

Spolehlivost konstrukcí

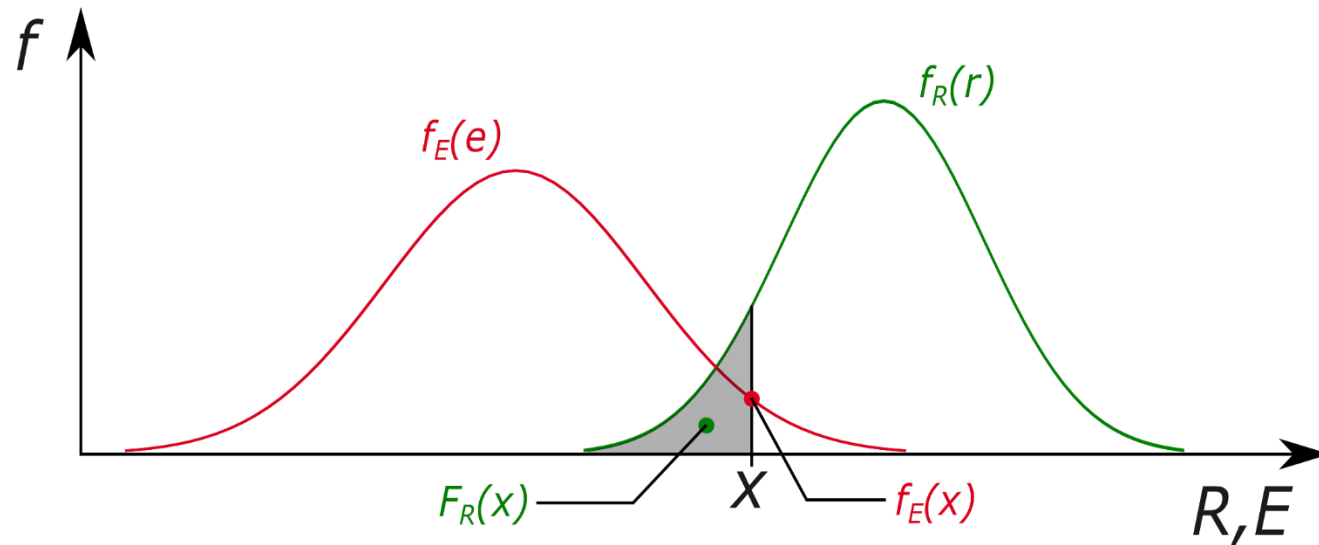
CVIČENÍ 7: APROXIMAČNÍ METODA FORM



Stanovení pravděpodobnosti poruchy

- Analyticky
- Numericky
 - Simulační metody typu Monte Carlo (výpočetně velmi náročné)
 - **Aproximační metody** (zjednodušení výpočtu)

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} d_{pf} = \int_{-\infty}^{\infty} f_E(x) \cdot F_R(x) dx$$



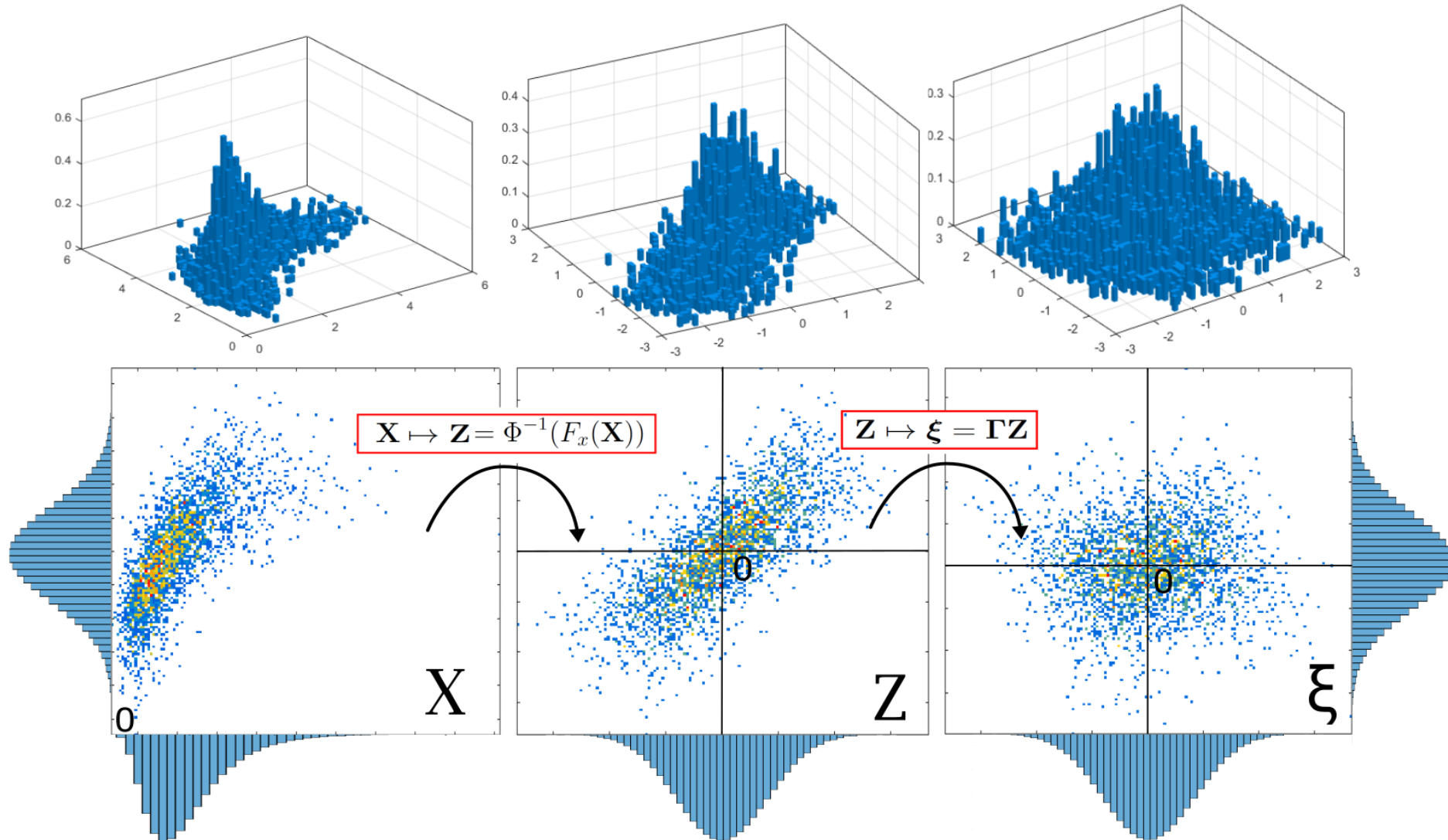


First Order Reliability Method (FORM)

- Zkratka **FORM** z angl. **F**irst **O**rders **R**eliability **M**ethod
- Aproximační metoda (zjednodušení funkce poruchy na přímku)
- Myšlenka: *Využít symetrie vícerozměrného Gaussovského rozdělení a aproximace funkce poruchy přímkou v návrhového bodě, což je bod na funkci poruchy $g(\xi)=0$ s nejkratší vzdáleností k počátku ve standardním normálním nekorelovaném prostoru ξ .*
- *Obecně 3 kroky:*
 - Transformace všech vstupních náhodných veličin \mathbf{X} do ξ
 - Hledání návrhového bodu P^* na hranici fce poruchy $g(\xi)=0$
 - Linearizace fce poruchy v P^* a výpočet pravděpodobnosti poruchy
- Využití při odvození dílčích součinitelů bezpečnosti (viz přednáška 8) 😊

FORM: transformace NV

1. Transformace do standardního normálního nekorelovaného prostoru ξ





FORM: Transformace do prostoru ξ

Nekorelované Gaussovské veličiny

1. Transformace na standardní Gaussovské veličiny:

$$\xi_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}$$

Nekorelované NE-Gaussovské veličiny

1. Transformace na Gaussovské veličny
2. Normalizace Gaussovských veličin

$$\xi_i = \Phi^{-1} \left[F_{X_i} (X_i) \right]$$

Korelované NE-Gaussovské veličiny

1. Transformace na Gaussovské veličny
2. Normalizace Gaussovských veličin

$$Z_i = \Phi^{-1} \left[F_{X_i} (X_i) \right]$$

3. Odstranění korelace

$$R_{corr} = LL^T$$

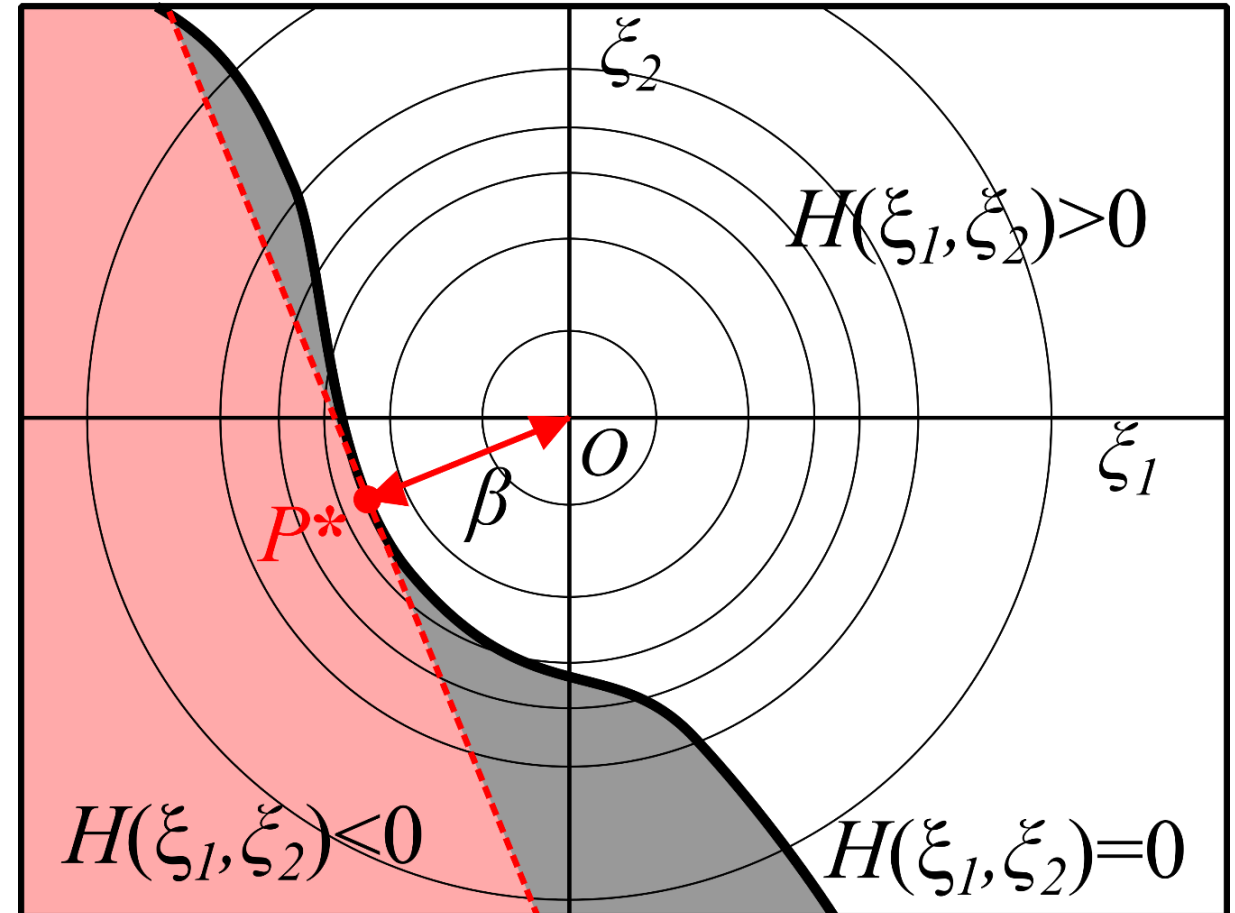
$$\xi_i = L^{-1}Z$$

FORM: Návrhový bod P^*

2. Hledání návrhového bodu P^*

- Návrhový bod leží na funkci poruchy a má nejkratší vzdálenost k počátku souřadnicové soustavy
- Jak najít návrhový bod?
 - obecně pomocí nelineární optimalizace
 - v našem případě iterativně s využitím derivace funkce
- Vzdálenost β je Hasofer-Lindův index spolehlivosti

$$P_f \approx \Phi(-\beta)$$





FORM: Linearizace v návrhovém bodě

2. Linearizace v návrhovém bodě P^* (Taylorův rozvoj)

$$g(\xi) = Z = g(P^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} (\xi_i - P_i^*)$$

$$g(P^*) = 0 \rightarrow Z = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} \xi_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} P_i^*$$



FORM: Hassofer-Lindův index

3. Nejkratší vzdálenost k počátku soustavy souřadnic β

Vzdálenost k počátku soustavy:

$$\beta = \left| \frac{a_0}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right|$$

Hessova forma (hyper)plochy:

$$\frac{a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_0}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = 0$$

$$Z = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} \xi_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} P_i^* \rightarrow \beta = \frac{-\sum_{i=1}^n \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} P_i^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} \right]^2}}$$



FORM: směrové kosíny α

Směrové kosiny jako citlivostní součinitele vstupních veličin

Směrové kosiny:

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \quad \alpha_2 = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

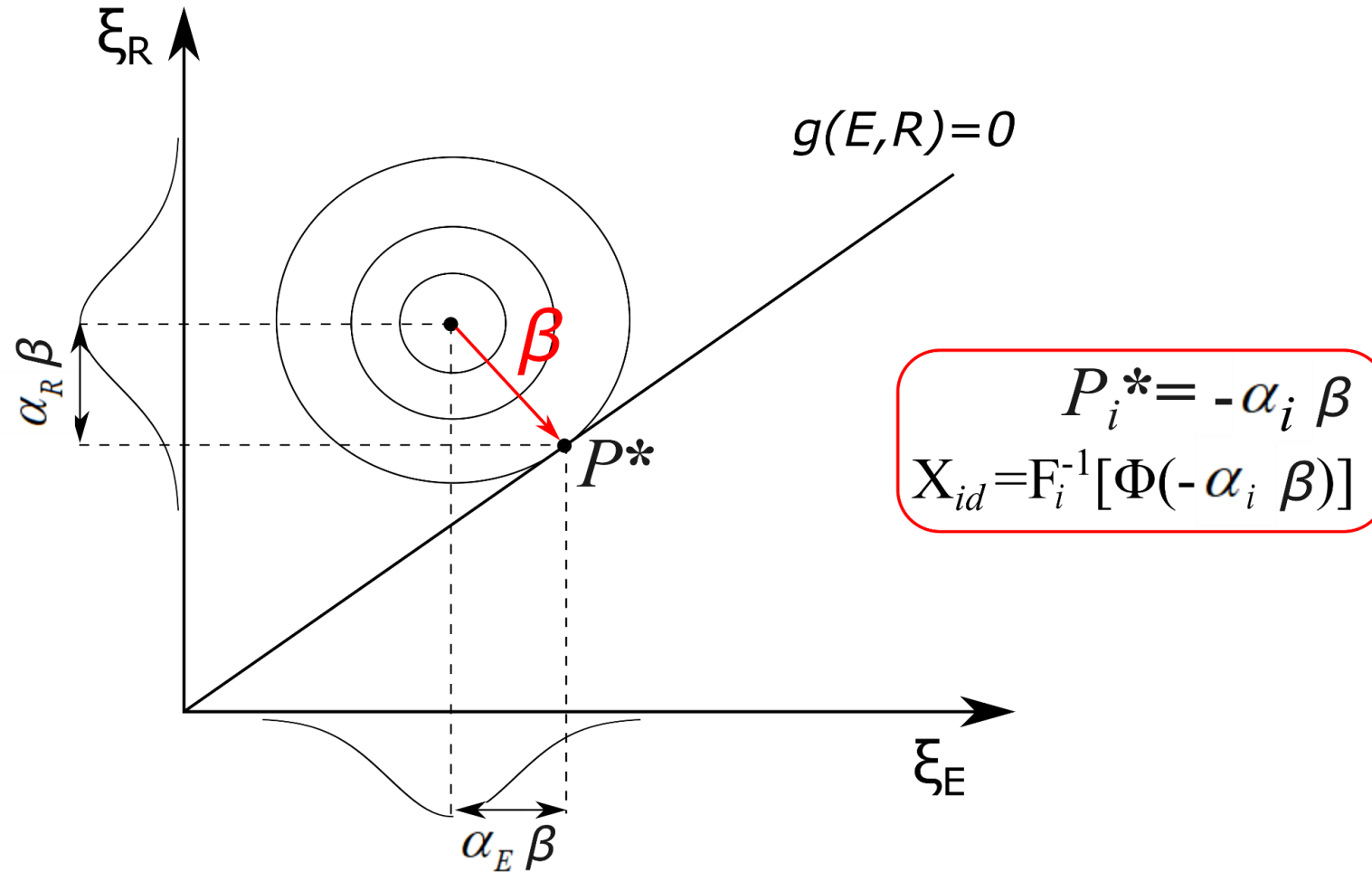
Hessova forma (hyper)plochy:

$$\frac{a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_0}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = 0$$

$$Z = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} \xi_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} P_i^* \rightarrow \alpha_i = \frac{\frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} \right]^2}}$$



FORM: souřadnice návrhového bodu

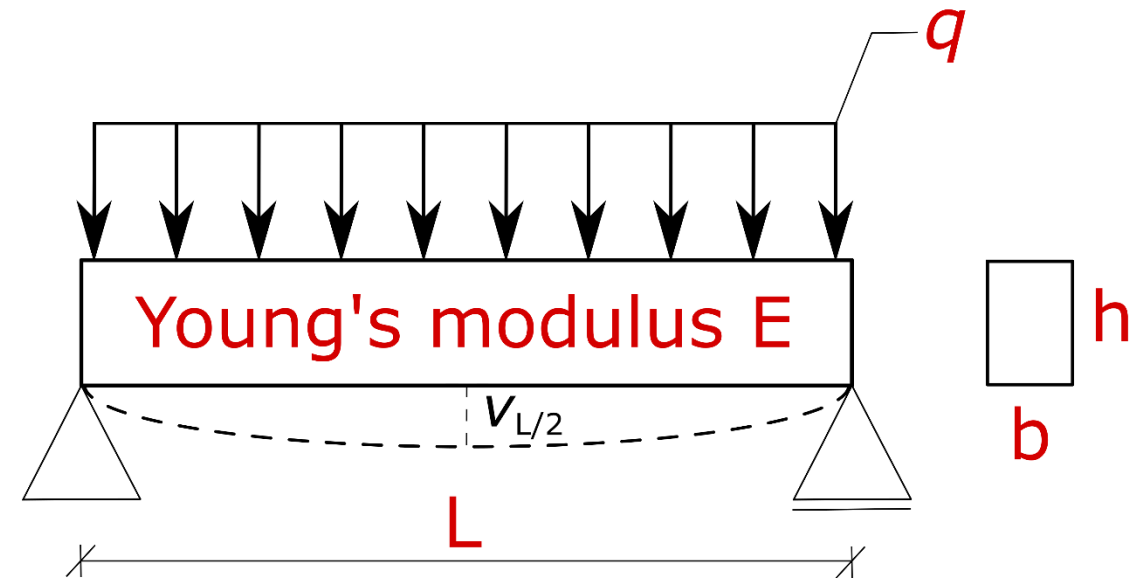




Příklad 1. Průhyb prostého nosníku

Stanovte pravděpodobnost poruchy ocelového prostého nosníku obdélníkového průřezu zatíženého spojitým zatížením o intenzitě q (viz Obr), kdy porucha je definována jako průhyb větší než 8 mm.

Veličina	Rozděl.	μ	σ	Jednotka
L	Determ	3000	-	[mm]
B	Determ	50	-	[mm]
E	Determ	205000	-	[N/mm ²]
q	Gaussovo	5	1	[N/mm]
h	Gaussovo	100	2	[mm]





FORM: souřadnice návrhového bodu

1. Stanovení funkce poruchy
2. Vytknout konstantu A
3. Transformace náhodných veličin do standardního normálního prostoru
4. Úprava funkce poruchy pro standardní normální veličiny
5. Dosazení obecně návrhového bodu
6. Vyjádření indexu spolehlivosti dle Hasofer-Linda
7. Derivace funkce poruchy a vyjádření směrových kosínů
8. Iterativní řešení v Excelu pro nalezení návrhového bodu a stanovení psti poruchy
9. Stanovení souřadnic návrhové bodu $P=[q^*,h^*]$



Příklad 2. Srovnání FORM a MC (cv. 5)

Stanovte pravděpodobnost poruchy pro zadanou funkci poruchy a dané vstupní veličiny. Využijte metodu FORM a srovnajte s výsledky MC ze cvičení 5.

$$G = Y - X^2 + 1$$

X	Rozdělení	μ	σ
X	Gaussovo	1	3
Y	Gaussovo	4	4

1. Transformace náhodných veličiny a úprava fce poruchy



Příklad 2. Srovnání FORM a MC (cv. 5)

1. Transformace náhodných veličiny a úprava fce poruchy
2. Vyjádření U_Y a dopočet souřadnic pro zvolené U_X
3. Nalezení bodu s minimální vzdáleností od počátku d
4. Výpočet Hasofer-Lind indexu a pravděpodobnost poruchy
5. Odvození rovnice aproximační přímky
6. Vykreslení MC, podmínky spolehlivosti a aproximační přímky (srovnání)
7. *Výpočet MC pro uvažovanou funkci poruchy jako přímku