

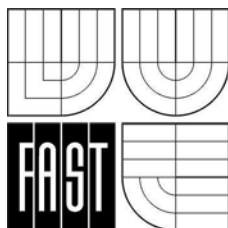
**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**  
**FAKULTA STAVEBNÍ**

---

**ING. JIŘÍ KYTÝR, CSc.**  
**ING. PETR FRANTÍK, Ph.D.**

# **STATIKA I**

**MODUL BD03-MO1**  
**ROZŠÍŘENÝ PRŮVODCE**



**STUDIJNÍ OPORY**  
**PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA**

---

Vážení uživatelé tohoto učebního textu,

dovolujeme si Vás požádat o malé strpení pro využívání této učební pomůcky pro Vaše studium. Při závěrečné kontrole byly navrženy další vylepšující úpravy, které přispějí ke zlepšení kvality učebního textu. Rovněž je potřebné provést formální úpravy, a to zejména nové přečíslování rovnic, obrázků i tabulek, aby se shodovaly s označením kapitol.

Z časových důvodů však nebylo možné úpravy dosud realizovat. Předpokládáme, že opravy provedeme začátkem roku 2006. Posečkejte proto prosím se stahováním a používáním, **do-  
kud nezmizí tento upozorňující text.**

Děkují autoři

# OBSAH

<b>1 Úvod</b> .....	<b>5</b>
1.1 Cíle.....	5
1.2 Požadované znalosti.....	5
1.3 Doba potřebná ke studiu.....	5
1.4 Klíčová slova.....	5
<b>2 Úvod do statiky stavebních konstrukcí</b> .....	<b>7</b>
2.1 Prutové konstrukce.....	7
<b>3 Výpočet přetvoření prutových soustav</b> .....	<b>11</b>
3.1 Virtuální veličiny a virtuální práce.....	12
3.1.1 Virtuální práce vnějších sil.....	12
3.1.2 Virtuální práce vnitřních sil.....	13
3.2 Lagrangeův princip virtuálních prací.....	15
3.3 Věty o vzájemnosti virtuálních prací.....	16
3.3.1 Bettiho věta.....	16
3.3.2 Maxwellovy věty.....	16
3.4 Výpočet deformací metodou jednotkových sil.....	17
3.4.1 Zjednodušení výpočtu deformací plnostěnných nosníků.....	18
3.4.2 Vereščaginovo pravidlo.....	18
3.4.3 Výpočet deformací příhradových soustav.....	19
3.5 Ilustrující příklad.....	20
<b>4 Silová metoda</b> .....	<b>23</b>
4.1 Stupeň statické neurčitosti.....	23
4.2 Řešení rovinného rámu.....	25
4.2.1 Obecně řešený příklad.....	26
4.2.2 Kanonické rovnice.....	27
4.2.3 Výpočet přetvárných součinitelů.....	28
4.2.4 Určení vnitřních sil.....	28
4.3 Ilustrující příklad.....	29
4.4 Deformační zatížení.....	32
4.4.1 Vliv změny teploty.....	32
4.4.2 Dané popuštění podpor rámu.....	33
4.5 Řešení spojitého nosníku.....	34
4.6 Využití symetrie rámu.....	39
<b>5 Tabulky</b> .....	<b>43</b>
<b>6 Studijní prameny</b> .....	<b>49</b>
6.1 Seznam použité literatury.....	49
6.2 Seznam doplňkové studijní literatury.....	49
6.3 Odkazy na další studijní zdroje a prameny.....	49



# 1 Úvod

## 1.1 Cíle

Úkolem předmětu Statika I je zvládnout řešení prutových konstrukcí základní metodou, a to metodou silovou. Metoda sice není prakticky vhodná pro řešení rozsáhlejších staticky neurčitých prutových konstrukcí, ale je velmi přehledná a poskytuje řešení základních přetvárně určitých případů (primárního i sekundárního stavu) pro analýzu prutových konstrukcí další metodou, a to deformační metodou, která bude obsahem předmětu Statika II.



Naším cílem bude řešení nosných staticky neurčitých prutových stavebních konstrukcí a získání průběhů vnitřních sil i složek reakcí jako prostředek pro jejich dimenzování podle jednotlivých materiálů.

## 1.2 Požadované znalosti

Ve Statice I se navazuje zejména na znalosti získané v předmětu Základy stavební mechaniky (řešení průběhů vnitřních sil) a v předmětu Pružnost a pevnost. Studenti by měli být obeznámeni se základními operacemi z integrálního počtu.



Z matematického aparátu využijeme zejména goniometrické funkce, vektorový a maticový počet i řešení soustav lineárních algebraických rovnic.

## 1.3 Doba potřebná ke studiu

Modul představuje rozšířený průvodce a obsahuje základní látku probíranou v průběhu téměř celého semestru. Doba potřebná k nastudování jednotlivých kapitol či odstavců se liší od několika desítek minut až po hodiny. Záleží zejména na předchozí přípravě studenta ve výše citovaných předcházejících předmětech, ale i na obtížnosti daného tématu. Potřebná doba ke studiu činí 40 až 50 hodin.



## 1.4 Klíčová slova

mechanika, statika, síla, reakce, interakce, rovnováha, poddajnost, tuhost, vektor, matice, modul pružnosti, momenty setrvačnosti, transformace, prut, prutová soustava, nosník, rám, příhradová konstrukce





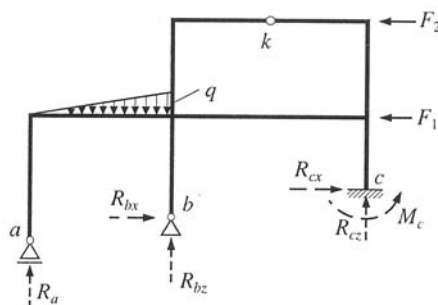
## 2 Úvod do statiky stavebních konstrukcí

Statika stavebních konstrukcí je nauka o výpočtech stavebních konstrukcí. Každá stavební konstrukce musí bezpečně přenést veškeré zatížení, nesmí se přitom porušit, nesmí doznat nepřipustných tvarových změn a musí být stabilní. Část konstrukce, zajišťující potřebnou odolnost a tuhost stavebního díla, nazýváme *nosnou konstrukcí*. Nosná konstrukce sestává z řady různých prvků. Ve statické stavebních konstrukcí se omezuje na analýzu pouze takových konstrukcí, jejichž statický model lze vytvořit pouze z prutů. Nazýváme je *prutovými soustavami*. V dalších úvahách budeme předpokládat dokonale lineární pružný materiál.



V Základech stavební mechaniky jsme řešili staticky určité prutové konstrukce, k jejichž analýze postačují statické podmínky rovnováhy. Obsahem statiky stavebních konstrukcí jsou především **výpočty staticky neurčitých prutových konstrukcí**. K jejich řešení už nevystačíme s podmínkami rovnováhy, ale musíme předepsat ještě přetvárné podmínky. K řešení staticky neurčitých konstrukcí se používají dvě základní metody, a to metoda silová (probírá se ve Staticce I) a metoda deformační (je obsahem předmětu Statika II).

Každá konstrukce se účinkem zatížení přetvoří. Přetvoření (deformace) se projevuje posuny a pootočeními jednotlivých částí stavebních konstrukcí. Přetvoření jsou většinou, vzhledem k rozměrům konstrukcí, velmi malá.

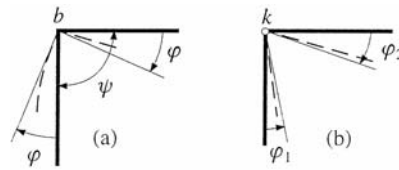


Obr. 3.2: Rovinný uzavřený rám

### 2.1 Prutové konstrukce

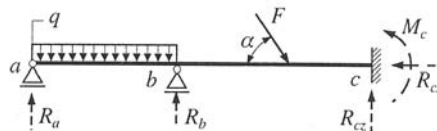
Rám je prutová soustava s monolitickým (tuhým) spojením prutů. Ve statickém modelu idealizujeme jak nosné prvky, tak i jejich spojení a spolupůsobení. Místo, kde se pruty spojují, nazýváme uzel (*styčník*). Pruty bývají většinou v uzlu spojeny tuze, anebo mohou být také připojeny kloubem. Tuhé spojení (obr. 6.1a) zaručuje stejné přemístění (posunutí i pootočení) všech konců připojených prutů při deformaci a přenáší ohybové momenty. Kloubové spojení (obr. 6.1b) zaručuje pouze stejné posunutí, pootočení konců připojených prutů jsou nezávislá a ohybové momenty jsou nulové.

U **rovinného rámu** (obr. 3.2) leží v jedné rovině střednice všech prutů, zatížení, reakce a interakce a rovněž jedna z hlavních centrálních os setrvačnosti průřezů všech prutů. Rám je typickým představitelem staticky neurčité prutové konstrukce. Jako speciální případ rámu se vyskytuje spojitý nosník (obr. 3.1) a příhradový nosník (obr. 3.3).

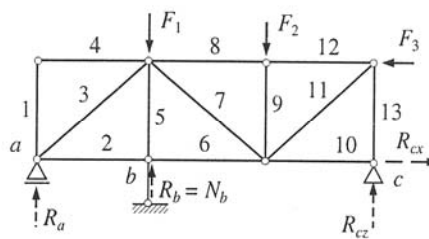


Obr. 6.1: Uzel (styčník) rovinného rámu

Rozlišujeme rámy s pruty přímými (obr. 6.2 a 6.4) nebo zakřivenými (obr. 6.3), rámy pravoúhlé (obr. 6.2 a 6.5) či kosoúhlé (obr. 6.4), jednoduché (obr. 6.4), sdružené (obr. 6.3) nebo patrové (obr. 6.2, 6.5 a 6.6), otevřené (obr. 6.3 a 6.4) či uzavřené (obr. 6.5, 6.6 a 6.7), rámy s neprůběžnými pruty (obr. 6.5 a 6.6).

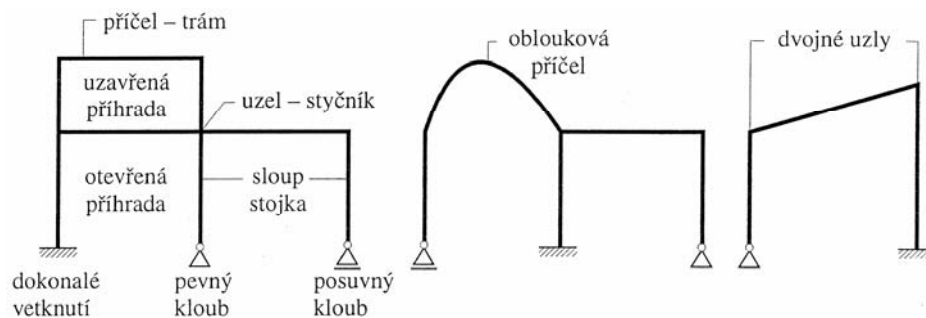


Obr. 3.1: Spojitý plnostěnný nosník



Obr. 3.3: Spojitý příhradový nosník

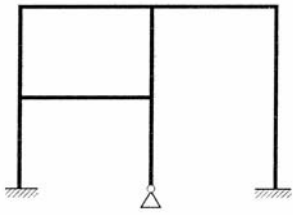
Z termínů používaných u prutových konstrukcí uvedme nejzákladnější. Sloup (stojka) je svislý prut, příčel (trám) je vodorovný prut. Prut může být přímý, lomený či zakřivený (oblouk). Vnější vazby (obr. 6.2) mohou být jednonásobné (kyvný prut, posuvná kloubová podpora), dvojnásobné (neposuvný kloub, posuvné vetknutí), trojnásobné (dokonalé vetknutí).



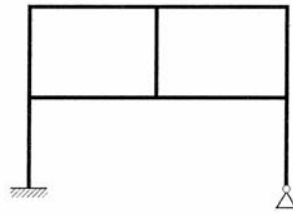
Obr. 6.2: Patrový rám

Obr. 6.3: Sdružený rám Obr. 6.4: Jednoduchý kosoúhlý rám s obloukovou příčelí

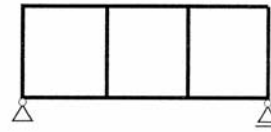




Obr. 6.5: Patrový rám s neprůběžnou příčlím



Obr. 6.6: Patrový rám s neprůběžným sloupem



Obr. 6.7: Vierendeelův rámový nosník

### Otázky

1. Čím se zabývá statika stavebních konstrukcí?
2. Charakterizujte rovinnou prutovou soustavu.
3. Čím se liší rám, spojitý nosník a příhradový nosník?
4. Co zajišťuje monolitické a kloubové spojení prutů ve styčnicku?
5. Funkce vnitřního kloubu v prutové soustavě.



### Shrnutí

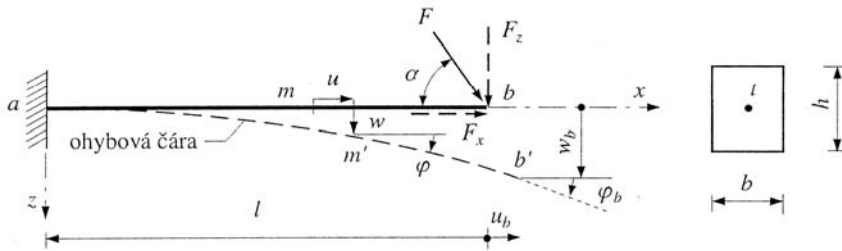
V této úvodní kapitolce jsme si vymezili obsah předmětu a naznačili rozdělení rámových a ostatních prutových konstrukcí.





### 3 Výpočet přetvoření prutových soustav

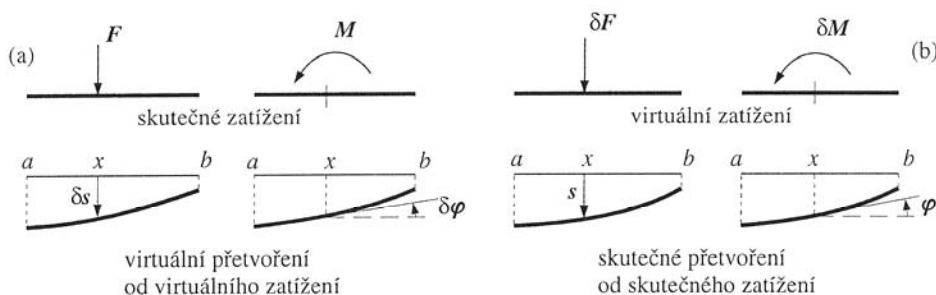
Při vyšetřování nosných stavebních konstrukcí sledujeme nejen průběhy vnitřních sil a napětí, ale také deformace (přetvoření). Ty je důležité posoudit jak z hlediska funkčnosti konstrukce, tak i z hlediska estetického, aby nedocházelo k viditelným geometrickým změnám. V některých případech postačí určit diskrétní hodnoty složek přemístění (posuny, potočení), jindy potřebujeme znát průběh ohybové čáry celého prutu.



Obr. 3.1: Deformace rovinné plnostěnné konzoly

Pro řešení přetvoření staticky určitých prutových konstrukcí (obr. 3.1) se používají tyto metody:

- aplikace *principu virtuálních prací*, tzv. **metoda jednotkových sil**, umožňující určit složky přemístění v diskrétních bodech plnostěnných i příhradových nosníků; metoda je předmětem této kapitoly a její princip je použit pro řešení staticky neurčitých prutových soustav *silovou metodou* (viz kapitola 4),
- *Mohrova metoda* pro získání diskrétních hodnot deformací, probraná v předmětu Pružnost a pevnost,
- metoda *integrace diferenciální rovnice* ohybové čáry (popř. s Clebschovou úpravou integračního postupu) pro získání funkcí ohybové čáry nebo sklonů tečen k ohybové čáře, probraná rovněž v předmětu Pružnost a pevnost,
- *Castiglianova metoda* vycházející z minima přetvárné práce, která se při uplatnění pomocné doplňkové síly ztotožní s metodou jednotkových sil.



Obr. 3.2: Virtuální práce síly a momentu

### 3.1 Virtuální veličiny a virtuální práce

Virtuální veličiny (označené symbolem  $\delta$  nebo později pruhem) představují virtuální přetvoření a virtuální zatížení, resp. virtuální práci. *Virtuální přetvoření* ( $\delta\mathbf{s}$ ,  $\delta\boldsymbol{\varphi}$ ) je velmi malé, fiktivní, myšlené, ale fyzicky možné, vyvolané virtuálním zatížením (obr. 3.2a). Nastává v souladu s vnějšími a vnitřními vazbami. *Virtuální zatížení* ( $\delta\mathbf{F}$ ,  $\delta\mathbf{M}$ ) je fiktivní, myšlené, ale možné zatížení, neomezené velikosti (nejčastěji volené *jednotkové*), viz obr. 3.2b.

**Virtuální práce** síly (resp. momentu) je práce virtuální síly  $\delta\mathbf{F}$  (resp. virtuálního momentu  $\delta\mathbf{M}$ ) na skutečném posunutí  $\mathbf{s}$  (pootočení  $\boldsymbol{\varphi}$ )

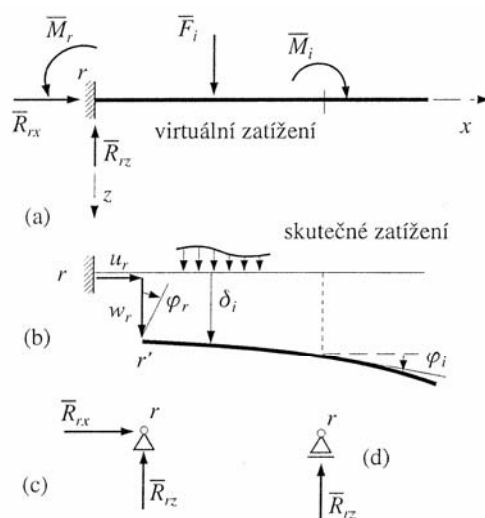
$$\delta L = \delta\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = \delta F s. \quad (1.1)$$

Virtuální práce reálné síly  $\mathbf{F}$  (resp. momentu  $\mathbf{M}$ ) na virtuálním posunutí  $\delta\mathbf{s}$  (resp. pootočení  $\delta\boldsymbol{\varphi}$ )

$$\delta L = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{s} = F \delta s. \quad (1.3)$$

Virtuální práce má kladnou hodnotu, je-li souhlasný smysl síly a deformace. V dalším textu jsou virtuální veličiny z důvodu odlišení obecné deformace (složky přemístění)  $\delta$  od symbolu virtuálních veličin  $\delta$  označeny pruhem, tedy

$$\delta\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}}, \quad \delta\mathbf{s} = \bar{\mathbf{s}} = \bar{\boldsymbol{\delta}}, \quad \delta L = \bar{L} = L.$$



Obr. 3.3: Rovinný nosník

#### 3.1.1 Virtuální práce vnějších sil

Soustava vnějších virtuálních sil, tj. zatížení  $F_i$ ,  $M_i$ , či reakcí  $R_{rx}$ ,  $R_{rz}$ ,  $M_r$  (obr. 3.3), koná virtuální práci na skutečných deformacích ( $\delta_i$ ,  $\varphi_i$ ,  $u_r$ ,  $w_r$ ,  $\varphi_r$ ) vyvolaných libovolným skutečným silovým zatížením ( $F$ ,  $M$ ,  $q$ ,  $n$ ,  $m$ ) nebo deformačním zatížením (popuštěním)

- od virtuálního zatížení

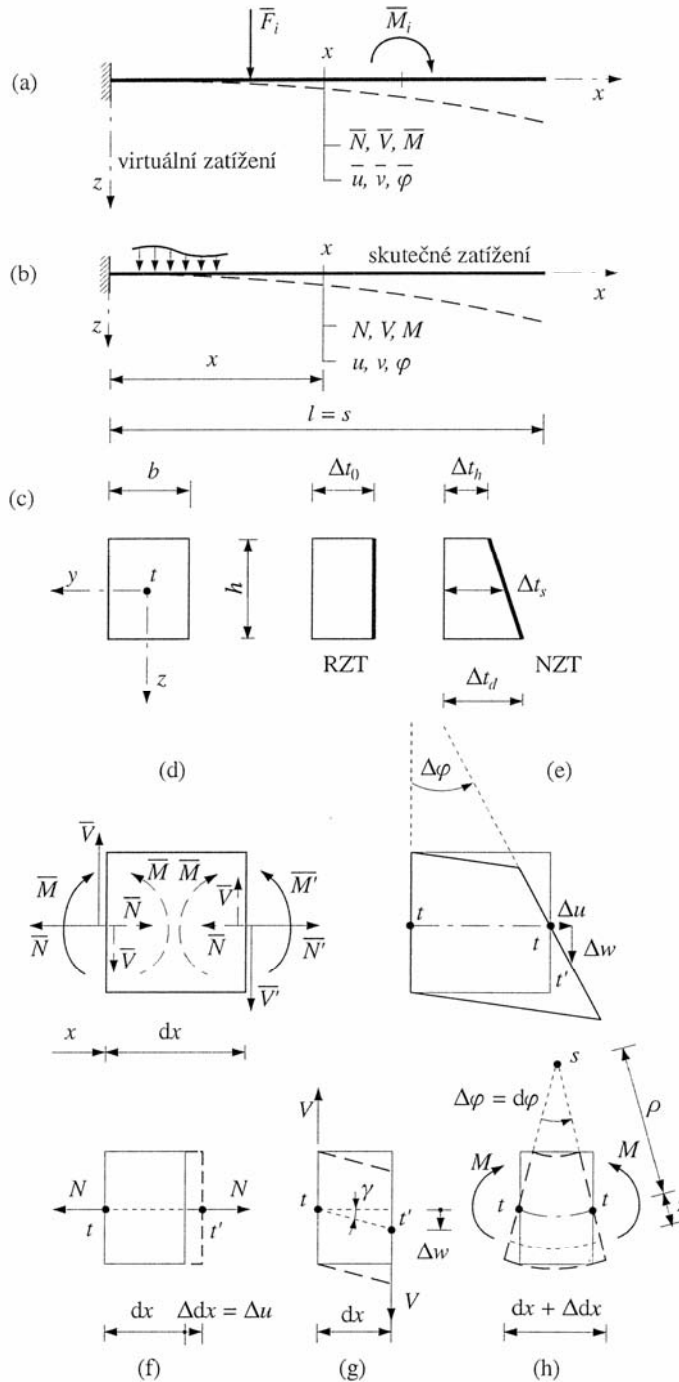
$$L_{ez} = \sum \bar{F}_i \delta_i + \sum \bar{M}_i \delta_i, \quad (1.5)$$

- od virtuálních složek reakcí (u pružně poddajných podpor nebo u popuštění)

$$L_{er} = \sum (\bar{R}_{rx} u_r + \bar{R}_{rz} w_r + \bar{M}_r \varphi_r) = \sum \bar{R}_r \delta_r, \quad (1.6)$$

takže celková virtuální práce vnějších (externích) sil je

$$L_e = L_{ez} + L_{er} = \sum \bar{F}_i \delta_i + \sum \bar{M}_i \varphi_i + \sum \bar{R}_r \delta_r. \quad (1.7)$$



Obr. 3.4: Přetvoření prvku přímého nosníku

### 3.1.2 Virtuální práce vnitřních sil

Virtuální zatížení  $(\bar{F}_i, \bar{M}_i)$  vyvolá v libovolném průřezu  $x$  (obr. 3.4a) virtuální vnitřní síly  $\bar{N}, \bar{V}, \bar{M}$ . Kladné složky virtuálních vnitřních sil uvažujeme podle

konvence (obr. 3.4d), přičemž předpokládáme  $\bar{N} = \bar{N}'$ ,  $\bar{V} = \bar{V}'$ ,  $\bar{M} = \bar{M}'$ . Kladné virtuální vnitřní síly  $\bar{N}$ ,  $\bar{V}$ ,  $\bar{M}$  konají zápornou virtuální práci na kladných deformacích  $\Delta u$ ,  $\Delta w$ ,  $\Delta \varphi$  (obr. 3.4b) od skutečného zatížení (silového či deformačního), takže

$$L_i = -\int_0^l (\bar{N}\Delta u + \bar{V}\Delta w + \bar{M}\Delta \varphi). \quad (3. \dots)$$

Přetvoření prutového elementu  $dx$  od vlivu skutečného zatížení (vnitřních sil  $N$ ,  $V$ ,  $M$  a změny teploty) vyšetřujeme samostatně na

- osově namáhání (vliv normálové síly a rovnoměrné změny teploty),
- příčný smyk (vliv posouvající síly),
- ohyb (vliv ohybového momentu a rovnoměrné změny teploty).
- **Osově namáhání**

Při osovém namáhání (obr. 3.4f, c) je celkové prodloužení od tahové osově síly  $N$  a od rovnoměrného oteplení  $\Delta t_0$  dáno výrazem

$$\Delta dx = \Delta u = \Delta u_N + \Delta u_t = \frac{N dx}{EA} + \alpha_t \Delta t_0 dx, \quad (1.10)$$

kde  $A$  je průřezová plocha prutu,  $E$  modul pružnosti v tahu a tlaku,  $\alpha_t$  součinitel tepelné roztažnosti,  $\Delta t_0$  je přírůstek teploty pro rovnoměrnou změnu.

- **Příčný smyk**

U **příčného smyku** platí pro vzájemné příčné posunutí od posouvající síly  $V$  (obr. 3.4g)  $\Delta w = \gamma dx$ , takže nakonec získáme vztah

$$\Delta w = \kappa \frac{V dx}{GA}, \quad (1.14)$$

kde  $G$  je modul pružnosti ve smyku,  $\kappa$  koeficient vlivu nerovnoměrného rozdělení smykového napětí po výšce průřezu (např. pro obdélník  $\kappa = 1,2$  a pro kruh  $\kappa = 35/27$ ),  $\tau_s$  je střední hodnota smykového napětí v průřezu.

Přetvoření vlivem posouvající síly se často u běžných prutů *zanedbává*, nutno ho však respektovat u vysokých nosníků ( $h \gg b$ ).

- **Ohyb**

Pro vliv **ohybu** vyšetříme vzájemné pootočení koncových průřezů od ohybového momentu  $M = M_y$  (obr. 3.4h). Protože platí  $dx = \rho d\varphi$ , můžeme z poměrného protažení  $\varepsilon_x = z/\rho$  při uvažování obecného vlákna ve vzdálenosti  $z$  a Hookova zákona vyjádřit příslušnou složku od ohybového momentu.

Pootočení koncových průřezů od vlivu lineární *nerovnoměrné změny teploty* (obr. 3.4c) při konvenci stanovení teplotního rozdílu  $\Delta t_1 = \Delta t_d - \Delta t_h$  poskytne druhou složku pootočení.

Celkové vzájemné pootočení od vlivu ohybového momentu a nerovnoměrné změny teploty je pak

$$d\varphi = d\varphi_M + d\varphi_t = \frac{M dx}{EI} + \frac{\alpha_t \Delta t_1 dx}{h}, \quad (1.25)$$

kde  $I_y = I$  je moment setrvačnosti průřezu k těžištní ose  $y$  a  $h$  výška průřezu.

**Virtuální práci**  $L_i$  virtuálních vnitřních sil  $\bar{N}, \bar{V}, \bar{M}$  podle (3. ...) pak získáme s využitím (1.10), (1.14) a (1.25) pro přímý prut proměnného průřezu délky  $l$  ve tvaru

$$L_i = - \left[ \int_0^l \frac{N\bar{N}}{EA} dx + \int_0^l \kappa \frac{V\bar{V}}{GA} dx + \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx + \int_0^l \bar{N}\alpha_t \Delta t_0 dx + \int_0^l \bar{M}\alpha_t \frac{\Delta t_1}{h} dx \right]. \quad (1.26)$$

U zakřiveného prutu se zamění délka  $l$  za  $s$  a  $dx$  za  $ds$ , takže můžeme napsat

$$L_i = - \left[ \int_0^s \frac{N\bar{N}}{EA} ds + \int_0^s \kappa \frac{V\bar{V}}{GA} ds + \int_0^s \frac{M\bar{M}}{EI} ds + \int_0^s \bar{N}\alpha_t \Delta t_0 ds + \int_0^s \bar{M}\alpha_t \frac{\Delta t_1}{h} ds \right]. \quad (1.27)$$

Poznamenejme, že stejnou virtuální práci konají skutečné vnitřní síly  $N, V, M$  od skutečného zatížení na virtuálních přetvořeních  $\Delta\bar{u}, \Delta\bar{w}, \Delta\bar{\varphi}$  od virtuálního zatížení.

### 3.2 Lagrangeův princip virtuálních prací

Lagrangeův princip je formulován pro virtuální přemístění (posuny). Je jedním ze základních zákonů mechaniky (vyplývají z něho statické podmínky rovnováhy obecné prostorové soustavy sil). Pro tuhé těleso ho formuloval J. L. Lagrange (1736 – 1813) takto: „**Virtuální práce rovnovážné soustavy sil působící na tuhé těleso je při libovolném virtuálním přemístění tělesa rovna nule** ( $L = 0$ )“. V 19. století byl tento princip rozšířen i na *pružná tělesa*: „Při libovolném virtuálním přetvoření pružného tělesa, nacházejícího se v rovnovážném stavu, je součet virtuálních prací všech vnějších a vnitřních sil, působících na těleso, roven nule“. Platí tedy

$$L = L_e + L_i = 0, \quad (1.28)$$

neboli

$$L_e = -L_i. \quad (1.29)$$

Po dosazení (1.7) a (1.27) do (1.29) obdržíme po úpravě

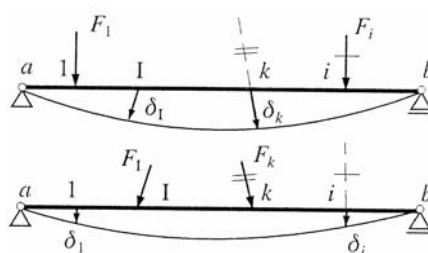
$$\begin{aligned} & \sum \bar{F}_i \delta_i + \sum \bar{M}_i \varphi_i = \\ & = \int_0^s \frac{N\bar{N}}{EA} ds + \int_0^s \kappa \frac{V\bar{V}}{GA} ds + \int_0^s \frac{M\bar{M}}{EI} ds + \int_0^s \bar{N}\alpha_t \Delta t_0 ds + \int_0^s \bar{M}\alpha_t \frac{\Delta t_1}{h} ds - \sum \bar{R}_r \delta_r, \end{aligned} \quad (1.30)$$

### 3.3 Věty o vzájemnosti virtuálních prací

#### 3.3.1 Bettiho věta

Virtuální práce jedné soustavy vnějších sil  $F_1, \dots, F_i, \dots, F_n$  (obr. 3.5), pracujících na posunutích  $\delta_1, \dots, \delta_i, \dots, \delta_n$ , vyvolaných druhou soustavou vnějších sil  $F_1, \dots, F_k, \dots, F_m$ , je rovna virtuální práci druhé soustavy sil, působících na posunutích  $\delta_1, \dots, \delta_k, \dots, \delta_m$ , vyvolaných první soustavou sil, tedy

$$\sum_{i=1}^n F_i \delta_i = \sum_{k=1}^m F_k \delta_k. \quad (1.31)$$



Obr. 3.5: K Bettiho větě

Pro virtuální práci momentů pak analogicky platí

$$\sum_{i=1}^n M_i \varphi_i = \sum_{k=1}^m M_k \varphi_k. \quad (1.32)$$

Podobné vztahy lze rovněž napsat pro spojité zatížení příčné  $q$ , osové  $n$  či momentové  $m$ .

#### 3.3.2 Maxwellovy věty

Maxwellovy věty představují zvláštní případy Bettiho věty. První Maxwellova věta se týká **vzájemnosti posunutí**. Uvažujme podle obr. 3.5 v rovnici (1.31) jako první soustavu  $F_i = 1$  a druhou soustavu  $F_k = 1$ . Pak pro vzájemná posunutí dvou libovolných průřezů  $i, k$  platí

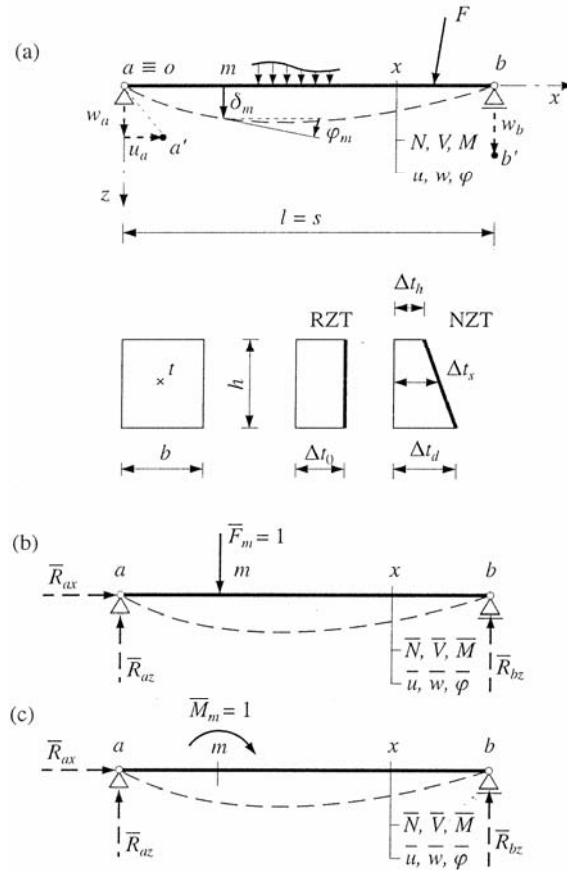
$$\delta_{ik} = \delta_{ki}. \quad (1.33)$$

Druhá Maxwellova věta pojednává o **vzájemnosti pootočení**. Jako první soustava se uvažuje  $M_i = 1$  a druhá soustava  $M_k = 1$ . Pro vzájemná pootočení dvou libovolných průřezů  $i, k$  platí  $\varphi_{ik} = \varphi_{ki}$ , takže při obecném označení deformace symbolem  $\delta$  získáme vztah (1.33).

Třetí Maxwellova věta se týká **vzájemnosti posunutí a pootočení**. Jako první soustava se uvažuje  $F_i = 1$  a druhá soustava  $M_k = 1$ . Pro vzájemný vztah mezi posunutím a pootočením dvou libovolných průřezů  $i, k$  podle Bettiho věty platí  $\delta_{ik} = \varphi_{ki}$ , což představuje číselnou rovnost mezi posunutím  $\delta_{ik}$  průřezu  $i$  od  $M_k = 1$  v průřezu  $k$  a pootočením  $\varphi_{ki}$  průřezu  $k$  od  $F_i = 1$  v průřezu  $i$ . Při obecném označení deformace symbolem  $\delta$  opět získáme vztah (1.33).

Ze vztahu (1.33) vyplývá symetrie matice poddajnosti v silové metodě.





Obr. 1.9: Výpočet posunutí a pootočení průřezu rovinného plnostěnného nosníku

### 3.4 Výpočet deformací metodou jednotkových sil

Touto metodou lze vypočítat diskretní hodnotu deformace, tj. v rovině posunutí  $u$ ,  $w$  a pootočení  $\varphi$  daného průřezu nosníku (obr. 1.9). Je nutné uvažovat dva zatěžovací stavy, a to **stav skutečný** (způsobující přetvoření nosníku) se zatížením silovým ( $F$ ,  $M$ ,  $q$ ,  $n$ ,  $m$ ) resp. deformačním (popuštění podpor či teplota) podle obr. 1.9a a **stav virtuální** s jednotkovou silou  $F_m = 1$  (obr. 1.9b) působící ve směru hledaného posunutí  $\delta_m$  nebo s jednotkovým momentem  $M_m = 1$  (obr. 1.9c) působícím ve směru hledaného pootočení  $\varphi_m$  (obecně rovněž označeného  $\delta_m$ ). Z rovnice (1.30) pak po rozepsání posledního členu podle výrazu (1.6) získáme **Maxwellův–Mohrův vztah**

$$\delta_m = \int_0^s \frac{N\bar{N}}{EA} ds + \int_0^s \kappa \frac{V\bar{V}}{GA} ds + \int_0^s \frac{M\bar{M}}{EI} ds + \int_0^s \bar{N}\alpha_t \Delta t_0 ds + \int_0^s \bar{M}\alpha_t \frac{\Delta t_1}{h} ds - \sum_r (\bar{R}_{rx} u_r + \bar{R}_{rz} w_r + \bar{M}_r \varphi_r), \quad (1.36)$$

kde  $\delta_m$  je hledané posunutí  $u_m$ ,  $w_m$  (resp. pootočení  $\varphi_m$ ),  $N$ ,  $V$ ,  $M$  jsou vnitřní síly od skutečného zatížení,  $u_r$ ,  $w_r$ ,  $\varphi_r$  jsou dané složky popuštění podporového průřezu  $r$ ,  $\bar{N}$ ,  $\bar{V}$ ,  $\bar{M}$  jsou virtuální vnitřní síly od virtuálního zatížení  $F_m = 1$  (resp.  $M_m = 1$ ) působícího v průřezu  $m$ ,  $\bar{R}_{rx}$ ,  $\bar{R}_{rz}$ ,  $\bar{M}_r$  jsou virtuální složky reakcí podporového průřezu  $r$ , vyvolané virtuálním zatížením  $F_m = 1$  (resp.  $M_m = 1$ ) působícím v průřezu  $m$ ,  $A$  je průřezová plocha prutu,  $I$  je moment setrvačnosti

průřezu,  $h$  je jeho výška,  $E$  představuje modul pružnosti v tahu a tlaku,  $G$  je modul pružnosti ve smyku,  $\Delta t_0$  je rovnoměrné oteplení průřezu,  $\Delta t_1$  teplotní rozdíl dolních a horních vláken průřezu,  $\alpha_t$  součinitel tepelné roztažnosti a  $\kappa$  je koeficient vlivu nerovnoměrného rozdělení smykového napětí.

### 3.4.1 Zjednodušení výpočtu deformací plnostěnných nosníků

Maxwellův–Mohrův vztah (1.36) zahrnuje vliv všech tří složek výslednice vnitřních sil rovinného prutu od silového zatížení i obou typů deformačního zatížení (rovnoměrné a nerovnoměrné změny teploty a nepružného popuštění podpor). Ke zjednodušení lze přihlídnout v případě, je-li rovinná prutová soustava bez vlivu deformačního zatížení **namáhaná převážně na ohyb** (nosníky, rámy), takže můžeme zanedbat virtuální práce od normálových a posouvajících sil  $N$ ,  $V$ . Pak z rovnice (1.36) zůstane pouze

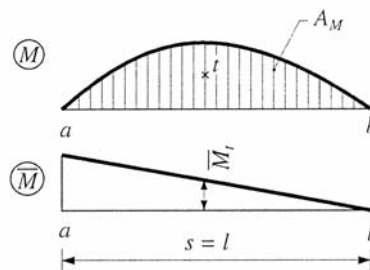
$$\delta_m = \int_0^s \frac{M \bar{M}}{EI} ds. \quad (1.38)$$

Je-li navíc rovinná prutová soustava složená pouze z **přímých prizmatických prutů** s různými průřezovými charakteristikami (momentem setrvačnosti  $I_j$ ), pak vztah (1.38) přejde na tvar

$$\delta_m = \sum_{j=1}^p \frac{1}{E_j I_j} \int_0^{l_j} M \bar{M} dx_j. \quad (1.40)$$

Výpočet určitého integrálu v (1.40) ze **součinu dvou funkcí**  $M(x)$  od skutečného silového zatížení ( $F$ ,  $M$ ,  $q$ ,  $n$ ,  $m$ ) a  $\bar{M}(x)$  od virtuálního zatížení  $F_m = 1$  (resp.  $M_m = 1$ ) lze provést těmito způsoby:

- **analyticky** integrací z definovaných funkcí  $M(x)$ ,  $\bar{M}(x)$ , přičemž obecně lze uvažovat i ohybovou tuhost jako funkci  $EI(x)$ ,
- **numerickou integrací** (např. aplikací Simpsonovo pravidlo) pro pruty rovněž s proměnnou ohybovou tuhostí ( $EI \neq \text{konst.}$ ),
- užitím **tabulky 14.3** pro pruty konstantního průřezu ( $EI = \text{konst.}$ ),
- aplikací **Vereščaginova pravidla** pro  $EI = \text{konst.}$



Obr. 1.10: Vereščaginovo pravidlo

### 3.4.2 Vereščaginovo pravidlo

Je-li funkce  $M(x)$  **libovolná** spojitá hladká funkce a  $\bar{M}(x)$  **lineární** funkce (od  $F = 1$ ,  $M = 1$ ) podle obr. 1.10, pak platí

$$\int_0^s M \bar{M} ds = A_M \bar{M}_t. \quad (1.41)$$

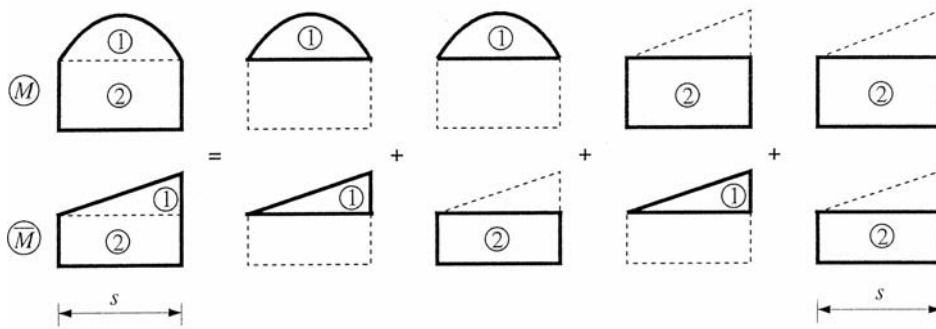
Slovně to můžeme vyjádřit: Hodnota integrálu je rovna součinu **obsahu momentového obrazce** od libovolné funkce a **pořadnice** u lineární funkce v místě těžiště obrazce s libovolnou funkcí.

Vereščaginovo pravidlo lze aplikovat i pro jiné funkce splňující výše uvedené předpoklady, např. pro funkce normálových či posouvajících sil. Plošné obsahy obrazců najdeme např. v tabulce 3.1 druhého modulu Základů stavební mechaniky (BD01–MO2).

**Složitější obrazce** (obr. 1.11) rozkládáme na jednodušší obrazce a aplikujeme princip superpozice, takže hodnota integrálu je

$$\int_0^s M \bar{M} ds = \int_0^s M_1 \bar{M}_1 ds + \int_0^s M_1 \bar{M}_2 ds + \int_0^s M_2 \bar{M}_1 ds + \int_0^s M_2 \bar{M}_2 ds. \quad (1.45)$$

Pro každý integrál na pravé straně rovnice (1.45) můžeme aplikovat výpočet pomocí Vereščaginova pravidla (1.41).



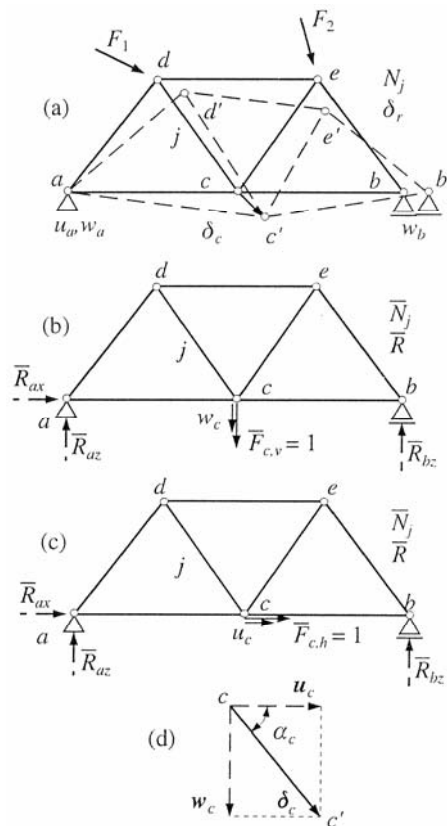
Obr. 1.11: Složitější tvary momentových obrazců

### 3.4.3 Výpočet deformací příhradových soustav

Zvláštěností příhradových soustav (obr. 1.33) je, že u nich vyšetřujeme jen složky posunutí  $u$ ,  $w$  styčniců a v prutech vznikají pouze normálové síly  $N$ . Potom z Maxwelllova-Mohrova vztahu (1.36) zůstane (při uvažování i deformačního zatížení) jen první a čtvrtý integrál a suma. Vzhledem ke konstantním funkcím normálových sil po prutech pro složku posunutí styčniců  $\delta_m$  (ve směru  $x$ ,  $z$ ) platí

$$\delta_m = \int_0^s \frac{N \bar{N}}{EA} ds + \int_0^s \bar{N} \alpha_t \Delta t_0 ds - \sum_r \bar{R}_r \delta_r = \sum_{j=1}^p \frac{N_j \bar{N}_j l_j}{EA_j} + \sum_{j=1}^p \bar{N}_j \alpha_t \Delta t_j l_j - \sum_r \bar{R}_r \delta_r \quad (1.107)$$

kde pro  $j = 1, 2, \dots, p$  je  $N_j$  osová síla prutu  $j$  od skutečného zatížení,  $\delta_r$  dané popuštění podpory,  $\bar{N}_j$  osová síla prutu  $j$  od virtuální síly  $F_m = 1$ ,  $R_r$  reakce vnější vazby od  $F_m = 1$ ,  $l_j$  délka prutu  $j$ ,  $A_j$  průřezová plocha prutu  $j$ ,  $\Delta t_j$  rovnoměrná změna teploty prutu  $j$  a popuštění  $\delta_r$  se týká vodorovného a svislého posunu. Výsledné posunutí styčniců (obr. 1.33d) se určí z pravouhlých složek.



Obr. 1.33: Přetvoření rovinného příhradového nosníku

### 3.5 Ilustrující příklad

Jako ukázkou aplikace principu virtuálních prací pro řešení přetvoření plnostěnných nosníků a soustav si uvedeme případ lomené konzoly.

#### Příklad 3.1

##### Zadání



Stanovte výsledné posunutí  $\delta_c$  a pootočení  $\varphi_c$  průřezu  $c$  lomeného konzolového nosníku (obr. 1.16) s pruty konstantního obdélníkového průřezu  $0,2 \times 0,3$  m o délkách  $l_1 = 3$  m,  $l_2 = 2$  m. Zatížení má intenzitu  $q = 10$  kNm<sup>-1</sup>, modul pružnosti má hodnotu  $E = 32,5$  GPa.

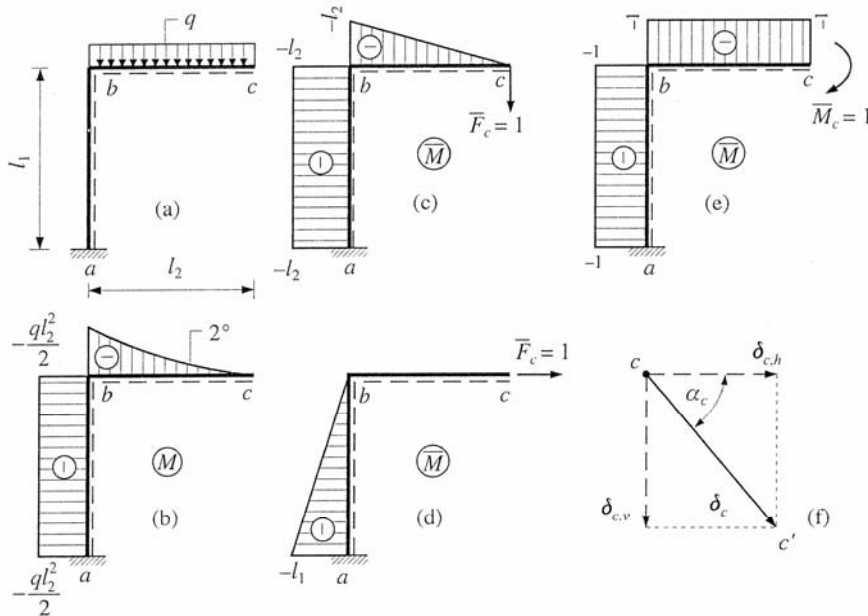
##### Řešení



Směr posunutí  $\delta_c$  průřezu  $c$  nosníku je neznámý, takže neznáme směr uplatnění jednotkové virtuální síly. Proto vyjdeme z výpočtu dvou pravoúhlých složek posunutí  $\delta_{c,v}$  a  $\delta_{c,h}$ .

Při řešení zanedbáme vliv normálových a posouvajících sil. Postačí tedy vykreslit průběhy ohybových momentů, a to od zadaného spojitého rovnoměrného zatížení podle obr. 1.16a v průbězích v obr. 1.16b a dále samostatně tři průběhy od jednotkových sil (svislé a vodorovné) a jednotkového momentu (obr. 1.16c–e). Vzhledem k jednoduchým průběhům sestavíme nejprve výraz pro výpočet deformace pomocí obecně označených veličin a následně ho vyčíslíme

(přitom použijeme moment setrvačnosti určený ze zadaných rozměrů průřezu hodnotou  $I = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ ). K řešení použijeme vztahy z tabulky 14.3 a Vereščaginovo pravidlo.



Obr. 1.16: Lomený konzolový nosník

- **Svislé posunutí  $\delta_{c,v}$  průřezu  $c$**

Použijeme momentové obrazce  $M$  (obr. 1.16b) a obrazce  $\bar{M}$  (obr. 1.16c). Pak

$$\delta_{c,v} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{4} \left( -\frac{ql_2^2}{2} \right) (-l_2)l_2 + \left( -\frac{ql_2^2}{2} \right) (-l_2)l_1 \right] = \frac{ql_2^3}{8EI} (l_2 + 4l_1).$$

$$\delta_{c,v} = \frac{10 \cdot 2^3 (2 + 4 \cdot 3)}{8 \cdot 32,5 \cdot 10^6 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}} = 0,00957 \text{ m} (\downarrow),$$

- **Vodorovné posunutí  $\delta_{c,h}$  průřezu  $c$**

S přihlédnutím k momentovým obrazcům  $M$  (obr. 1.16b) a obrazcům  $\bar{M}$  (obr. 1.16d) dostaneme

$$\delta_{c,h} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \left( -\frac{ql_2^2}{2} \right) (-l_1)l_1 = \frac{ql_1^2 l_2^2}{4EI}.$$

$$\delta_{c,h} = \frac{10 \cdot 3^2 \cdot 2^2}{4 \cdot 32,5 \cdot 10^6 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}} = 0,00615 \text{ m} (\rightarrow),$$

- **Výsledné posunutí  $\delta_c$  průřezu  $c$**

obdržíme vektorovým součtem složek o velikosti  $\delta_{c,v}$  a  $\delta_{c,h}$  (obr. 1.16f). Výsledné posunutí  $\delta_c$  pak má velikost

$$\delta_c = \sqrt{\delta_{c,h}^2 + \delta_{c,v}^2}$$

a směr  $\alpha_c$ , pro nějž platí vztahy

$$\cos \alpha_c = \frac{\delta_{c,h}}{\delta_c}, \quad \sin \alpha_c = \frac{\delta_{c,v}}{\delta_c}.$$

Číselně je

$$\delta_c = \sqrt{0,00615^2 + 0,00957^2} = 0,01138m, \quad \alpha_c = 57'16''.$$

• **Pootočení  $\varphi_c$  průřezu  $c$**

Využijeme momentové obrazce  $M$  (obr. 1.16b) a obrazce  $\bar{M}$  (obr. 1.16e), takže

$$\varphi_c = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} \left( -\frac{ql_2^2}{2} \right) (-l)l_2 + \left( -\frac{ql_2^2}{2} \right) (-l)l_1 \right] = \frac{ql_2^2}{6EI} (l_2 + 3l_1),$$

$$\varphi_c = \frac{10 \cdot 2^2 (2 + 3 \cdot 3)}{6 \cdot 32,5 \cdot 10^6 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}} = 5,014 \cdot 10^{-3} \text{ rad}, \quad \varphi_c = 17'14'' \text{ (po směru)}.$$

### Otázky



1. Vysvětlete pojem virtuálního přetvoření, zatížení a virtuální práce.
2. Jak se určí virtuální práce vnějších a vnitřních sil přímého prutu?
3. Princip virtuálních prací.
4. Bettiho věta o vzájemnosti virtuálních prací.
5. Maxwellovy věty.
6. Maxwellův–Mohrův vztah pro výpočet přetvoření prutové konstrukce.
7. Jak se určí posunutí či pootočení průřezu plnostěnného nosníku?
8. Vereščaginovo pravidlo.
9. Jak se určí posunutí styčnicku rovinného příhradového nosníku?

### Shrnutí



Naučili jsme se určovat složky přemístění (posunutí a pootočení) v diskrétních bodech plnostěnných i příhradových nosníků metodou jednotkových sil, tj. aplikací principu virtuálních prací. Proto jsme si vysvětlili základní pojmy o virtuální práci a odvodili ji pro přímý rovinný prut. Pomocí Lagrangeova principu virtuálních prací jsme získali Maxwellův–Mohrův vztah pro výpočet deformací metodou jednotkových sil. Uvedli jsme si zjednodušení pro plnostěnné i příhradové nosníky a pomůcku pro vyčíslení integrálu – Vereščaginovo pravidlo. Získané znalosti jsme použili při řešení numerického příkladu.

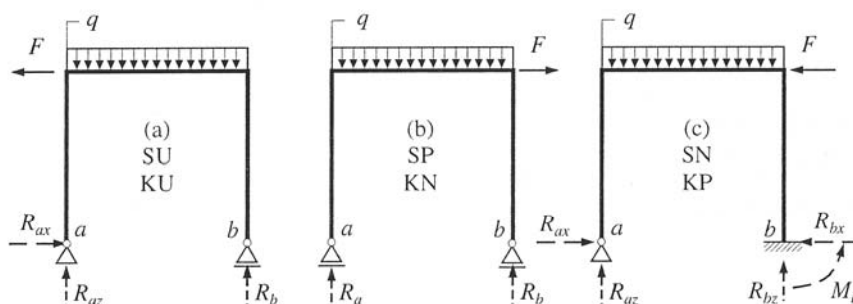
## 4 Silová metoda

Silová metoda je jedna ze dvou základních metod pro řešení staticky neurčitých prutových konstrukcí. U této metody se za neznámé volí **silové veličiny** (reakce, složky výslednice vnitřních sil), proto se metoda označuje jako *přímá*. Počet neznámých veličin a současně počet řešených rovnic určuje *stupeň statické neurčitosti*. Vedle statických podmínek rovnováhy se navíc sestavují *přetvárné* (deformační) *podmínky*. Jako základní soustava se volí prutová soustava staticky určitá po *odstranění přebytečných vazeb* či interakcí.



Silová metoda je vhodná pro řešení jednoduchých prutových soustav (s nízkým stupněm statické neurčitosti), není nevhodná k algoritmizaci, ale je nezbytná k řešení prutů základní přetvárně určité soustavy u deformační metody.

Postup výpočtu prutové soustavy silovou metodou je takový, že na základní soustavě sestavíme deformační podmínky, čímž získáme soustavu lineárních algebraických rovnic. Jejich řešením obdržíme staticky neurčité veličiny a uplatněním tří statických podmínek rovnováhy (v rovině) vyřešíme zbývající složky reakcí. Při všech známých složkách reakcí běžným postupem jako u staticky určité prutové soustavy určíme průběhy vnitřních sil  $N$ ,  $V$ ,  $M$ . Na počátku řešení musely být předem zvolené (odhadnuté) rozměry průřezů všech prutů. Při dimenzování prutů na konkrétní průběhy vnitřních sil se ukáže, zda byly voleny vhodně. V opačném případě se musí provést úprava průřezových ploch a provést opravný výpočet.



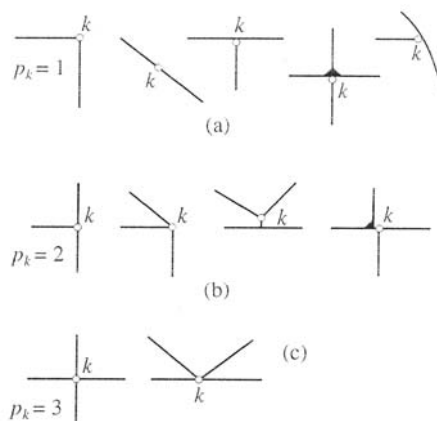
Obr. 3.4: Staticky určitý, přeurtčítý a neurčítý lomený nosník

### 4.1 Stupeň statické neurčitosti

Rovinná prutová soustava (obr. 3.4) uvolněná z podporových vazeb tvoří společně s daným zatížením a jím vyvolanými složkami reakcí podporových vazeb rovnovážnou rovinnou soustavu sil. V rovině však můžeme sestavit pouze *tři statické podmínky rovnováhy*. Je-li složek reakcí více, nestačí podmínky rovnováhy k jejich určení.

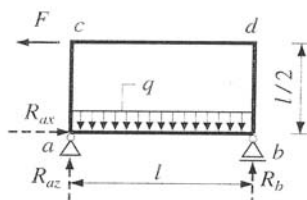
Označíme-li  $a$  počet jednoduchých vnějších vazeb (event. převedených na jednoduché), je *otevřená* rovinná prutová soustava *zevně staticky* (a kinematically) **určitá**, když  $a = 3$ , **staticky neurčitá** (a kinematically přeurtčítá), když  $a > 3$  a *staticky přeurtčítá* (a kinematically neurčitá, tj. pohyblivý *mechanismus*), je-li  $a < 3$ .





Obr. 3.5: Vnitřní klouby

Statickou neurčitost snižují vložené **vnitřní klouby** (obr. 3.5). Jednoduchý vnitřní kloub spojující **dva pruty** přidává **jednu statickou podmínku**  $M_k = 0$ . Vnitřní kloub spojující navzájem  **$n$  prutů** pak přidává  **$n - 1$  statických podmínek** a nahrazuje  **$n - 1$  jednoduchých kloubů**.



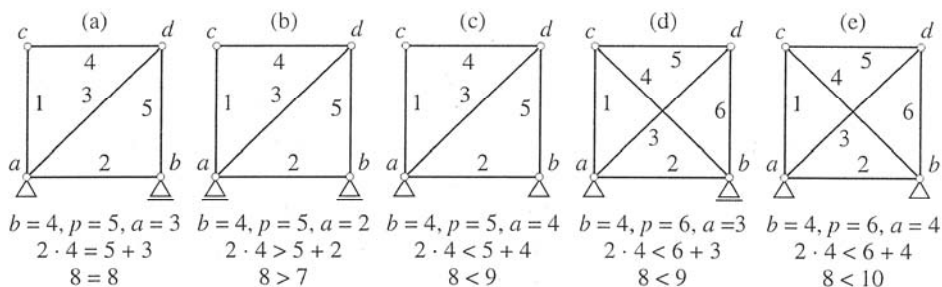
Obr. 3.6: Jednoduchý uzavřený rám

Každá **uzavřená část** prutové soustavy (obr. 3.6) představuje v rovině tři neznámé složky výslednice vnitřních sil  $N$ ,  $V$ ,  $M$ . Rozříznutím uzavřené části a nahrazením třemi interakcemi v obou řezem rozdělených částech se objeví další neznámé silové veličiny.

Stupeň statické neurčitosti **rovinné prutové soustavy** je tedy roven **počtu přebytečných** staticky neurčitých **veličin** soustavy (podporové reakce, složky  $N$ ,  $V$ ,  $M$  v libovolném průřezu). Určíme ho ze vztahu

$$n_s = (a - 3) + 3u - p_k, \quad (3.5)$$

kde  $a$  je počet složek reakcí vnějších vazeb,  $u$  počet uzavřených částí,  $p_k$  počet jednoduchých vnitřních kloubů. Výraz  $a - 3$  představuje zevní statickou neurčitost a výraz  $3u - p_k$  vnitřní statickou neurčitost. Odstraněním všech přebytečných veličin se vytvoří **základní staticky určitá soustava**.



Obr. 3.7: Staticky určitá, přebytečná a neurčitá kloubová prutová soustava



**Příhradová soustava** (kloubová prutová soustava), např. podle obr. 3.7, je jako celek **staticky** (a kinematically) **určitá**, když platí  $2b = p + a$  (viz vztah (3.2) modulu BD01-MO4) a současně nenastane výjimečný případ a je  $D \neq 0$ . Příhradová soustava je **staticky** (a kinematically) **přeuročitá** **neurčitá**, platí-li  $2b < p + a$  a staticky (a kinematically) **neurčitá** přeuročitá, je-li  $2b > p + a$ . Stupeň statické neurčitosti **příhradové soustavy** tedy určíme ze vztahu

$$n_s = p + a - 2b, \tag{3.12}$$

kde  $p$  je počet vnitřních prutů,  $a$  počet složek reakcí vnějších vazeb,  $b$  počet styčniců,  $a - 3$  představuje zevní statickou neurčitost a  $p + 3 - 2b$  vnitřní statickou neurčitost. Posouzení podle vztahu (3.5) je rovněž možné, ale poněkud nepraktické.

Ve všech případech rovinných prutových soustav však vždy musí platit  $a \geq 3$ .

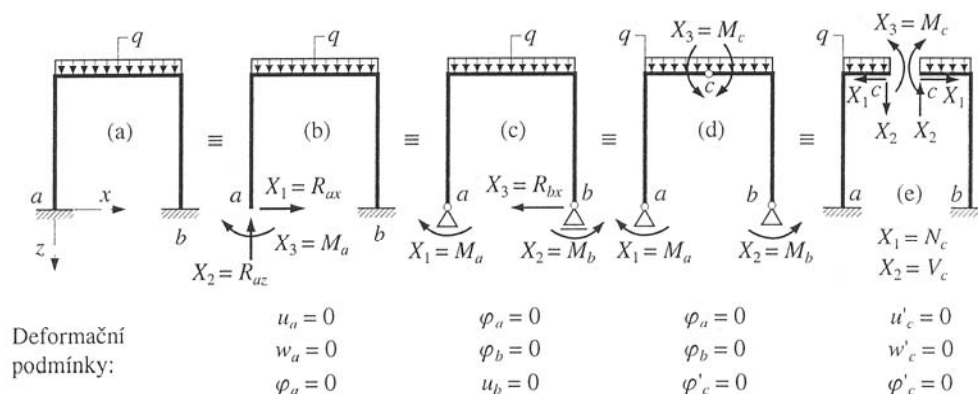
## 4.2 Řešení rovinného rámu

Stupeň statické neurčitosti  $n_s$  prutové soustavy stanovíme podle vztahu (3.5). Zvolíme základní staticky (a kinematically) určitou soustavu, tj. odstraníme  $n_s$  vhodně zvolených jednoduchých vazeb. Přitom nesmí nastat výjimečný případ podepření (musí tedy být  $D \neq 0$ ). Každou odebranou jednoduchou vazbu nahradíme odpovídající složkou *reakce* či *interakce* ( $X_i$  pro  $i = 1, 2, \dots, n_s$ ) s neznámou velikostí a libovolně zvoleným smyslem, které představují **staticky neurčité veličiny**.

Základní staticky určitou soustavu lze vytvořit *mnoha způsoby*. Její tvar závisí na volbě přebytečných jednoduchých vazeb. Volíme ji vždy s ohledem na usnadnění výpočtu. Základní soustava je zatížena daným zatížením a staticky neurčitými veličinami  $X_i$ . Přitom deformace musí být shodná s deformací původní staticky neurčité konstrukce. V místě odebrané jednoduché vazby předepíšeme **deformační** (přetvárné) **podmínky** v obecném tvaru

$$\delta_i = d_i \quad (i = 1, 2, \dots, n_s), \tag{3.16}$$

kde  $d_i$  jsou předepsané hodnoty deformací (u nepoddajného podepření  $d_i = 0$ ).

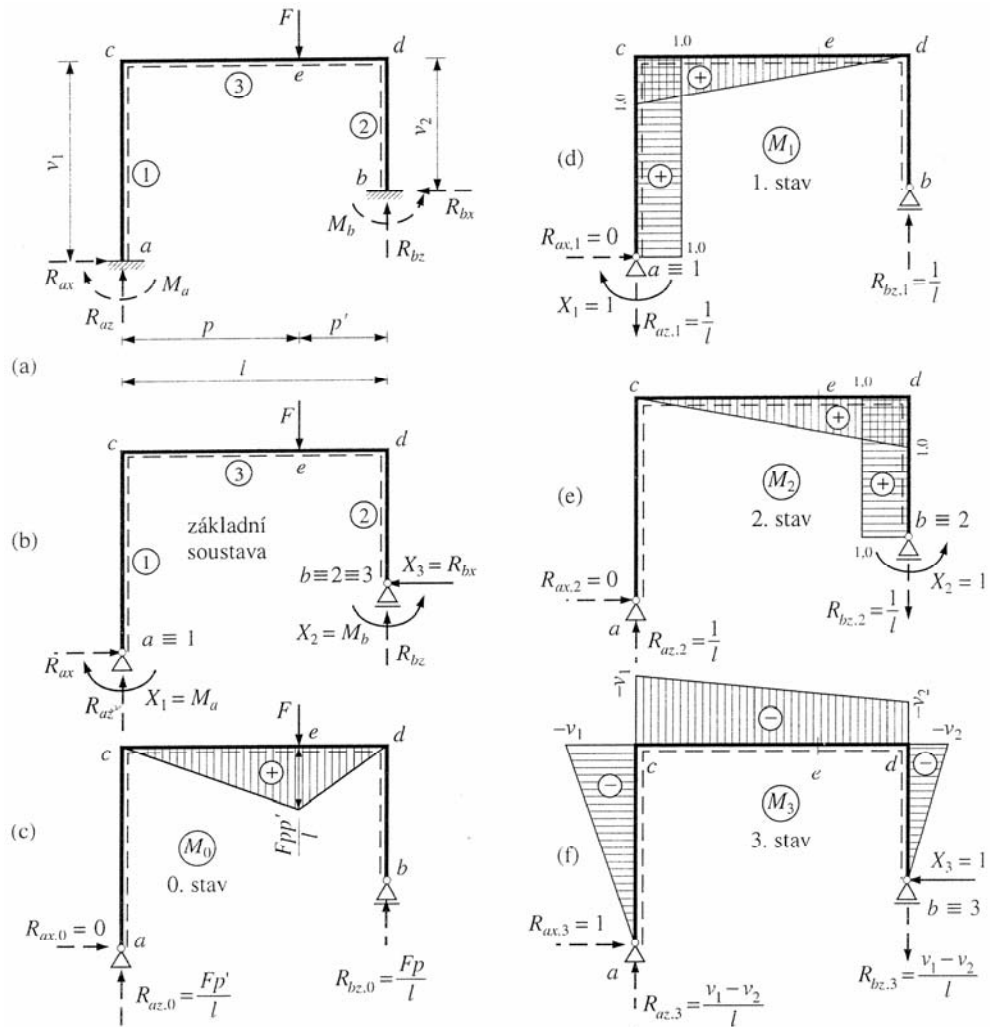


Obr. 3.8: Jednoduchý staticky neurčitý rovinný rám

Např. u soustavy z obr. 3.8 s  $n_s = 3$  lze jako základní soustavu (s různými deformačními podmínkami) volit lomenou konzolu (obr. 3.8b), lomený prostý

nosník (obr. 3.8c), trojkloubový lomený nosník (obr. 3.8d), složenou nosníkovou soustavu nebo po rozříznutí dvě lomené konzoly (obr. 3.8e). Přitom nesmíme volit základní soustavu tak, aby vzniknul virtuální kloub nebo aby tři klouby ležely v jedné přímce.

Každou deformaci  $\delta_i$  základní soustavy ve vztahu (3.16) vyjádříme jako funkci daného zatížení a jednotlivých staticky neurčitých veličin  $X_i$  (s využitím principu superpozice). Dílčí vyšetřované stavy pak jsou **nultý stav** s působícím daným zatížením a každý  **$i$ -tý stav** s působící jedinou příslušnou staticky neurčitou veličinou  $X_i = 1$  (s využitím principu úměrnosti) pro  $i = 1, 2, \dots, n_s$ .



Obr. 6.8: Metoda jednotkových sil u jednoduchého rovinného rámu

### 4.2.1 Obecně řešený příklad



Princip řešení rámu silovou metodou si ukážeme obecně na případě jednoduchého otevřeného rámu oboustranně vetknutého (obr. 6.8a). Podle vztahu (3.5) určíme  $n_s = 3$ . Základní soustavu zvolíme jako prostý lomený nosník (obr. 6.8b) s neznámými  $X_1 = M_a$ ,  $X_2 = M_b$ ,  $X_3 = R_{bx}$ . Na základní soustavě vyšetříme celkem  $n_s + 1 = 4$  zatěžovací stavy, a to

- **nultý stav** od daného zatížení (síly  $F$ ), viz obr. 6.8c,

- **jednotkové stavy** 1 až 3 pro neznámé jednotkové síly  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$  a  $X_3 = 1$  (obr. 6.8d-f).

Pro každý z těchto zatěžovacích stavů vyšetříme průběhy ohybových momentů  $M_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), neboť vliv normálových a posouvajících sil zanedbáme.

**Přetvárné** (deformační) **podmínky** předepíšeme tak, aby deformace základní soustavy (s působícím zadaným zatížením a neznámými silami  $X_i$ ) byla stejná jako původní staticky neurčitá soustava, tedy

$$\begin{aligned}\varphi_a &= \delta_1 = 0, \\ \varphi_b &= \delta_2 = 0, \\ u_b &= \delta_3 = 0.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Aplikací principu superpozice a principu úměrnosti můžeme přetvárné podmínky rozepsat do **soustavy přetvárných rovnic**

$$\begin{aligned}\delta_{1,1}X_1 + \delta_{1,2}X_2 + \delta_{1,3}X_3 + \delta_{1,0} &= 0, \\ \delta_{2,1}X_1 + \delta_{2,2}X_2 + \delta_{2,3}X_3 + \delta_{2,0} &= 0, \\ \delta_{3,1}X_1 + \delta_{3,2}X_2 + \delta_{3,3}X_3 + \delta_{3,0} &= 0,\end{aligned}\tag{6.2}$$

#### 4.2.2 Kanonické rovnice

Rovnice (6.2) představují kanonické rovnice (kánon je zákon, pravidlo), které *nezávisí* na tvaru prutové soustavy. Fyzikální význam přetvárných součinitelů  $\delta_{i,k}$  (vzhledem k platnosti třetí Maxwellovy věty) se při numerickém řešení potlačuje. V úsporném tvaru pak můžeme kanonické rovnice obecně zapsat



$$\sum_{k=1}^{n_s} \delta_{i,k} X_k + \delta_{i,0} = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \equiv n_s).\tag{6.3}$$

kde  $\delta_{i,k}$  je deformační součinitel vyjadřující pootočení nebo posunutí **průřezu  $i$**  základní soustavy ve směru veličiny  $X_i$  od  **$k$ -tého jednotkového stavu**  $X_k = 1$ ,  $\delta_{i,0}$  je deformační součinitel vyjadřující pootočení nebo posunutí **průřezu  $i$**  základní soustavy ve směru veličiny  $X_i$  od **nultého zatěžovacího stavu**. Index  $i$  představuje číslo deformace (místo sledované deformace) a je totožné s číslem neznámé veličiny  $X_i$ , index  $k$ , resp. 0 určuje číslo zatěžovacího stavu, v němž deformace vznikla. Součinitele  $\delta_{i,i}$  se nazývají hlavní deformační součinitele (neboť leží na hlavní diagonále) a součinitele  $\delta_{i,k}$  jsou vedlejší deformační součinitele (leží na vedlejších diagonálách). Podle Maxwellovy věty platí

$$\delta_{i,k} = \delta_{k,i} \quad (\text{pro } i \neq k).\tag{6.4}$$

V *maticové formě* můžeme kanonické rovnice zapsat

$$\delta \mathbf{X} + \delta_0 = \mathbf{0}\tag{6.5}$$

bez vlivu deformačního zatížení typu popuštění, nebo ve tvaru

$$\delta \mathbf{X} + \delta_0 = \mathbf{d},\tag{6.6}$$

kde je matice deformačních součinitelů

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \dots & \delta_{1,n_s} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \dots & \delta_{2,n_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{s,1} & \delta_{s,2} & \dots & \delta_{s,n_s} \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

vektor staticky neurčitých veličin

$$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_{n_s}\}^T, \quad (6.8)$$

vektor zatěžovacích členů

$$\boldsymbol{\delta}_0 = \{\delta_{1,0}, \delta_{2,0}, \dots, \delta_{n_s,0}\}^T, \quad (6.9)$$

event. vektor daných deformací v místech odebraných vazeb (nehomogenní okrajové podmínky)

$$\mathbf{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_{n_s}\}^T. \quad (6.10)$$

### 4.2.3 Výpočet přetvárných součinitelů

Pro určení přetvárných součinitelů  $\delta_{i,k}$  a  $\delta_{i,0}$  využijeme aplikaci principu virtuálních prací podle kapitoly 3. Při uvažování vlivu ohybových momentů, normálových i posouvajících sil získáme z Maxwellova–Mohrova vztahu (1.36) výrazy

$$\delta_{i,0} = \int_L \frac{M_i M_0}{EI} ds + \int_L \frac{N_i N_0}{EA} ds + \int_L \kappa \frac{V_i V_0}{GA} ds, \quad (6.11)$$

$$\delta_{i,k} = \int_L \frac{M_i M_k}{EI} ds + \int_L \frac{N_i N_k}{EA} ds + \int_L \kappa \frac{V_i V_k}{GA} ds, \quad (6.12)$$

kde k výpočtu integrálů můžeme využít tabulku 14.3 nebo Vereščaginovo pravidlo (odst. 3.4.2). Vliv normálových a posouvajících sil se u přímých prutů velmi často *zanedbává*. Pro určení správného znaménka přetvárného součinitele z ohybových momentů je výhodné obrazce ohybových momentů opatřit znaménky podle zvolených vláken (viz obr. 6.8). Kreslíme-li důsledně pořadnice ohybových momentů na stranu skutečně tažených vláken, pak platí, že jsou-li obrazce na stejné (opačné) straně, je přetvárný součinitel kladný (záporný).

### 4.2.4 Určení vnitřních sil

Určují se zbývající statické veličiny každého prutu vyjmutého z rámové soustavy. Výpočet vnitřních sil v průřezu  $x$  provedeme na základní soustavě buď

- podle zásad statiky, přičemž na základní soustavě působí dané silové zatížení a již známé síly  $X_i$ , nebo
- pomocí *superpozičních vztahů*

$$M_x = M_{x,0} + M_{x,1} X_1 + M_{x,2} X_2 + \dots + M_{x,n_s} X_{n_s}, \quad (6.14)$$

$$R_a = R_{a,0} + R_{a,1} X_1 + R_{a,2} X_2 + \dots + R_{a,n_s} X_{n_s}, \quad (6.15)$$

při uvažování vlivu  $V, N$  pro výpočet přetvárných součinitelů lze též

$$V_x = V_{x,0} + V_{x,1} X_1 + V_{x,2} X_2 + \dots + V_{x,ns} X_{ns},$$

$$N_x = N_{x,0} + N_{x,1} X_1 + N_{x,2} X_2 + \dots + N_{x,ns} X_{ns}.$$

Pro výpočet **posouvajících sil** na prutech je výhodné použít vztah

$$V_x = V_{x,0} + \Delta V_x = V_{x,0} + \frac{M_b - M_a}{l_{ab}}, \quad (5.22)$$

kde  $V_{x,0}$  je posouvající síla v průřezu  $x$  **prostého nosníku** od daného silového zatížení,  $\Delta V$  je přírůstek posouvající síly od koncových momentů (je *konstantní* pro celý prut). Nejčastěji se určují v koncových průřezích  $a$  nebo  $b$ .

Pro **mezipodporové momenty** platí

$$M_x = M_{x,0} + \Delta M_x = M_{x,0} + \frac{M_a x' + M_b x}{l_{ab}}, \quad (5.24)$$

kde  $M_{x,0}$  je ohybový moment v průřezu  $x$  **prostého nosníku** od daného silového zatížení,  $\Delta M_x$  je přírůstek ohybového momentu v průřezu  $x$  od podporových momentů.

**Normálové síly** v prutech se určí z podmínek rovnováhy neznámých normálových sil a známých posouvajících sil (včetně daného silového uzlového zatížení) na uvolněných uzlech. **Kontrolu rovnováhy** je nutno provést jednak u jednotlivých uvolněných uzlů, nevyužitých pro výpočet normálových sil, jednak pro celou rámové soustavy (uplatní se tři globální statické podmínky rovnováhy).

## 4.3 Ilustrující příklad

Jako ukázkou aplikace řešení rovinného rámu silovou metodou si uvedeme případ lomené konzoly.

### Příklad 4.1

#### Zadání

Vyřešte daný jednoduchý otevřený rovinný rám z obr. 6.8a s pruty konstantního průřezu o délkách  $l_1 = v_1 = 6$  m,  $l_2 = v_2 = 4$  m,  $l_3 = l = 8$  m, momentech setrvačnosti  $I_1 = 0,005$  m<sup>4</sup>,  $I_2 = 0,004$  m<sup>4</sup>,  $I_3 = 0,006$  m<sup>4</sup>, modulu pružnosti  $E = 27$  GPa pro zatížení osamělým břemenem  $F = 8$  kN ve vzdálenosti  $p = 6$  m.



#### Řešení

Podle vztahu (3.5) určíme  $n_s = 3$ . Základní soustavu zvolíme jako prostý lomený nosník (obr. 6.8b) s neznámými  $X_1 = M_a$ ,  $X_2 = M_b$ ,  $X_3 = R_{bx}$ . Deformační podmínky mají tvar (6.1) a z nich plynou přetvárné rovnice (6.2).



Zanedbáme-li vliv normálových a posouvajících sil na deformaci základní soustavy, můžeme přetvárné součinitele určit podle vztahu (6.13). Momentové

obrazce nultého i jednotkových stavů jsou nakresleny na obr. 6.8c–f. Vyčíslení součinitelů  $\delta_{i,k}$  včetně rozměrových jednotek je:

$$\begin{aligned}\delta_{1,1} &= \frac{1}{EI_1} \cdot v_1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{EI_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{v_1}{EI_1} + \frac{l}{3EI_3} = 6,091 \cdot 10^{-5} (kNm)^{-1}, \\ \delta_{1,2} &= \frac{1}{EI_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{l}{6EI_3} = \delta_{2,1} = 8,230 \cdot 10^{-6} (kNm)^{-1}, \\ \delta_{1,3} &= \frac{1}{EI_1} \left( -\frac{v_1}{2} \cdot v_1 \right) \cdot l + \frac{1}{EI_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \left( -\frac{2}{3} v_1 - \frac{v_2}{3} \right) = -\frac{v_1^2}{2EI_1} - \frac{l}{6EI_3} (2v_1 + v_2) = \\ &= \delta_{3,1} = -2,650 \cdot 10^{-4} (kN)^{-1}, \\ \delta_{2,2} &= \frac{v_2}{EI_2} + \frac{l}{3EI_3} = 5,350 \cdot 10^{-5} (kNm)^{-1}, \\ \delta_{2,3} &= -\frac{v_2^2}{2EI_2} - \frac{1}{6EI_3} (v_1 + 2v_2) = \delta_{3,2} = -1,893 \cdot 10^{-4} (kN)^{-1}, \\ \delta_{3,3} &= \frac{v_1^3}{3EI_1} + \frac{v_2^3}{3EI_2} + \frac{l}{3EI_3} (v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2) = 1,982 \cdot 10^{-3} (kN)^{-1} m.\end{aligned}$$

Vyčíslení součinitelů  $\delta_{i,0}$  včetně rozměrových jednotek je:

$$\begin{aligned}\delta_{1,0} &= \frac{Fpp'}{6EI_3 l} (l + p') = 1,235 \cdot 10^{-4} [l], \quad \delta_{2,0} = \frac{Fpp'}{6EI_3 l} (l + p) = 1,728 \cdot 10^{-4} [l], \\ \delta_{3,0} &= -\frac{Fpp'}{6EI_3 l} [v_1(l + p') + v_2(l + p)] = -1,432 \cdot 10^{-3} m.\end{aligned}$$

Pro numerický výpočet byly zavedeny poměrné deformace  $\delta'_{i,k} = 10^{-3} E \delta_{i,k}$  a  $\delta'_{i,0} = 10^{-3} E \delta_{i,0}$  o velikostech

$$\begin{aligned}\delta'_{1,1} &= 10^{-3} E \delta_{1,1} = 10^{-3} E \left( \frac{6}{E \cdot 0,005} + \frac{8}{3E \cdot 0,006} \right) = \frac{6}{5} + \frac{8}{3 \cdot 6} = 1,664 m^{-3}, \\ \delta'_{1,2} &= 10^{-3} E \delta_{1,2} = \frac{8}{6 \cdot 6} = 0,222 m^{-3}, \\ \delta'_{1,3} &= 10^{-3} E \delta_{1,3} = -\frac{6^2}{2 \cdot 5} - \frac{8}{6 \cdot 6} (2 \cdot 6 + 4) = -7,156 m^{-2}, \\ \delta'_{2,2} &= 1,4444 m^{-3}, \quad \delta'_{2,3} = -5,111 m^{-2}, \quad \delta'_{3,3} = 53,111 m^{-1}, \\ \delta'_{1,0} &= 3,333 kNm^{-2}, \quad \delta'_{2,0} = 4,667 kNm^{-2}, \quad \delta'_{3,0} = -38,667 kNm^{-1}.\end{aligned}$$

Soustava přetvárných rovnic má tvar

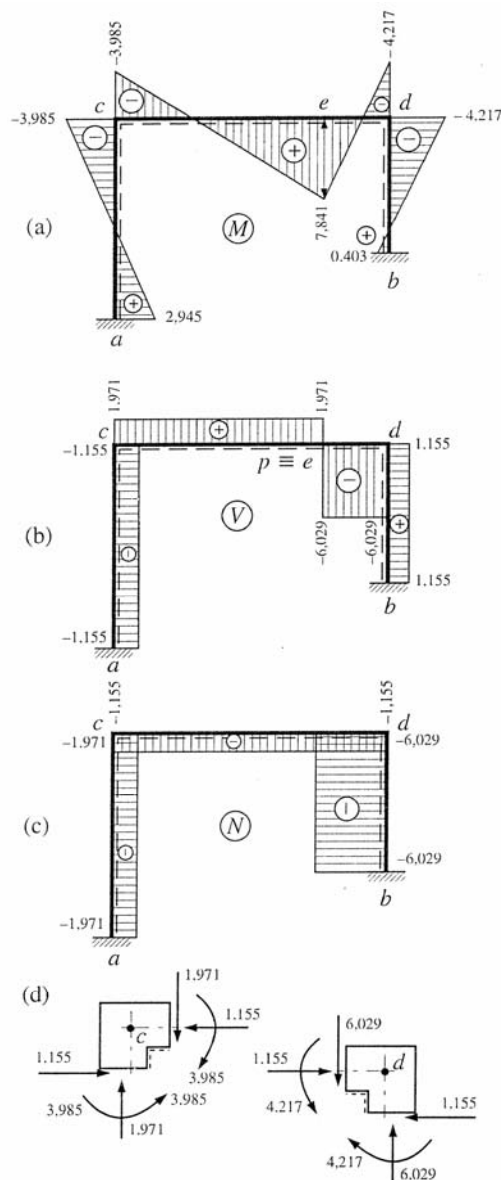
$$\begin{aligned}1,644 X_1 + 0,222 X_2 - 7,156 X_3 &= -3,333, \\ 0,222 X_1 + 1,444 X_2 - 5,111 X_3 &= -4,667, \\ -7,156 X_1 - 5,111 X_2 + 53,511 X_3 &= 38,667\end{aligned}$$

a řešení

$$X_1 = M_a = 2,945 kNm \text{ (po směmě)},$$

$$X_2 = M_b = 0,403kNm \text{ (proti směři),}$$

$$X_3 = R_{bx} = 1,155kN \text{ (←).}$$


 Obr. 6.9: Průběhy  $M$ ,  $V$ ,  $N$  na jednoduchém rámu

Výpočet zbývajících statických veličin provedeme na základní soustavě. Složky reakcí ze superpozičních vztahů

$$R_{ax} = 0 + 0 \cdot 2,945 + 0 \cdot 0,403 + 1 \cdot 1,155 = 1,155kN (\rightarrow),$$

$$R_{az} = \frac{8 \cdot 2}{8} + \left(-\frac{1}{8}\right) 2,945 + \frac{1}{8} \cdot 0,403 + \frac{6-4}{8} \cdot 1,155 = 1,971kN (\uparrow),$$

$$R_{bz} = \frac{8 \cdot 6}{8} + \frac{1}{8} \cdot 2,945 + \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot 0,403 + \left(-\frac{6-4}{8}\right) \cdot 1,155 = 6,029kN (\uparrow);$$

nebo můžeme využít statických podmínek rovnováhy

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum M_{ib} = 0, \quad \sum M_{ia} = 0.$$



Přítom platí kontrola

$$\sum F_{iz} = 0: -R_{az} - R_{bz} + F = 0.$$

Ohybové momenty ze superpozičních vztahů

$$\begin{aligned} M_{ac} = M_a &= 2,945 \text{ kNm}, & M_{bd} = M_b &= 0,403 \text{ kNm}, \\ M_{ca} &= 0 + 1 \cdot 2,945 + 0 \cdot 0,403 + (-6) \cdot 1,155 = -3,985 \text{ kNm} = M_{cd}, \\ M_{dc} &= 0 + 0 \cdot 2,945 + 1 \cdot 0,403 + (-4) \cdot 1,155 = -4,217 \text{ kNm} = M_{db}, \\ M_e = M_{\max} &= \frac{8 \cdot 6 \cdot 2}{8} + 0,25 \cdot 2,945 + 0,75 \cdot 0,403 + \left(-4 - \frac{1}{4} \cdot 2\right) 1,155 = 7,841 \text{ kNm}, \end{aligned}$$

posouvající síly

$$\begin{aligned} V_{ac} = V_{ca} &= -R_{ax} = -1,155 \text{ kN}, \\ V_{ce} = V_{ec} &= R_{az} = 1,971 \text{ kN}, \\ V_{ce} = V_{ce,0} + \frac{M_{dc} - M_{cd}}{l} &= \frac{8 \cdot 2}{8} + \frac{(-4,217) - (-3,985)}{8} = 1,971 \text{ kN}, \\ V_{ed} = V_{de} &= 1,971 - 8 = 6,029 \text{ kN} = -R_{bz}, \\ V_{bd} = V_{db} &= R_{bx} = 1,155 \text{ kN}. \end{aligned}$$

a normálové síly

$$\begin{aligned} N_{ac} = N_{ca} &= -R_{az} = -1,971 \text{ kN} (\text{tlak}), \\ N_{cd} = N_{dc} &= -R_{ax} = -1,155 \text{ kN} (\text{tlak}), \\ N_{bd} = N_{db} &= -R_{bz} = -6,029 \text{ kN} (\text{tlak}). \end{aligned}$$

Průběhy vnitřních sil jsou vyneseny na obr. 6.9.

## 4.4 Deformační zatížení

### 4.4.1 Vliv změny teploty

Změna teploty tvoří samostatný zatěžovací stav, přičemž  $\delta_{i,k}$  jsou stejné jako u silového zatížení (obvykle pouze s vlivem  $M$ ) a  $\delta_{i,0}$  je nutno určit pro příslušný nultý stav.

Teplotní účinek lze rozčlenit na rovnoměrnou změnu teploty ( $\Delta t_0$ ), způsobující prodloužení či zkrácení prutu, a na nerovnoměrnou změnu teploty ( $\Delta t_1$ ) lineárně se měnící po výšce průřezu, způsobující ohyb. Pro **obdélníkový průřez** platí

$$\begin{aligned} \Delta t_0 &= (\Delta t_d + \Delta t_h) / 2, \\ \Delta t_1 &= \Delta t_d - \Delta t_h. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Podle Maxwelllova–Mohrova vztahu (1.36) platí obecně

$$\tag{6.21}$$

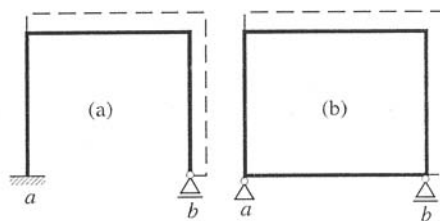
a při  $\Delta t_0 = \text{konst.}$ ,  $\Delta t_1/h = \text{konst.}$  je

$$\tag{6.22}$$



Pro  $i$ -tý jednotkový stav nutno určit  $M_i$  a rovněž  $N_i$ .

**Zvláštní případ** nastane, jedná-li se o vliv RZT při  $\Delta t_0 = \text{konst.}$  a uspořádání vnějších vazeb nebrání tepelné deformaci (obr. 6.13). Pak toto zatížení nevyvolá  $R$  a  $N$ ,  $V$ ,  $M$ .



Obr. 6.13: Rovnoměrné oteplení otevřeného (a) a uzavřeného (b) rovinného rámu

#### 4.4.2 Dané popuštění podpor rámu

- tvoří samostatný zatěžovací stav
  - $\delta_{i,k}$  ... stejné jako u silového zatížení
  - $\delta_{i,0}$  ... nutno určit pro příslušný nultý stav
- podle zvolené základní soustavy se vliv popuštění projeví
  - u **odebraných** jednonásobných vazeb:

**hodnota popuštění**  $d_i$  ( $i$ -té vazby s neznámou staticky neurčitou veličinou  $X_i$ ) se objeví **na pravé straně přetvárné rovnice** (znaménka podle smyslů  $d_i$  a  $X_i$ ); deformace v místě původního podepření není nulová, ale je rovna danému popuštění (nehomogenní okrajová podmínka)

- u **ponechaných** jednonásobných vazeb:

vliv popuštění  $\delta_r$  (konkrétně  $u_r$ ,  $w_r$ ,  $\varphi_r$ ) se projeví jako **nultý zatěžovací stav**; absolutní přetvárné součinitele  $\delta_{i,0,p}$  určíme podle Maxwellova–Mohrova vztahu

$$(6.23)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n_s),$$

kde  $R_{r,i}$  jsou složky reakcí v ponechaných vazbách  $r$  základní soustavy v  $i$ -tém stavu,  $\delta_r$  je hodnota daného popuštění vazby  $r$  ve směru reakce  $R_{r,i}$  (znaménko podle smyslu reakce),  $p_v$  je počet ponechaných vazeb základní soustavy (obvykle 3).

**Přetvárné rovnice** (pro obě varianty zadávání daného popuštění)

$$(6.24)$$

po úpravě

$$(6.25)$$

## 4.5 Řešení spojitého nosníku

Spojité plnostěnný nosník je

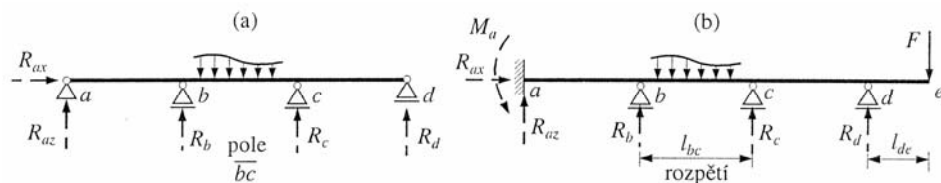
- přímý nosník uložený na více než dvou podporách (alespoň *jedna* je *pevná* = vetknutí nebo neposuvný kloub, *ostatní posuvné*)
- neuvažují se vložené vnitřní klouby
- nad vnitřními podporami probíhá *spojitě* (nejsou tam vnitřní klouby).

*Pole* je část spojitého nosníku mezi sousedními podporami, *rozpětí* je délka pole, *průřez* spojitého nosníku může být konstantní po celé délce, konstantní v jednotlivých polích nebo jde o prut s náběhy u podpor.

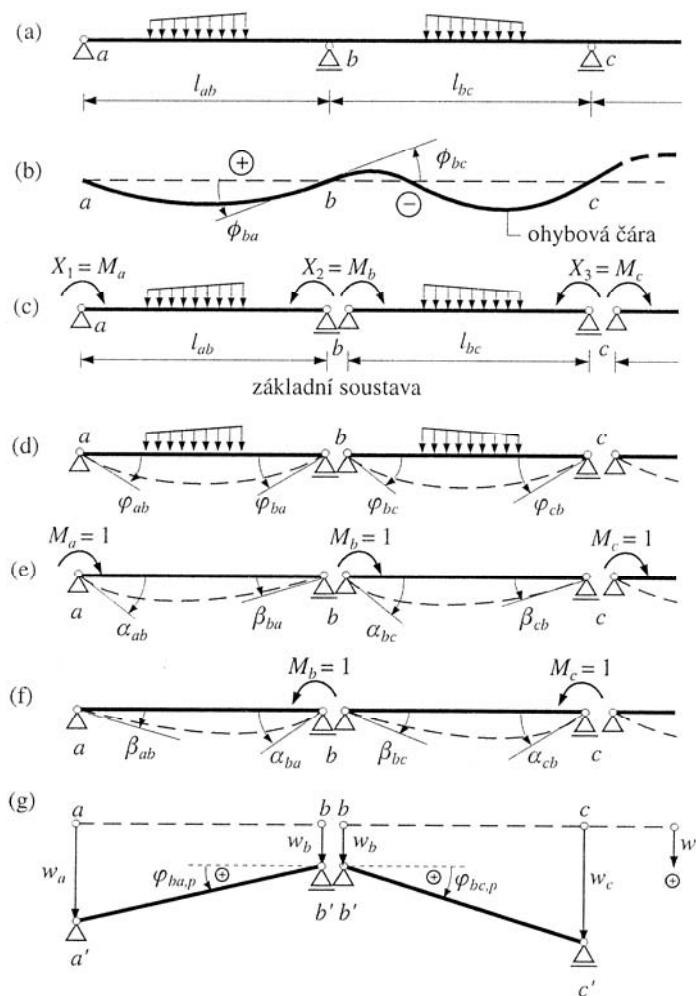
**Stupeň statické neurčitosti** se stanoví podle vztahu  $n_s = a - 3$  (5.1), takže jednoduše platí pro spojitý nosník

- s pevným kloubem  $n_s =$  počet vnitřních podpor
- s vetknutím  $n_s =$  počet všech jednoduchých podpor

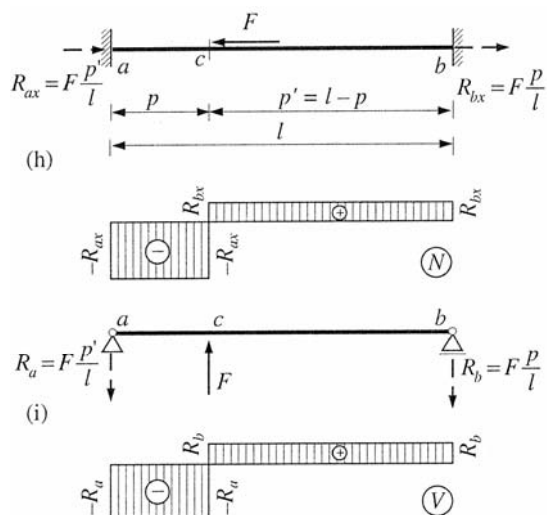
**Metoda třímomentových rovnic** je metoda silová – za neznámé se volí **podporové momenty**  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n_s$ ) ve vetknutí a nad vnitřními podporami. **Základní soustava** je soustava prostých nosníků (v počtu polí) - nejvýhodnější.



Obr. 5.1: Spojitý nosník o třech polích



Obr. 5.2: Základní staticky určitá soustava spojitého nosníku



Obr. 4.1h-i: Oboustranně vetknutý nosník s osovým zatížením

### Deformační podmínka

- u **vnitřní podpory** (např.  $b$ ) nesmí nastat zlom (je *stejný sklon tečen* k ohybové čáře spojitého nosníku zleva i zprava) [*konvence*: kladné potočení směrem dolů]

$$\Phi_{ba} = -\Phi_{bc}, \quad (5.2)$$

- ve **vetknutí** *nenastane potočení*

$$\Phi_{ab} = 0. \quad (4.1a)$$

Sklony tečen k ohybové čáře u **vnitřní podpory**  $b$  rozepíšeme

$$\Phi_{ba} = M_a \beta_{ba} + M_b \alpha_{ba} + \varphi_{ba}, \quad (5.3)$$

$$\Phi_{bc} = M_b \alpha_{bc} + M_c \beta_{bc} + \varphi_{bc}. \quad (5.4)$$

Z podmínky spojitosti  $\Phi_{ba} = -\Phi_{bc}$  získáme pro dvě sousední pole **třímomentovou rovnici** (Clapeyronovu r., 1857) pro podporu  $b$  s vlivem *silového zatížení*

$$M_a \beta_{ba} + M_b (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + M_c \beta_{bc} + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0 \quad (5.5)$$

s neznámými podporovými momenty  $M_a, M_b, M_c$ .

Pro další podpory vyjádříme třímomentovou rovnici *cyklickou záměnou* indexů.

Pro **vetknutý konec**  $a$  lze uvažovat dvě varianty odvození:

- rozepíšeme přímo *podmínku*  $\Phi_{ab} = 0$  pomocí výrazu (5.4), v němž provedeme *cyklickou záměnu* indexů  $b \rightarrow a, c \rightarrow b$

$$M_a \alpha_{ab} + M_b \beta_{ab} + \varphi_{ab} = 0, \quad (5.7) \equiv (4.2a)$$

- nebo přepíšeme *třímomentovou rovnici* s *cyklickou záměnou* indexů  $a \rightarrow o, b \rightarrow a, c \rightarrow b$  na tvar

$$M_o \beta_{ao} + M_a (\alpha_{ao} + \alpha_{ab}) + M_b \beta_{ab} + \varphi_{ao} + \varphi_{ab} = 0 \quad (5.6)$$

a zjednodušíme pomocí *tuhého nulového pole*  $oa$  ( $l_{oa} \rightarrow 0$ ) s dosazením

$$M_o = 0, \alpha_{ao} = \beta_{ao} = \varphi_{ao} = 0.$$

Vliv *svislého zatížení převislého konce* (v podpoře  $b$ ) se uplatní pomocí známého podporového momentu

$$M_b = -M_k.$$

**Deformační zatížení** spojitého nosníku

- zahrnuje – dané nepružné popuštění podpor  
– vliv nerovnoměrné změny teploty

(rovnoměrná změna vede na prodloužení nosníku bez vzniku  $V, M$ )

- **Dané popuštění podpor**

Střednice prostých nosníků  $ab, bc$  základní soustavy se potočí o úhly

$$(5.8)$$

Ve **vetknutí** poklesne o stejnou hodnotu

celé nulové pole  $oa$ , takže  $w_o = w_a$  a tím  $\varphi_{oa,p} = 0$ .

- **Nerovnoměrná změna teploty**

Lineární změna teploty po výšce průřezu:

- teplota dolních vláken se změní o  $\Delta t_d$
- teplota horních vláken se změní o  $\Delta t_h$

Podporové průřezy prostých nosníků základní soustavy u podpory  $b$  se pootočí podle Maxwelllova-Mohrova vztahu (1.36) o úhly

(5.9)

kde  $\Delta t_1(x) = \Delta t_d - \Delta t_h$ ,

$h(x)$  ... výška průřezu.

U nosníku s  $EI = \text{konst.}$  lze pootočení vyjádřit

(5.17)

kde teplotní rozdíly jsou  $\Delta t_{ab} = \Delta t_{ab,d} - \Delta t_{ab,h}$ ,

$$\Delta t_{bc} = \Delta t_{bc,d} - \Delta t_{bc,h}.$$

### Obecný tvar třímomentové rovnice

pro podporu  $b$  spojitého nosníku při uvažování *silového* i *deformačního* zatížení

(5.10)

U prutů s **konstantním průřezem** v jednotlivých polích

- jsou deformační úhly dány vztahy

(4.4)

$\varphi$  ... pomocí Maxwelllova-Mohrova vztahu,  
nebo z tabulky 14.2.

- integrály vyjadřující pootočení od vlivu nerovnoměrné změny teploty lze vyjádřit jednoduchými vztahy

(5.17)

### Průběhy složek vnitřních sil u spojitého nosníku

Momentový obrazec lze vynést hned po vyřešení soustavy rovnic:

- z pořadnic podporových momentů získáme posunutou *základní čáru*
- od ní vynášíme obrazce  $M$  dle zatížení *jako na prostém nosníku*

### Zbývající statické veličiny spojitého nosníku

řešením soustavy třímomentových rovnic  $\rightarrow$  podporové momenty

samostatné řešení každého pole jako *prostého nosníku*  $\rightarrow V, M, R$

- uplatněním zásad statiky
- z odvozených obecných vztahů

- **Posouvající síla**

Pro libovolný průřez  $x$  platí

$$(5.22)$$

kde  $V_{x,0}$  ... posouvající síla v průřezu  $x$  prostého nosníku od daného silového zatížení,

$\Delta V$  ... přírůstek posouvající síly od podporových (koncových) momentů  
(konstantní pro celý prostý nosník).

V koncových průřezích ...  $x \rightarrow a$  nebo  $b$ .

- **Mezipodporový moment**

Pro libovolný průřez  $x$  platí

$$(5.24)$$

kde  $M_{x,0}$  ... ohybový moment v průřezu  $x$  prostého nosníku od daného silového zatížení,

$\Delta M_x$  ... přírůstek ohybového momentu v průřezu  $x$  od podporových momentů.

- **Podporová reakce posuvného kloubu**

Z rovnováhy svislých sil působících na uvolněný nosníkový element nad podporou  $b$

$$\sum F_{iz} = 0: -R_b - V_{b,l} + V_{b,p} = 0$$

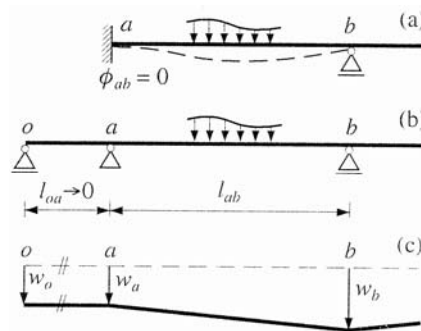
získáme

$$R_b = -V_{b,l} + V_{b,p} = -V_{ba} + V_{bc}. \quad (5.25)$$

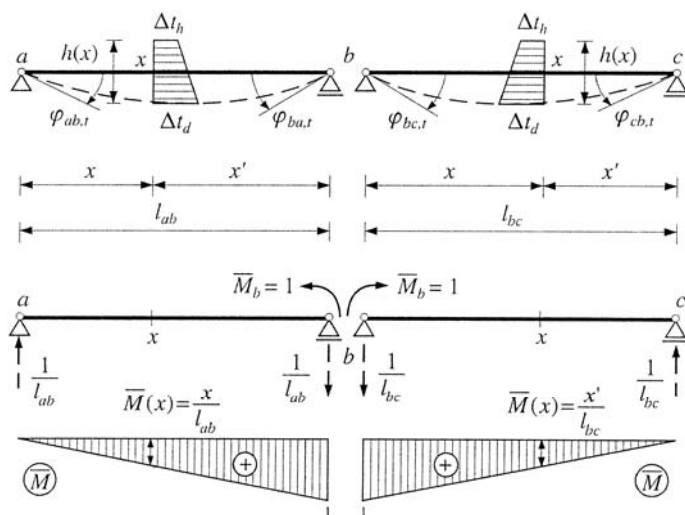
- **Vodorovná složka reakce**

pevného kloubu nebo dokonalého vetknutí = staticky určitá veličina;

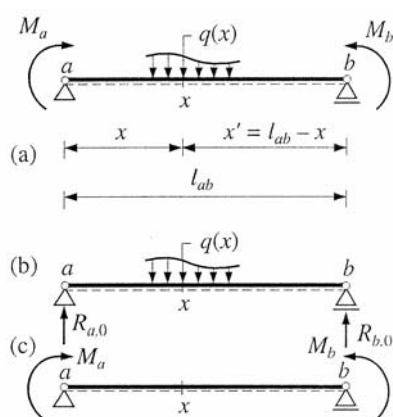
určí se z podmínky  $\sum F_{ix} = 0$  pro celý spojitý nosník.



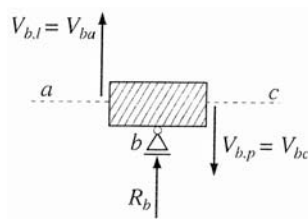
Obr. 5.3: Vetknutý konec a spojitý nosník



Obr. 5.4: Nerovnoměrná lineární změna teploty nosníku



Obr. 5.6: Pole ab spojitého nosníku



Obr. 5.7: Uvolněný nosníkový element s reakcí  $R_b$

## 4.6 Využití symetrie rámu

u rovinného rámu či spojitého nosníku

veličiny – symetrické  $N, M, w$  (při AZ jsou nulové)

– antimetrické  $V, \varphi$  (při SZ jsou nulové)

řešíme vždy jednu polovinu rámu;

obecné zatížení se rozkládá na  $\Rightarrow$  snížení počtu přetvárných rovnic

- zatížení symetrické
  - zatížení antimetrické
- $$n_s = n_{s,S} + n_{s,A}$$

rozlišujeme případy – osa symetrie protíná příčel  
 – osa symetrie prochází sloupem

**Osa symetrie rámu protíná příčel**

Řešení: *ruční* – staticky neurčité veličiny = složky  $N, V, M$  na ose SK

(ZS ... příčel jako dvě konzoly)

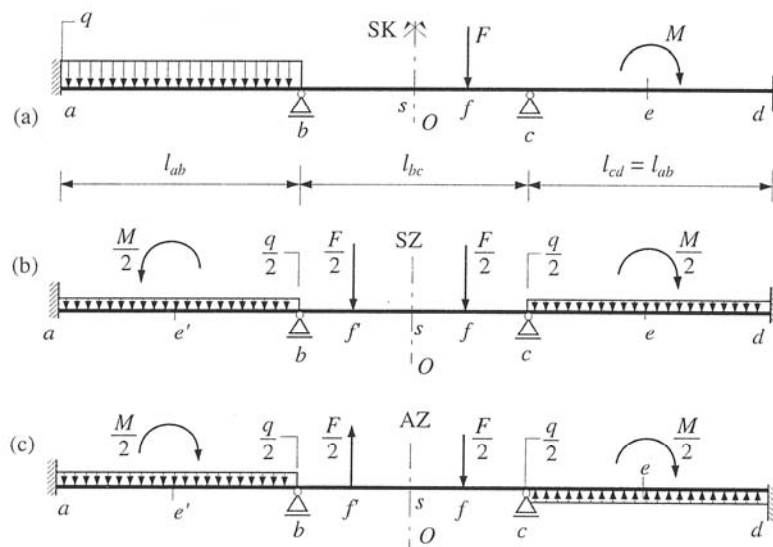
*náhradní vazbou* – staticky neurčité veličiny a ZS lze volit pro SZ i AZ

zcela nezávisle (co nejvhodněji)

**Staticky neurčité příhradové nosníky**

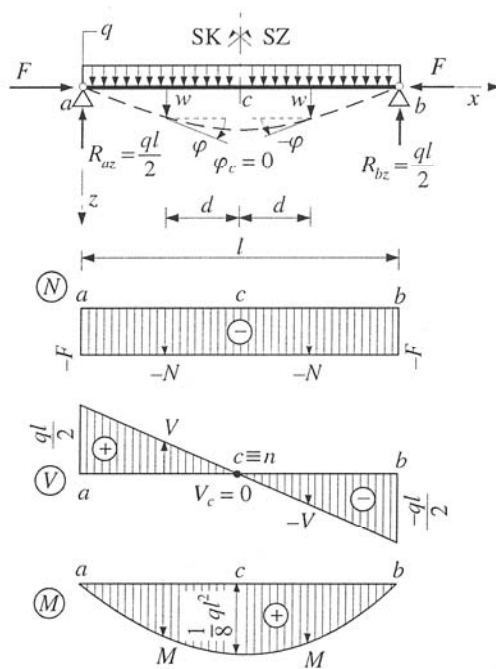
$$w_c = \int_0^s \frac{N\bar{N}}{EA} ds + \int_0^s \bar{N}\alpha_i \Delta t_0 ds - \sum_r \bar{R}_r \delta_r = \sum_{j=1}^p \frac{N_j \bar{N}_j l_j}{EA_j} + \sum_{j=1}^p \bar{N}_j \alpha_i \Delta t_j l_j - \sum_r \bar{R}_r \delta_r, \tag{1.107}$$

$$\sum_r \bar{R}_r \delta_r = \sum_r (\bar{R}_{rx} u_r + \bar{R}_{rz} w_r). \tag{1.108}$$

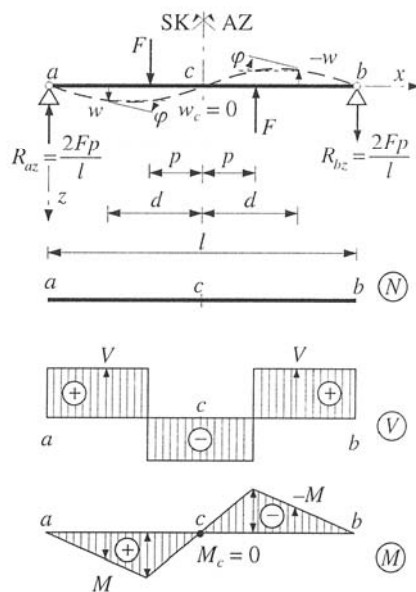


Obr. 5.8: Souměrný spojitý nosník o třech polích





Obr. 5.9: Souměrný nosník se symetrickým zatížením



Obr. 5.10: Souměrný nosník s antimetrickým zatížením

### *Otázky*



1. Stupeň statické neurčitosti rovinného rámu.
2. Volba staticky neurčitých veličin rámu.
3. Podstata řešení rovinného rámu silovou metodou.
4. Výpočet přetvárných součinitelů.
5. Volba staticky neurčitých veličin spojitého nosníku.
6. Jakou deformační podmínku vyjadřuje třímomentová rovnice?
7. Výpočet podporových reakcí spojitého nosníku.
8. Vliv změny teploty rovinného rámu.
9. Vliv daného popuštění rovinného rámu.
10. Definujte souměrný rovinný rám.
11. Symetrické a antisymetrické veličiny.

### **Shrnutí**



V této kapitole jsme si objasnili princip řešení staticky neurčitých prutových soustav silovou metodou. Nejprve jsme si ukázali řešení rovinného rámu a následně řešení spojitého nosníku pomocí speciální volby základní soustavy vedoucích na odvození třímomentové rovnice. Zabývali jsme se rovněž vlivem deformačního zatížení a využitím symetrie při řešení rovinných rámu a spojitých nosníků.

## 5 Tabulky

V této kapitole jsou souhrnně uvedeny všechny tabulky univerzálně použitelné v předchozích kapitolách.


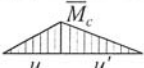





Tab. 14.3: Hodnoty integrálů  $\int M\bar{M}dx$  u prutů konstantního průřezu

Zatěž. případ	$M$	$\bar{M}$	$\bar{M}_a$	$\bar{M}_b$	
1			$\frac{1}{2}M_a\bar{M}_a l$	$\frac{1}{3}\bar{M}_a M_a l$	$\frac{1}{6}M_a(2\bar{M}_a + \bar{M}_b)l$
2			$\frac{1}{2}\bar{M}_a M_b l$	$\frac{1}{6}\bar{M}_a M_b l$	$\frac{1}{6}M_b(\bar{M}_a + 2\bar{M}_b)l$
3			$\frac{1}{2}(M_a + M_b)\bar{M}_a l$	$\frac{1}{6}(2M_a + M_b)\bar{M}_a l$	$\frac{1}{6}[\bar{M}_a(2M_a + M_b) + \bar{M}_b(M_a + 2M_b)]l$
4			$\frac{1}{2}(M_a - M_b)\bar{M}_a l$	$\frac{1}{6}(2M_a - M_b)\bar{M}_a l$	$\frac{1}{6}[\bar{M}_a(2M_a - M_b) + \bar{M}_b(M_a - 2M_b)]l$
5			$\frac{1}{2}\bar{M}_a M_c l$	$\frac{1}{6}\bar{M}_a M_c (l + x')$	$\frac{1}{6}[\bar{M}_a(l + x') + \bar{M}_b(l + x)]M_c$
6			$\frac{1}{2}\bar{M}_a M_c (x - x')$	$\frac{1}{6l}\bar{M}_a M_c (l^2 - 3x'^2)$	$\frac{M_c}{6l}[\bar{M}_b(3x'^2 - l^2) - \bar{M}_a(3x'^2 - l^2)]$
7			$M_a\bar{M}_a l$	$\frac{1}{2}\bar{M}_a M_a l$	$\frac{1}{2}(\bar{M}_a + \bar{M}_b)M_a l$
8			$\frac{2}{3}\bar{M}_a M_c l$	$\frac{1}{3}\bar{M}_a M_c l$	$\frac{1}{3}M_c(\bar{M}_a + \bar{M}_b)l$
9			$\frac{1}{3}\bar{M}_a M_a l$	$\frac{1}{4}\bar{M}_a M_a l$	$\frac{1}{12}M_a(3\bar{M}_a + \bar{M}_b)l$
10			$\frac{1}{3}\bar{M}_a M_b l$	$\frac{1}{12}\bar{M}_a M_b l$	$\frac{1}{12}M_b(\bar{M}_a + 3\bar{M}_b)l$
11			$\frac{2}{3}\bar{M}_a M_a l$	$\frac{5}{12}\bar{M}_a M_a l$	$\frac{1}{12}M_a(5\bar{M}_a + 3\bar{M}_b)l$
12			$\frac{2}{3}\bar{M}_a M_b l$	$\frac{1}{4}\bar{M}_a M_b l$	$\frac{1}{12}M_b(3\bar{M}_a + 5\bar{M}_b)l$
13			$\frac{1}{2}\bar{M}_a M_a x$	$\frac{1}{6}\bar{M}_a M_a \frac{x}{l}(3l - x)$	$\frac{M_a}{6} \cdot \frac{x}{l} [\bar{M}_a(3l - x) + \bar{M}_b x]$
14			$\frac{1}{2}\bar{M}_a M_b x'$	$\frac{1}{6}\bar{M}_a M_b \frac{x'^2}{l}$	$\frac{M_b}{6} \cdot \frac{x'}{l} [\bar{M}_b(3l - x') + \bar{M}_a x']$
15			$\frac{1}{4}\bar{M}_a M_b l$	$\frac{1}{20}\bar{M}_a M_b l$	$\frac{M_b}{20}(\bar{M}_a + 4\bar{M}_b)l$
16			$\frac{1}{4}\bar{M}_a M_a l$	$\frac{1}{5}\bar{M}_a M_a l$	$\frac{M_a}{20}(4\bar{M}_a + \bar{M}_b)l$

Tab. 14.3: Hodnoty integrálů  $\int M\bar{M}dx$  u prutů konstantního průřezu (pokračování)

Zatěž. případ	$M$	$\bar{M}$	$\bar{M}_a$	$\bar{M}_b$
17		$\bar{M}$	$\bar{M}_a$	$\bar{M}_b$
		$\frac{\bar{M}_a}{8}(M_a + 3M_c + 3M_d + M_b)l$	$\frac{\bar{M}_a}{120}(13M_a + 36M_c + 9M_d + 2M_b)l$	$\frac{l}{120}[\bar{M}_a \cdot (13M_a + 36M_c + 9M_d + 2M_b) + \bar{M}_b \cdot (2M_a + 9M_c + 36M_d + 13M_b)]$
18		$\bar{M}$	$\bar{M}_c$	$\bar{M}_a$
		$\frac{1}{6}\bar{M}_c M_a(l+u)$	$\frac{1}{3}\bar{M}_c M_a l$	$\frac{1}{4}\bar{M}_a M_a l$
19		$\bar{M}$	$\bar{M}_c$	$\bar{M}_b$
		$\frac{1}{6}\bar{M}_c M_b(l+u)$	$\frac{1}{3}\bar{M}_c M_b l$	$\frac{1}{12}\bar{M}_a M_b l$
20		$\bar{M}$	$\bar{M}_c$	$\bar{M}_a$
		$\frac{\bar{M}_c}{6}[M_a(l+u) + M_b(l+u)]$	$\frac{1}{3}\bar{M}_c(M_a + M_b)l$	$\frac{1}{12}\bar{M}_a(3M_a + M_b)l$
21		$\bar{M}$	$\bar{M}_c$	$\bar{M}_b$
		$\frac{\bar{M}_c}{6}[M_a(l+u) - M_b(l+u)]$	$\frac{1}{3}\bar{M}_c(M_a - M_b)l$	$\frac{1}{12}\bar{M}_a(3M_a - M_b)l$
22		$\bar{M}$	$\bar{M}_c$	$\bar{M}_a$
		$\frac{\bar{M}_c M_c l}{6ux'} \cdot [2ux' - (x' - u)^2]$ pro $x < u$ ; $\frac{\bar{M}_c M_c l}{6u'x} \cdot [2u'x - (u' - x')^2]$ pro $x > u$	$\frac{\bar{M}_c M_c}{3l}(l^2 + xx')$	$\frac{\bar{M}_a M_c}{12l}(3lx' + x^2)$
23		$\bar{M}$	$\bar{M}_c$	$\bar{M}_a$
		$\frac{\bar{M}_c M_c}{6} \left( l + u - \frac{3x'^2}{u} \right)$ pro $x > u$ ; $-\frac{\bar{M}_c M_c}{6} \left( l + u' - \frac{3x'^2}{u} \right)$ pro $x < u$	$-\frac{\bar{M}_c M_c}{3l} \cdot (l^3 - 6lx^2 + 4x^3)$	$\frac{\bar{M}_a M_c}{12l^2} (l^3 - 4x^3)$

Tab. 14.3: Hodnoty integrálů  $\int M\bar{M}dx$  u prutů konstantního průřezu (pokračování)

Zatěž. případ	$M$	$\bar{M}$	$\int M\bar{M}dx$	$\int M\bar{M}dx$	$\int M\bar{M}dx$
24			$\frac{1}{2}\bar{M}_c M_a l$	$\frac{2}{3}\bar{M}_c M_a l$	$\frac{1}{3}\bar{M}_a M_a l$
25		$\frac{\bar{M}_c M_c}{3l}(l^2 + ul)$	$\frac{8}{15}\bar{M}_c M_c l$	$\frac{1}{5}\bar{M}_a M_c l$	
26		$\frac{\bar{M}_c M_a}{12l}(3ul + u^2)$	$\frac{1}{5}\bar{M}_c M_a l$	$\frac{1}{5}\bar{M}_a M_a l$	
27		$\frac{\bar{M}_c M_b}{12l}(3lu + u^2)$	$\frac{1}{5}\bar{M}_c M_b l$	$\frac{1}{30}\bar{M}_a M_b l$	
28		$\frac{\bar{M}_c M_a}{12l}(5l^2 - ul - u^2)$	$\frac{7}{15}\bar{M}_c M_a l$	$\frac{3}{10}\bar{M}_a M_a l$	
29		$\frac{\bar{M}_c M_b}{12l}(5l^2 - ul - u^2)$	$\frac{7}{15}\bar{M}_c M_b l$	$\frac{2}{15}\bar{M}_a M_b l$	

Tab. 14.2: Deformace prostého nosníku konstantního průřezu

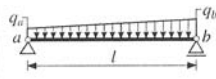
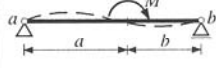

Zatěž. případ	Schéma zatížení	Průhyb $w, w_{\max}$	Pootočení $\varphi_a, \varphi_b$ podporových průřezů $a, b$
1		$w_{\max} = \frac{Fab}{27EI} \sqrt{3a(l+b)^3}$ $v x = \sqrt{\frac{1}{3}} a(l+b)$ pro $a \geq \frac{l}{2}$	$\varphi_a = \frac{Fab}{6EI} (l+b)$ $\varphi_b = \frac{Fab}{6EI} (l+a)$
2		$w_{\max} = \frac{Fl^3}{48EI}$ v $x = 0,5l$	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{Fl^2}{16EI}$
3		$w_{\max} = \frac{23}{648} \cdot \frac{Fl^3}{EI}$ v $x = 0,5l$	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{Fl^2}{9EI}$
4		$w_{\max} = \frac{19}{384} \cdot \frac{Fl^3}{EI}$ v $x = 0,5l$	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{5}{32} \cdot \frac{Fl^2}{EI}$
5		$w_{\max} = \frac{63}{1000} \cdot \frac{Fl^3}{EI}$ v $x = 0,5l$	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{1}{5} \cdot \frac{Fl^2}{EI}$
6		$w_{\max} = \frac{11}{144} \cdot \frac{Fl^3}{EI}$ v $x = 0,5l$	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{35}{144} \cdot \frac{Fl^2}{EI}$
7		$w_{\max} = \frac{F}{24EI} (3al^2 - 4a^3)$ v $x = 0,5l$	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{Fa}{2EI} (l-a)$
8		$w_{\max} = \frac{11}{384} \cdot \frac{Fl^3}{EI}$ v $x = 0,5l$	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{3}{32} \cdot \frac{Fl^2}{EI}$
9		$w_{\max} = \frac{53}{1296} \cdot \frac{Fl^3}{EI}$ v $x = 0,5l$	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{19}{144} \cdot \frac{Fl^2}{EI}$
10		$w_{\max} = \frac{41}{768} \cdot \frac{Fl^3}{EI}$ v $x = 0,5l$	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{11}{64} \cdot \frac{Fl^2}{EI}$
11		$w_{\max} = \frac{397}{6000} \cdot \frac{Fl^3}{EI}$ v $x = 0,5l$	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{51}{240} \cdot \frac{Fl^2}{EI}$
12		$w = \frac{qa^3b}{24EI} (4l - 3a)$ v $x = a$	$\varphi_a = \frac{qa^2}{24EI} (2l - a)^2$ $\varphi_b = \frac{qa^2}{24EI} (2l^2 - a^2)$
13		$w = \frac{qc}{6EI} \left[ \frac{ab}{l} \left( 2al - 2a^2 - \frac{c^2}{4} \right) + \frac{c^3}{64} \right]$ v $x = a$	$\varphi_a = \frac{q}{24EI} \cdot \frac{bc}{l} [4a(l+b) - c^2]$ $\varphi_b = \frac{q}{24EI} \cdot \frac{ac}{l} [4b(l+a) - c^2]$

Tab. 14.2: Deformace prostého nosníku konstantního průřezu (pokračování)

Zatěž. případ	Schéma zatížení	Průhyb $w, w_{\max}$	Pootočení $\varphi_a, \varphi_b$ podporových průřezů $a, b$
14		$w_{\max} = \frac{ql^4}{48EI} \cdot \frac{a^2}{l^2} \left( 3 - 2 \frac{a^2}{l^2} \right)$ $v x = 0,5l$	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{qa^2}{12EI} (3l - 2a)$
15		$w_{\max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \quad v x = 0,5l$	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{1}{24} \cdot \frac{ql^3}{EI}$
16		$w = \frac{qa^3l}{45EI} \left( 5 - 9 \frac{a}{l} + 4 \frac{a^2}{l^2} \right)$ $v x = a$	$\varphi_a = \frac{qa^2l}{360EI} \left( 40 - 45 \frac{a}{l} + 12 \frac{a^2}{l^2} \right)$ $\varphi_b = \frac{qa^2l}{90EI} \left( 5 - 3 \frac{a^2}{l^2} \right)$
17		$w = \frac{qa^2bl}{360EI} \left( 20 \frac{a}{l} - 13 \frac{a^2}{l^2} \right)$ $v x = a$	$\varphi_a = \frac{qa^2l}{360EI} \left( 20 - 15 \frac{a}{l} + 3 \frac{a^2}{l^2} \right)$ $\varphi_b = \frac{qa^2l}{360EI} \left( 10 - 3 \frac{a^2}{l^2} \right)$
18		$w_{\max} = 0,006522 \frac{ql^4}{EI}$ $v x = 0,5193l$	$\varphi_a = \frac{7}{360} \cdot \frac{ql^3}{EI}$ $\varphi_b = \frac{8}{360} \cdot \frac{ql^3}{EI}$
19		$w_{\max} = \frac{1}{120} \cdot \frac{ql^4}{EI} \quad v x = 0,5l$	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{5}{192} \cdot \frac{ql^3}{EI}$
20		$w_{\max} = \frac{3}{640} \cdot \frac{ql^4}{EI} \quad v x = 0,5l$	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{1}{64} \cdot \frac{ql^3}{EI}$
21		$w_{\max} = \frac{7}{1024} \cdot \frac{ql^4}{EI} \quad v x = 0,5l$	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{17}{768} \cdot \frac{ql^3}{EI}$
22		$w_{\max} = \frac{19}{3072} \cdot \frac{ql^4}{EI} \quad v x = 0,5l$	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{5}{256} \cdot \frac{ql^3}{EI}$
23		$w_{\max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \left( 1 - \frac{8a^2}{5l^2} + \frac{16a^4}{25l^4} \right) \quad v x = 0,5l$	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{ql^3}{24EI} \left( 1 - 2 \frac{a^2}{l^2} + \frac{a^3}{l^3} \right)$



Tab. 14.2: Deformace prostého nosníku konstantního průřezu (pokračování)

Zatěž. případ	Schéma zatížení	Průhyb $w$ , $w_{\max}$	Pootočení $\varphi_a$ , $\varphi_b$ podporových průřezů $a$ , $b$
24		$w = \frac{5}{768}(q_a + q_b) \frac{l^4}{EI} \quad \text{v } x = 0,5l$	$\varphi_a = \frac{l^3}{360EI}(8q_a + 7q_b)$ $\varphi_b = \frac{l^3}{360EI}(7q_a + 8q_b)$
25		$w = -\frac{Mab}{3EI} \cdot \frac{a-b}{l} \quad \text{v } x = a$	$\varphi_a = \frac{-Ml}{6EI} \left(1 - 3\frac{b^2}{l^2}\right)$ $\varphi_b = \frac{Ml}{6EI} \left(1 - 3\frac{a^2}{l^2}\right)$
26		$w_{\max} = 0,06415 \frac{Ml^2}{EI}$ $\text{v } x = 0,42265l$	$\varphi_a = \frac{Ml}{3EI}, \quad \varphi_b = \frac{Ml}{6EI}$



## 6 Studijní prameny

### 6.1 Seznam použité literatury

- [1] Kadlčák, J., Kytýr, J. *Statika stavebních konstrukcí II. Staticky neurčitě prutové konstrukce*. Druhé vydání. VUTIUM, Brno 2004
- [2] Kadlčák, J., Kolář, A., Kytýr, J., Maurer, E. *Statika stavebních konstrukcí I*. Skriptum. VUT v Brně, Brno 1996



### 6.2 Seznam doplňkové studijní literatury

- [3] Chobot, K., Benda, J., Hájek, V., Novotná, H. *Statika stavebních konstrukcí II*. Učebnice. SNTL/ALFA, Praha 1983
- [4] Harvančík, J., Pekarovič, J. *Stavební mechanika I*. ALFA, Bratislava 1981
- [5] Harvančík, J., Pekarovič, J., Sobota, J. *Stavební mechanika – příklady*. ALFA/SNTL, Bratislava 1986
- [6] Cais, S. *Statika stavebních konstrukcí – Dějiny stavební mechaniky*. Doplňková skripta. ČVUT, Praha 1991



### 6.3 Odkazy na další studijní zdroje a prameny

- [7] <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians>



## Poznámky