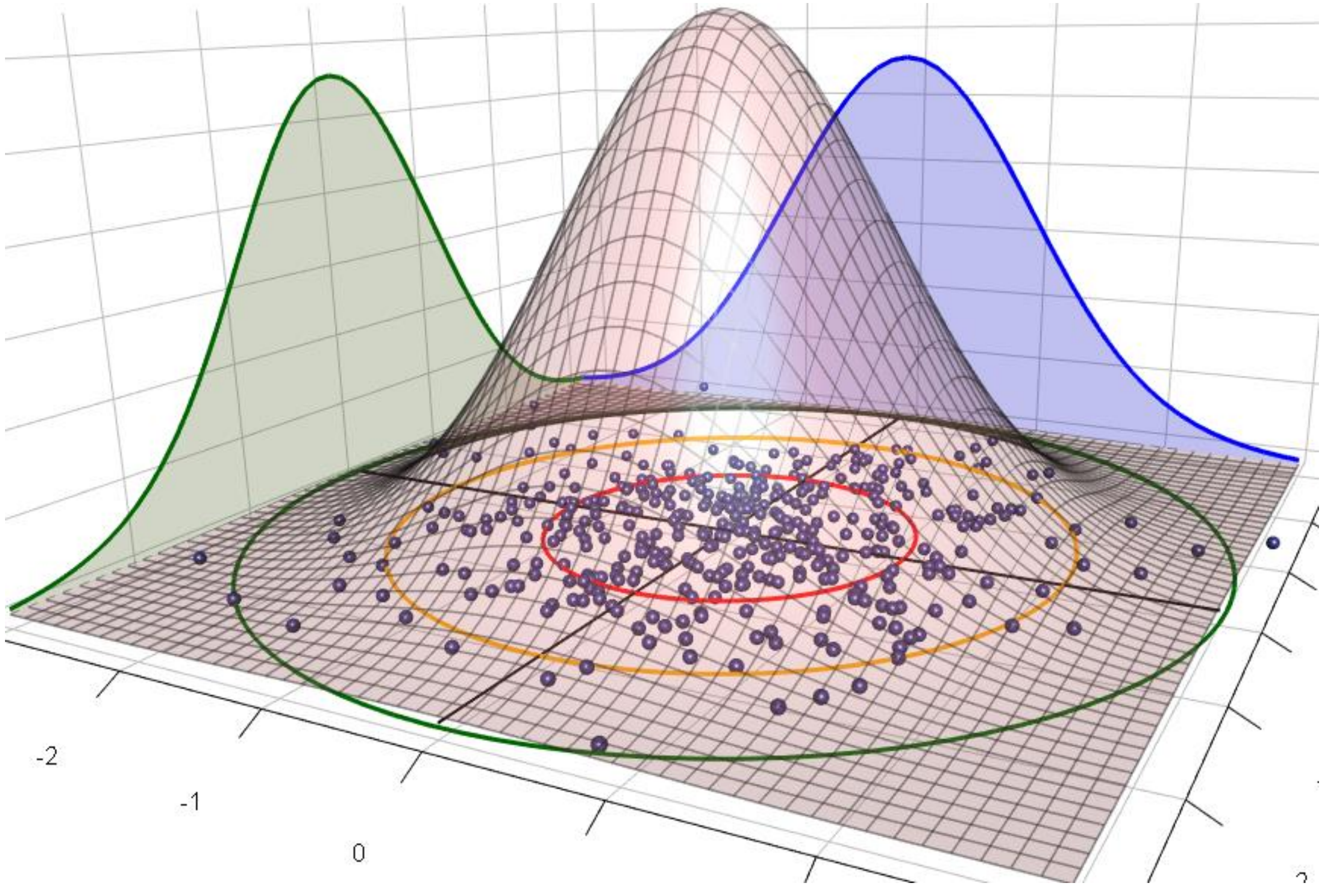


Spolehlivost konstrukcí

CVIČENÍ 2: NÁHODNÝ VEKTOR A ZÁVISLOST NÁHODNÝCH VELIČIN

Náhodný vektor

- více náhodných vlastností jednoho objektu (tlaková a tahová pevnost betonu)
- *n*-rozměrný náhodný vektor je uspořádaná *n*-tice náhodných veličin

$$\mathbf{X} = \left[X_1, \ldots, X_n \right]^T$$

- dále předpoklad **n=2** (X,Y) a **spojité** náhodné veličiny
- Rozdělení **X** je popsáno **sdruženou hustotou** pravděpodobnosti:

$$\mathrm{P}(X, Y) = \iint f(x, y)\, dy\, dx$$

Vlasnosti **sdružené** hustoty psti a distr. fce

Sdružená hustota pravděpodobnosti

- $f(x,y) \geq 0, (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = 1$
- $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{x}, \mathrm{Y} \leq \mathrm{y}) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t,s)\,dtds$

Objem pod grafem hustoty

Sdružená distribuční funkce

- $0 \leq F(x,y) \leq 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x,y) = 0$
 $\lim_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} \lim_{y \to \infty} F(x,y) = 1$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{xy}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Odvození marginální pdf a cdf

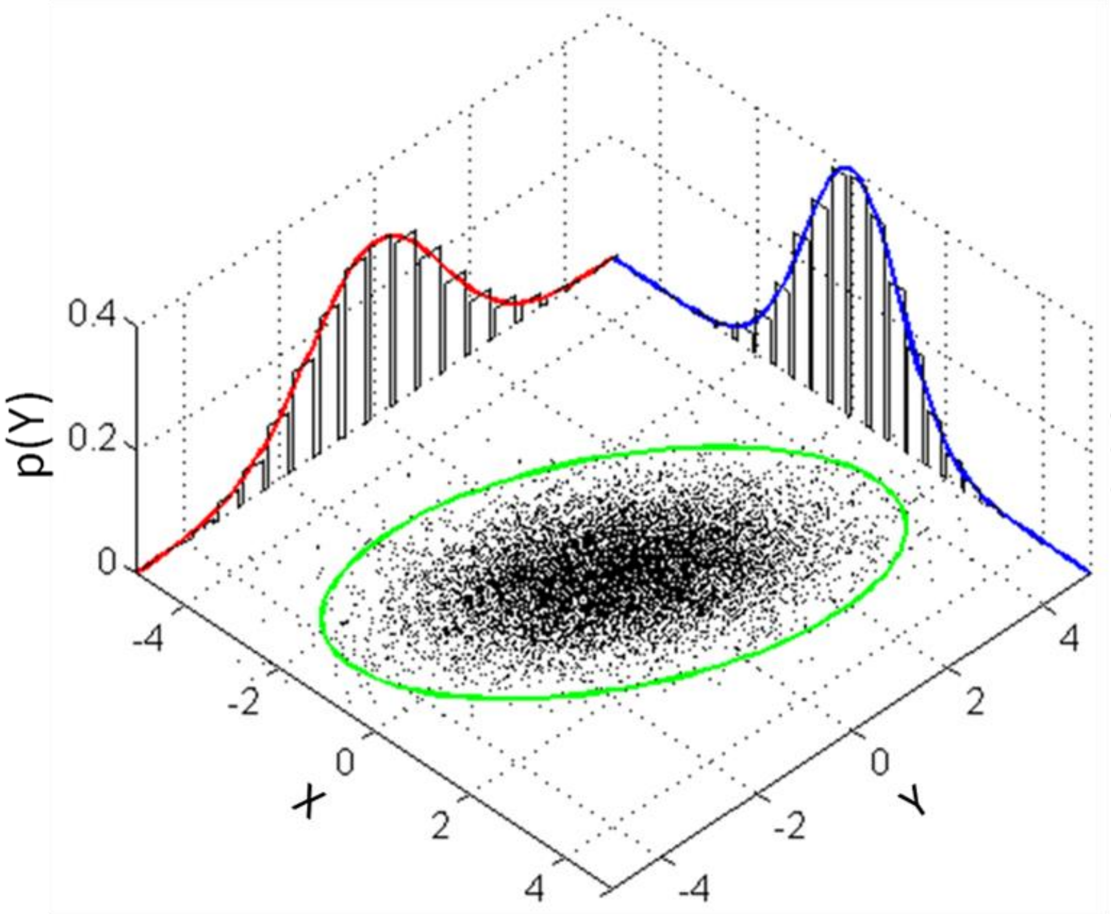
- Marginální hustota pravděpodobnosti:

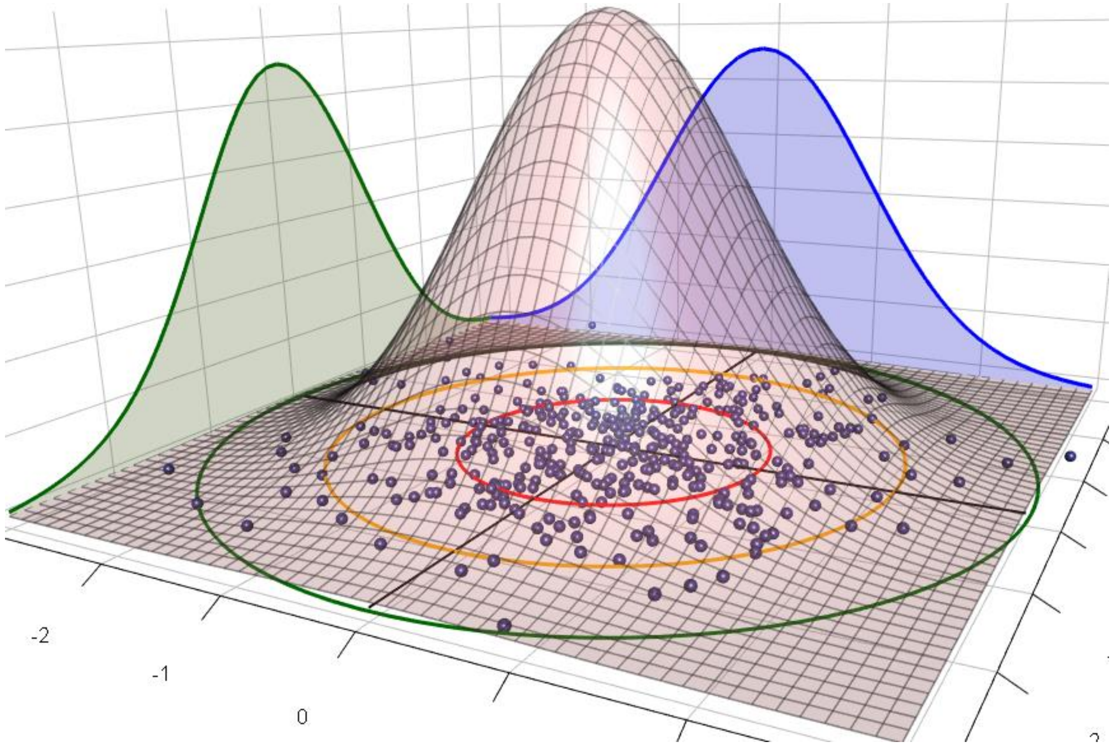
$$f_x(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy, x \in \mathbb{R} \qquad f_y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx, y \in \mathbb{R}$$

- Marginální distribuční funkce:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x,y) = F_Y(y) \qquad \lim_{y\to+\infty} F(x,y) = F_x(x)$$

Grafické znázornění





Statistické momenty náhodného vektoru

- Střední hodnoty tvoří vektor středních hodnot: $\boldsymbol{\mu} = \left[\mu_1, \ldots, \mu_n\right]^T$

- Kovarianční matice **Σ** (symetrická a positivně definitní) **je obdoba rozptylu:** $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$

$$\operatorname{cov}(x,y) = \sigma_{xy} = \int_{\mathbb{R}} f_{xy}(x,y)(x-\mu_x)(y-\mu_y)\,dxdy = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)$$

$$\operatorname{cov}(x,y) = \sigma_{xy} \approx C_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mathrm{E}(x)\right)\left(y_i - \mathrm{E}(y)\right)$$

$$\operatorname{cov}(x,y) = \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \operatorname{cov}(y,x), \sigma_{xx} = \sigma_x^2$$

Lineární závislost náhodných veličin

- náhodné veličiny jsou nezávislé, pokud platí: $f_{xy}(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y) \leftrightarrow F_{xy}(x,y) = F_x(x) \cdot F_y(y)$
- závislost náhodných veličin je vyjádřena kovariancí, po jejíž vhodné normalizaci získáme korelační koeficient (Pearson):

$$\boxed{\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \langle -1,1 \rangle}$$

- hodnoty jsou statisticky **lineárně** závislé když $\rho_{xy} \neq 0 \leftrightarrow \sigma_{xy} \neq 0$
- * hodnotám x>E(x) mají tendenci odpovídat hodnoty y>E(y) a obráceně $\rho_{xy} > 0 \leftrightarrow \sigma_{xy} > 0$
- ** hodnotám x>E(x) mají tendenci odpovídat hodnoty y<E(y) a obráceně $\rho_{xy} < 0 \leftrightarrow \sigma_{xy} < 0$
- *** žádná taková tendence není $\rho_{xy} = 0 \leftrightarrow \sigma_{xy} = 0$

Příklad 1.: Statistická závislost

Dvě vodní nádrže A,B mají výšku hladiny X a Y. Pro jejich sdruženou hustotu p-sti platí:

$$f_{xy}(x,y)=\frac{6}{5}\left(x+y^2\right) \qquad x\in\langle 0,1\rangle ; y\in\langle 0,1\rangle$$

Zjistěte, zda je mezi výškami hladin nějaká statistická závislost.

1. Stanovení marginálních hustot p-sti (kontrola distr. fce)
2. Využití vztahu pro statistickou nezávislost:

$$f_{xy}(x,y)= f_x(x)\cdot f_y(y) \leftrightarrow F_{xy}(x,y)=F_x(x)\cdot F_y(y)$$

Vlastnosti střední hodnoty a rozptylu pro funkce náhodného vektoru

Střední hodnota **μ** a její odhad **E**

$$E(c) = c$$

$$E(cX) = c \cdot E(X)$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

(X,Y NEZÁVISLÉ)

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

$$E(cX^2) = c\left(\left[E(x)\right]^2 + \left[D(x)\right]\right)$$

Rozptyl **σ²** jeho odhad **D**

$$D(aX) = a^2 D(x)$$

$$D(aX+b) = a^2 D(x)$$

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2C_{xy}$$

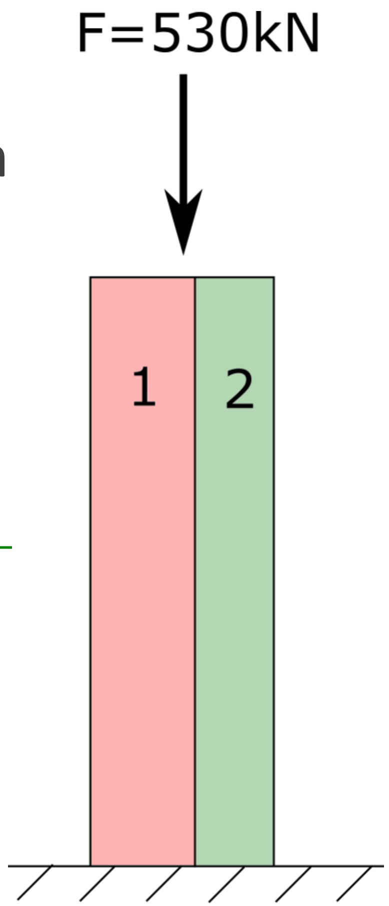
$$D(aX \pm bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y) \pm 2abC_{xy}$$

Příklad 2.: Odhad pravděpodobnosti

Mějme sloup složený ze dvou částí zatížený svislou silou **F=530kN**. Předpokládejme, že obě části nejsou propojené a budou se stejnoměrně stlačovat (síla se rozloží rovnoměrně po celé hlavě sloupu). Tuhosti jednotlivých částí v [kN/mm] jsou náhodné veličiny:

$$K_1 \sim N(200,15^2), K_2 \sim N(150,10^2), \rho_{1,2} = 0.6$$

Zjistěte, jaká je pravděpodobnost, že stlačení sloupu bude **větší něž 2mm**.



1. Stanovení vektoru středních hodnot a kovarianční matice náhodného vektoru
2. Stanovení celkové tuhosti sloupu $\mathbf{K_c}$~N(μ, σ^2)
3. Stanovení pravděpodobnosti P(K<x) (EXCEL popřípadě tabulky pro ϕ)

Příklad 3.: Stanovení korelace reakcí

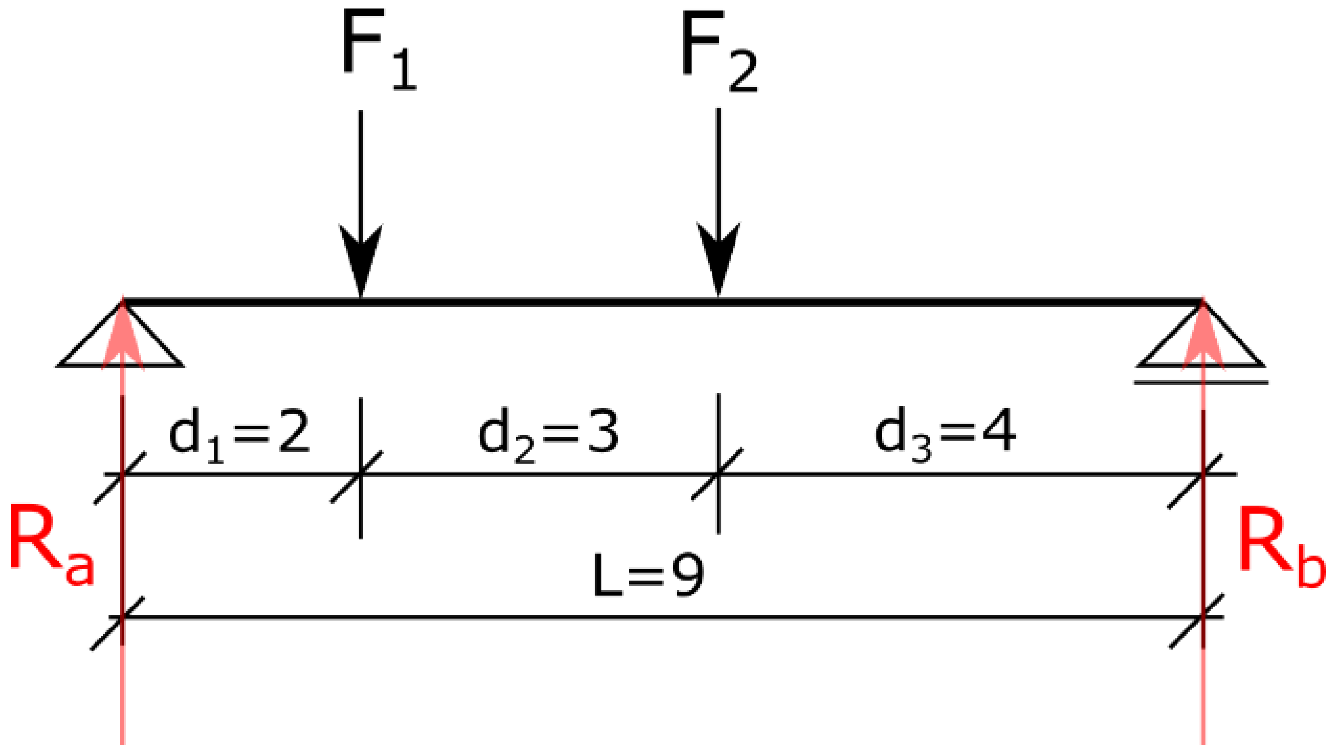
Stanovte korelaci reakcí R_a a R_b daného prostého nosníku. Síly F_1 a F_2 představují **nezávislé** náhodné veličiny s **rovnoměrným** rozdělením:

$$F_1 \sim R(9,12), F_2 \sim R(18,22)$$

1. Stanovení střední hodnoty a rozptylu pro R_a a R_b
2. Výpočet kovariance cov(R_a,R_b)

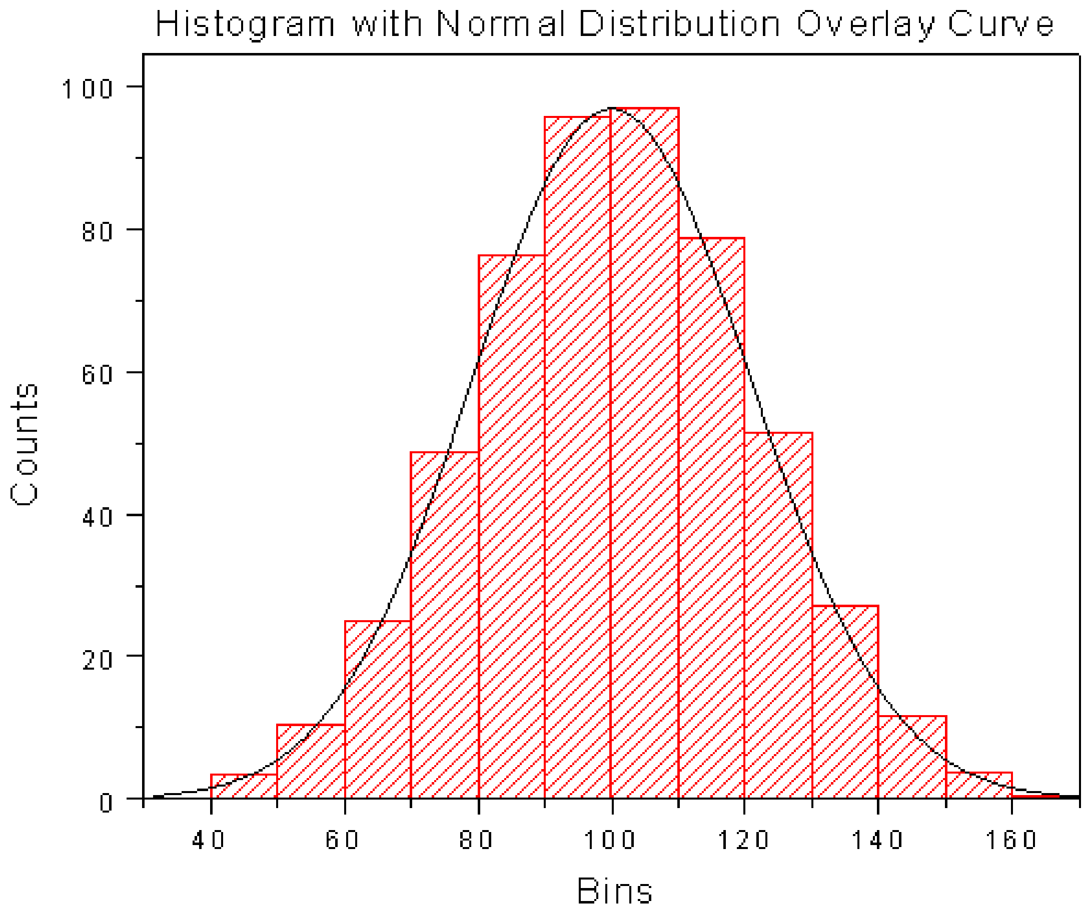
$$\mathrm{cov}(x,y) = \sigma_{xy} = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)$$

3. Výpočet korelace mezi Ra a Rb $\rho_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$



Příklad 3 numericky v Excelu: Histogram

1. Analýza získaných hodnot Ra a Rb
   - MIN(), MAX()
2. Stanovení tříd histogramu
   - Počet tříd k (např. LOG(n)*10)
   - Šířka jednotlivých tříd h=(MIN-MAX)/k
   - Tvorba hranic jednotlivých tříd
   - Určení středu intervalu
3. Četnost dat v jednotlivých třídách
   - ČETNOSTI(data, hranice) (matice)
4. Zobrazení histogramu
   - Skupinový sloupcový graf
     - Střed intervalu a četnost



Příklad 4.: Statistické zpracování dat

V laboratoři byly provedeny tlakové zkoušky betonu 50 zkušebních těles.

http://www.fce.vutbr.cz/STM/novak.l/CD004/cv3data.xlsx

Stanovte na základě obdržených dat následující :

1. Odhad střední hodnoty a variačního koeficientu
2. Vykreslete histogram relativních četností
3. Aproximujte normálním a lognormálním rozdělením $X \sim LN(\mu, \sigma^2) \leftrightarrow \ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$
4. Stanovte horní a dolní 5% kvantil pro N i LN rozdělení
5. Proveďte srovnání distribučních funkcí teoretických rozdělení s kumulativní četností experimentálních dat