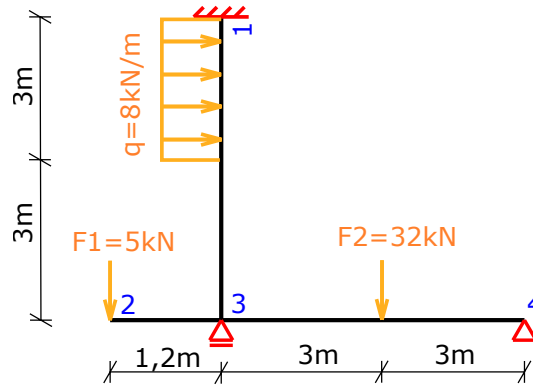
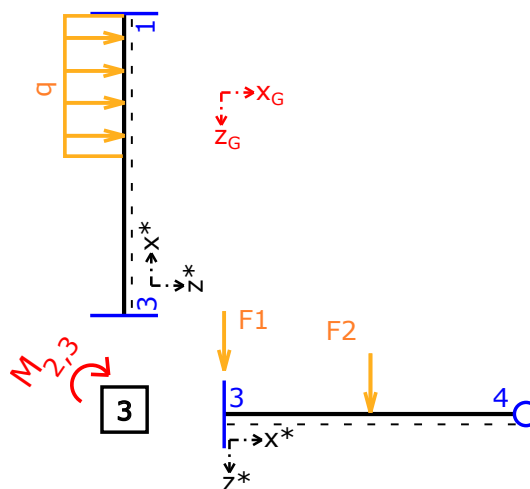


Pomocí obecné deformační metody vyřešte reakce a vykreslete vnitřní síly na konstrukci.



Jako první vytvoříme výpočtový model konstrukce:

- průřez prutů je obdélník  $0.2 \times 0.3\text{m}$ ,  $E=24\text{ GPa}$ ,  $A=0.06\text{ m}^2$ ,  $I=4.5 \times 10^{-4}\text{ m}^4$
- Prut 2-3 je převislý konec. Převislého konce se zpravidla zbavujeme, abychom snížili složitost výpočtu. Nahradíme ho silou a momentem, které vyjadřují účinky zatížení na prutu 2-3. V tomto případě přeneseme do bodu 3 sílu  $F_1=5\text{kN}$  a moment, který síla  $F_1$  způsobuje  $M_{2,3} = 5 \times 1,2 = 6\text{kNm}$ .
- Síla  $F_1$  působí v bodě 3. My ji vložíme na začátek prutu 3-4, ale také bychom ji mohli vložit na začátek prutu 3-1). Moment  $M_{2,3}$  použijeme jako uzlové zatížení v bodě 3. Ale mohli bychom ho vložit na do bodu 3 na začátek prutu 3-1 nebo i 3-4 a potom by se projevil ve vektorech primárních koncových sil. Vždy, když můžeme, ale raději zatížení vkládáme do uzlových zatížení, protože nám to zjednoduší výpočet.
- Svislý prut volíme ve směru 3→1 jako oboustranně vetknutý: v bodě 3 je monoliticky spojen s prutem 3-4 a v bodě 1 je vetknutí.
- Vodorovný prut volíme jako levostranně vetknutý a pravostranně kloubově uložený.
- Je vidět, že každý z prutů má jiný směr a tedy i jiný směr vlastního lokálního souřadného systému (LSS), viz obrázek. Lokální souřadný systém prutu 3-4 je shodný s globálním souřadným systémem - červeně.
- U prutu 3-1 tedy budeme muset provádět transformace zatížení a matice tuhosti do globálního souřadného systému.
- Výpočtový model je tedy  $2 \times$  přetvárně neurčitý - naše neznámé deformace jsou vodorovný posun  $u_3$  a otočení  $\varphi_3$ . Později tak budeme řešit soustavu dvou rovnic o těchto dvou neznámých.



## Obecná deformační metoda

Nejdříve sestavíme vektor našich neznámých parametrů deformace

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ? \\ ? \end{Bmatrix}$$

Vektor uzlových zatížení obsahuje pouze známá zatížení působící ve směrech neznámých deformací  $u_3$  a  $\varphi_3$ . Ostatní zatížení se projeví později jinde - ve vektorech primárních koncových sil.

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} X_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

### Lokální matice tuhosti prutů

Později zjistíme, že u lokálních matic tuhosti potřebujeme vypočítat pouze:

- hodnoty ve sloupcích neznámých deformací  $u_3$  a  $\varphi_3$  v řádcích neznámých uzlových sil  $X_3$  a  $M_3$ . To v případě, že úkolem je pouze vyřešit hodnoty neznámých deformací.
- všechny hodnoty v některých sloupcích neznámých deformací. To v případě, kdy je úkolem vyřešit kompletně reakce a vykreslit vnitřní síly.
- každopádně jen velmi zřídka je potřeba vyčíslovat všechny hodnoty lokálních matic tuhosti. Je výhodné si přesto na začátku připravit místo pro všechny hodnoty v maticích a podle potřeby si zpětně doplnit potřebné hodnoty (uvidíme i zde na konci výpočtu).

### Lokální matice tuhosti prutu 3,1 - TAB 8.3a

$$[K_{3,1}^*] = \begin{bmatrix} u_3 & w_3 & \varphi_3 & u_1 & w_1 & \varphi_1 \\ \mathbf{240000} & 0 & \mathbf{0} & -240000 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & -1800 & 0 & -600 & -1800 \\ \mathbf{0} & -1800 & \mathbf{7200} & 0 & 1800 & 3600 \\ -2400000 & 0 & 0 & 240000 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & 1800 & 0 & 600 & 1800 \\ 0 & -1800 & 3600 & 0 & 1800 & 7200 \end{bmatrix} \begin{matrix} X_3 \\ Z_3 \\ M_3 \\ X_1 \\ Z_1 \\ M_1 \end{matrix}$$

### Lokální matice tuhosti prutu 3,4 - TAB 8.3b

$$[K_{3,4}^*] = \begin{bmatrix} u_3 & w_3 & \varphi_3 & u_4 & w_4 & \varphi_4 \\ \mathbf{240000} & 0 & \mathbf{0} & -240000 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & -1800 & 0 & -150 & 0 \\ \mathbf{0} & -1800 & \mathbf{5400} & 0 & 900 & 0 \\ -2400000 & 0 & 0 & 240000 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & 900 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} X_3 \\ Z_3 \\ M_3 \\ X_4 \\ Z_4 \\ M_4 \end{matrix}$$

### Globální matice tuhosti prutů

- u globálních matic tuhosti potřebujeme vyčíslit **pouze** hodnoty ve sloupcích neznámých deformací  $u_3$  a  $\varphi_3$  v řádcích neznámých uzlových sil  $X_3$  a  $M_3$ .

**Globální matice tuhosti prutu 3,1 - TAB** matice tuhosti šikmých prutů (a), úhel  $\gamma = 270^\circ$

$$[K_{3,1}^G] = \begin{bmatrix} u_3 & w_3 & \varphi_3 & u_1 & w_1 & \varphi_1 \\ \mathbf{600} & \approx \approx \approx & \mathbf{-1800} & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx \\ \approx \approx \approx & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx \\ \mathbf{-1800} & \approx \approx \approx & \mathbf{-7200} & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx \\ \approx \approx \approx & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx \\ \approx \approx \approx & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx \\ \approx \approx \approx & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx & \approx \approx \approx \end{bmatrix} \begin{matrix} X_3 \\ Z_3 \\ M_3 \\ X_1 \\ Z_1 \\ M_1 \end{matrix}$$

**Globální matice tuhosti prutu 3,4** je shodná s lokální maticí prutu, nemusíme nic počítat.

$$[K_{3,4}^G] = [K_{3,4}^*] = \begin{bmatrix} u_3 & w_3 & \varphi_3 & u_1 & w_1 & \varphi_1 \\ \mathbf{240000} & 0 & \mathbf{0} & -240000 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & -1800 & 0 & -150 & 0 \\ \mathbf{0} & -1800 & \mathbf{5400} & 0 & 900 & 0 \\ -240000 & 0 & 0 & 240000 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & 900 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} X_3 \\ Z_3 \\ M_3 \\ X_4 \\ Z_4 \\ M_4 \end{matrix}$$

### Primární lokální vektory koncových sil

Potřebujeme vyčíslit:

- pouze v řádcích sil působících ve směrech neznámých parametrů deformace (tj.  $X_3$  a  $M_3$ ], pokud je cílem pouze vyřešit hodnoty neznámých deformací  $u_3$  a  $\varphi_3$ ,
- všechny hodnoty. To v případě, kdy je úkolem vyřešit kompletně reakce a vykreslit vnitřní síly.

### Primární lokální vektory koncových sil prutu 3,1 a 3,4

- $\{\bar{R}_{3,4}^*\} \rightarrow \text{TAB 8.1a/8}$
- $\{\bar{R}_{3,4}^*\} \rightarrow \text{TAB 8.1b/2} + \text{TAB 8.1.b/1}$

$$\{\bar{R}_{3,1}^*\} = \begin{Bmatrix} X_3 \\ Z_3 \\ M_3 \\ X_1 \\ Z_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -4,5 \\ \mathbf{7,5} \\ 0 \\ -19,5 \\ -16,5 \end{Bmatrix} \quad \{\bar{R}_{3,4}^*\} = \begin{Bmatrix} X_3 \\ Z_3 \\ M_3 \\ X_4 \\ Z_4 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -24 \\ \mathbf{36} \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### Globální vektory primárních sil prutů 3,1 a 3,4

Podobně jako u globálních matic tuhosti zde potřebujeme vyčíslit pouze řádky neznámých uzlových sil  $X_3$  a  $M_3$ .

$$\{\bar{R}_{3,1}^*\} = \begin{Bmatrix} X_3 \\ Z_3 \\ M_3 \\ X_1 \\ Z_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{-4,5} \\ 0 \\ \mathbf{7,5} \\ -19,5 \\ 0 \\ -16,5 \end{Bmatrix} \quad \{\bar{R}_{3,4}^G\} = \{\bar{R}_{3,4}^*\} = \begin{Bmatrix} X_3 \\ Z_3 \\ M_3 \\ X_4 \\ Z_4 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -27 \\ \mathbf{36} \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### Sestavení globální matice tuhosti konstrukce

Globální matici tuhosti celé konstrukce sestavíme tak, že sečteme hodnoty v globálních maticích jednotlivých prutů, které se vztahují k neznámým deformacím  $u_3$  a  $\varphi_3$  v řádcích neznámých uzlových sil  $X_3$  a  $M_3$ .

$$[K^G] = [K_{3,1}^G] + [K_{3,4}^G] = \begin{bmatrix} u_3 & \varphi_3 \\ \mathbf{240600} & \mathbf{-1800} \\ \mathbf{-1800} & \mathbf{12600} \end{bmatrix} \begin{matrix} X_3 \\ M_3 \end{matrix}$$

### Vektor primárních koncových sil konstrukce

Vektor primárních koncových sil konstrukce sestavíme tak, že sečteme hodnoty v primárních vektorech koncových sil jednotlivých prutů v řádcích neznámých uzlových sil  $X_3$  a  $M_3$ .

$$\{\bar{R}^G\} = \{\bar{R}_{3,1}^G\} + \{\bar{R}_{3,4}^G\} = \begin{Bmatrix} X_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4,5 \\ 43,5 \end{Bmatrix}$$

**Zatěžovací vektor konstrukce**

$$\{F\} = \{s\} - \{\bar{R}\} = \begin{Bmatrix} 4,5 \\ -37,5 \end{Bmatrix}$$

**Soustava rovnic**

$$[K] \cdot r = F$$

$$\begin{bmatrix} 240600 & -1800 \\ -1800 & 12600 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4,5 \\ -37,5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 240600 \cdot u_3 - 1800 \cdot \varphi_3 &= 4,5 \\ -1800 \cdot u_3 + 12600 \cdot \varphi_3 &= -37,5 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} u_3 = -3,566 \times 10^{-6} \text{ m} \\ \varphi_3 = -2,977 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{cases}$$

Zde příklad končí, pokud je zadáním vyřešit hodnoty neznámých deformací. My pokračujeme dále k vyřešení reakcí a průběhů vnitřních sil.

**Lokální vektory koncových deformací**

Ze soustavy rovnic jsme získali hodnoty neznámých parametrů deformace **v globálním souřadném systému**. Pro každý z prutů potřebujeme vyřešené deformace transformovat do jeho LSS a vypočítat jeho lokální vektor koncových deformací.

Prut 3-1 má svůj LSS jiného směru než GSS a proto musíme deformace transformovat pomocí **TAB Transformace vektorů** z globálních do lokálních souřadnic:

$$\{r_{3,1}^G\} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \\ u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3,566 \times 10^{-6} \\ 0 \\ -2,977 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{r_{3,1}^*\} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \\ u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3,566 \times 10^{-6} \\ -2,977 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Lokální souřadný systém prutu 3-4 je shodný s GSS a proto můžeme přímo psát:

$$\{r_{3,4}^G\} = \{r_{3,4}^*\} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \\ u_4 \\ w_4 \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3,566 \times 10^{-6} \\ 0 \\ -2,977 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Dopočet lokálních vektorů sekundárních koncových sil**

Lokální vektory sekundárních koncových sil vyčíslíme pro každý prut jako  $\hat{R}_{a,b}^* = [K_{a,b}^*] \cdot \{r_{a,b}^*\}$ . V případě prutu 3-1 je vidět, že budeme potřebovat hodnoty sloupce  $w_3$ . Pokud jsme si je na začátku nevyčíslili, je potřeba je nyní dopočítat.

**Prut 3-1**

$$\{\hat{R}_{3,1}^*\} = \begin{bmatrix} u_3 & w_3 & \varphi_3 & u_1 & w_1 & \varphi_1 \\ 240000 & 0 & 0 & -240000 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & -1800 & 0 & -600 & -1800 \\ 0 & -1800 & 7200 & 0 & 1800 & 3600 \\ -2400000 & 0 & 0 & 240000 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & 1800 & 0 & 600 & 1800 \\ 0 & -1800 & 3600 & 0 & 1800 & 7200 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -3,566 \times 10^{-6} \\ -2,977 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\hat{R}_{3,1}^*\} = \begin{Bmatrix} X_3 \\ Z_3 \\ M_3 \\ X_1 \\ Z_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \cdot w_3 + 0 \cdot \varphi_3 \\ 600 \cdot w_3 - 1800 \cdot \varphi_3 \\ -1800 \cdot w_3 + 7200 \cdot \varphi_3 \\ 0 \cdot w_3 + 0 \cdot \varphi_3 \\ -600 \cdot w_3 + 1800 \cdot \varphi_3 \\ -1800 \cdot w_3 + 3600 \cdot \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 5,356 \\ -2,977 \times 10^{-6} \\ 0 \\ -5,356 \\ -20,711 \end{Bmatrix}$$

**Prut 3-4**

$$\{\hat{R}_{3,4}^*\} = \begin{bmatrix} u_3 & w_3 & \varphi_3 & u_4 & w_4 & \varphi_4 \\ 240000 & 0 & 0 & -240000 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & -1800 & 0 & -150 & 0 \\ 0 & -1800 & 5400 & 0 & 900 & 0 \\ -2400000 & 0 & 0 & 240000 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & 900 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -3,566 \times 10^{-6} \\ 0 \\ -2,977 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

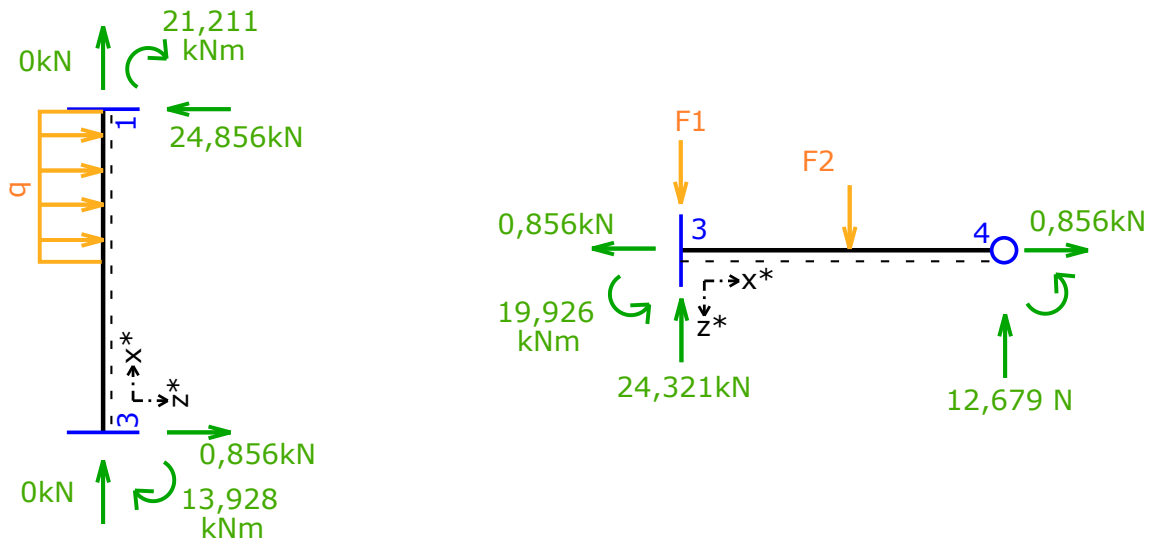
$$\{\hat{R}_{3,4}^*\} = \begin{Bmatrix} X_3 \\ Z_3 \\ M_3 \\ X_4 \\ Z_4 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 240000 \cdot u_3 + 0 \cdot \varphi_3 \\ 0 \cdot u_3 - 900 \cdot \varphi_3 \\ 0 \cdot u_3 + 5400 \cdot \varphi_3 \\ -240000 \cdot w_3 + 0 \cdot \varphi_3 \\ 0 \cdot u_3 + 900 \cdot \varphi_3 \\ 0 \cdot u_3 + 0 \cdot \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,856 \\ 2,679 \\ -16,076 \\ 0,856 \\ 2,679 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Dopočet lokálních vektorů koncových sil**

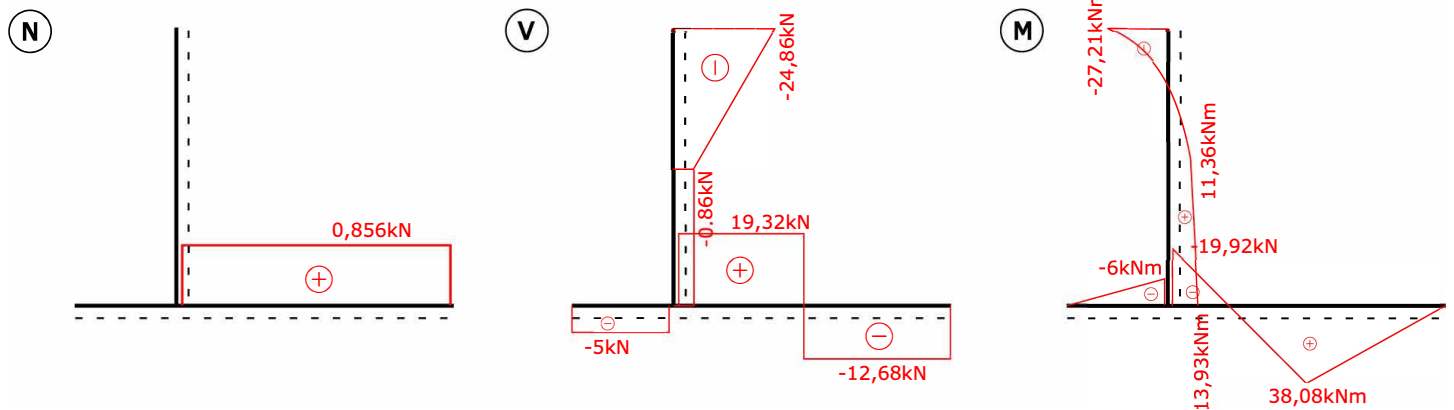
$$\{R_{3,1}^*\} = \{\bar{R}_{3,1}^*\} + \{\hat{R}_{3,1}^*\} = \begin{Bmatrix} X_3 \\ Z_3 \\ M_3 \\ X_1 \\ Z_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,856 \\ -13,928 \\ 0 \\ -24,856 \\ -27,211 \end{Bmatrix}$$

$$\{R_{3,4}^*\} = \{\bar{R}_{3,4}^*\} + \{\hat{R}_{3,4}^*\} = \begin{Bmatrix} X_3 \\ Z_3 \\ M_3 \\ X_4 \\ Z_4 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,856 \\ -24,321 \\ 19,926 \\ 0,586 \\ -12,679 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Konstrukci nyní zatížíme v daných uzlech koncovými silami (a momenty) podle konvence daného prutu. Každý prut řešíme zvlášť. Už není třeba řešit reakce. Pouze vykreslíme průběhy vnitřních sil



Na jednotlivých prutech dopočítáme průběhy vnitřních sil



Výsledné reakce můžeme zjistit z průběhů vnitřních sil, respektive z hodnot koncových sil v jednotlivých uzlech.