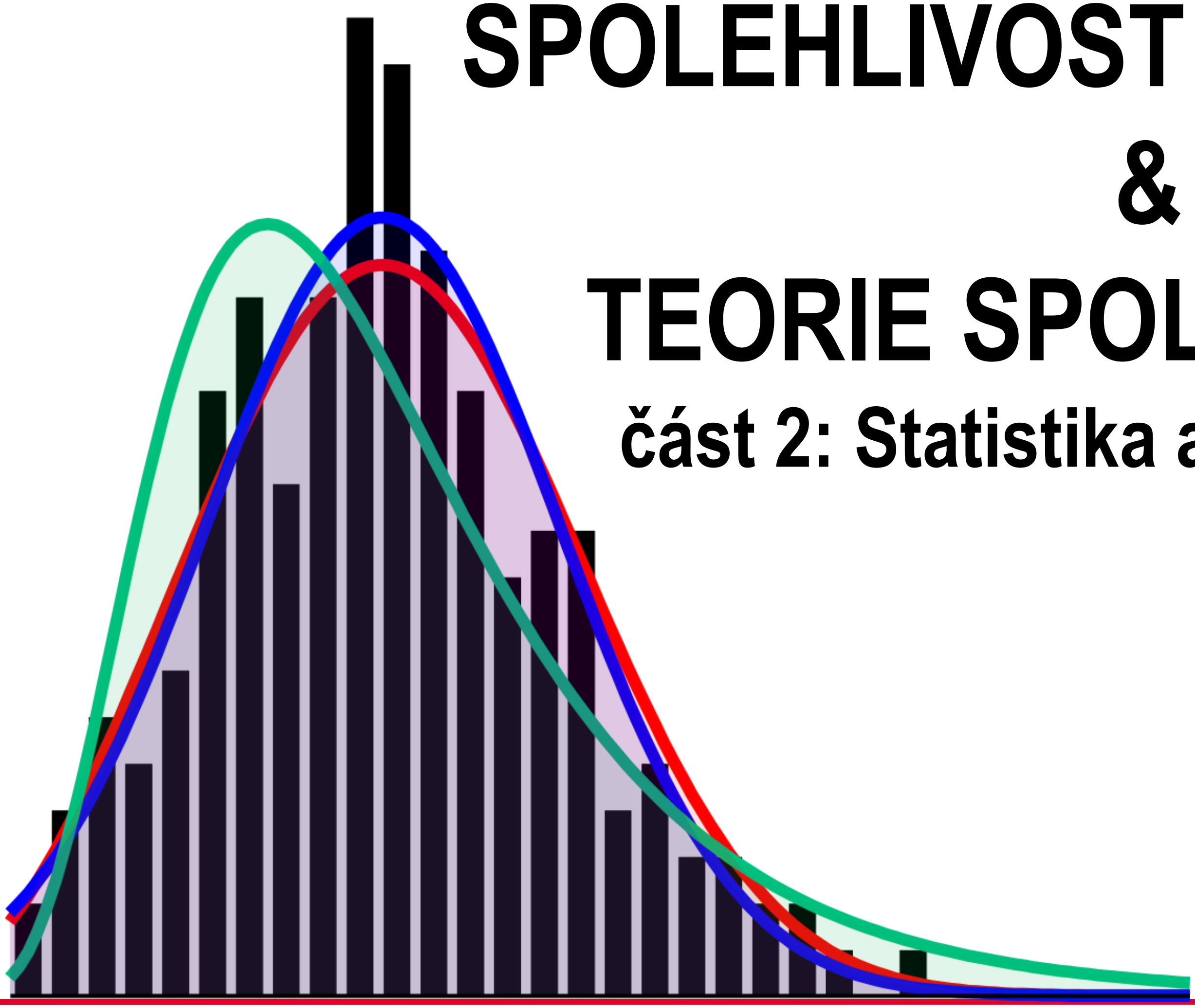
SPOLEHLIVOST KONSTRUKCÍ
&
TEORIE SPOLEHLIVOSTI
část 2: Statistika a pravděpodobnost



Drahomír Novák
Jan Eliáš

<u>část 2</u>
Statistika a pravděpodobnost

Rozdělovací funkce (pdf)

- označení

$$f_X(x)$$

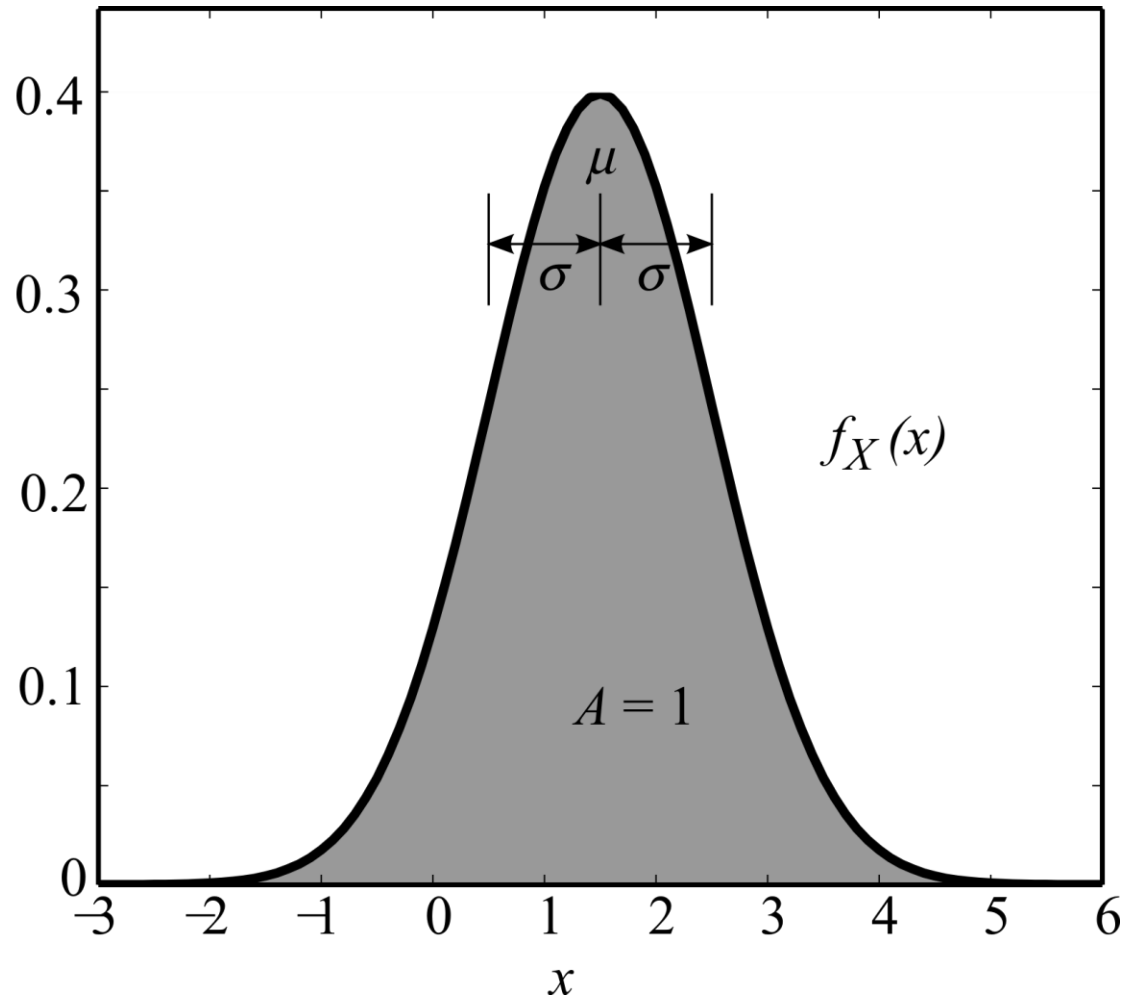
- vlastnosti

nezáporná

$$f_X(x) \geq 0$$

jednotková plocha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$$



Obrázek 1. pdf

Distribuční funkce (cdf)

–označení

$$F_X(x)$$

–definice

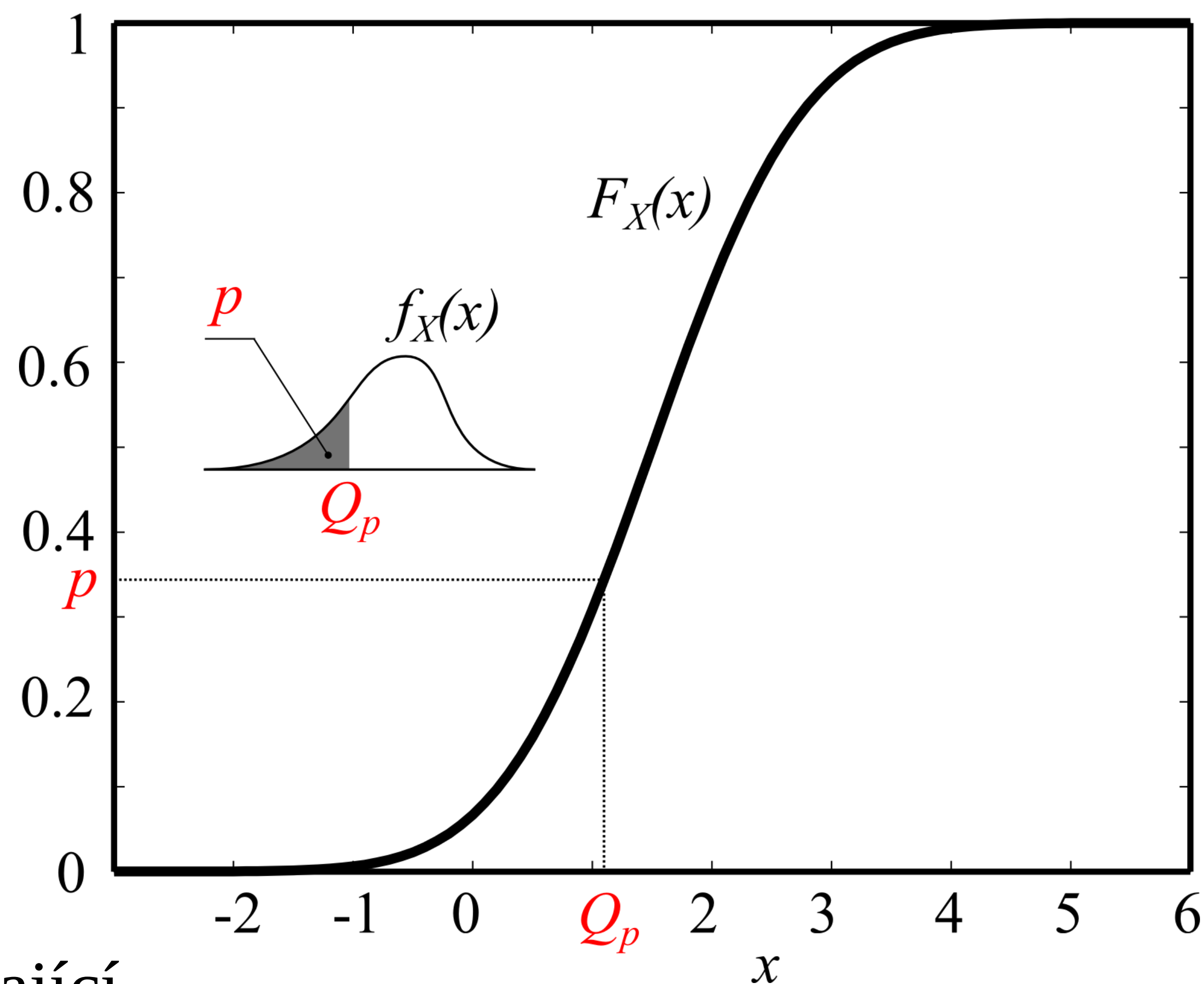
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

–vlastnosti

$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$

$$\frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \geq 0 \quad \text{neklesající}$$



Obrázek 3. cdf

Charakteristiky rozdělení

– střední hodnota = těžiště rozdělovací funkce

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\mathrm{d}x$$

– rozptyl - směrodatná odchylka

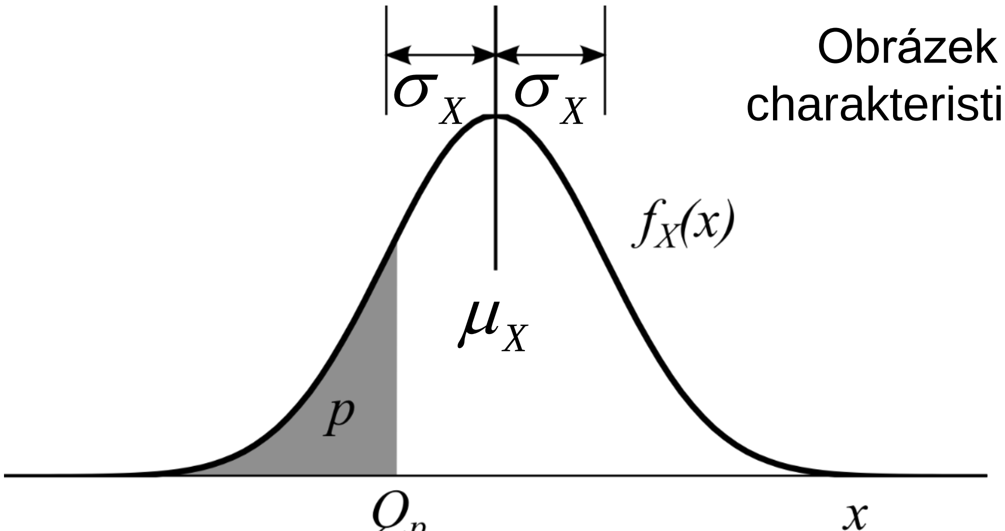
$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2\, f_X(x)\mathrm{d}x \qquad \sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

– 100*p*% kvantil

$$Q_p = F_X^{-1}(p)$$

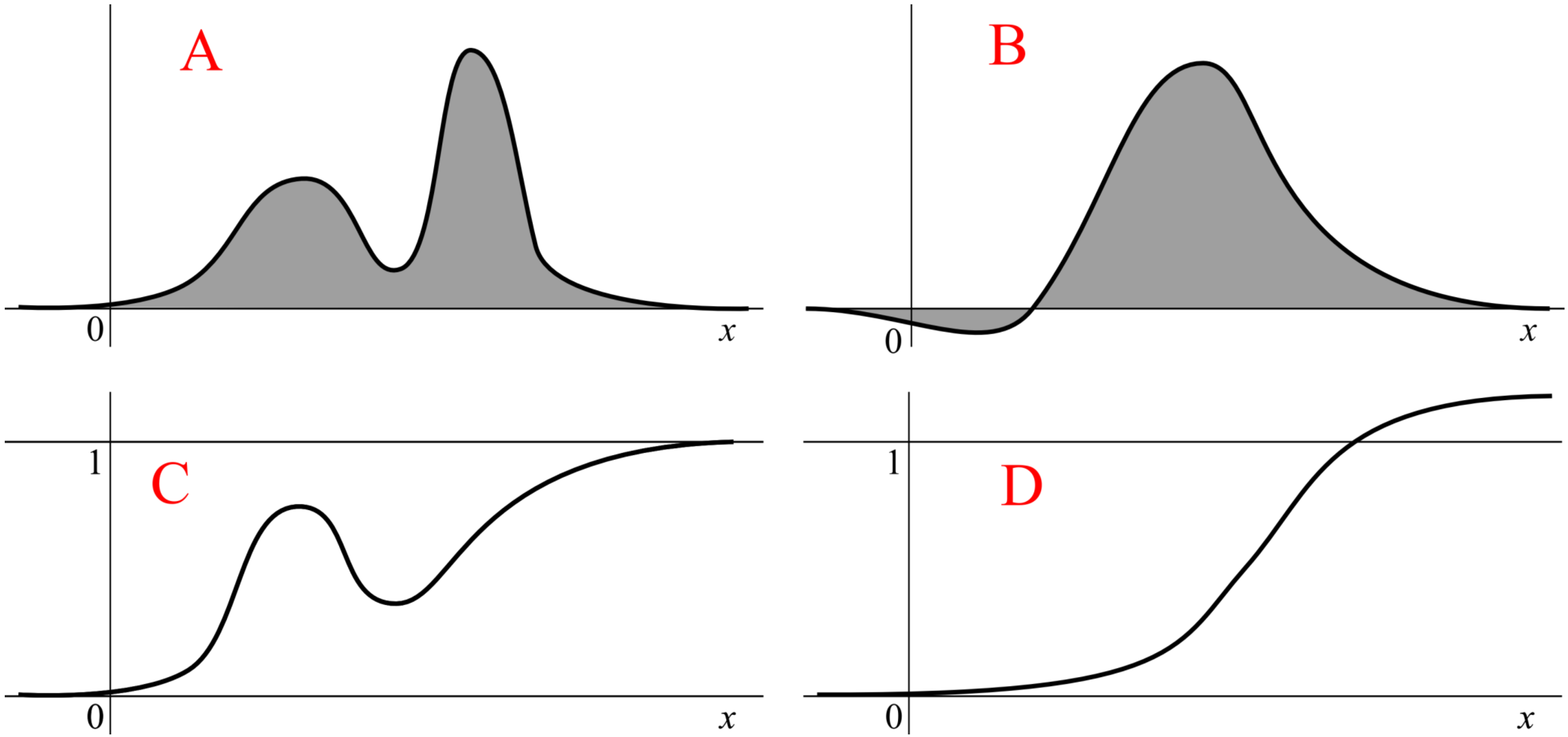
– medián

$$Q_{0.5} = F_X^{-1}(0.5)$$



Obrázek 2. charakteristiky

Co je a co není platná cdf nebo pdf

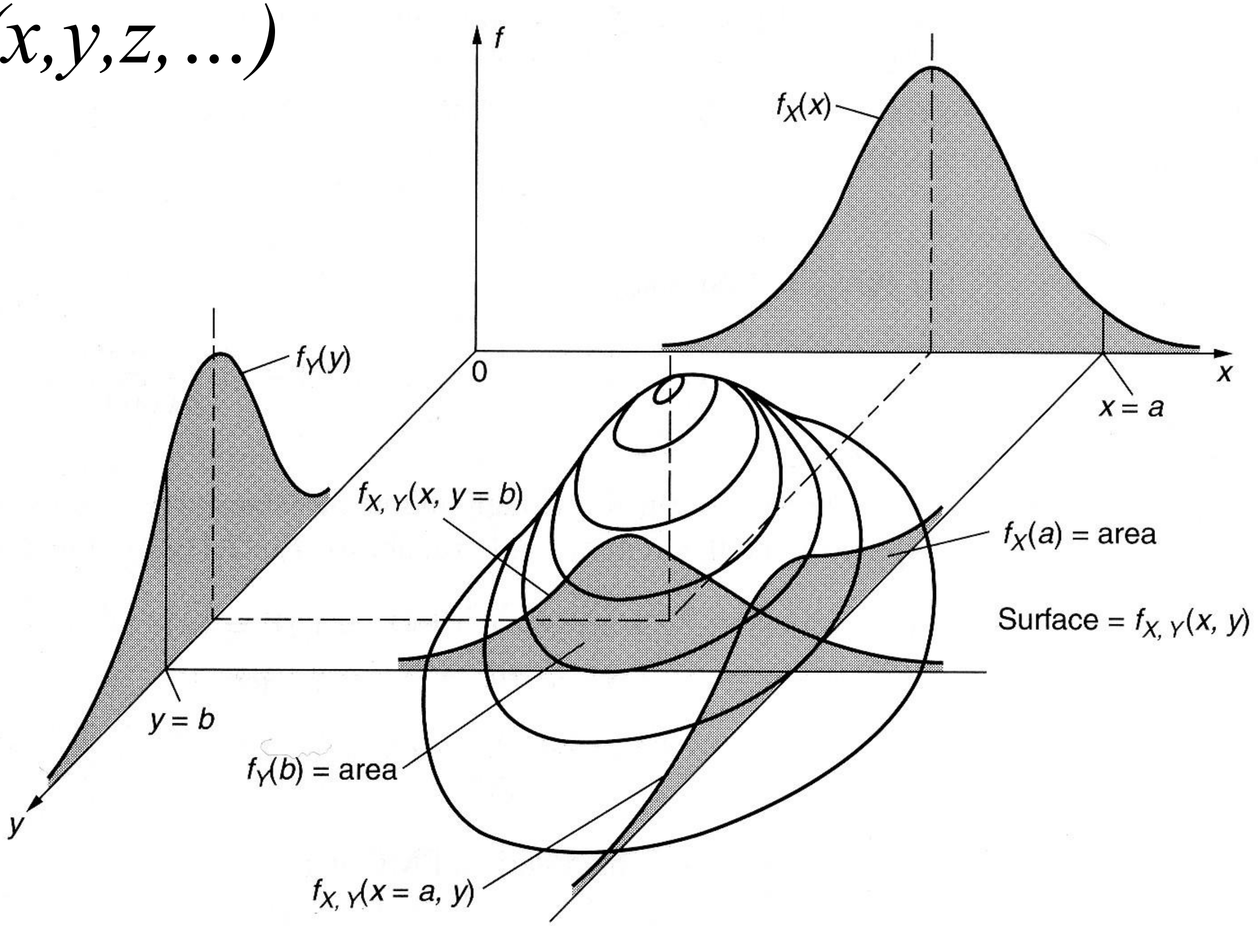


Obrázek 4. Testování kritérií cdf a pdf

Sdružená hustota pravděpodobnosti

–Rozdělení pravděpodobnost dvou či více veličin

$$f_{X,Y,Z,\ldots}(x,y,z,\ldots)$$

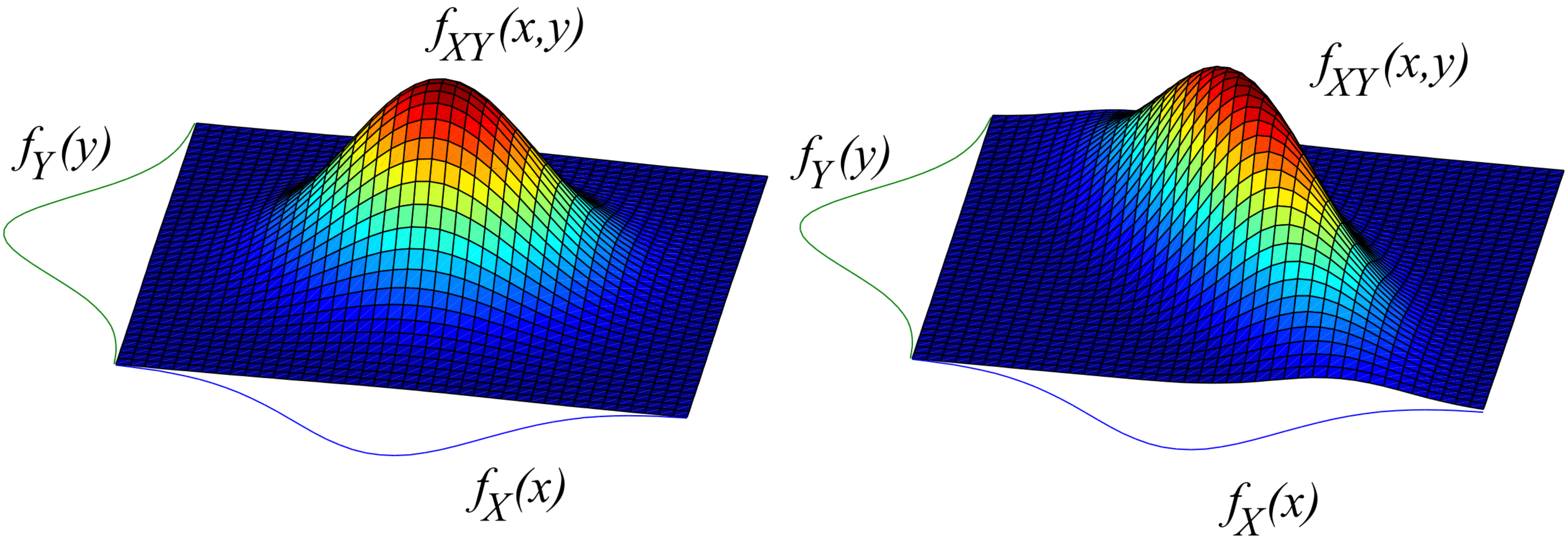


Obrázek 5. Sdružená hustota pravděpodobnosti

Statistická závislost

–veličiny X a Y jsou nezávislé právě když

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$



Obrázek 6. Nezávislé a závislé veličiny

Pearsonův korelační koeficient

– míra lineární závislosti

– $\rho = 0$ mohou či nemusí být závislé

– $\rho \neq 0$ závislé

– $\rho > 0$ pozitivní korelace, $\rho < 0$ negativní korelace

– limity $\rho \in \langle -1, 1 \rangle$

$$A_{i,j} = \frac{Cov\left(X_i, X_j\right)}{\sqrt{\mathrm{var}\left(X_i\right) \cdot \mathrm{var}\left(X_j\right)}}, \quad \langle -1, \; 1 \rangle$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\int\limits_{\Omega_X} \int\limits_{\Omega_Y} xy \, f_{XY}(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \mu_X \mu_y}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Korelační matice

Diagonální

Symetrická

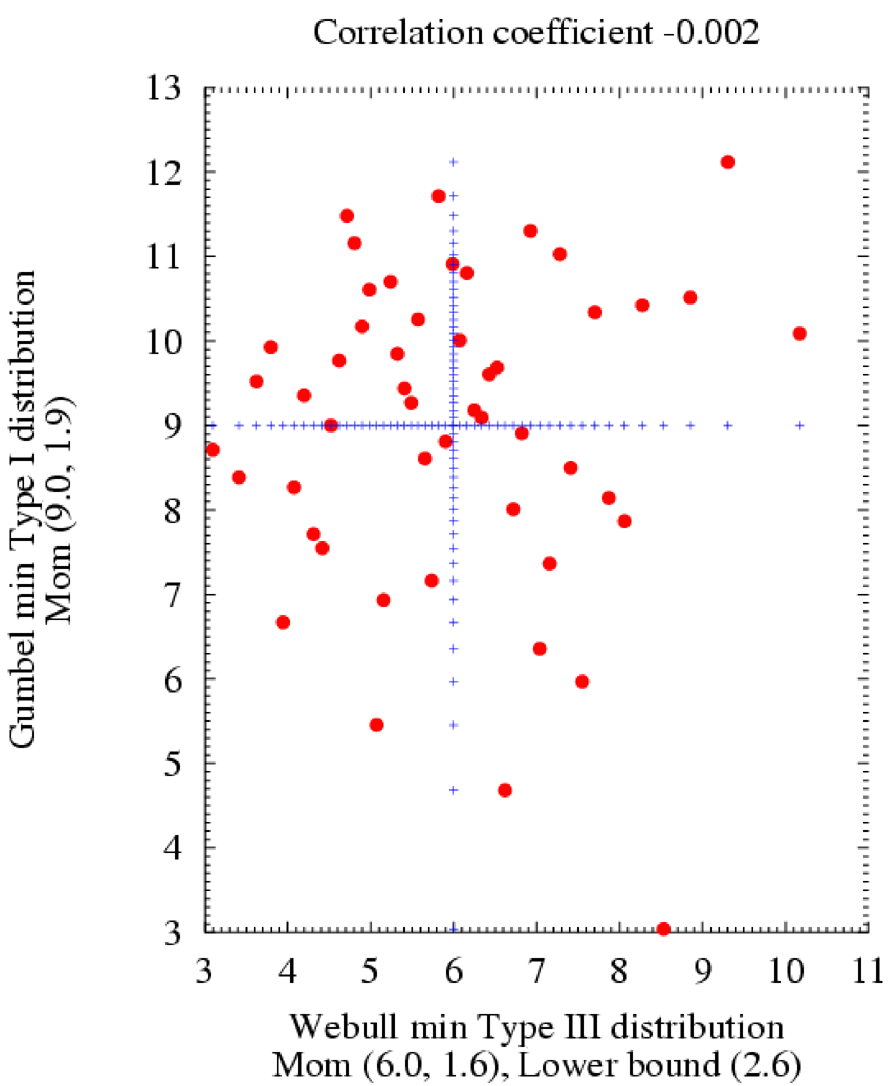
Pozitivně definitní

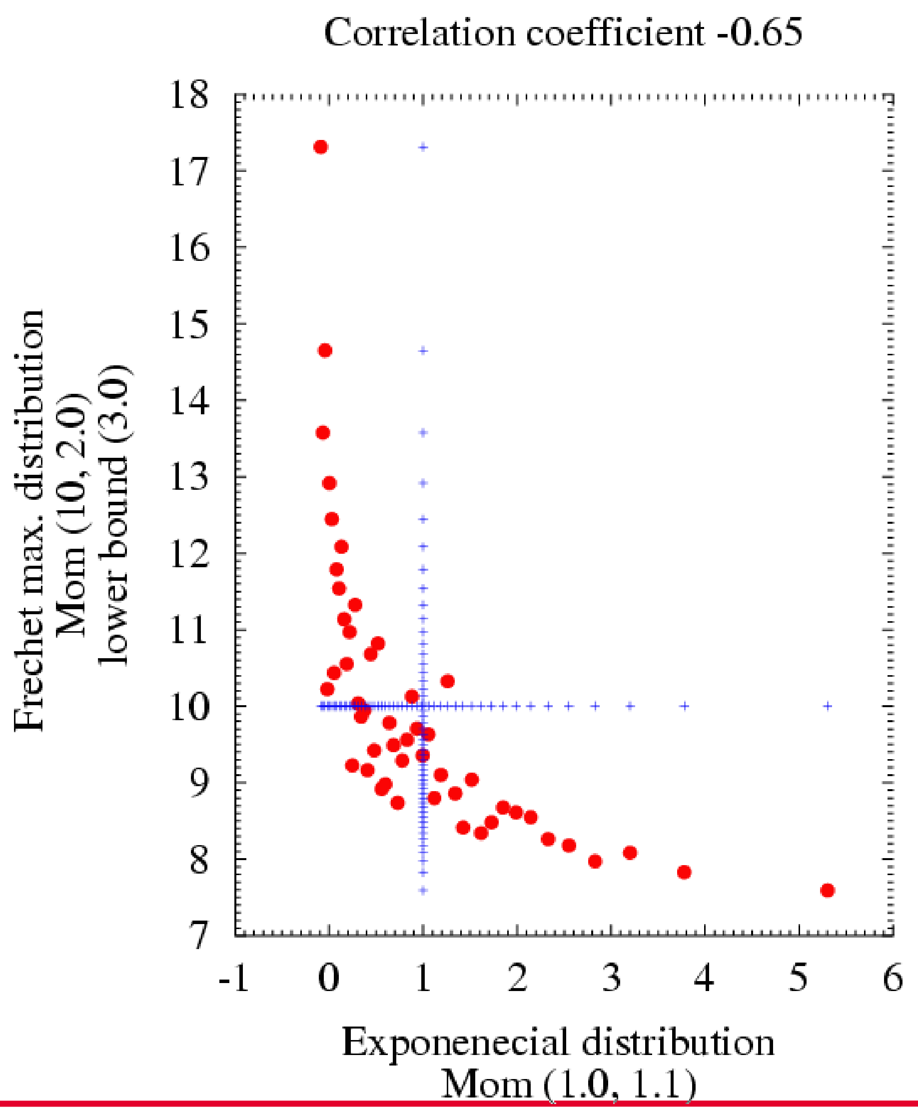
náhodná veličina

1	$A_{1,2}$	…		$A_{1,NVar}$
	1	…		$A_{2,NVar}$
		1		…
	Symetrie korelační matice		**1**	…
				1

náhodná veličina

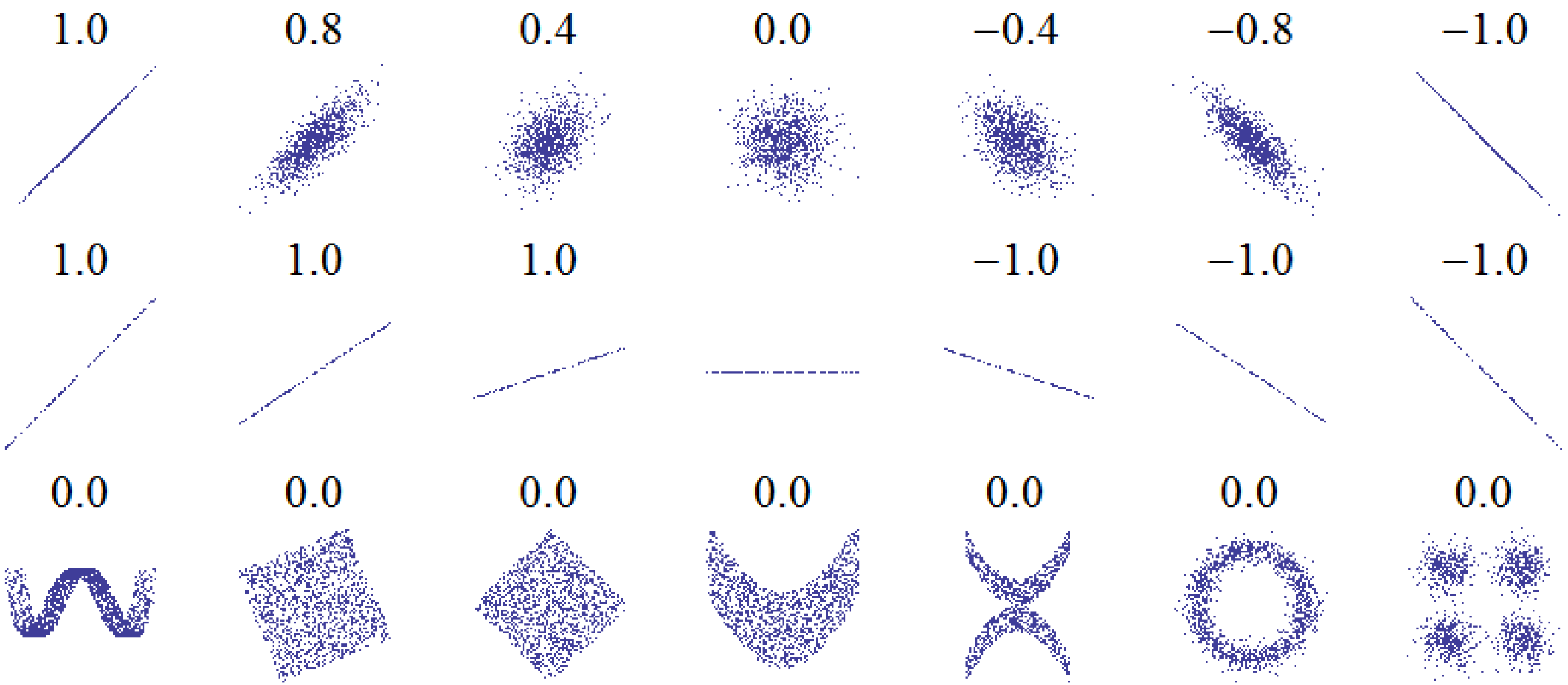
2D reprezentace závislosti





Příklady ne/závislých veličin

–poslední řádek = nulová Pearsonova korelace, jinak ale závislé náhodné veličiny



Obrázek 7. Příklady Personovy korelační míry

Neparametrické pořadové míry korelace

Spearman, nezávislá na typu rozdělení, robustní, místo samotných hodnot používá jejich pořadí

$$A_{i,j} = 1 - \frac{6\sum_k \left(R_{ki} - R_{kj}\right)^2}{N_{Sim}{}^3 - N_{Sim}}, \quad \langle -1,\ 1 \rangle$$

Kendallovo tau

$$\tau_i = \tau\left(q_{ji}, p_j\right), \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

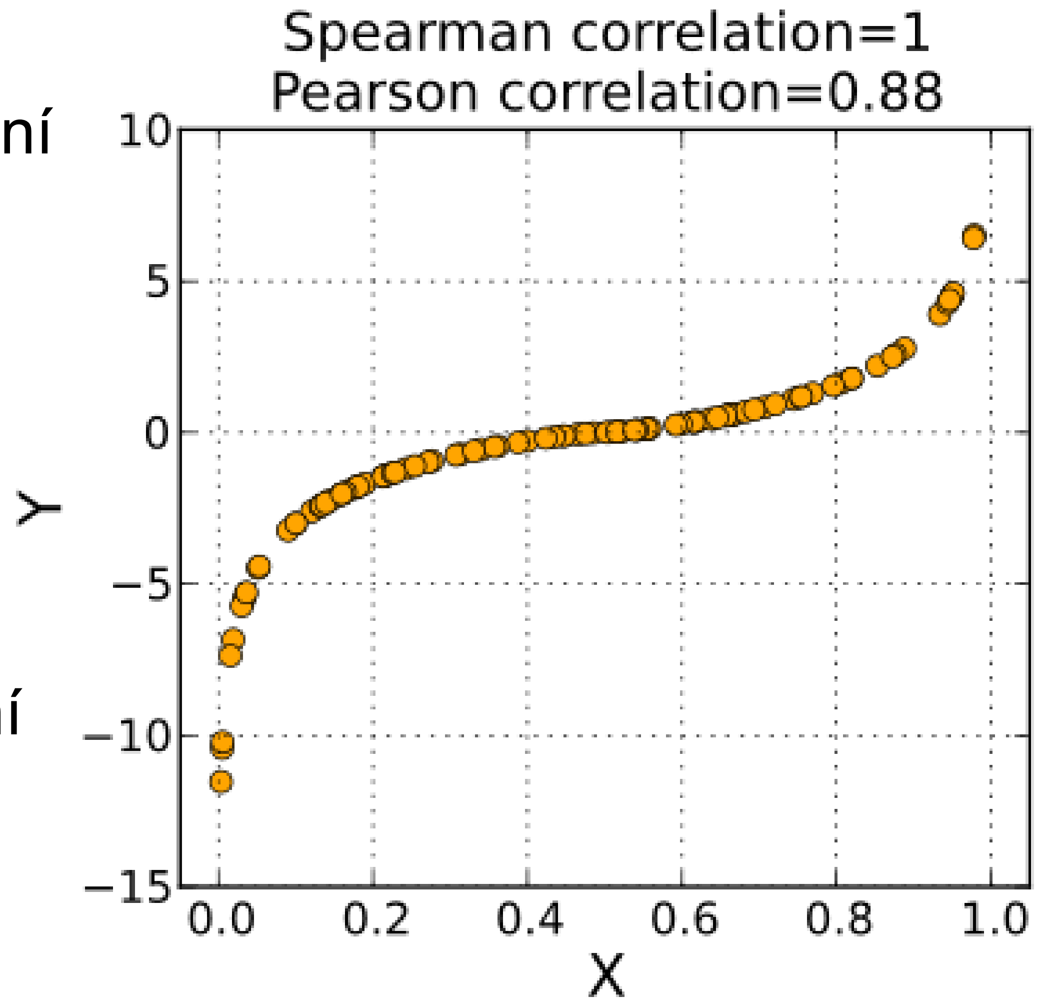
Odolné k defektům v datech, používají jen pořadí

Srovnání korelačních měr

–pro praktické spolehlivostní výpočty je rozdíl nepodstatný, protože je beztak často minimální znalost skutečné závislosti vstupních veličin

–Pearson – klasická

–Neparametrická - robustní

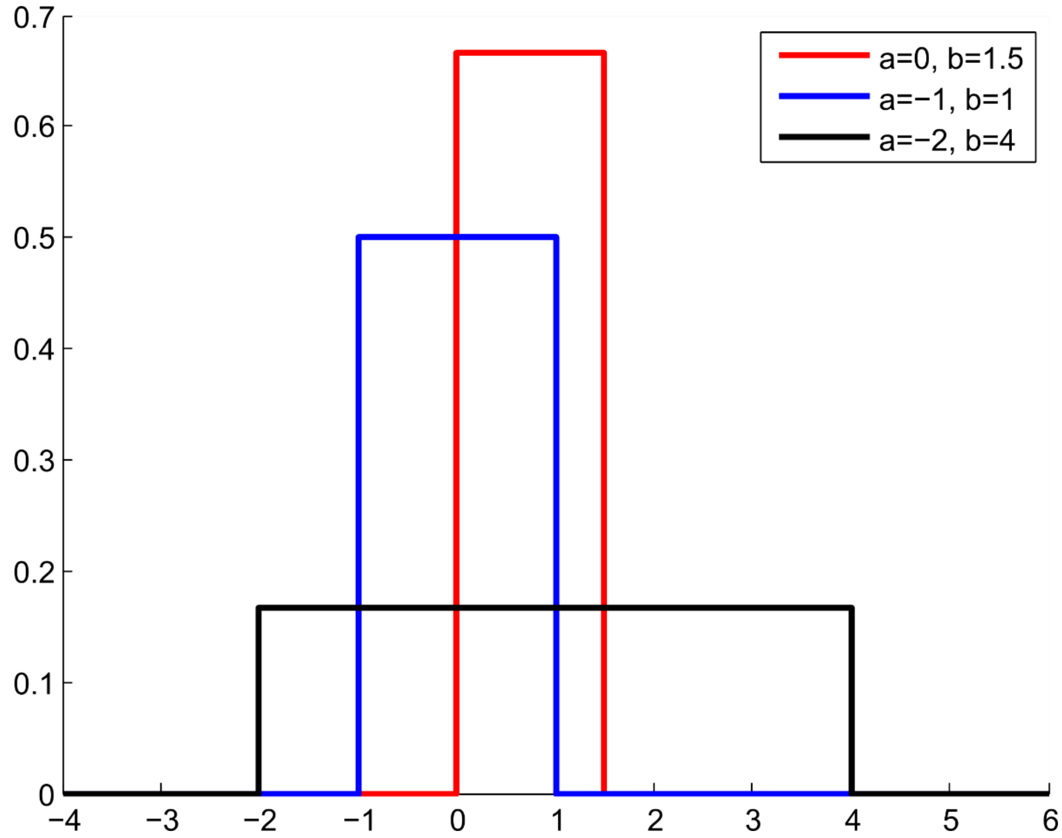


Obrázek 8. Spearmanova versus Pearsonova korelace

Rovnoměrné (obdelníkové) rozdělení

– dva parametry
  - a – spodní mez
  - b – horní mez
– lze ho jednoduše simulovat na počítači

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad x \in \langle a, b \rangle$$



Obrázek 9. Rovnoměrné rozdělení

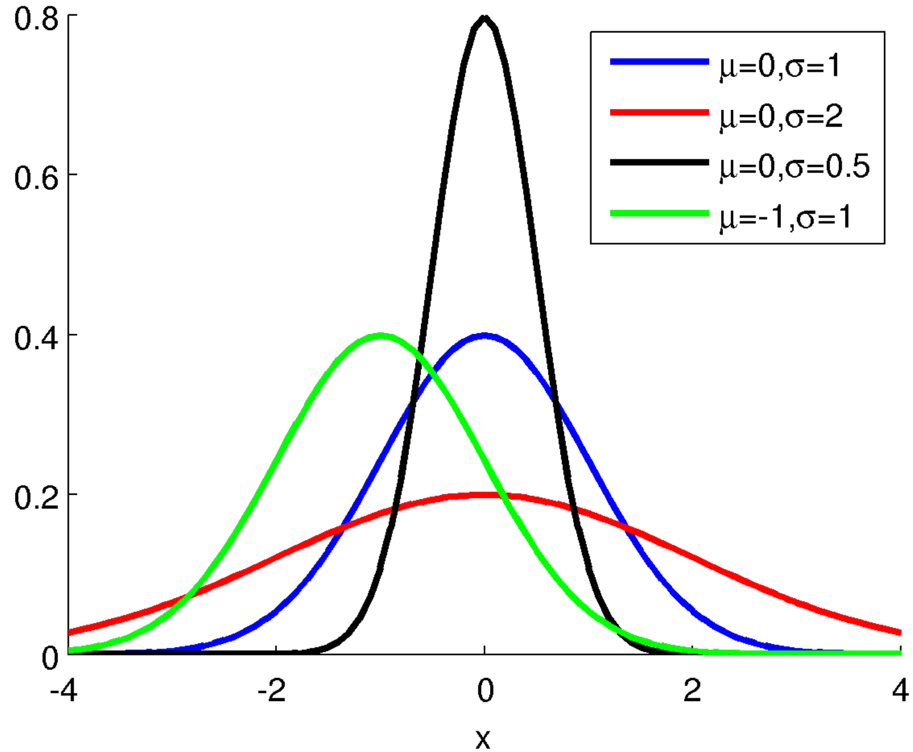
Normální (Gaussovo) rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

– dva parametry
  - μ – střední hodnota
  - σ – směrodatná odchylka

– výsledek centrálního limitního teorému (součet mnoha veličin vždy vede na Normální rozdělení)

– například geometrické veličiny, IQ, …



Obrázek 10. Normalní rozdělení

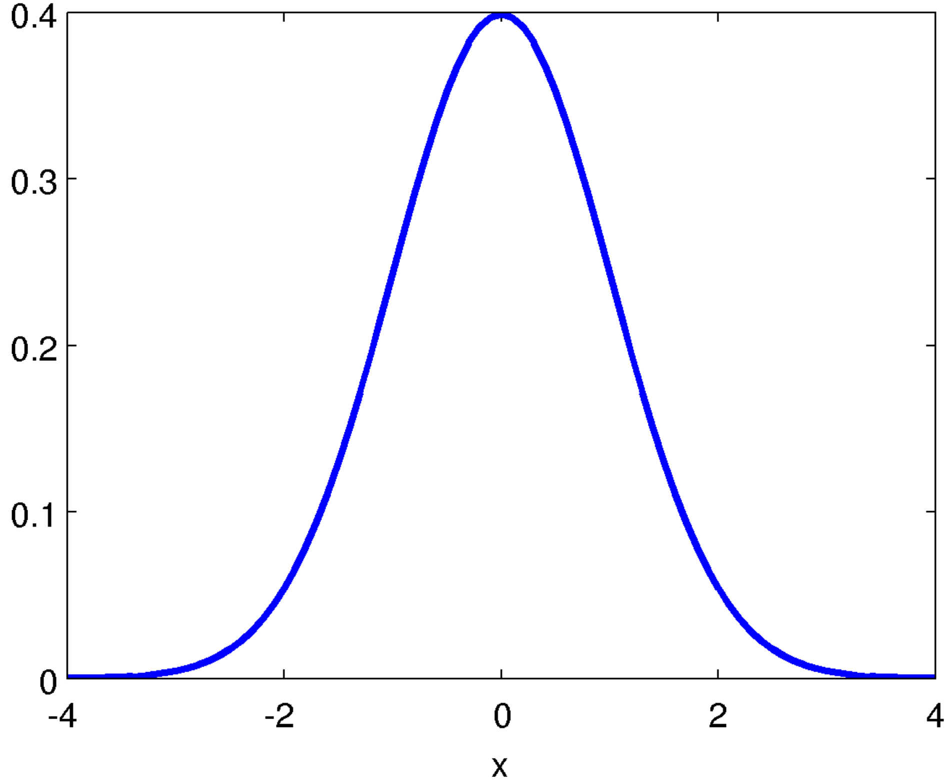
Standardizované normální rozdělení

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

–střední hodnota 0

–směrodatná odchylka 1

–symbol Φ



Obrázek 11. Standardizované normální rozdělení

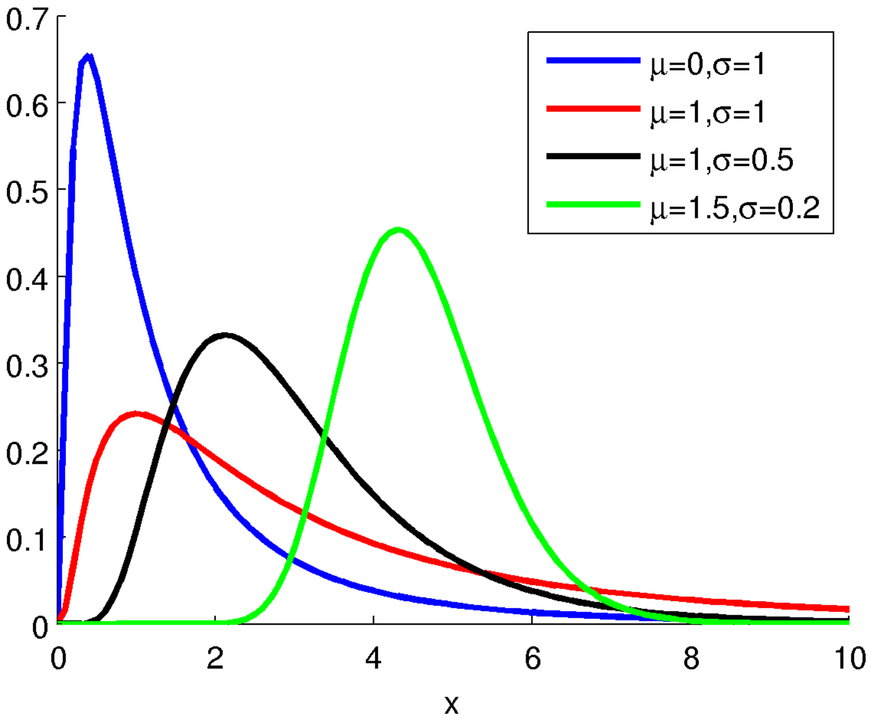
Lognormální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\log(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in \langle 0, \infty)$$

– dva parametry
  - μ – střední hodnota v log-prostoru
  - σ – směrodatná odchylka v log-prostoru

– omezeno zdola nulou

– např. pevnost, hustota, nejistoty, Youngův modul, …



Obrázek 12. Lognormální rozdělení

Weibullovo rozdělení (2-parametrické)

$$f(x) = \frac{m}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{m}} \qquad x \in \langle 0, \infty)$$

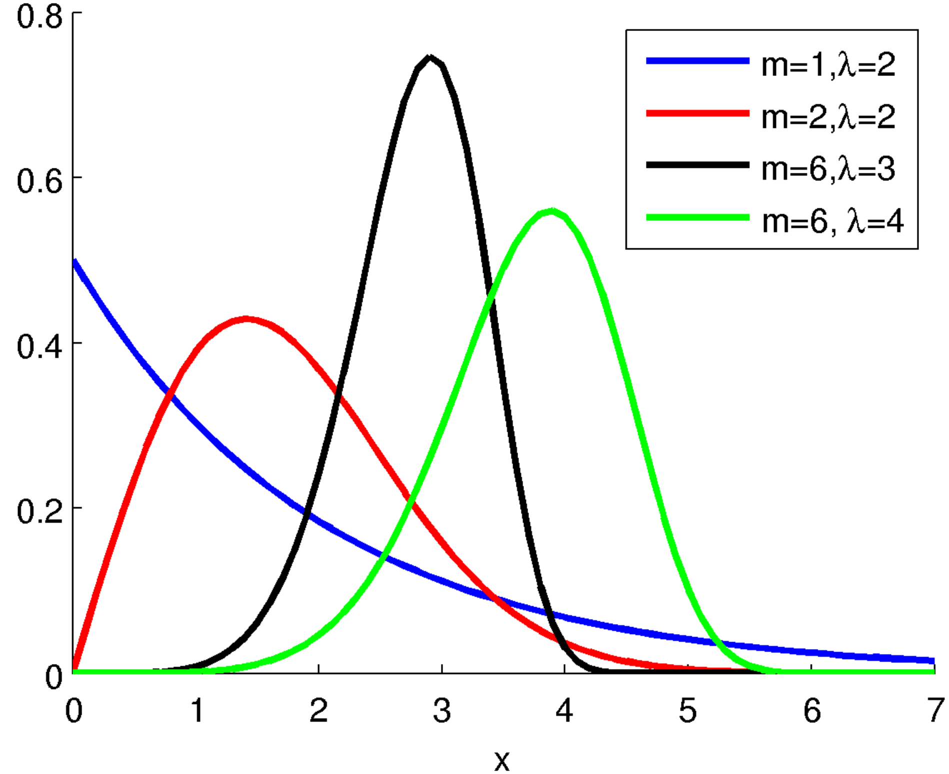
–dva parametry

- m – parametr tvaru
- λ – parametr měřítka

–výsledek teorie extrémních hodnot (minimum z mnoha veličin může vést na Weibullovo rozdělení)

–např. pevnost, …

–omezeno zdola nulou

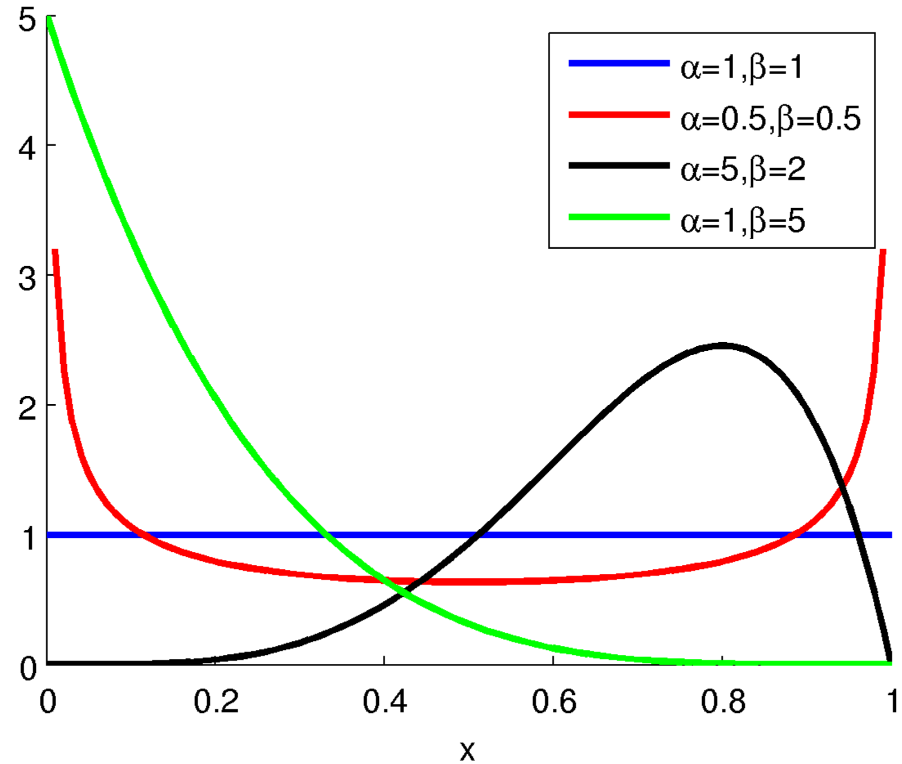


Obrázek 13. Weibullovo rozdělení

Beta rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \qquad x \in \langle 0, 1 \rangle$$

– dva parametry
  - α, β – parametry tvaru
– oboustranně omezené
– meze mohou být jednoduše upraveny z intervalu [0,1] na libovolný reálný interval => další dva parametry



Obrázek 14. Beta rozdělení

Určení vhodného rozdělení

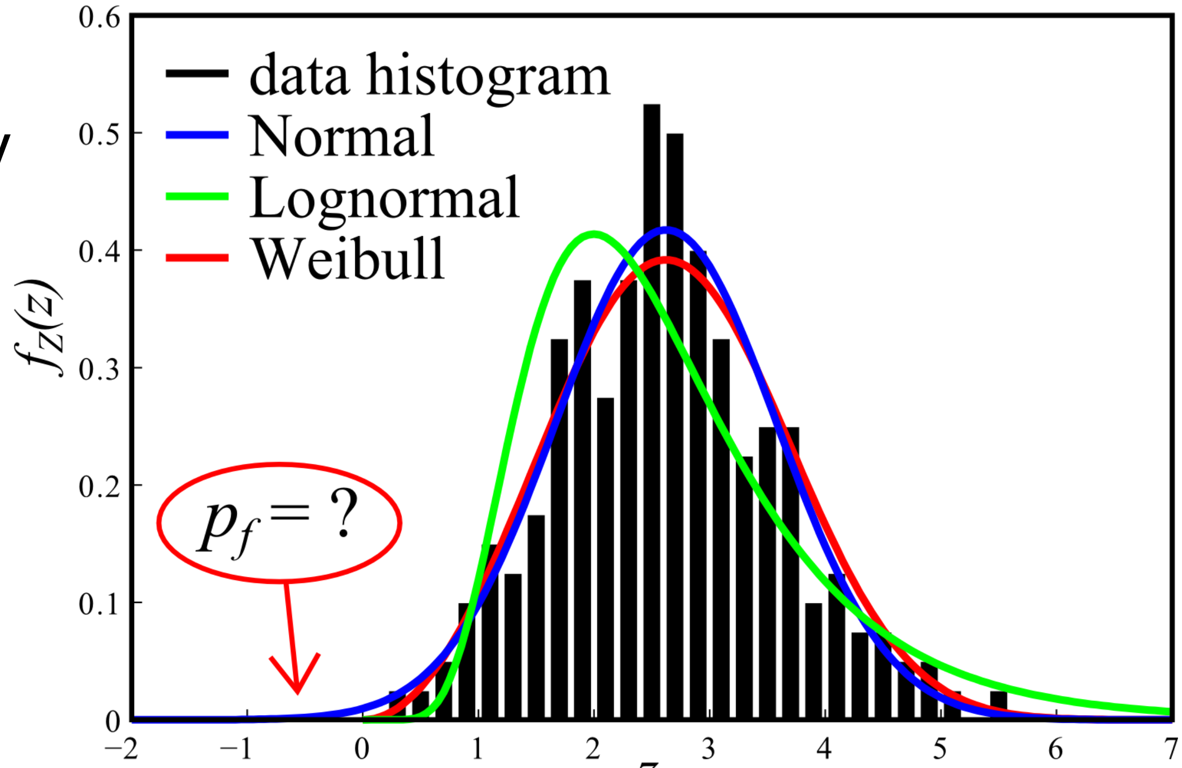
–střední část může být určena z histogramů, ale pro spolehlivostní výpočty jsou nejdůležitější okrajové části !!!

–nutnost určení rozdělení teoreticky (z fyzikálních principů)

–Statistické testy:

–Kolmogorov-Smirnov

–Chi-square test



Obrázek 15. Hledání optimálního rozdělení

Stochastický proces v čase

–ne pouze jednotlivé hodnoty ale také jejich časová posloupnost

–např. meteorol. data, výška hladiny, rychlost větru

–stacionární proces – charakteristiky procesu (střední hodnota, rozptyl, vyšší statistické momenty + korelace) se s časem nemění

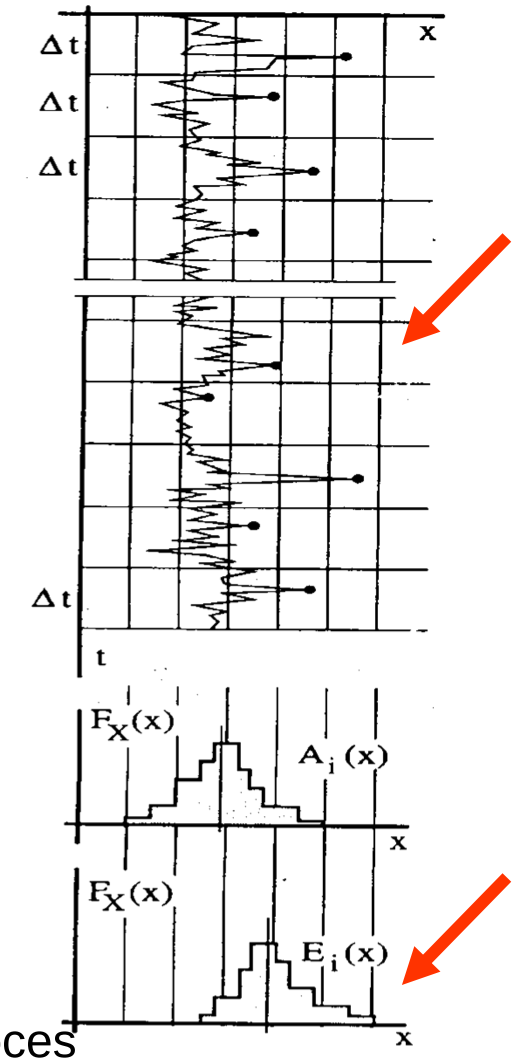
–A – klasický histogram

–E – histogram extrémních hodnot

–auto-korelační funkce, spektrální hustota

–stochastická metoda konečných prvků

–nestacionární proces



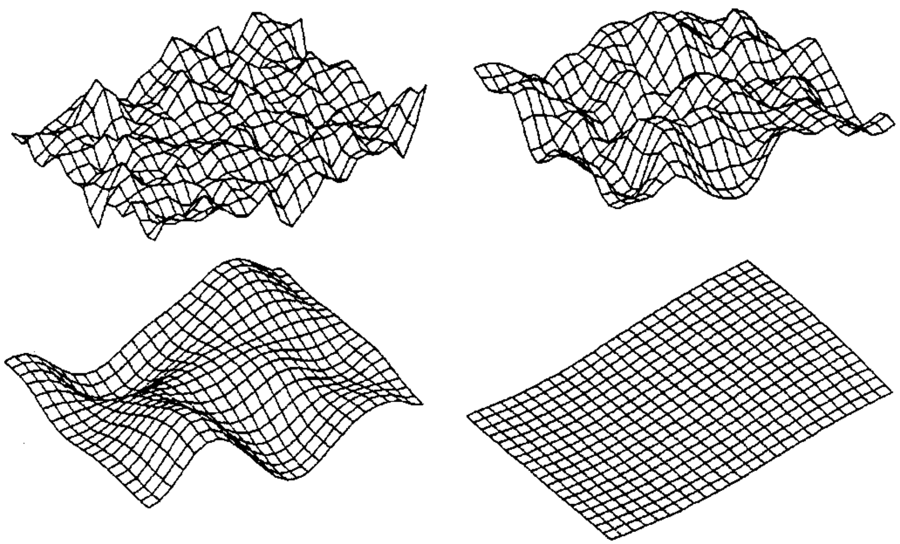
Obrázek 16. Stochastický proces

Náhodné pole – prostorová závislost

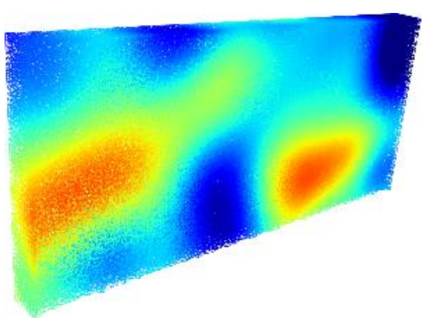
–Pevnost materiálu, Youngův modul, … veličiny se mění v prostoru spíše spojitě

–spojitost lze zajistit požadováním kladné korelační závislosti jejíž velikost je dána vzdáleností

$$\rho_{ij} = \exp\left[-\left(\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}{d}\right)^2\right]$$



Obrázek 17. Náhodné pole ve 2D



Obrázek 18. Náhodné pole ve 3D