

# Obecná deformační metoda (ODM)

## **Postup výpočtu**

1. Úprava modelu, očíslování uzlů, určení minimálního stupně přetvárné neurčitosti  $\mathbf{n}_p$
2. Vypsání neznámých parametrů deformací do globálního vektoru deformací a sestavení globálního vektoru uzlových zatížení (tj. síly a momenty ve směrech a v místech neznámých parametrů deformací). Počet řádků obou vektorů je shodný s  $\mathbf{n}_p$

$$\{\mathbf{r}\} \text{ a } \{\mathbf{S}\}$$

3. Rozdělení konstrukce na jednotlivé pruty (  $\text{---}$   $\text{---o}$   $\text{o---}$   $\text{o---o}$  ), výpočet lokálních matic tuhosti a lokálních vektorů primárních koncových sil jednotlivých prutů v lokálních souřadnicích (ozn. \*)

$$[\mathbf{K}_{i,k}^*] \text{ a } \{\bar{\mathbf{R}}_{i,k}^*\}$$

4. U prutů, které nemají lokální souřadnice shodné s globálními souřadnicemi výpočet lokálních matic tuhosti a lokálních vektorů primárních koncových sil v globálních souřadnicích (*pruty, které mají lokální souřadnice shodné s globální souřadnicemi, mají shodné také matice a vektory v lokálních i globálních souřadnicích*)

$$[\mathbf{K}_{i,k}] \text{ a } \{\bar{\mathbf{R}}_{i,k}\}$$

5. Sestavení globální matice tuhosti a globálního vektoru primárních koncových sil celé konstrukce (v glob. souřadnicích). Počet sloupců matice a počty řádků matice a vektoru jsou shodné s  $\mathbf{n}_p$

$$[\mathbf{K}] \text{ a } \{\bar{\mathbf{R}}\}$$

6. Sestavení zatěžovacího vektoru, následné sestavení soustavy rovnic a výpočet neznámých parametrů deformací ze soustavy

$$\{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{S}\} - \{\bar{\mathbf{R}}\}$$

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{r}\} = \{\mathbf{F}\}$$

7. Sestavení lokálních vektorů deformací prutů v globálních souřadnicích a u prutů, které nemají lokální souřadnice shodné s globálními souřadnicemi výpočet lokálních vektorů deformací prutů v lokálních souřadnicích

$$\{\mathbf{r}_{i,k}\} = \{\mathbf{r}_{i,k}^*\} \text{ a popř. } \{\mathbf{r}_{i,k}\} \Rightarrow \{\mathbf{r}_{i,k}^*\}$$

8. Výpočet lokálních vektorů sekundárních koncových sil a lokálních vektorů výsledných koncových sil jednotlivých prutů

$$\{\hat{\mathbf{R}}_{i,k}^*\} = [\mathbf{K}_{i,k}^*] \cdot \{\mathbf{r}_{i,k}^*\}$$

$$\{\mathbf{R}_{i,k}^*\} = \{\bar{\mathbf{R}}_{i,k}^*\} + \{\hat{\mathbf{R}}_{i,k}^*\}$$

9. Vykreslení průběhů vnitřních sil



Tabulka 11.4. Globální matice tuhosti prutu konstantního průřezu

(a) Prut oboustranně monoliticky připojený

$c = \cos \gamma$   
 $s = \sin \gamma$

$$k_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} c^2 + \frac{12EI}{l^3} s^2 & \frac{EA}{l} c & \frac{EA}{l} s & \frac{6EI}{l^2} s & \frac{6EI}{l^2} c & 0 \\ \frac{EA}{l} c & \frac{EA}{l} c^2 + \frac{12EI}{l^3} s^2 & \frac{EA}{l} cs & \frac{6EI}{l^2} c & \frac{6EI}{l^2} s & 0 \\ \frac{EA}{l} s & \frac{EA}{l} cs & \frac{EA}{l} s^2 + \frac{12EI}{l^3} c^2 & \frac{6EI}{l^2} s & \frac{6EI}{l^2} c & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} s & \frac{6EI}{l^2} c & \frac{6EI}{l^2} s & \frac{EA}{l} c^2 + \frac{3EI}{l^3} s^2 & \frac{EA}{l} cs & \frac{3EI}{l^3} s \\ \frac{6EI}{l^2} c & \frac{6EI}{l^2} s & \frac{6EI}{l^2} c & \frac{EA}{l} cs & \frac{EA}{l} s^2 + \frac{3EI}{l^3} c^2 & \frac{3EI}{l^3} c \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} s & \frac{3EI}{l^3} c & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Prut pravostranně kloubově připojený

$c = \cos \gamma$   
 $s = \sin \gamma$

$$k_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} c^2 + \frac{3EI}{l^3} s^2 & \frac{EA}{l} c & \frac{EA}{l} s & \frac{3EI}{l^2} s & \frac{3EI}{l^2} c & 0 \\ \frac{EA}{l} c & \frac{EA}{l} c^2 + \frac{3EI}{l^3} s^2 & \frac{EA}{l} cs & \frac{3EI}{l^2} c & \frac{3EI}{l^2} s & 0 \\ \frac{EA}{l} s & \frac{EA}{l} cs & \frac{EA}{l} s^2 + \frac{3EI}{l^3} c^2 & \frac{3EI}{l^2} s & \frac{3EI}{l^2} c & 0 \\ \frac{3EI}{l^2} s & \frac{3EI}{l^2} c & \frac{3EI}{l^2} s & \frac{EA}{l} c^2 + \frac{3EI}{l^3} s^2 & \frac{EA}{l} cs & \frac{3EI}{l^3} s \\ \frac{3EI}{l^2} c & \frac{3EI}{l^2} s & \frac{3EI}{l^2} c & \frac{EA}{l} cs & \frac{EA}{l} s^2 + \frac{3EI}{l^3} c^2 & \frac{3EI}{l^3} c \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} s & \frac{3EI}{l^3} c & 0 \end{bmatrix}$$

Tabulka 11.4. Globální matice tuhosti prutu konstantního průřezu (pokračování)

(c) Prut levostranně kloubově připojený

$c = \cos \gamma$   
 $s = \sin \gamma$

$$k_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} c^2 + \frac{3EI}{l^3} s^2 & \frac{EA}{l} c & \frac{EA}{l} s & 0 & 0 & 0 \\ \frac{EA}{l} c & \frac{EA}{l} c^2 + \frac{3EI}{l^3} s^2 & \frac{EA}{l} cs & 0 & 0 & 0 \\ \frac{EA}{l} s & \frac{EA}{l} cs & \frac{EA}{l} s^2 + \frac{3EI}{l^3} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} c^2 + \frac{3EI}{l^3} s^2 & \frac{EA}{l} cs & \frac{3EI}{l^3} s \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} cs & \frac{EA}{l} s^2 + \frac{3EI}{l^3} c^2 & \frac{3EI}{l^3} c \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} s & \frac{3EI}{l^3} c & 0 \end{bmatrix}$$

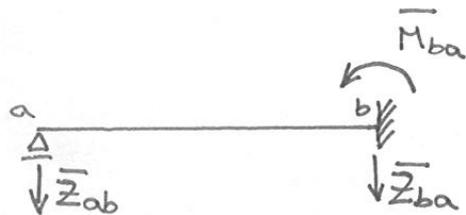
(d) Prut oboustranně kloubově připojený

$c = \cos \gamma$   
 $s = \sin \gamma$

$$k_{ab} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & 0 & -c^2 & -cs & 0 \\ cs & s^2 & 0 & -cs & -s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c^2 & -cs & 0 & c^2 & cs & 0 \\ -cs & -s^2 & 0 & cs & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

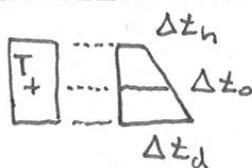
K výpočtu lokálních koncových sil z globálních parametrů deformace:

$$\mathbf{R}_{ab}^* = \mathbf{k}_{ab}^* \mathbf{r}_{ab}^* = \mathbf{k}_{ab}^* \mathbf{T}_{ab} \mathbf{r}_{ab} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 1-c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c & -s & 0 & 1 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}_{ab}$$



Tabulka 14.11. Primární moment a reakce jednostranně dokonale vetknutého nosníku konstantního průřezu

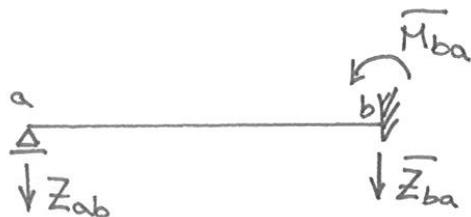
Zatěž. případ	Schéma zatížení	$\bar{M}_{ba}$	$\bar{Z}_{ab}$	$\bar{Z}_{ba}$
1		$-\frac{Fab}{2l^2}(l+a)$	$-\frac{Fb^2}{2l^3}(2l+a)$	$-\frac{Fa}{2l^3}(3l^2-a^2)$
2		$-\frac{3}{16}Fl$	$-\frac{5}{16}F$	$-\frac{11}{16}F$
3		$-\frac{1}{3}Fl$	$-\frac{2}{3}F$	$-\frac{4}{3}F$
4		$-\frac{3}{2}Fa\frac{l-a}{l}$	$-\frac{F}{2l^2}(2l^2-3al+3a^2)$	$-\frac{F}{2l^2}(2l^2+3al-3a^2)$
5		$-\frac{15}{32}Fl$	$-\frac{33}{32}F$	$-\frac{63}{32}F$
6		$-\frac{3}{5}Fl$	$-\frac{7}{5}F$	$-\frac{13}{5}F$
7		$-\frac{Fl}{8} \cdot \frac{n^2-1}{n}$	$-\frac{F}{8n}(n-1)(3n-1)$	$-\frac{F}{8n}(n-1)(5n+1)$
8		$-\frac{M}{2l^2}(l^2-3a^2)$	$+\frac{3M}{2l^3}(l^2-a^2)$	$-\frac{3M}{2l^3}(l^2-a^2)$
9		$-\frac{M}{2}$	$+\frac{3M}{2l}$	$-\frac{3M}{2l}$
10		$-\frac{3}{2} \frac{E\alpha_t \Delta t_1}{h}$	$+\frac{3}{2} \frac{E\alpha_t \Delta t_1}{hl}$ $\Delta t_1 = \Delta t_d - \Delta t_h > 0$	$-\frac{3}{2} \frac{E\alpha_t \Delta t_1}{hl}$



$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t_h + \Delta t_d}{2}$$

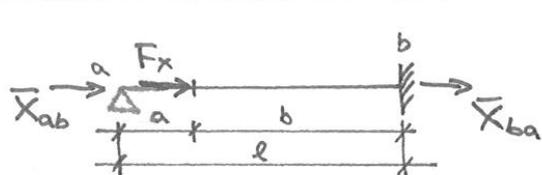
$$\bar{X}_y = E \cdot A \cdot \alpha_T \cdot \Delta t_0$$

$$\bar{X}_z = E A \alpha_T \cdot \Delta t_0$$



Tabulka 14.11. Primární moment a reakce jednostranně dokonale vetknutého nosníku konstantního průřezu (pokračování)

Zatěž. případ	Schéma zatížení	$\bar{M}_{ba}$	$\bar{Z}_{ab}$	$\bar{Z}_{ba}$
11		$-\frac{qa^2}{8l^2}(2l^2 - a^2)$	$-\frac{qa}{8l^3} \cdot [2l^2(a+4b) + a^3]$	$-\frac{qa^2}{8l^3}(6l^2 - a^2)$
12		$-\frac{qb^2}{8l^2}(a+l)^2$	$-\frac{qb^3}{8l^3}(3l+a)$	$-\frac{qb}{8l^3} \cdot [4l(2l^2 - b^2) + b^3]$
13		$-\frac{qac}{8l^2} \cdot [4(l^2 - a^2) - c^2]$	$-\frac{qc}{8l^3} \cdot [4b^2(2l+a) + ac^2]$	$-\frac{qac}{8l^3} \cdot [8l^2 + 4b(l+a) - c^2]$
14		$-\frac{qb}{16l}(3l^2 - b^2)$	$-\frac{qb}{16l^2}(5l^2 + b^2)$	$-\frac{qb}{16l^2}(11l^2 - b^2)$
15		$-\frac{1}{8}ql^2$	$-\frac{3}{8}ql$	$-\frac{5}{8}ql$
16		$-\frac{1}{15}ql^2$	$-\frac{1}{10}ql$	$-\frac{2}{5}ql$
17		$-\frac{7}{120}ql^2$	$-\frac{11}{40}ql$	$-\frac{9}{40}ql$
18		$-\frac{5}{64}ql^2$	$-\frac{11}{64}ql$	$-\frac{21}{64}ql$
19		$-\frac{3}{64}ql^2$	$-\frac{13}{64}ql$	$-\frac{19}{64}ql$
20		$-\frac{q(l-a)}{8l} \cdot (a^2 + ab + l^2)$	$-\frac{q}{8l^2} [a^2(a+b) - l(a^2 + ab) + l^2(5a+4b) - l^3]$	$-\frac{q}{8l^2} [-a^2(a+b) + l(a^2 + ab) + l^2(3a+4b) + l^3]$

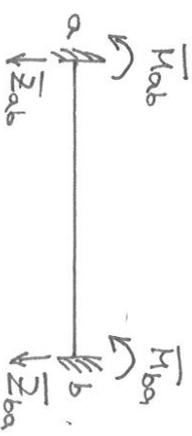


$$\bar{X}_{ab} = -\frac{F_x \cdot b}{l}$$

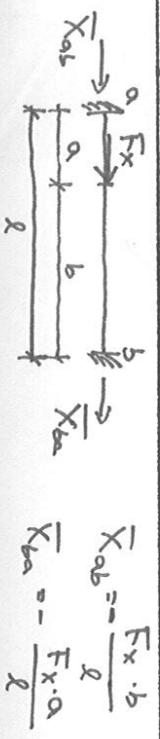
$$\bar{X}_{ba} = -\frac{F_x \cdot a}{l}$$

$$\bar{X}_{ab} = \bar{X}_{ba} = -\frac{n \cdot l}{2}$$

Tabulka 14.10. Primární momenty a reakce oboustranně dokonale velikutého nosníku konstantního průřezu



Zatěž. případ	Schema zatížení	$\bar{M}_{ab}$	$\bar{M}_{ba}$	$\bar{Z}_{ab}$	$\bar{Z}_{ba}$
1		$+\frac{F a b^2}{l^2}$	$-\frac{F a^2 b}{l^2}$	$-\frac{F b^2}{l^3}(1+2a)$	$-\frac{F a^2}{l^3}(1+2b)$
2		$+\frac{1}{8} F l$	$-\frac{1}{8} F l$	$-\frac{F}{2}$	$-\frac{F}{2}$
3		$+\frac{2}{9} F l$	$-\frac{2}{9} F l$	$-F$	$-F$
4		$+\frac{F a}{l}(1-a)$	$-\frac{F a}{l}(1-a)$	$-F$	$-F$
5		$+\frac{5}{16} F l$	$-\frac{5}{16} F l$	$-\frac{3}{2} F$	$-\frac{3}{2} F$
6		$+\frac{2}{5} F l$	$-\frac{2}{5} F l$	$-2F$	$-2F$
7		$+\frac{35}{72} F l$	$-\frac{35}{72} F l$	$-\frac{5}{2} F$	$-\frac{5}{2} F$
8		$+\frac{F l}{12} \cdot \frac{n^2-1}{n}$	$-\frac{F l}{12} \cdot \frac{n^2-1}{n}$	$-\frac{F}{2}(n-1)$	$-\frac{F}{2}(n-1)$



$$\bar{X}_{ab} = -\frac{F_x \cdot b}{l}$$

$$\bar{X}_{ba} = -\frac{F_x \cdot a}{l}$$



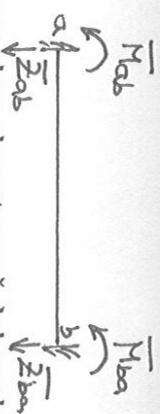
$$\bar{X}_{ab} = \bar{X}_{ba} = -\frac{n \cdot l}{2}$$

Tabulka 14.10. Primární momenty a reakce oboustranně dokonale velknutého nosníku konstantního průřezu (pokračování)



Zatěž. případ	Schéma zařízení	$\bar{M}_{ab}$	$\bar{M}_{ba}$	$\bar{Z}_{0b}$	$\bar{Z}_{ba}$
9		$-\frac{Mb}{l^2}(2l-3b)$	$-\frac{Ma}{l^2}(2l-3a)$	$+\frac{6Mab}{l^3}$	$-\frac{6Mab}{l^3}$
10		$+\frac{qc}{12l^2} \cdot (12ab^2 + ac^2 - 2bc^2)$	$-\frac{qc}{12l^2} \cdot (12a^2b + bc^2 - 2ac^2)$	$-\frac{qc}{4l^3} \cdot [4b^2(3a+b) + c^2(a-b)]$	$-\frac{qc}{4l^3} \cdot [4a^2(a+3b) + c^2(b-a)]$
11		$+\frac{qa^2}{12l^2}(6b^2 + 3ab + al)$	$-\frac{qa^3}{12l^2}(3b+l)$	$-\frac{qa}{2l^3}[2l(l^2 - a^2) + a^3]$	$-\frac{qa^3}{2l^3}(l+b)$
12		$+\frac{qa^2}{6l}(2l+b)$	$-\frac{qa^2}{6l}(2l+b)$	$-qa$	$-qa$
13		$+\frac{1}{12}ql^2$	$-\frac{1}{12}ql^2$	$-\frac{1}{2}ql$	$-\frac{1}{2}ql$
14		$+\frac{1}{30}ql^2$	$-\frac{1}{20}ql^2$	$-\frac{3}{20}ql$	$-\frac{7}{20}ql$
15		$+\frac{1}{20}ql^2$	$-\frac{1}{30}ql^2$	$-\frac{7}{20}ql$	$-\frac{3}{20}ql$
16		$+\frac{5}{96}ql^2$	$-\frac{5}{96}ql^2$	$-\frac{1}{4}ql$	$-\frac{1}{4}ql$

Tabulka 14.10. Primární momenty a reakce oboustranně dokonale větknutého nosníku konstantního průřezu (pokračování)



Zatěž. případ	Schéma zatížení	$\bar{M}_{ab}$	$\bar{M}_{ba}$	$\bar{Z}_{ab}$	$\bar{Z}_{ba}$
17		$+\frac{q}{30} \left( l^2 + bl + b^2 - \frac{3b^3}{2l} \right)$	$-\frac{q}{30} \left( l^2 + al + a^2 - \frac{3a^3}{2l} \right)$	$-\frac{q}{30l} \left[ 4a^2 + 15ab + 11b^2 - (a-b)l + \frac{3}{2l}(a^3 - b^3) \right]$	$-\frac{q}{30l} \left[ 11a^2 + 15ab + 4b^2 + (a-b)l - \frac{3}{2l}(a^3 - b^3) \right]$
18		$+\frac{1}{32}ql^2$	$-\frac{1}{32}ql^2$	$-\frac{1}{4}ql$	$-\frac{1}{4}ql$
19		$+\frac{qc}{60l^2} [10b^2(3a+c) + c^2(15a+10b+3c) + 40abc]$	$-\frac{qc}{60l^2} [10a^2(3b+2c) + c^2(10a+5b+2c) + 20abc]$	$-\frac{qc}{60l^3} [10(l^2 - a^2) \cdot (3b+2c) + 10b^2(3a+c) + c^2(5a+5b+c) + 20a]$	$-\frac{qc}{60l^3} [10(l^2 - b^2) \cdot (3a+c) + 10a^2(3b+2c) - c^2(5a+5b+c) - 20abc]$
20		$+\frac{qc}{6l^2} [6ab^2 + c^2(a-2b)]$	$-\frac{qc}{6l^2} [6a^2b + c^2(b-2a)]$	$-\frac{qc}{2l^3} [2bl^2 - (a-b) \cdot (2ab - c^2)]$	$-\frac{qc}{2l^3} [2al^2 + (a-b) \cdot (2ab - c^2)]$
21		$+\left( \frac{q}{12} + \frac{p}{30} \right) l^2$	$-\left( \frac{q}{12} + \frac{p}{20} \right) l^2$	$-\left( \frac{q}{2} + \frac{3p}{20} \right) l$	$-\left( \frac{q}{2} + \frac{7p}{20} \right) l$
22		$+\frac{q(l-a)}{12l} (a^2 + ab + l^2)$	$-\frac{q(l-a)}{12l} (a^2 + ab + l^2)$	$-\frac{1}{2}q(a+b)$	$-\frac{1}{2}q(a+b)$
23		$+\frac{Ela, \Delta l_1}{h}$	$-\frac{Ela, \Delta l_1}{h}$	0	0

$$\Delta l_1 = \Delta l_a - \Delta l_b > 0$$

$$\Delta z_0 = \frac{\Delta z_a - \Delta z_b}{2}$$

$$\bar{X}_a = \bar{X}_b = EA\alpha_t \cdot \Delta z_0$$

$$\mathbf{T}_{ab} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$


---

$$\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^{-1} \mathbf{r}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab}^T \mathbf{r}_{ab}^*$$

$$\mathbf{r}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} u_a^* \\ w_a^* \\ \varphi_a^* \\ u_b^* \\ w_b^* \\ \varphi_b^* \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{r}_{ab} = \begin{Bmatrix} u_a c + w_a s \\ -u_a s + w_a c \\ \varphi_a \\ u_b c + w_b s \\ -u_b s + w_b c \\ \varphi_b \end{Bmatrix}$$


---

$$\mathbf{R}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{R}_{ab},$$

$$\mathbf{R}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^{-1} \mathbf{R}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab}^T \mathbf{R}_{ab}^*$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{ab} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ab} \\ \bar{Z}_{ab} \\ \bar{M}_{ab} \\ \bar{X}_{ba} \\ \bar{Z}_{ba} \\ \bar{M}_{ba} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{ab}^T \bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ab}^* c - \bar{Z}_{ab}^* s \\ \bar{X}_{ab}^* s + \bar{Z}_{ab}^* c \\ \bar{M}_{ab}^* \\ \bar{X}_{ba}^* c - \bar{Z}_{ba}^* s \\ \bar{X}_{ba}^* s + \bar{Z}_{ba}^* c \\ \bar{M}_{ba}^* \end{Bmatrix}$$


---

$$\hat{\mathbf{R}}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^T \hat{\mathbf{R}}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab}^T \mathbf{k}_{ab}^* \mathbf{r}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab}^T \mathbf{k}_{ab}^* \mathbf{T}_{ab} \mathbf{r}_{ab} = \mathbf{k}_{ab} \mathbf{r}_{ab}$$

$$\mathbf{k}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^T \mathbf{k}_{ab}^* \mathbf{T}_{ab}$$