížení:
  - předpoklad Normálního rozdělení
  - střední hodnota a variabilita z přesného měření

$$\boxed{\gamma_g = \mu_G (1 - \alpha_E \beta V_G)}$$

- příznivé účinky: $\alpha_E = 0.32$
- nepříznivé účinky: $\alpha_E = -0.7$

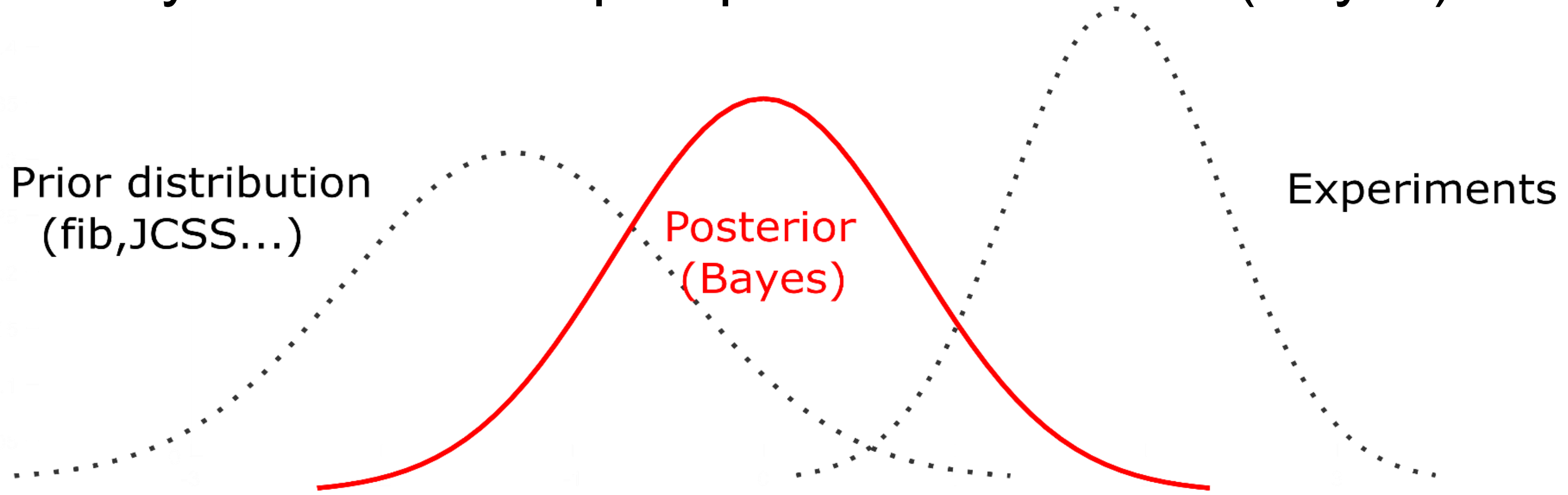
Odhad statistických parametrů

1. Využití tabulek dle Eurocode, JCSS: PMC 2001, Fib Model Code

2. Laboratorní zkoušky a bodové odhady μ a σ^2

$$\mu_X \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \sigma_X^2 \approx \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_X)^2$$

3. Využití měření a předpokladu rozdělení (Bayes)



Globální součinitel bezpečnosti

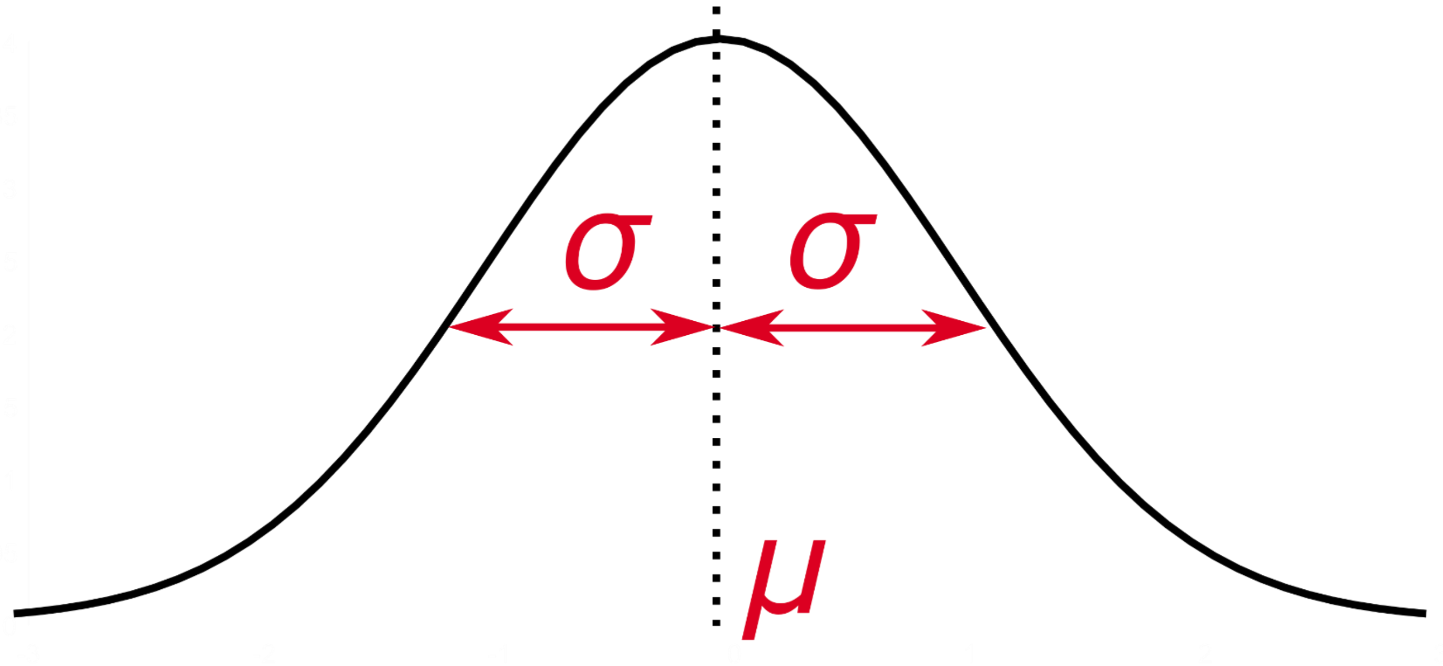
- dle EN 1992-2 lze v kombinaci s NLMKP využít metodu globálního součinitele bezpečnosti

$$\boxed{R_d \neq R(X_d)}$$

- numerická simulace NLMKP využívá střední hodnoty materiálových vlastností výztuže a redukované hodnoty parametrů betonu (zohlednění vyšší variability betonu)
- globální součinitel bezpečnosti je stanoven na 1.27

$$\boxed{R_d = \frac{R(f_{ym}, \tilde{f}_{cm}, \ldots)}{\gamma_R}} \qquad \tilde{f}_{cm} = \gamma_s 1.1 \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \approx 0.85 f_{ck}$$

II. úroveň – Polo-pravděpodobnostní metody

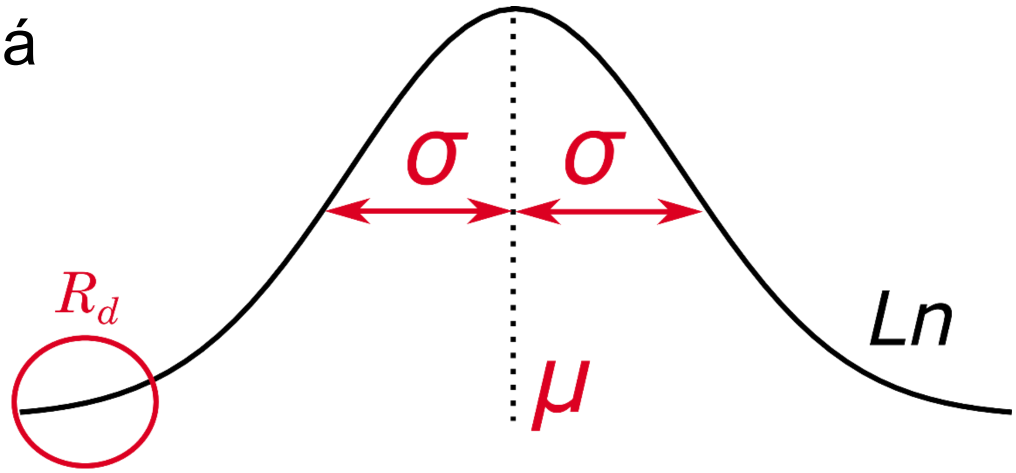


Polo-pravděpodobnostní metody

- Alternativní metody dle odborné literatury (fib Model Code 2010, JCSS: Probabilistic model code 2001) pro odhad statistických momentů rozdělení odolnosti konstrukce R
- Předpoklad Lognormálního rozdělení
- Často v kombinaci s metodou konečných prvků
- Návrhová hodnota odolnosti konstrukce poté odpovídá kvantilu:

$$R_d = \mu_R \exp\left(-\alpha_R \beta V_R\right)$$

$$V_R = \sqrt{{V_m}^2 + {V_G}^2 + {V_f}^2}$$



Odhad variačního koeficientu (ECoV)

Střední hodnota

–obecně např. pomocí MC (LHS)

$$\mu_R \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$$

- – velké množství realizací
- \+ konvergence ke správnému řešení

–Taylorův rozvoj (první členy)

$$\mu_R \approx R(\mathbf{X}_m)$$

- – problém u nelineárních funkcí
- \+ pouze jeden výpočet s středními hodnotami

–Numerická kvadratura (např. Rosenblueth)

- – závislost na počtu vstupních NV
- \+ redukce počtu realizací

Odhad variačního koeficientu (ECoV)

Rozptyl

– obecně např. pomocí MC (LHS)

- – velké množství realizací
- \+ konvergence ke správnému řešení

$$\sigma_R^2 \approx \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \mu_R)^2$$

– Taylorův rozvoj (první členy) (Schlune)

- – problém u nelineárních funkcí
- \+ n výpočtů (MKP); vhodné pro ± lin. fce.

$$\sigma_R^2 \approx \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial r(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2$$

– Využití odhadu 5% kvantilu (Červenka)

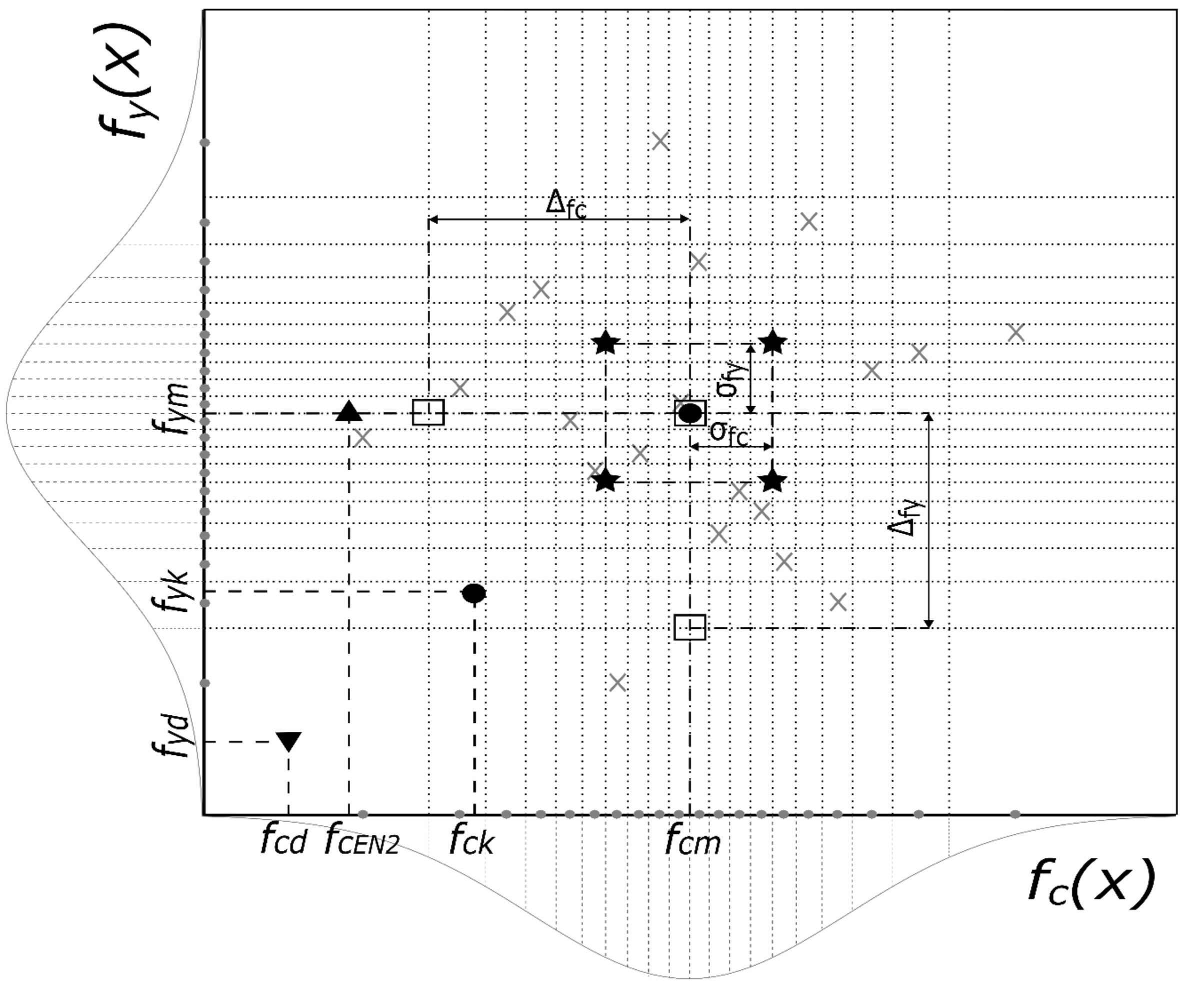
- – velice silný předpoklad
- \+ pouze dvě simulace

$$V \approx \frac{1}{1.645}\ln\left(\frac{\mu_R}{R(\mathbf{X}_k)}\right)$$

– Numerická kvadratura (např. Rosenblueth)

- – závislost na počtu vstupních NV
- \+ redukce počtu realizací

Zobrazení návrhových metod ve 2D



n	SAMPLING POINTS
x	X Latin Hypercube Sampling
1	▼ Partial Safety Factor
1	▲ EN 1992 - 2
2	● ECoV by Červenka
3	□ ECoV by Schlune et al.
4	★ Numerical Quadrature

Ukázka praktické aplikace a srovnání

- Stanovení návrhové hodnoty odolnosti střešních předpjatých nosníků pomocí nelineární metody konečných prvků
- Srovnání dostupných normativních a alternativních spolehlivostních metod