VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

ING. JIŘÍ KYTÝR, CSc.
ING. ZBYNĚK KERŠNER, CSc.
ING. ROSTISLAV ZÍDEK
ING. ZBYNĚK VLK

ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY

MODUL BD01-MO4

STATICKY URČITÉ PRUTOVÉ KONSTRUKCE – ČÁST 2

STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

Vážení uživatelé tohoto učebního textu,

dovolujeme si Vás požádat o malé strpení pro využívání této učební pomůcky pro Vaše studium. Při závěrečné kontrole byly navrženy další vylepšující úpravy a drobné formální opravy, které přispějí ke zlepšení kvality učebního textu.

Z časových důvodů však nebylo možné je dosud realizovat. Předpokládáme, že opravy provedeme do konce roku 2005. Posečkejte proto prosím se stahováním a používáním, **dokud nezmizí tento upozorňující text**.

Děkují autoři

OBSAH

1 Úvod

1.1 Cíle

V tomto čtvrtém modulu Základů stavební mechaniky si doplníme řešení rovinných prutových konstrukcí o analýzu rovinného staticky určitého zakřiveného nosníku. Dále se seznámíme s řešením rovinných staticky určitých příhradových konstrukcí. Obecný vztah pro posouzení statické a kinematické určitosti ze třetího modulu převedeme na vztah vhodnější pro příhradové soustavy. Zmíníme se o posuzování výjimkového uspořádání příhradové soustavy. Uvedeme si dvě základní metody řešení prutových konstrukcí s kloubově připojenými pruty, a to metodu styčníkovou (v obecné a zjednodušené variantě) a metodou průsečnou. V poslední kapitole tohoto modulu rozšíříme analýzu přímého prutu o účinek prostorového namáhání. Uvedeme si způsob podepření, posouzení statické určitosti, výpočet reakcí a odvodíme diferenciální podmínky rovnováhy. Výklad budeme ilustrovat příklady řešení jednoduchého přímého nosníku a prostorově lomeného nosníku.

Naším cílem ve finále budou výpočty nosných stavebních konstrukcí z hlediska poskytnutí údajů pro dimenzování podle jednotlivých materiálů.

1.2 Požadované znalosti

Čtvrtý modul základů stavební mechaniky je přímým pokračováním třetího modulu. Navazuje přitom na znalosti získané v prvním modulu v rovinných silových soustavách. I zde budeme aplikovat rozklad sil do pravoúhlých složek, statický moment síly, redukci síly k bodu a statické podmínky rovnováhy sil a momentů sil.

Z matematického aparátu budeme používat goniometrické funkce, diferenciální počet včetně určování extrémů funkce a významu derivace jako směrnice tečny ke křivce, integrální počet pro vyjádření příslušných funkcí integrací.

1.3 Doba potřebná ke studiu

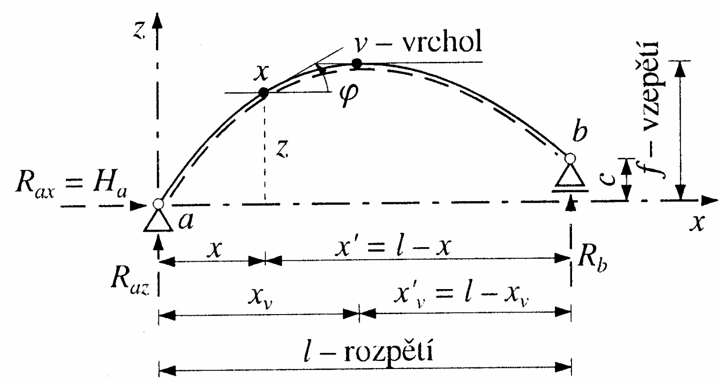
Modul obsahuje látku probíranou ve čtyřech týdnech semestru. Doba potřebná k nastudování jednotlivých kapitol či odstavců se liší od několika minut do několika desítek minut. Záleží to jednak na předchozí průpravě studenta v příslušné oblasti, jednak na obtížnosti daného tématu. Potřebná doba ke studiu činí 20 až 30 hodin.

1.4 Klíčová slova

mechanika, statika, pružnost, síla, statický moment, dvojice sil, silová soustava, rovnováha, ekvivalence, výpočtový model, prutová konstrukce, zatížení, vazby, reakce, složky reakcí, statická a kinematická určitost, výjimkový případ podepření, vnitřní síly, diferenciální podmínky rovnováhy, průběhy a diagramy vnitřních sil, zakřivený nosník, transformační vztahy, příhradový nosník, styčníková metoda, průsečná metoda, Ritterova úprava, mimostyčné zatížení, prostorové namáhání, prostorově lomený nosník, balkonový nosník

2 Rovinný zakřivený prut

Oblouky umožňují překonat mnohem větší rozpětí než nosníky přímé. Mohou být jako samostatné zakřivené nosníky (obr. 2.1) nebo jako součást rámové konstrukce s obloukovou příčlí ve tvaru *zakřiveného prutu*. **Jednoduchý oblouk** představuje samostatný zakřivený prut podepřený na obou koncích. U staticky neurčitých oblouků (viz Statika stavebních konstrukcí) dochází k výhodnějšímu namáhání, ale je nutné zachytit vodorovné síly v podporách (pomocí masivních bloků, táhel apod.).



Obr. 2.1: Rovinný zakřivený nosník

U zakřivených prutů se projevuje **klenbový účinek**, kde se svislé zatížení přenáší do podpor převážně **tlakovými normálovými silami**, méně ohybem a smykem. U staticky neurčitých konstrukcí vznikají při výhradně svislém zatížení **velké vodorovné složky** reakcí v podporách.

2.1 Charakteristiky zakřiveného nosníku

Střednice zakřiveného prutu se volí ve tvaru rovinné křivky. Popis střednice lze zadat analyticky funkcí $z(x)$ obvykle jako část kuželosečky (kružnice, elipsy, paraboly různých stupňů) nebo ve tvaru řetězovky, půlvlny sinusoidy apod., eventuelně pořadnicemi z_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Základními parametry oblouku (obr. 2.1) jsou vrchol v, rozpětí l, teoretické rozpětí $l_0 = 2\, x_v$, vzepětí f a výškový rozdíl patních průřezů c. Dále se sleduje maximální výška průřezu (v patním průřezu) max h a minimální poloměr křivosti (ve vrcholu) min r.

Jako ploché se označují oblouky, je-li poměr

$$\frac{f}{l_0} < 0{,}2\,, \tag{2.1}$$

málo zakřivené jsou při

$$\max h < 0{,}1 \min r \tag{2.2}$$

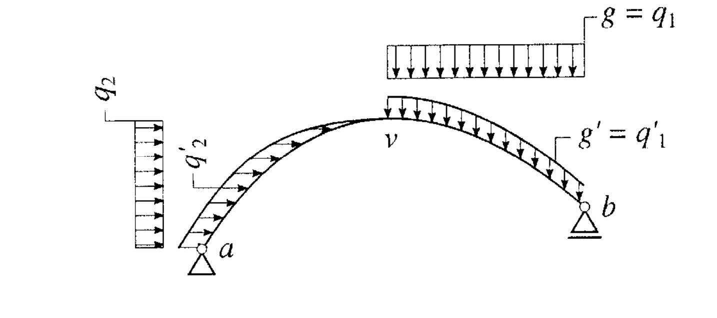
a štíhlé při

$$\max h < 0{,}1\, l \tag{2.3}$$

U staticky neurčitých oblouků záleží už při výpočtu na proměnnosti průřezu. Nejčastěji se uvažuje spojitá změna po celé délce oblouku. Nejjednodušeji to vyjádříme zvětšováním momentu setrvačnosti od vrcholu k podporám podle vztahu

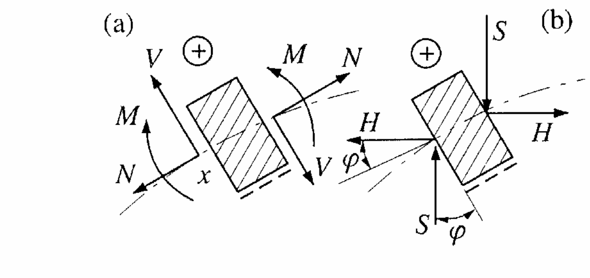
$$I(x) = \frac{I_v}{\cos\varphi}, \tag{2.4}$$

kde I_v je moment setrvačnosti vrcholového průřezu a φ je úhel sklonu tečny ke střednici v průřezu x.



Obr. 2.2: Spojitá zatížení na zakřiveném nosníku

Jako *zatížení* se u *zakřivených prutů* uvažují osamělé síly či momenty a spojité zatížení (obr. 2.2), působící svisle, vodorovně, kolmo ke střednici nebo tečně ke střednici. Zadání intenzity spojitého zatížení q můžeme realizovat na jednotku vodorovné či svislé délky nebo na jednotku délky střednice.



Obr. 2.3: Složky vnitřních sil zakřiveného prutu

2.2 Výpočet vnitřních sil

V průřezu x vznikají (stejně jako u přímého prutu) tři složky vnitřních sil – normálová síla N, posouvající síla V a ohybový moment M. Řeší se rovněž z podmínek rovnováhy na oddělené části nosníku; při praktickém postupu lze použít zásady:

- normálová síla N je dána algebraickým součtem průmětů všech vnějších sil z jedné části prutu do směru *tečny* ke střednici,
- posouvající síla V je dána algebraickým součtem průmětů všech vnějších sil z jedné části prutu do směru *normály* ke střednici,

- ohybový moment M je dán algebraickým součtem statických momentů všech vnějších sil z jedné části prutu (což je stejné jako u přímého prutu).

Kladné smysly složek vnitřních sil N, V, M se uvažují jako na přímém prutu.

2.2.1 Transformační vztahy

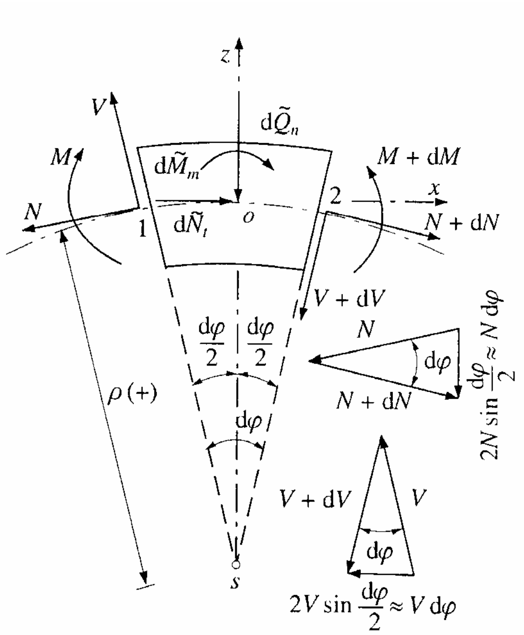
Protože při výpočtu normálové a posouvající síly se s měnícím průřezem mění i sklon tečny, je přímý výpočet poněkud nepraktický. Při numerickém výpočtu proto postupujeme výhodně tak, že výslednici R nejprve rozložíme do složky horizontální H a vertikální S (obr. 2.3b). Ze složek H, S určíme složky N, V (obvykle v desetinách rozpětí oblouku l) pomocí **transformačních vztahů**

$$N = H\cos\varphi - S\sin\varphi,$$

$$V = H\sin\varphi + S\cos\varphi, \qquad (2.5)$$

kde φ je úhel sklonu tečny ke střednici v průřezu x.

Pořadnice N, V, M vynášíme ve směru normál *ke střednici* nebo častěji svisle od *vodorovné základní čáry* (viz obr. 2.5).



Obr. 2.4: Zakřivený prutový element

2.3 Diferenciální podmínky rovnováhy zakřiveného prutu

Podobně jako u přímého prutu, vytněme ze zakřiveného prutu dvěma soumezními řezy kolmými ke střednici prutu diferenciální element (obr. 2.4) s délkou střednice

$$ds = \rho\, d\varphi, \qquad (2.6)$$

kde ρ je poloměr křivosti. Na element působí diferenciální síly od spojitých rovnoměrných zatížení

$$\mathrm{d}\widetilde{N}_t = n\,\mathrm{d}s = n\rho\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

$$\mathrm{d}\widetilde{Q}_n = q\,\mathrm{d}s = q\rho\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

$$\mathrm{d}\widetilde{M}_m = m\,\mathrm{d}s = m\rho\,\mathrm{d}\varphi \qquad (2.7)$$

a složky výslednice vnitřních sil N, V, M a $N + \mathrm{d}N$, $V + \mathrm{d}V$, $M + \mathrm{d}M$ za odejmuté části prutu (obr. 2.4). Sestavíme-li statické podmínky rovnováhy sil a momentů na uvolněném elementu $\sum F_{ix} = 0$, $\sum F_{iz} = 0$, $\sum M_{i2} = 0$, získáme po náhradě veličin malého úhlu $\mathrm{d}\varphi/2$ a zanedbání infinitezimálních veličin druhého řádu po úpravě **diferenciální podmínky rovnováhy**

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} = \frac{V}{\rho} - n\,, \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s} = -\frac{N}{\rho} - q\,, \qquad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s} = V + m\,.} \qquad (2.8)$$

Extrémy vnitřních sil N, V, M pak nastanou v průřezu, v němž bude platit

$$n = \frac{V}{\rho}\,, \qquad q = -\frac{N}{\rho}\,, \qquad V = -\,m\,. \qquad (2.9)$$

Příklad 2.1

Zadání

Určete reakce a vykreslete průběh vnitřních sil na prostém nosníku s parabolickou střednicí (obr. 2.5a) o rozpětí $l = 10$ m, vzepětí $f = 4$ m, zatíženém svislým spojitým rovnoměrným zatížením $q = 1$ kNm^{-1} po půdorysném průmětu střednice.

Řešení

Rovnice střednice parabolického nosníku v souřadnicové rovině x, z s počátkem $o \equiv a$

$$z(x) = \frac{4f}{l^2}\left(lx - x^2\right) = \frac{4fx}{l^2}\left(l - x\right). \qquad (2.10)$$

Rovnice sklonů tečen ke střednici nosníku

$$z'(x) = \frac{\mathrm{d}z(x)}{\mathrm{d}x} = \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{4f}{l^2}\left(l - 2x\right). \qquad (2.11)$$

Vztahy pro goniometrické funkce

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\varphi}}\,, \qquad \sin\varphi = \mathrm{tg}\,\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\varphi}}\,. \qquad (2.12)$$

Složky reakcí vazeb $R_{ax} = H_a$, R_{az}, $R_{bx} = H_b$, R_{bz} prostého zakřiveného nosníku z podmínek rovnováhy

$$\sum F_{ix} = 0\ :\quad H_a - H_b = 0 \quad \Rightarrow \quad H_a = H_b$$

$$\sum M_{ia} = 0:\quad R_{bz}\cdot l - Q\frac{l}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{bz} = \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}ql = 5\ \mathrm{kN}$$

$$\sum M_{ib} = 0: \quad -R_{az} \cdot l + Q\frac{l}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{az} = \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}ql = 5 \text{ kN}$$

Mezi složkami reakcí H_b, R_{bz} platí vztah

$$\frac{R_{bz}}{H_b} = \operatorname{tg}\alpha_b \quad \Rightarrow \quad H_b = H_a = \frac{R_{bz}}{\operatorname{tg}\alpha_b} = \frac{5}{\operatorname{tg}75°} = 1{,}340 \text{ kN}$$

Výslednice vnitřních sil v libovolném průřezu *x* nosníku má horizontální složku $H(x) = -H_a = -1{,}340$ kN a vertikální složku $S(x)$ o velikosti

$$S(x) = R_{az} - qx = \frac{q}{2}\left(l - 2x\right). \tag{2.13}$$

Složky vnitřních sil $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$ v průřezu *x* nosníku s přihlédnutím ke vztahům (2.5), (2.13):

$$N(x) = -H_a \cos\varphi - \frac{q}{2}\left(l - 2x\right)\sin\varphi,$$

$$V(x) = -H_a \sin\varphi + \frac{q}{2}\left(l - 2x\right)\cos\varphi,$$

$$M(x) = \frac{qx}{2}\left(l - x\right) - H_a z. \tag{2.14}$$

Ve vrcholu oblouku *v* pro $x = \frac{l}{2}$ a $\varphi = 0°$ dostáváme

$$N_v = -H_a, \quad V_v = 0, \quad M_v = \frac{1}{8}ql^2 - H_a f.$$

Pomocí uvedených výrazů vypočteme složky výslednice vnitřních sil $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$ v desetinách rozpětí parabolického nosníku. V tabulce 2.1 jsou uvedeny výsledky pouze z levé poloviny nosníku. Vypočtené hodnoty (pořadnice) jsou pak vyneseny od střednice nosníku ve směru normál i od vodorovné základní strany na svislicích a z nich získány příslušné průběhy *N*, *V*, *M*.

Tab. 2.1: Výpočet pořadnic složek vnitřních sil na zakřiveném nosníku

x (m)	z (m)	$z' = \operatorname{tg}\varphi$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$H(x)$ (kN)	$S(x)$ (kN)	$N(x)$ (kN)	$V(x)$ (kN)	$M(x)$ (kN)
0	0,00	1,60	0,530	0,848	–1,34	5	–4,950	1,514	0
1	1,44	1,28	0,616	0,788	–1,34	4	–3,977	1,407	2,570
2	2,56	0,96	0,721	0,693	–1,34	3	–3,045	1,236	4,570
3	3,36	0,64	0,842	0,539	–1,34	2	–2,207	0,963	5,998
4	3,84	0,32	0,952	0,305	–1,34	1	–1,581	0,544	6,854
5	4,00	0	1,000	0	–1,34	0	–1,340	0	7,140

V případě prostého parabolického nosníku se svislou reakcí $R_b = R_{bz}$ ($\alpha_b = 90°$) posuvného kloubu *b* dostáváme

$$H_a = H_b = 0\,, \quad R_{az} = R_{bz} = \frac{1}{2} ql = 5\ \text{kN}\,,$$

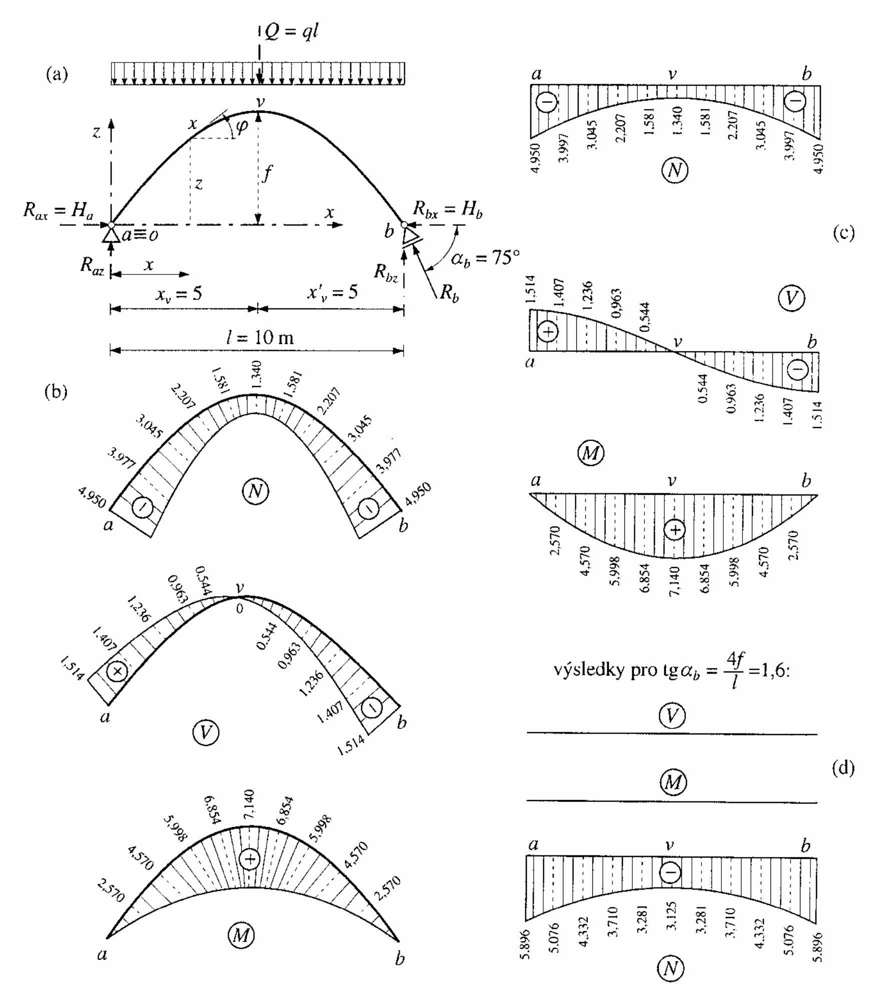
$$N_v = 0\,, \quad V_v = 0\,, \quad M_v = \frac{1}{8} ql^2 = 12{,}5\ \text{kNm}\,.$$

Je-li reakce R_b posuvného kloubu b parabolického nosníku (obr. 2.5a) odkloněna od vodorovné osy o úhel α_b s $\operatorname{tg}\alpha_b = \dfrac{4f}{l} = 1{,}6$, potom

$$R_{az} = R_{bz} = \frac{1}{2} ql = 5\ \text{kN}\,, \quad H_a = H_b = \frac{ql}{2\operatorname{tg}\alpha_b} = 3{,}125\ \text{kN}\,,$$

$$V(x) = M(x) = 0 \ \text{ pro } \ 0 < x < l\,.$$

V průřezech nosníku vznikají jen normálové síly, jejichž průběh je nakreslen na obr. 2.5d.



Obr. 2.5: Prostý nosník s parabolickou střednicí

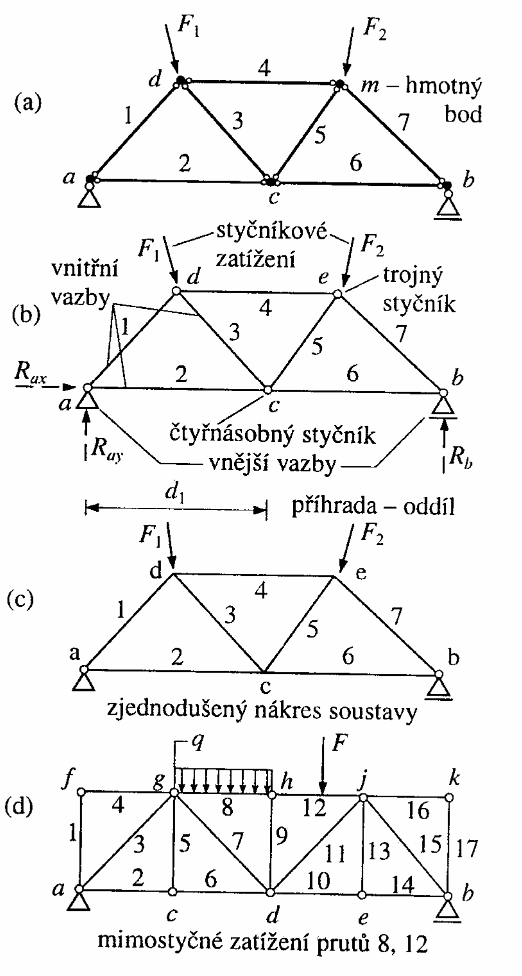
Shrnutí

Σ Nyní si již umíme poradit s výpočtem reakcí nosníku a s určením i vykreslením diagramů vnitřních sil na prutu, jehož střednice je zakřivená.

3 Rovinný příhradový nosník

Jak již bylo uvedeno v odst. 3.1 třetího modulu, vzájemné spojení prutů v uzlech může být tuhé (jde o rámový styčník) nebo *kloubové* (ideální kloubový styčník). Jsou-li všechny pruty připojeny do styčníku kloubově, jedná se o velmi jednoduchý výpočtový model prutové soustavy. V tom případě jsou pruty namáhány pouze osovými (normálovými) silami. Přesnější označení takové konstrukce je kloubová prutová soustava. Ve stručné technické terminologii se používá název příhradový nosník či příhradová soustava.

Za *příhradu* (oddíl) se považuje skupina prutů mezi dvěma sousedními svislicemi nebo diagonálami (obr. 3.1b).



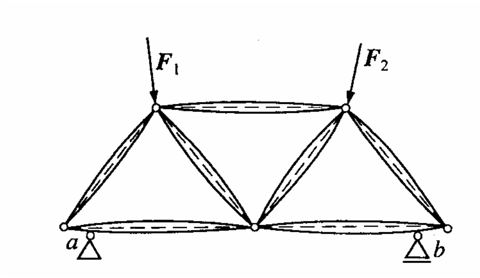
Obr. 3.1: Rovinná kloubová prutová soustava

3.1 Výpočtový model

Na skladbu rovinné kloubové prutové soustavy můžeme pohlížet ze dvou hledisek. Jednak můžeme přijmout představu složené nosníkové soustavy vytvořené z tuhých desek v rovině (viz odst. 3.2 třetího modulu) vzájemně spojených vícenásobnými vnitřními klouby (obr. 3.2).

klouby k_1, posuzuje se statická určitost podle již známé rovnice (3.6) ze třetího modulu

$$\boxed{2b + 3d \;=\; a + 2k_1\;.} \tag{3.1}$$



Obr. 3.2: Příhradový nosník

Je-li model skladby soustavy představován hmotnými body (styčníky) v počtu b, navzájem spojenými jednonásobnými vnitřními vazbami (kyvnými pruty) v počtu p a k pevnému útvaru připojen a jednonásobnými vnějšími vazbami, posoudí se statická určitost podle jednoduššího vztahu

$$\boxed{2b \;=\; a + p\;.} \tag{3.2}$$

Výraz (3.2) vyjadřuje ze **statického hlediska**, že počet $2b$ statických podmínek rovnováhy uzlů je roven počtu neznámých jednoduchých složek reakcí vnějších vazeb a neznámých osových sil (interakcí) v prutech. Z **kinematického hlediska** pak vyjadřuje, že počet stupňů volnosti soustavy $2b$ je roven počtu odebraných stupňů volnosti vnějšími vazbami a a vnitřními vazbami p.

Determinant soustavy $2b$ rovnic nesmí být roven nule, neboť by se jednalo o výjimkový případ (viz odst. 3.2.1). Dále musí platit pro vnější vazby relace $a \geq 3$, přičemž trojka představuje tři globální statické podmínky rovnováhy.

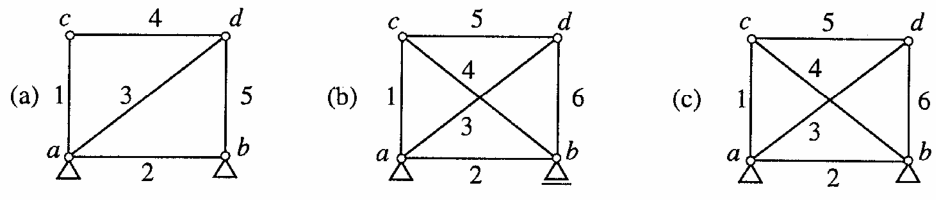
Prutová soustava je **staticky neurčitá** (kinematicky přeurčitá), platí-li

$$2b \;<\; a + p \tag{3.3}$$

a pak je nutno pro vyřešení přidat ještě přetvárné podmínky (viz Statika stavebních konstrukcí). Prutová soustava je **staticky přeurčitá** (kinematicky neurčitá), je-li

$$2b \;>\; a + p \tag{3.4}$$

a konstrukce se stává **mechanismem** nevhodným pro stavební účely.



(a)	(b)	(c)
$b = 4, p = 5, a = 4$	$b = 4, p = 6, a = 3$	$b = 4, p = 6, a = 4$
$2 \cdot 4 < 5 + 4$	$2 \cdot 4 < 6 + 3$	$2 \cdot 4 < 6 + 4$
$8 < 9$	$8 < 9$	$8 < 10$

Obr. 3.3: Staticky neurčité kloubové prutové soustavy

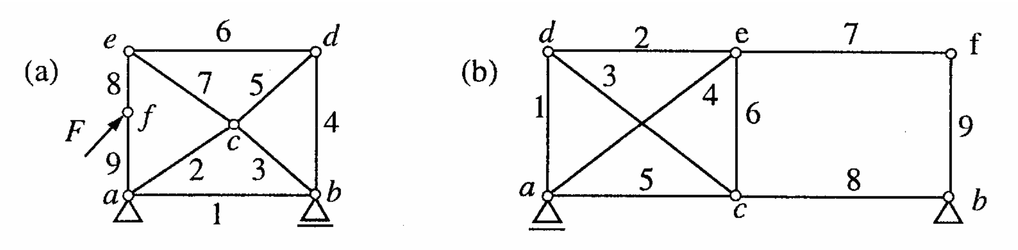
Křížení diagonálních prutů (obr. 3.3b) se při teoretických úvahách nemusí uvažovat jako styčník, neboť z podmínek rovnováhy do os obou prutů plyne rovnost příslušných osových sil. Také zvětšením parametru b o jedničku na levé straně rovnice (3.2) a přidáním dvou prutů p na pravé straně se rovnice nezmění. Pouze v případě, že v místě křížení působí osamělá síla, je tam uzel nutné uvažovat.

Příhradová soustava na obr. 3.1c je staticky určitá, neboť platí $b = 5$, $a = 3$, $p = 7$. Příklady staticky neurčitých příhradových soustav jsou s příslušnými parametry uvedeny na obr. 3.3.

3.2.1 Výjimkové případy

Výjimkový případ rovinné kloubové prutové soustavy nastane, je-li rovnice (3.2) splněna, ale soustava $2b$ rovnic má determinant $D = 0$, neboť pruty či vnější vazby jsou nevhodně uspořádány. Na obr. 3.4a je soustava s parametry $b = 6$, $a = 3$, $p = 9$, ale tři klouby (uzly a, f a e) leží v jedné přímce. Soustava na obr. 3.4b má parametry $b = 6$, $a = 3$, $p = 9$; levá příhrada je kinematicky přeurčitá (přebývá jedna diagonála), zatímco pravá příhrada tvoří tvarově neurčitý kloubový čtyřúhelník.

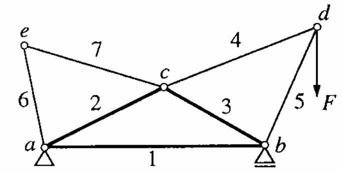
Vyčíslení determinantu $2b$ rovnic lze nahradit **posouzením kinematické určitosti** ze skladby prutové soustavy.



Obr. 3.4: Výjimkové případy kloubových prutových soustav

3.2.2 Posouzení ze skladby prutové soustavy

Nastane-li výjimkový případ, kdy rovnice (3.2) je splněna, ale prutová soustava či vazby jsou nevhodně uspořádány, je možné tuto skutečnost snadno zjistit posouzením skladby prutové soustavy. Vychází se z toho, že každou staticky určitou soustavu lze **rozšířit** o další styčník pomocí dvou prutů neležících v jedné přímce. Naopak zjednodušování představuje postupné **odstraňování** dvojných uzlů s příslušnými dvěma pruty.



Obr. 3.5: Trojúhelníková prutová soustava

Při **rozšiřování** můžeme vyjít z nejjednodušší soustavy ve tvaru trojúhelníku (na obr. 3.5 silně vyznačen), pro niž platí $b = 3$, $a = 3$, $p = 3$. Po dosazení do rovnice (3.2) je $2 \cdot 3 = 3 + 3$, tedy $6 = 6$. Přidáme-li jeden styčník a dva pruty (ve tvaru trojúhelníku), změní se rovnice (3.2) na tvar $2 \cdot 3 + \underline{2 \cdot 1} = 3 + 3 + \underline{2}$, tj. 8 = 8, kde podtržené členy představují přidanou trojúhelníkovou část. Takto získaná *trojúhelníková soustava* je vždy staticky určitá.

Rovněž lze ke konstrukci **přidat** jinou **celou** staticky určitou **soustavu** pomocí tří kyvných prutů (netvořících výjimkový případ, kdy osy prutů nesmí být rovnoběžné nebo se nesmí protínat v jednom bodu).

Zjednodušování naopak umožní jiný pohled na původní prutovou soustavu. Uvažme např. soustavu z obr. 3.4b, pro niž jsme již určili $b = 6$, $a = 3$, $p = 9$ a determinant soustavy vyjde $D = 0$. Odstraníme-li uzel f a pruty 7 a 9, zůstane nám levá vnitřně staticky neurčitá příhrada podepřená vně staticky přeurčitě (vlevo je posuvný kloub a vpravo kyvný prut). Po dosazení do vztahu (3.2) dostaneme $2 \cdot 4 = 6 + 2$, tedy 8 = 8, ale $a = 2 < 3$.

Trojúhelníkové či z trojúhelníků vytvořené části lze teoreticky vzhledem k „neměnnému" tvaru považovat za **tuhé desky** (jako ve složené nosníkové soustavě) spojené kyvnými pruty. Podrobněji to rozvedeme v odst. 3.5.

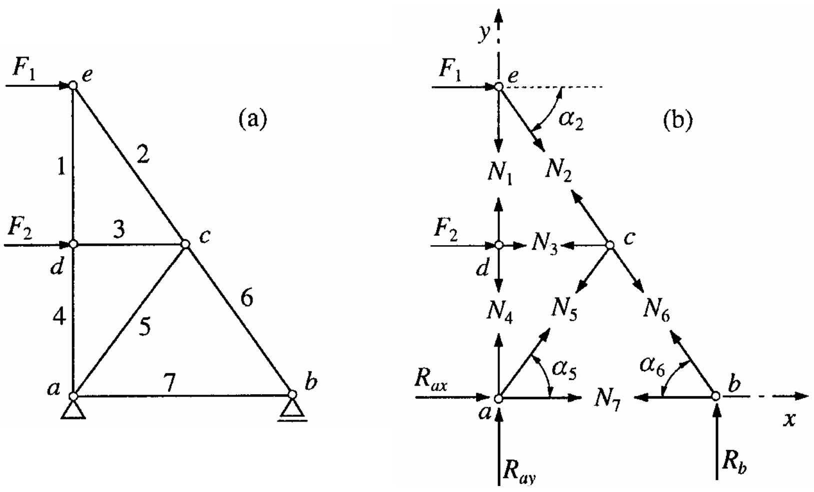
3.3 Výpočet reakcí vnějších vazeb

Složky reakcí vnějších vazeb se u staticky určitých příhradových soustav, splňujících rovnici (3.2), při počtu jednoduchých vazeb

- $a = 3$ dají určit nezávisle na řešení osových sil prutové soustavy užitím tří globálních podmínek rovnováhy, neboť soustava je vně staticky určitá,
- $a > 3$ musí řešit v závislosti na výpočtu osových sil vnitřních prutů (viz obecná styčníková metoda – odst. 3.4.1).

3.4 Metoda styčníková

Styčníková metoda využívá k řešení svazek sil se dvěma podmínkami rovnováhy v každém uzlu rovinné prutové soustavy. Je výhodné volit **konvenci** osových sil tak, že kladná síla vyvozuje v prutu tah a působí tedy ze styčníku. Vyjde-li výpočtem záporná hodnota, má osová síla opačný smysl, než se předpokládalo.



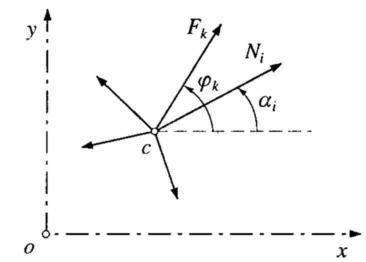
Obr. 3.6: Uvolněné styčníky prutové soustavy

3.4.1 Obecná styčníková metoda

Při řešení příhradové soustavy obecnou styčníkovou metodou se prutová soustava (obr. 3.6a) uvolní z vnějších vazeb, které se nahradí neznámými složkami reakcí. Rovněž styčníky se uvolní z vnitřních vazeb a každý vyjmutý prut nahradíme dvěma silami stejně velkými, ale opačného smyslu (obr. 3.6b).

V každém styčníku (obr. 3.7), jejichž celkový počet je b, vznikne rovinný svazek sil (viz odst. 3.2.2 prvního modulu), pro který lze napsat dvě statické podmínky rovnováhy

$$\sum N_i \cos \alpha_i + \sum F_k \cos \varphi_k = 0,$$
$$\sum N_i \sin \alpha_i + \sum F_k \sin \varphi_k = 0. \qquad (3.5)$$



Obr. 3.7: Obecný styčník se zatížením

Současně tedy řešíme $2b$ statických podmínek rovnováhy, přičemž *pořadí styčníků* pro sestavení rovnic lze volit zcela *libovolně*. Pokud se vyskytnou nuly na hlavní diagonále, které by mohly vadit např. při použití eliminace, lze pořadí rovnic přeskupit.

Úhly α_i, φ_k je při aplikaci obecného algoritmu vhodné volit jako *směrové* (obr. 3.7), měřené od kladné poloosy $+x$. Při ručním řešení je rovněž možné úhly α_i, φ_k volit jako *ostré*, měřené od vodorovné osy x s doplněním znaménka podle skutečného působení rozložené složky síly.

Tab. 3.1: Styčníkové rovnice prutové soustavy z obr. 3.6

styč.	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	R_{ax}	R_{ay}	R_b	PS
e		$\cos \alpha_2$									$-F_1$
	-1	$-\sin \alpha_2$									
d			1								$-F_2$
				-1							
c	1	$-\cos \alpha_2$	-1		$-\cos \alpha_5$	$\cos \alpha_6$					
		$\sin \alpha_2$			$-\sin \alpha_5$	$-\sin \alpha_6$					
b						$-\cos \alpha_6$	-1				
						$\sin \alpha_6$				1	
a					$\cos \alpha_5$		1	1			
				1	$\sin \alpha_5$				1		

Řešením soustavy $2b = 10$ rovnic pak získáme osové síly N_1 , N_2 , … , N_7 a složky reakcí R_{ax} , R_{ay} , R_b. Globální podmínky rovnováhy celé prutové soustavy pak vhodně využijeme ke kontrole řešení.

3.4.2 Zjednodušená styčníková metoda

Zjednodušená styčníková metoda vychází v zásadě ze stejných rovnic jako metoda obecná, včetně globálních kontrolních podmínek rovnováhy celé prutové soustavy. Rovnice se však vybírají ve vhodném pořadí tak, aby bylo možné osové síly N_i určit z jedné nebo maximálně dvou podmínek rovnováhy v uzlu. Tím se vyhneme řešení celé soustavy $2b$ rovnic. Obvykle je zjednodušená styčníková metoda použitelná pouze při počtu složek reakcí $a = 3$.

Postupuje se tak, že se prutová soustava uvolní z vnějších vazeb a ze tří **globálních podmínek rovnováhy** se určí *tři složky reakcí* R_{ax}, R_{ay}, R_b. Např. pro soustavu z obr. 3.6 napíšeme při obecném označení globální podmínky rovnováhy

$$\sum F_{ix} = 0: \quad R_{ax} + F_1 + F_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_{ax} = -F_1 - F_2 \,,$$

$$\sum M_{ib} = 0: \quad R_{ay} \cdot d_7 + F_2 \cdot d_4 + F_1 \cdot (d_4 + d_1) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad R_{ay} = -\frac{1}{d_7}\,[F_2 \cdot d_4 + F_1 \cdot (d_4 + d_1)] \,,$$

$$\sum M_{ia} = 0: \quad -R_b \cdot d_7 + F_2 \cdot d_4 + F_1 \cdot (d_4 + d_1) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad R_b = \frac{1}{d_7}\,[F_2 \cdot d_4 + F_1 \cdot (d_4 + d_1)] \,;$$

místo třetí podmínky lze rovněž jednoduše využít součtovou podmínku $\sum F_{iy} = 0$, takže $R_b = -R_{ay}$. Při speciálním tvaru prutové soustavy (např. u soustavy na obr. 3.6) se nemusejí reakce určovat a lze postupovat přímo od volných dvojných styčníků (např. uzel e na obr. 3.6). Globální podmínky rovnováhy prutové soustavy pak zbudou jako kontrolní.

V běžném případu prutové soustavy se dále styčníky uvolní z vnitřních vazeb a postupuje se řešením po jednotlivých **dvojných styčnících**. Dvojným styčníkem se rozumí takový styčník, v němž se sbíhají pouze dva pruty (představující dvě neznámé osové síly), nebo styčník s více pruty, avšak s maximálně dvěma neznámými osovými silami a s ostatními již známými osovými silami.

Sestavují se podmínky rovnováhy v jednotlivých styčnících, přičemž *pořadí* se volí tak, aby se dala pokud možno vypočítat vždy jedna neznámá osová síla při znalosti předcházejících osových sil a vnějšího zatížení (včetně reakcí). Pro soustavu z obr. 3.6 je dvojný styčník e, po vyřešení složek reakcí i styčník b. Začneme-li uzlem e, dostaneme

$$e \dots \ \sum F_{ix} = 0: \quad N_2 \cos\alpha_2 + F_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_2 = -\frac{F_1}{\cos\alpha_2} \,,$$

$$e \dots \ \sum F_{iy} = 0: \quad -N_1 - N_2 \sin\alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad N_1 = -N_2 \sin\alpha_2 = \frac{F_1}{\cos\alpha_2} \sin\alpha_2 = F_1 \operatorname{tg}\alpha_2 \,.$$

Vzhledem k již známé osové síle N_1 se uzel d stává dvojným, takže

d … $\sum F_{ix} = 0$: $\quad N_3 + F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_3 = -F_2$,

d … $\sum F_{iy} = 0$: $\quad N_1 - N_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_4 = N_1 = F_1 \operatorname{tg} \alpha_2$.

Všechny zbývající uzly jsou v tomto případu již dvojnými; můžeme postupovat např.

a … $\sum F_{iy} = 0$: $\quad N_4 + N_5 \sin \alpha_5 + R_{ay} = 0$

$$\Rightarrow \quad N_5 = -\frac{1}{\sin\alpha_5}(N_4 + R_{ay}) = -\frac{1}{\sin\alpha_5}(F_1 \operatorname{tg} \alpha_2 + R_{ay}),$$

b … $\sum F_{iy} = 0$: $\quad N_6 \sin \alpha_6 + R_b = 0 \quad \Rightarrow \quad N_6 = -\dfrac{1}{\sin\alpha_6} R_b$,

b … $\sum F_{ix} = 0$: $\quad -N_6 \cos \alpha_6 - N_7 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_7 = -N_6 \cos \alpha_6 = R_b \operatorname{cotg} \alpha_6$.

Další tři rovnice jsou **kontrolní**, neboť jsme na začátku řešení využili tři globální podmínky rovnováhy, tedy

a … $\sum F_{ix} = 0$: $\quad N_5 \cos \alpha_5 + N_7 + R_{ax} = 0$,

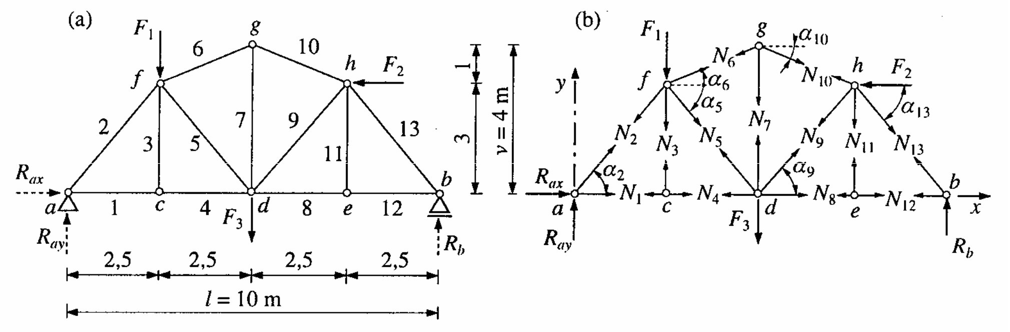
c … $\sum F_{ix} = 0$: $\quad -N_2 \cos \alpha_2 - N_3 - N_5 \cos \alpha_5 + N_6 \cos \alpha_6 = 0$,

c … $\sum F_{iy} = 0$: $\quad N_2 \sin \alpha_2 - N_5 \sin \alpha_5 - N_6 \sin \alpha_6 = 0$.

Příklad 3.1

Zadání

Zjednodušenou styčníkovou metodou stanovte analyticky osové síly vnitřních prutů rovinné kloubové prutové soustavy (obr. 3.8) pro zatížení $F_1 = F_3 = 4$ kN, $F_2 = 3$ kN.



Obr. 3.8: Prutová soustava řešená zjednodušenou styčníkovou metodou

Řešení

Vyšetřovaná prutová soustava je staticky i kinematicky určitá, neboť podle rovnice (3.2) $2 \cdot 8 = 13 + 1 + 2 \cdot 1$ a $D \neq 0$.

Výpočet složek reakcí vnějších vazeb R_{ax}, R_{ay}, R_b ze tří statických podmínek rovnováhy sil

$$1.\ \sum F_{ix} = 0: \quad R_{ax} - F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{ax} = F_2 = 3 \text{ kN},$$

$$2.\ \sum M_{ib} = 0: \quad -R_{ay} \cdot 10 + F_1 \cdot 7{,}5 + F_2 \cdot 3 + F_3 \cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{ay} = 5{,}9 \text{ kN},$$

$$3.\ \sum M_{ia} = 0: \quad R_b \cdot 10 - F_1 \cdot 2{,}5 + F_2 \cdot 3 - F_3 \cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{ay} = 2{,}1 \text{ kN}.$$

Kontrola

$$\sum F_{iy} = 0: \quad R_{ay} + R_b - F_1 - F_3 = 0.$$

Uvolněné styčníky prutové soustavy znázorňuje obr. 3.8b. Prutová konstrukce má dva dvojné podporové body *a*, *b*. Řešení rovnovážných svazků sil zahájíme ve styčníku *a* a pak přejdeme postupně do styčníků *c*, *f*, *g*, *d*, *e*, *h*, *b*. Z tvaru prutové soustavy a zatížení je zřejmé, že pruty 3 a 11 nebudou namáhány a jejich $N_3 = N_{11} = 0$.

Stanovme předem délky l_i šikmých prutů i=2, 5, 6, 9, 10, 13 a hodnoty goniometrických funkcí $\cos\alpha_i$, $\sin\alpha_i$ ostrých úhlů α_i, které svírají osové síly N_i těchto prutů s vodorovnou osou *x*.

Prut i=2, 5, 9, 13 :

$$l_i = \sqrt{2{,}5^2 + 3^2} = 3{,}905 \text{ m}, \quad \cos\alpha_i = \frac{2{,}5}{3{,}905} = 0{,}640, \quad \sin\alpha_i = \frac{3}{3{,}905} = 0{,}768.$$

Prut i=6, 10 :

$$l_i = \sqrt{2{,}5^2 + 1^2} = 2{,}693 \text{ m}, \quad \cos\alpha_i = \frac{2{,}5}{2{,}693} = 0{,}928, \quad \sin\alpha_i = \frac{1}{2{,}693} = 0{,}371.$$

Řešení osových sil prutů ze součtových statických podmínek rovnováhy jednotlivých rovinných svazků sil :

Styčník	Statické podmínky rovnováhy	Osové síly prutů
a	$N_1 + N_2\cos\alpha_2 + R_{ax} = 0$	$N_1 = 1{,}916$ kN
	$N_2\sin\alpha_2 + R_{ay} = 0$	$N_2 = -7{,}682$ kN
c	$-N_1 + N_4 = 0$	$N_4 = 1{,}916$ kN
	$N_3 = 0$	$N_3 = 0$
f	$-N_2\cos\alpha_2 + N_5\cos\alpha_5 + N_6\cos\alpha_6 = 0$	$N_5 = -0{,}064$ kN
	$-N_2\sin\alpha_2 - N_5\sin\alpha_5 + N_6\sin\alpha_6 - N_3 - F_1 = 0$	$N_6 = -5{,}253$ kN
g	$-N_6\cos\alpha_6 + N_{10}\cos\alpha_{10} = 0$	$N_{10} = -5{,}253$ kN
	$-N_6\sin\alpha_6 - N_{10}\sin\alpha_{10} - N_7 = 0$	$N_7 = 3{,}898$ kN
d	$-N_4 - N_5\cos\alpha_5 + N_9\cos\alpha_9 + N_8 = 0$	$N_8 = 1{,}749$ kN
	$N_7 + N_5\sin\alpha_5 + N_9\sin\alpha_9 - F_3 = 0$	$N_9 = 0{,}197$ kN
e	$-N_8 + N_{12} = 0$	$N_{12} = 1{,}749$ kN

	$N_{11} = 0$	$N_{11} = 0$
h	$-N_9 \cos\alpha_9 - N_{10}\cos\alpha_{10} + N_{13}\cos\alpha_{13} - F_2 = 0$	$N_{13} = -2{,}733$ kN
	$-N_9 \sin\alpha_9 + N_{10}\sin\alpha_{10} - N_{13}\sin\alpha_{13} - N_{11} = 0$	kontrolní rovnice
b	$-N_{12} - N_{13}\cos\alpha_{13} = 0$	kontrolní rovnice
	$R_b + N_{13}\sin\alpha_{13} = 0$	kontrolní rovnice

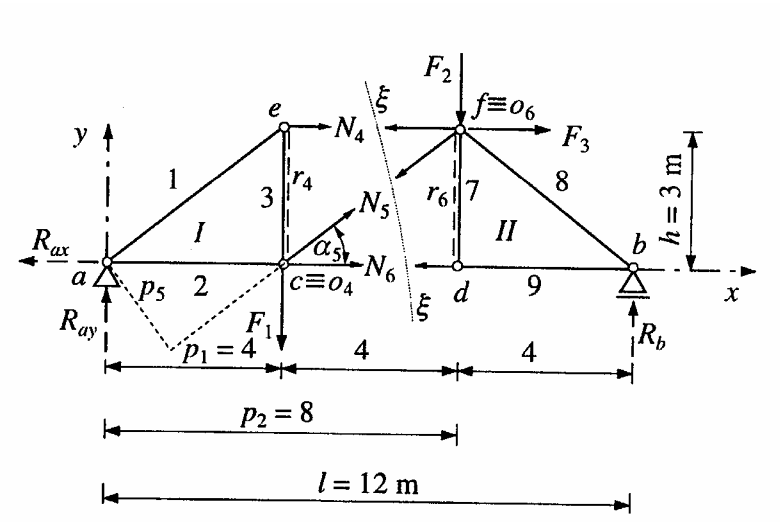
Do statických podmínek rovnováhy, napsaných s předpokládaným smyslem osových sil (tah v prutech), dosazujeme vypočtené osové síly co do velikosti i znaménka. Dostaneme-li u osové síly záporné znaménko, znamená to, že prut je namáhán tlakem.

Tři složky podporových reakcí příhradového nosníku byly stanoveny předem z rovnováhy celku a proto nám zůstávají tři styčníkové rovnice jako kontrolní.

3.5 Metoda průsečná

Průsečná metoda využívá k řešení obecnou soustavu sil (odst. 3.5 prvního modulu) se třemi podmínkami rovnováhy pro oddělenou část rovinné prutové soustavy. Je použitelná obvykle pouze při vně staticky určité soustavě (a = 3), přičemž složky reakcí předem určíme ze tří globálních podmínek rovnováhy. Je vhodná pro určení osových sil jednoho či více vybraných prutů, osové síly některých prutů touto metodou nelze vůbec určit.

Výhodou je, že neznámou osovou sílu N_i určíme (při vhodné volbě statické podmínky) přímo *z jediné rovnice* a nemusíme přitom znát osové síly jiných prutů, takže se do výpočtu nevnášejí předchozí chyby.



Obr. 3.9: Rozdělení prutové soustavy na dvě části

Při řešení postupujeme tak, že prutovou soustavou vedeme *řez protínající* (obvykle) *tři pruty* nevycházející z jednoho bodu. Prutová soustava se tím rozdělí na dvě části, z nichž vybereme jednu pro výpočet snadnější (např. levou z obr. 3.9). Odstraněnou část pak nahradíme třemi neznámými osovými silami.

Vznikne obecná rovinná soustava sil (uzlové síly F_i, složky reakcí R_i, osové síly N_i), pro niž platí tři statické podmínky rovnováhy (obr. 3.9)

$$\sum F_{ix} = 0: \quad N_4 + N_5 \cos \alpha_5 + N_6 - R_{ax} = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad N_5 \sin \alpha_5 + R_{ay} - F_1 = 0,$$

$$\sum M_{ia} = 0: \quad -N_4 \cdot h + N_5 \cdot p_5 - F_1 \cdot p_1 = 0. \qquad (3.6)$$

Poslední podmínku (3.6) lze volit výhodněji **pomocí složek** neznámých osových sil ve tvaru

$$-N_4 \cdot h + N_5 \sin \alpha_5 \cdot p_1 - F_1 \cdot p_1 = 0.$$

Ze soustavy tří rovnic (3.6) pak určíme 3 neznámé osové síly N_4, N_5, N_6.

3.5.1 Ritterova úprava

Protože sestavené statické podmínky rovnováhy jedné části (3.6) tvoří obecně soustavu tří rovnic, je tato varianta při ručním řešení pracná. Výhodnější je vyřešit každou neznámou osovou sílu N_i vždy z jedné momentové podmínky (k přidruženému momentovému středu o_i). *Přidružený momentový střed* je průsečík os obou zbývajících prutů protnutých řezem. Např. podle obr. 3.9 je

$$\sum M_{io4} = 0: \; -N_4 \cdot r_4 - R_{ay} \cdot p_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_4 = \ldots \qquad (3.7)$$

$$\sum M_{io6} = 0: \quad N_6 \cdot r_6 - R_{ay} \cdot p_2 - R_{ax} \cdot h + F_1 (p_2 - p_1) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; N_6 = \ldots \qquad (3.8)$$

Jsou-li oba zbývající pruty rovnoběžné, leží přidružený *momentový střed v nekonečnu* a momentová podmínka přejde v silovou (výhodněji pro směr kolmý na osy rovnoběžných prutů), takže podle obr. 3.9 dostaneme

$$\sum F_{iy} = 0: \quad N_5 \sin \alpha_5 + R_{ay} - F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_5 = \ldots \qquad (3.9)$$

*Německý inženýr **A. Ritter** v r. 1863 ukázal, jak je možné rozštěpit soustavu rovnic v průsečné metodě na tři nezávislé rovnice o jedné neznámé. Původcem průsečné metody v její obecné podobě je dříve zmíněný Johann Wilhelm Schwedler.*

Příklad 3.2

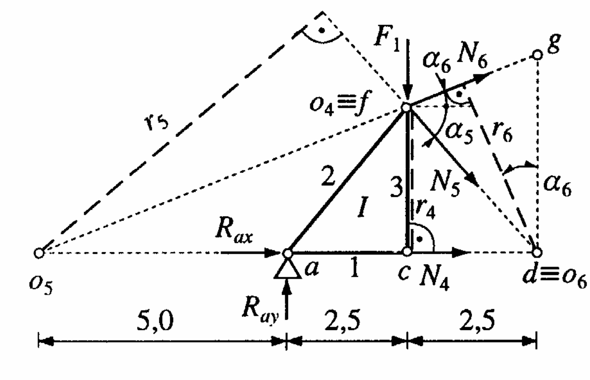
Zadání

Průsečnou metodou v úpravě Ritterově stanovte osové síly N_4, N_5, N_6 vnitřních prutů 4, 5, 6 rovinné kloubové prutové soustavy na obr. 3.8a z příkladu 3.1 pro zatížení $F_1 = F_3 = 4$ kN, $F_2 = 3$ kN.

Řešení

Složky reakcí vnějších vazeb, vypočtené v příkladu 3.1, mají velikost $R_{ax} = 3$ kN, $R_{ay} = 5{,}9$ kN, $R_b = 2{,}1$ kN.

Vyšetřovanou prutovou soustavou vedeme řez $\xi - \xi$, protínající tři pruty 4, 5, 6 nevycházející z jednoho bodu, a provedeme uvolnění levé části *I* soustavy (obr. 3.10). Z rovnováhy sil R_{ax}, R_{ay}, F_1, N_4, N_5, N_6, působících na uvolněnou část soustavy, stanovíme postupně velikosti neznámých osových sil N_4, N_5, N_6 z momentových podmínek rovnováhy k přidruženým momentovým středům $o_4 \equiv f$, $o_5\left(N_4 \times N_6\right)$, $o_6 \equiv d$.



Obr. 3.10: Uvolněná část prutové soustavy

Osová síla N_4:

$$\sum M_{io_4} = 0: \ N_4 r_4 + R_{ax} r_4 - R_{ay} \cdot 2{,}5 = 0, \qquad r_4 = 3 \text{ m},$$

$$N_4 = \frac{5{,}9 \cdot 2{,}5 - 3 \cdot 3}{3} = 1{,}917 \text{ kN (tah)}.$$

Osová síla N_5:

$$\sum M_{io_5} = 0: \ -N_5 r_5 + R_{ay} \cdot 5 - F_1 \cdot 7{,}5 = 0, \qquad r_5 = 10 \cdot \sin\alpha_5 = 7{,}682 \text{ m},$$

$$N_5 = \frac{5{,}9 \cdot 5 - 4 \cdot 7{,}5}{7{,}682} = -0{,}065 \text{ kN (tlak)}.$$

Osová síla N_6:

$$\sum M_{io_6} = 0: \ -N_6 r_6 + R_{ay} \cdot 5 + F_1 \cdot 2{,}5 = 0, \qquad r_6 = 4 \sin\alpha_6 = 3{,}713 \text{ m},$$

$$N_6 = \frac{-5{,}9 \cdot 5 + 4 \cdot 7{,}5}{3{,}713} = -5{,}251 \text{ kN (tlak)}.$$

Příklad 3.3

Zadání

Stanovte osové síly N_6, N_7, N_8 vnitřních prutů 6, 7, 8 rovinné kloubové prutové soustavy na obr. 3.11 pro zatížení $F_1 = 10$ kN, $F_2 = 1$ kN.

Řešení

Po rozdělení rovinné prutové soustavy na dvě části řezem $\xi - \xi$, protínající pruty 6, 7, 8 a uvolnění horní části soustavy, nemusíme složky reakcí vnějších vazeb R_{ax}, R_{ay}, R_b počítat.

Neznámé osové síly N_6, N_7, N_8 prutů 6, 7, 8 plynou ze statických podmínek rovnováhy

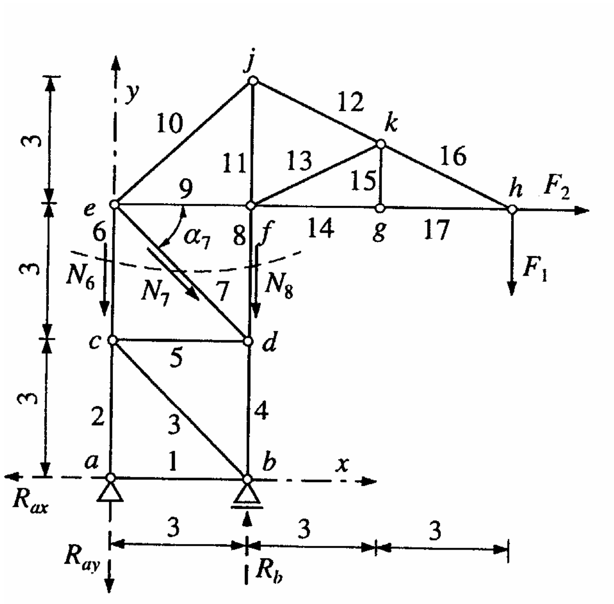
$$\sum M_{id} = 0: \quad N_6 \cdot 3 - F_1 \cdot 6 - F_2 \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_6 = 21 \text{ kN (tah)},$$

$$\sum F_{ix} = 0: \quad N_7 \cos \alpha_7 \cdot + F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_7 = -1{,}414 \text{ kN (tlak)},$$

$$\sum M_{ie} = 0: \quad -N_8 \cdot 3 - F_1 \cdot 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_8 = -30 \text{ kN (tlak)}.$$

Kontrola

$$\sum F_{iy} = 0: \; -N_6 - N_7 \cos \alpha_7 - N_8 - F_1 = 0.$$



Obr. 3.11: Prutová soustava k příkladu 3.3

3.5.2 Zvláštní případy průsečné metody

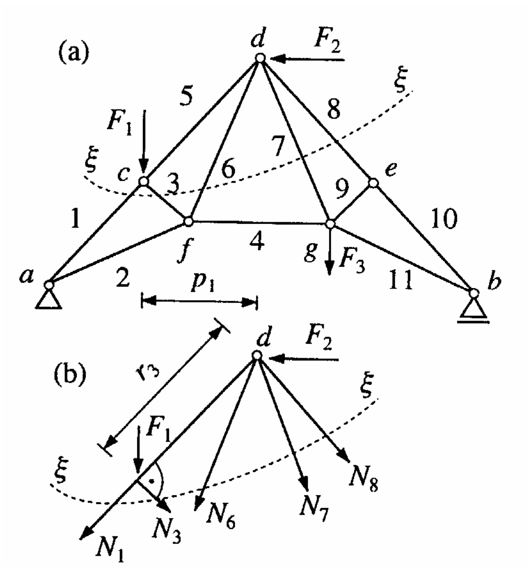
Zvláštní okolnosti použití průsečné metody nastanou v případě, kdy řez protíná

- více prutů než tři (obr. 3.12); pokud ostatní pruty kromě jednoho (řešeného) vycházejí ze stejného bodu (volíme ho za momentový střed), takže

  $$\sum M_{id} = 0: \quad N_3 \cdot r_3 + F_1 \cdot p_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_3 = \ldots; \qquad (3.10)$$

  nebo je-li již známa osová síla nadbytečného prutu (např. z jiného řešení);

- pouze dva pruty; v tom případě průsečná metoda přechází na *styčníkovou metodu*.



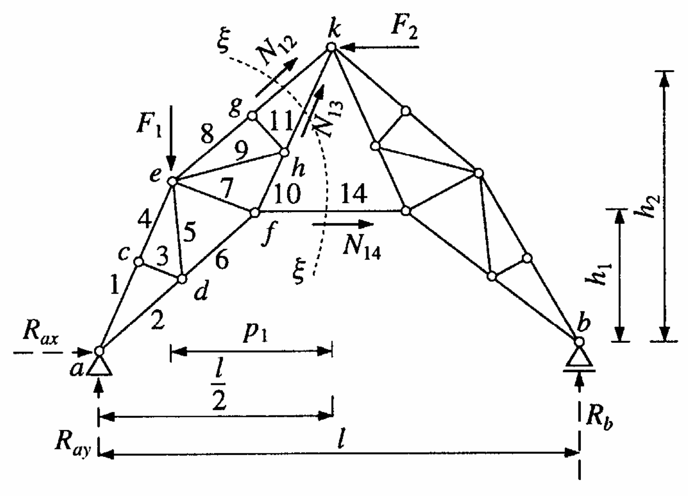
Obr. 3.12: Zvláštní případ průsečné metody

Při ručním výpočtu osových sil lze rovněž využít i **jiné možnosti řešení**, např.

- *kombinace styčníkové a průsečné metody*; při řešení prutové soustavy zjednodušenou styčníkovou metodou se může vyskytnout *styčník s více než dvěma neznámými* (např. uzly *e* a *f* na obr. 3.13); pak můžeme určit nejprve osovou sílu N_{14} průsečnou metodou:

$$\sum M_{ik} = 0 \; ; \tag{3.11}$$

- *převedení na jiný statický model*; příhradové části *a – k*, *b – k* v obr. 3.13 lze považovat za tuhé desky a řešit trojkloubový nosník *a – k – b* s táhlem *14* a tak nejprve určit osovou sílu N_{14}.



Obr. 3.13: Kombinace styčníkové a průsečné metody

Otázky

?

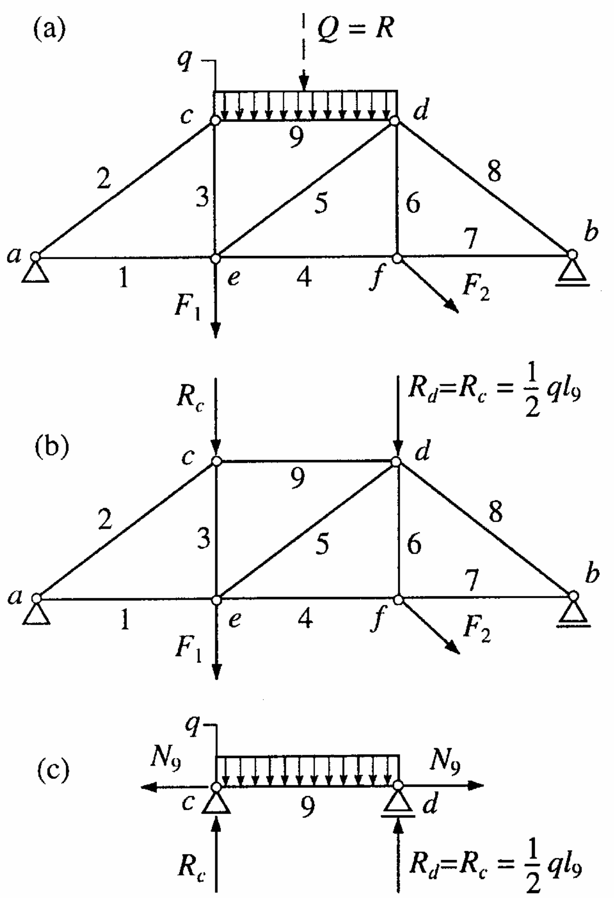
1. Jaké metody můžeme použít pro řešení příhradových nosníků?

3.6 Mimostyčné zatížení

Je-li alespoň jeden prut příhradové soustavy (obr. 3.14a) zatížen mezi koncovými průřezy (uzly), je namáhán jako nosník, u něhož vznikají všechny složky vnitřních sil (*N*, *V*, *M*). Prut mimostyčně zatížený přitom působí jako prostý nosník s příčným zatížením a jeho účinky se přenášejí do styčníků. Přitom prut zůstává součástí příhradové soustavy zatížené jen ve styčnících.

Přenos mimostyčného zatížení si můžeme představit tak, že výslednici mimostyčného zatížení prutu ekvivalentně nahradíme silami R_i v koncových bodech (což lze provést *nekonečně mnoha způsoby*). Pro *svislý směr* zatížení volíme jednoduše svislé náhradní síly R_i.

Řešení příhradové soustavy pak probíhá s daným styčníkovým zatížením F_i a s náhradními styčníkovými silami R_i (obr. 3.14b). U prutu mimostyčně zatíženého (obr. 3.14c) je výsledný účinek dán zadaným mimostyčným zatížením, opačně vzatými náhradními styčníkovými silami R_i (interakcí) a vypočtenou osovou silou *N*. Pro ně se stanoví průběhy *N*, *V*, *M* jako na nosníku, zatímco v ostatních prutech získáme přímo výsledné osové síly N_i.



Obr. 3.14: Mimostyčné zatížení prutové soustavy

Příklad 3.4

Zadání

Vyřešte danou kosoúhlou kloubovou prutovou soustavu na obr. 3.15 s $\alpha = 60°$ pro mimostyčné zatížení $q = 1\ \text{kNm}^{-1}$, $F_1 = 3\ \text{kN}$ a styčníkovou sílu $F_2 = 2\ \text{kN}$.

Řešení

Výslednice spojitého rovnoměrného příčného zatížení na prutu 10

$$Q = q \cdot l_{10} = 1 \cdot 3 = 3\ \text{kN}.$$

Nahrazení mimostyčného břemene Q a F_1 na prutu 10 a 11 náhradními styčníkovými břemeny

$$R_{cd} = R_{dc} = 0{,}5 \cdot Q = 1{,}5\ \text{kN},$$

$$R_{de} = \frac{1}{3} F_1 = 1\ \text{kN}, \qquad R_{ed} = \frac{2}{3} F_1 = 2\ \text{kN}.$$

Výsledná svislá náhradní styčníková břemena od mimostyčného zatížení prutů 10 a 11

$$R_c = R_{cd} = 1{,}5\ \text{kN},$$

$$R_d = R_{dc} + R_{de} = 1{,}5 + 1 = 2{,}5\ \text{kN},$$

$$R_e = R_{ed} = 2\ \text{kN}.$$

Náhradní styčníková břemena R_c, R_d, R_e a daná styčníková síla F_2 vyvolávají u prutové soustavy složky reakcí vnějších vazeb

$$R_{ax} = F_2 = 2\ \text{kN},\ R_{ay} = 3{,}411\ \text{kN},\ R_b = 2{,}589\ \text{kN},$$

výsledné osové síly mimostyčně nezatížených prutů i=1, 2, … , 9

$$N_1 = -0{,}031\ \text{kN}, \qquad N_2 = 2{,}175\ \text{kN}, \qquad N_3 = 1{,}495\ \text{kN},$$

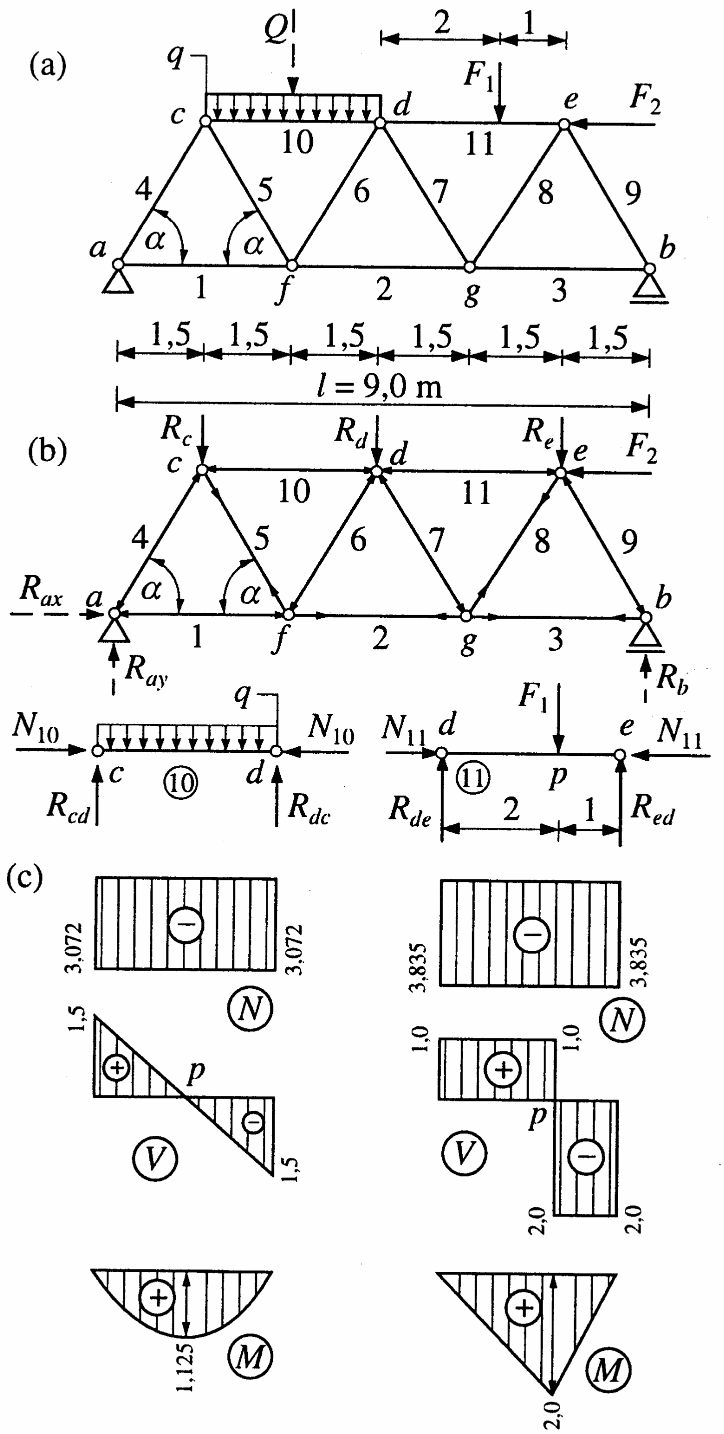
$$N_4 = -3{,}938\ \text{kN}, \qquad N_5 = 2{,}206\ \text{kN}, \qquad N_6 = -2{,}206\ \text{kN},$$

$$N_7 = -0{,}680\ \text{kN}, \qquad N_8 = 0{,}680\ \text{kN}, \qquad N_9 = -2{,}990\ \text{kN}$$

a v mimostyčně zatížených prutech 10 a 11 osové síly

$$N_{10} = -3{,}072\ \text{kN}, \qquad N_{11} = -3{,}835\ \text{kN},$$

které byly stanoveny zjednodušenou styčníkovou metodou. Zatížení a namáhání mimostyčně zatížených prutů 10, 11 je uvedeno na obr. 3.15c.



Obr. 3.15: Prutová soustava s mimostyčným zatížením

Shrnutí

Seznámili jsme se s pojmem rovinný příhradový nosník, se specifikou vnitřních sil v jeho prutech. Zorientovali jsme se v metodách řešení staticky určitých příhradových nosníků.

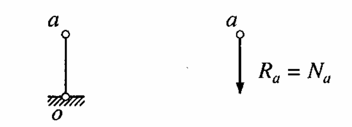
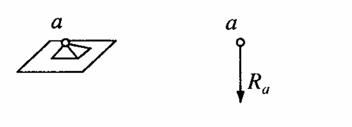
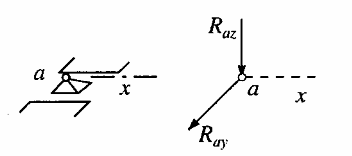
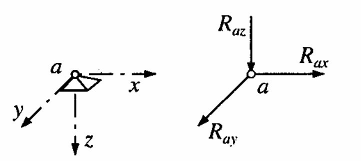
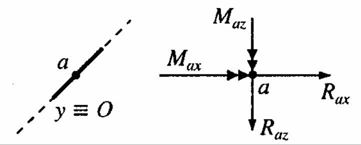
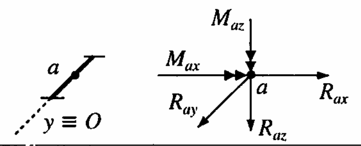
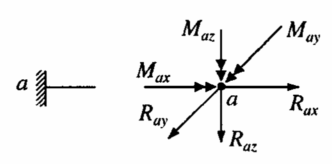
Σ

4 Prostorově namáhaný staticky určitý nosník

Prostorové namáhání prutu je vyvoláno jednak obecným působením zatížení, jednak prostorovým uspořádáním střednice nosníku. Jedná se o rozšíření rovinné úlohy (2D) na prostorovou (3D), takže některé analogické úvahy uvedeme ve zkráceném tvaru.

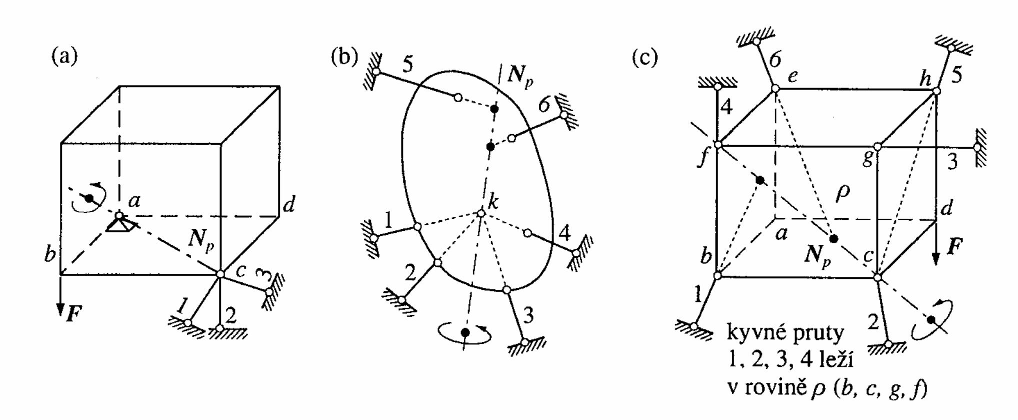
Jednoduchý či lomený nosník v prostoru má jako tuhé těleso **6 stupňů volnosti** (3 translace ve směru souřadnicových os x, y, z a 3 rotační pohyby kolem těchto os), které musejí být zrušeny vhodně uspořádanými vazbami se 6 jednoduchými složkami reakcí ($a = 6$).

Tab. 4.1: Vazby prostorového nosníku

Číslo vazby	Název vazby	Násobnost vazby	Označení vazby se složkami reakcí
1	Kyvný prut	1	
2	Kulový kloub posuvný po ploše	1	
3	Kulový kloub posuvný po křivce či přímce	2	
4	Kulový kloub pevný – neposuvný	3	
5	Válcový kloub posuvný ve směru osy O	4	
6	Válcový kloub pevný – neposuvný	5	
7	Dokonalé vetknutí	6	

4.1 Vazby a výpočet reakcí

Vazby prostorového nosníku (tabulka 4.1), převedené na jednoduché, jsou *jednonásobné* (kyvný prut nebo kulový kloub posuvný po ploše názorně představený jako kuličkové ložisko), *dvojnásobné* (kulový kloub posuvný po přímce či křivce názorně představený jako válečkové ložisko), *trojnásobné* (kulový kloub pevný neboli neposuvný, válcový kloub posuvný po ploše), *čtyřnásobné* (válcový kloub posuvný ve směru osy kloubu), *pětinásobné* (válcový kloub pevný neboli neposuvný), *šestinásobné* (dokonalé vetknutí).



Obr. 4.1: Výjimkové případy podepření tuhého tělesa

Pro **výpočet reakcí** využijeme *6 statických podmínek rovnováhy*, jejichž soustava musí mít determinant $D \neq 0$. Místo 3 silových a 3 momentových podmínek rovnováhy lze výhodněji použít 6 momentových podmínek ke vhodně zvoleným osám.

Výjimkové případy podepření nastanou, když determinant soustavy 6 statických podmínek rovnováhy $D = 0$, nebo prokáže-li se existence *nulové přímky* – viz obr. 4.1.

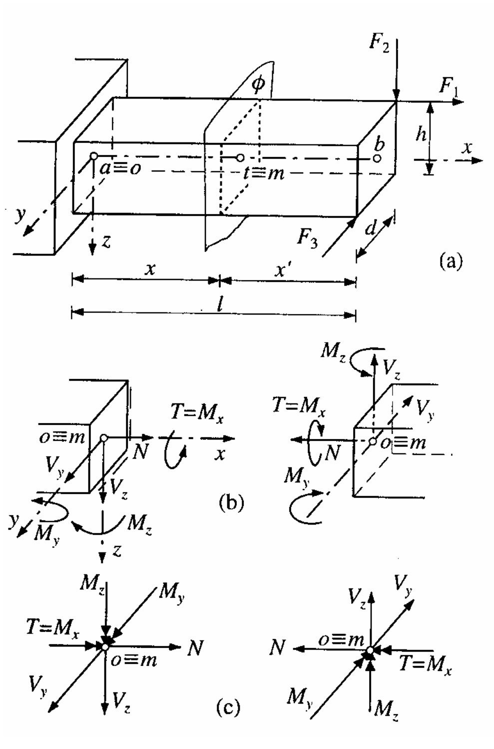
4.2 Prostorové namáhání přímého prutu

Uvažujme přímý nosník staticky určitě podepřený zatížený obecnou prostorovou soustavou sil. Rovina ϕ kolmá ke střednici rozdělí nosník na dvě části, přičemž obě části na sebe působí prostorovou soustavou vnitřních sil (bivektor $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{M}$).

Výslednice vnitřních sil představuje šest pravoúhlých složek bivektoru. Jsou to normálová síla N, posouvající síly V_y a V_z, kroutící (torzní) moment $M_x = T$, ohybové momenty M_y a M_z. **Kladné smysly** složek vnitřních sil jsou definovány tak, že vektory působí ve směru lokálních souřadnicových os (v řezu s kladnou osou x), viz obr. 4.2.

Podobně jako v rovině, platí i *v prostoru*: Soustava vnitřních sil v libovolném průřezu nosníku, jimiž působí uvažovaná část nosníku na druhou, je staticky ekvivalentní se soustavou vnějších sil (F, R), působících na uvažovanou část nosníku od daného průřezu. Složky výslednice lze určit z podmínek rovnováhy vybrané části nosníku. Pro praktický výpočet můžeme vyjít z **definice** jednotlivých **složek výslednice vnitřních sil** v libovolném průřezu při uvažování všech vnějších sil působících *na jednu nebo druhou část prutu* od uvažovaného průřezu. Pak

- *normálová síla N* je rovna algebraickému součtu průmětů vnějších sil vybrané části prutu do osy prutu,
- *posouvající síla V* je rovna algebraickému součtu průmětů vnějších sil vybrané části prutu do směru příslušné osy,
- *kroutící moment T* je roven algebraickému součtu statických momentů vnějších sil vybrané části prutu k ose prutu,
- *ohybový moment M* je roven algebraickému součtu statických momentů vnějších sil vybrané části prutu k příslušné ose.



Obr. 4.2: Složky výslednice vnitřních sil

4.3 Diferenciální podmínky rovnováhy

Diferenciální podmínky rovnováhy přímého prutu udávají vztahy mezi vnějším zatížením a vnitřními silami. Odvodíme je z podmínek rovnováhy sil působících na uvolněný prutový element (obr. 4.3). Pro

- spojité osové zatížení n a normálovou sílu N (obr. 4.3a) dostaneme z podmínky do osy x prutu známý vztah

$$\sum F_{ix} = 0 : \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} = -n ,} \tag{4.1}$$

- spojité příčné zatížení q_z a momentové zatížení m_y ve svislé rovině xz a složky vnitřních sil V_z, M_y (obr. 4.3b) plynou z příslušných podmínek vztahy známé z rovinného případu namáhání

$$\sum F_{iz} = 0 : \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}x} = -\,q_z\,,}$$

$$\sum M_{iy} = 0 : \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} = V_z + m_y\,,} \tag{4.2}$$

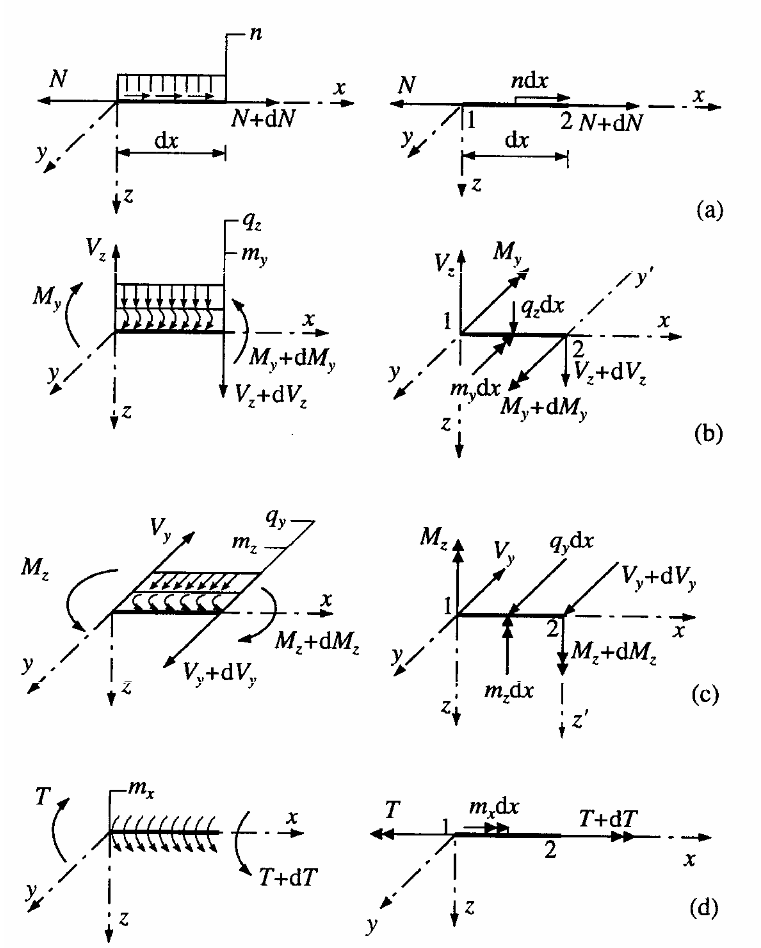
- spojité příčné zatížení q_y a momentové zatížení m_z ve vodorovné rovině xy a složky vnitřních sil V_y, M_z (obr. 4.3c) odvodíme z příslušných podmínek obdobné vztahy jako v (4.2)

$$\sum F_{iy} = 0 : \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}x} = -\,q_y\,,}$$

$$\sum M_{iz} = 0 : \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}x} = -\,V_y + m_z\,,} \tag{4.3}$$

- spojité zkrucující momentové zatížení m_x a kroutící moment $T = M_x$ (obr. 4.3d) získáme z momentové podmínky k ose x výraz

$$\sum M_{ix} = 0 : \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\,m_x\,.} \tag{4.4}$$



Obr. 4.3: Nosníkový element s vnějším zatížením a složkami vnitřních sil

Poznamenejme, že změna znaménka u V_y ve druhém vztahu (4.3) vyplývá z přijaté konvence vnitřních sil (obr. 4.2b, c). Při pootočení nosníkového elementu i se zatížením a složkami vnitřních sil ze svislé roviny *xz* do vodorovné roviny *xy* obdržíme analogické vztahy k (4.2) včetně znamének, avšak při nedodržení konvence pro posouvající sílu V_y.

Lokální extrém funkce složky vnitřní síly nastane v průřezu, v němž je výraz na pravé straně vztahů (4.1) až (4.4) roven nule.

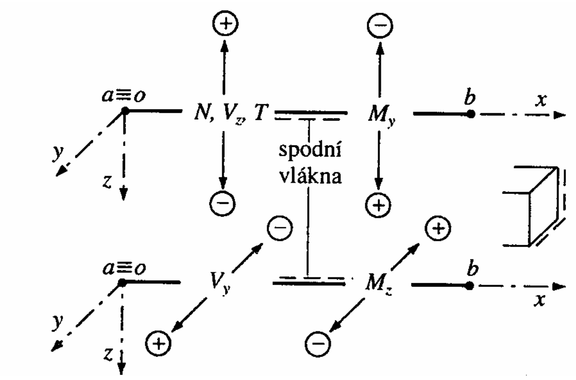
4.4 Vynášení průběhů složek vnitřních sil

Prostorové namáhání přímého prutu lze vyjádřit ve *čtyřech dílčích stavech*. Vnější zatížení je přitom vhodné rozložit na složky rovnoběžné se souřadnicovými osami a přeložit je do osy nosníku s doplněním příslušnými zkrucujícími momenty. Jde o tyto stavy:

- *osové namáhání* (tah, tlak) – vzniká vnitřní síla N; řešení stejné jako u rovinných nosníků (viz odst. 4.2 třetího modulu),
- *ohyb se smykem* ve svislé rovině *xz* – vznikají vnitřní síly V_z, M_y; řešení stejné jako u rovinných nosníků,
- *ohyb se smykem* ve vodorovné rovině *xy* – vznikají vnitřní síly V_y, M_z; řešení analogické k řešení rovinných nosníků,
- *kroucení* – vzniká vnitřní síla T; nový druh namáhání.

Rozložení prostorového namáhání na čtyři dílčí stavy je výhodné, neboť lépe vyniknou souvislosti mezi vnějším zatížením, jednotlivými složkami vnitřních sil a případy namáhání.

Při statickém vyšetřování prostorově zatíženého prutu postupujeme tak, že nejprve (ve většině případů) stanovíme ze šesti statických podmínek rovnováhy reakce vnějších vazeb. Určíme všechny složky vnitřních sil v charakteristických průřezech prutu. Pro získané koncové síly a zadané zatížení prutu následně vykreslíme průběhy (obrazce) šesti složek výslednice vnitřních sil.



Obr. 4.4: Znaménková konvence pro pořadnice složek vnitřních sil

Konvencí pro vynášení složek vnitřních sil je více, např. na obr. 4.4. Pro způsob vynášení složek vnitřních sil je vhodné dodržet zásady:

– ohybové momenty vynášet vždy *na stranu tažených vláken*,

– složky vnitřních sil N, V_z, M_y a T vynášet ve svislé rovině *xz* a

– složky vnitřních sil V_y a M_z vynášet axonometricky ve vodorovné rovině xy.

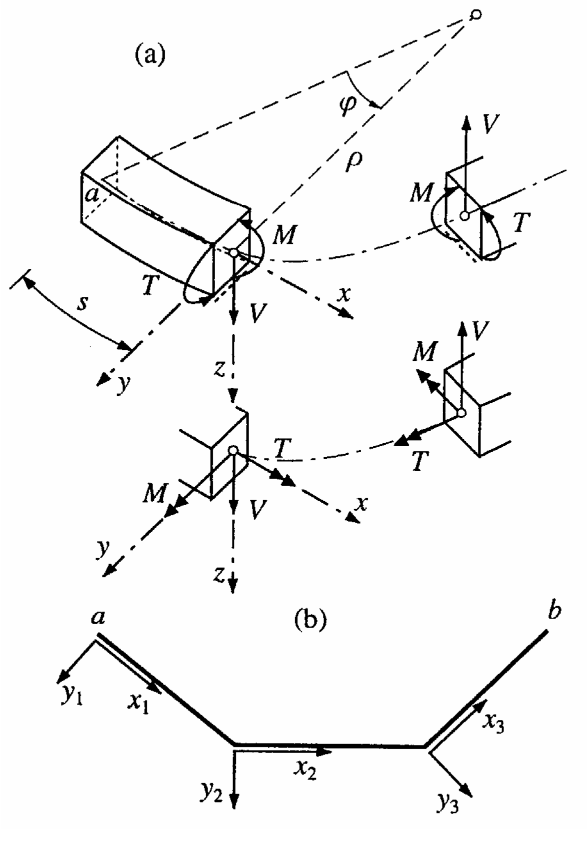
4.4.1 Rovnováha v uzlu

U prostorově lomených prutů je nezbytné zkontrolovat rovnováhu všech složek vnitřních sil a případného uzlového zatížení, působících na každý vyjmutý rámový či kloubový styčník. V numerických příkladech z odst. 4.7 jsou uvolněné styčníky znázorněny na obr. 4.10d a obr. 4.12.

4.5 Prostorově lomený nosník

Prostorově lomený nosník (rám) bez vnitřních kulových a válcových kloubů má konfiguraci vytvořenou z přímých prutů (nejčastěji pravoúhle se křížících), které jsou monoliticky navzájem spojeny v uzlech (obr. 4.9). Staticky určité podepření se zajišťuje vazbami, které zruší konstrukci všech šest stupňů volnosti vhodně uspořádanými vazbami. V nich vzniká šest neznámých složek reakcí.

Prostorově lomený nosník jako celek je vhodné umístit do *globální* souřadnicové soustavy x_g , y_g , z_g (obr. 4.9) a v ní sestavovat podmínky rovnováhy pro vyřešení složek reakcí. *Lokální* souřadnicová soustava x, y, z každého prutu slouží k analýze a vynášení šesti složek vnitřních sil. Konvence složek vnitřních sil se uplatní podle orientace lokálních souřadnicových os jednotlivých prutů.



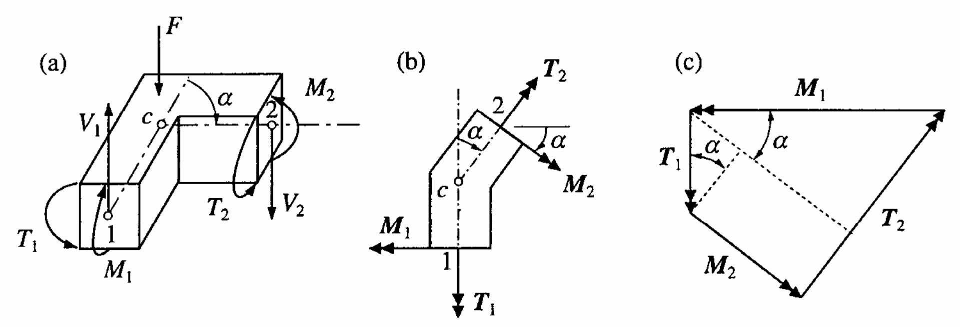
Obr. 4.5: Zakřivený a lomený balkonový nosník

4.6 Balkonový nosník

Je to zalomený event. zakřivený prut, jehož střednice leží ve vodorovné rovině xy (obr. 4.5). Prostorově působící zatížení (osamělé síly, spojitá zatížení, složky reakcí) lze rozložit na zatížení působící v rovině střednice balkonového nosníku (je to rovinný případ namáhání – viz kapitola 4 ve třetím modulu) a kolmo na rovinu střednice (tj. svisle), kde se jedná o **příčně zatížený rovinný nosník**. U příčně zatíženého rovinného nosníku vznikají *pouze tři složky* výslednice vnitřních sil, a to posouvající síla $V_z = V$, ohybový moment $M_y = M$ a kroutící moment T, s konvencí jako u prostorově namáhaného prutu.

Každý prut balkonového nosníku (přímý i zakřivený) má svoji lokální souřadnicovou soustavu x_i , z_i (obr. 4.5b). Pro přímý prut v lokální souřadnicové soustavě se diferenciální podmínky rovnováhy (4.1) až (4.4) zjednoduší na tvar

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -q\,(x), \qquad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = V + m\,(x), \qquad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -t\,(x)} \tag{4.5}$$



Obr. 4.6: Uvolněný uzel balkonového nosníku

V místech lomu střednice balkonového nosníku jsou monolitické uzly schopné přenášet všechny působící vnitřní síly V, M, T (obr. 4.6). Pro síly působící na uvolněném uzlu (např. uzel c z obr. 4.6) platí podmínky rovnováhy, a to pro svislé síly

$$\sum F_{iz} = 0: \quad -V_1 + V_2 + F = 0 \tag{4.6}$$

a pro momenty (ohybové i kroutící) zapsané vektorově

$$\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{T}_2 = 0 \tag{4.7}$$

nebo zapsané pomocí složek

$$M_1 \cos\alpha - T_1 \sin\alpha - M_2 = 0,$$

$$M_1 \sin\alpha + T_1 \cos\alpha - T_2 = 0. \tag{4.8}$$

Pro pravoúhlý styčník ($\alpha = 90°$) nabývají vztahy (4.8) jednoduché tvary

$$T_1 + M_2 = 0, \qquad M_1 - T_2 = 0. \tag{4.9}$$

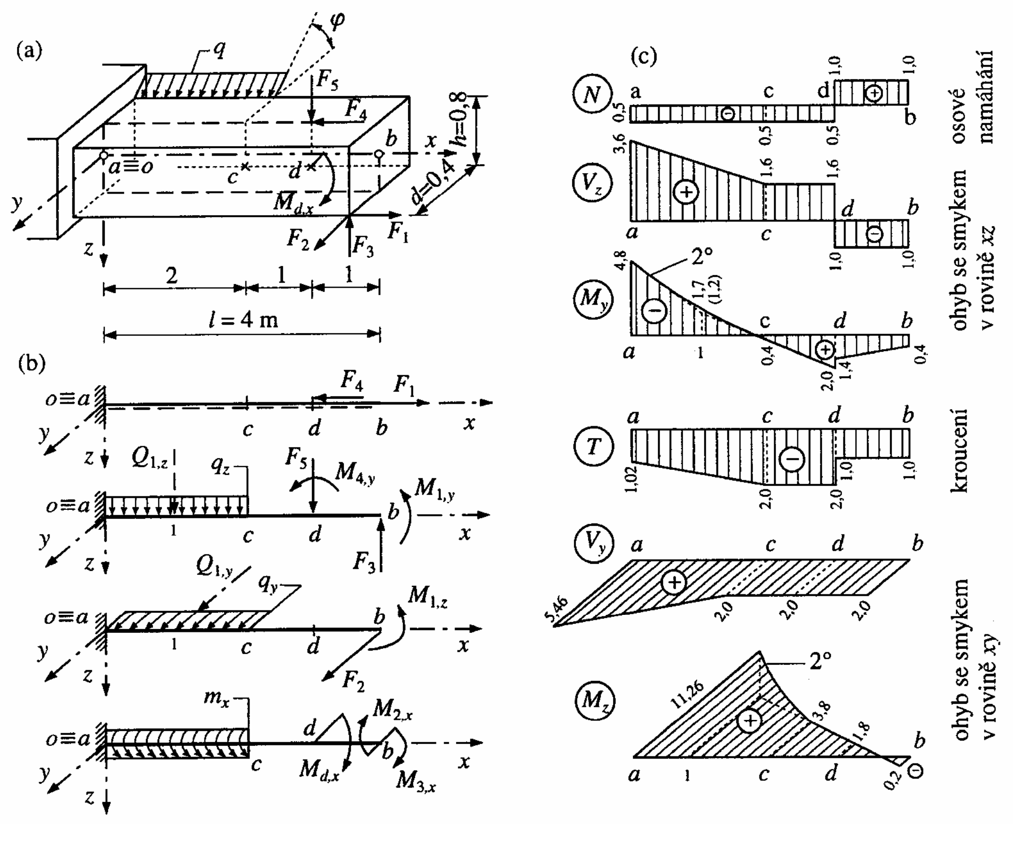
4.7 Příklady řešení prostorově namáhaných nosníků

V tomto odstavci si ukážeme řešení čtyř případů prostorově namáhaných nosníků, a to dvou přímých prutů různým způsobem uložených, prostorově lomeného konzolového nosníku a balkonového nosníku.

Příklad 4.1

Zadání

Určete průběh složek vnitřních sil na *přímém* vodorovném *konzolovém nosníku* obdélníkového průřezu 0,4 × 0,8 m (obr. 4.7a) při prostorovém zatížení silami $F_1 = F_3 = 1$ kN, $F_2 = 2$ kN, $F_4 = 1{,}5$ kN, $F_5 = 2{,}6$ kN, spojitým rovnoměrným zatížením $q = 2$ kNm^{-1} s $\varphi = 30°$ a osamělým momentem $M_{d,x} = 1$ kNm.



Obr. 4.7: Vodorovný konzolový nosník prostorově zatížený

Řešení

Šikmé spojité rovnoměrné zatížení q rozložíme do pravoúhlých složek

$$q_y = q \cos\varphi = 2 \cdot \cos 30° = 1{,}73 \text{ kNm}^{-1},$$

$$q_z = q \sin\varphi = 2 \cdot \sin 30° = 1 \text{ kNm}^{-1}.$$

Rovnoběžný posun zatížení ke střednici prutu vyvolá *doplňkové momentové zatížení* od jednotlivých zatížení

$$F_1: \quad M_{1,y} = F_1 \cdot h/2 = 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}4 \text{ kNm},$$

$$M_{1,z} = -F_1 \cdot d/2 = -1 \cdot 0{,}2 = -0{,}2 \text{ kNm},$$

$$F_2: \quad M_{2,x} = -F_2 \cdot h/2 = -2 \cdot 0{,}4 = -0{,}8 \text{ kNm},$$

$$F_3: \quad M_{3,x} = -F_3 \cdot d/2 = -1 \cdot 0{,}2 = -0{,}2 \text{ kNm},$$

$$F_4: \quad M_{4,y} = F_4 \cdot h/2 = 1{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}6 \text{ kNm},$$

$$q: \quad m_x = q_y \cdot h/2 - q_z \cdot d/2 = 1{,}73 \cdot 0{,}4 - 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}49 \text{ kNm}^{-1}\cdot\text{m}.$$

Výpočtový model zatížení v ose x, v rovinách xz a xy a zkrucujícího momentového zatížení k ose nosníku je uvedeno na obr. 4.7b. U konzolového nosníku lze složky vnitřních sil řešit postupem z volného konce (tj. zprava), k čemuž nepotřebujeme předem znát složky reakce ve vetknutí a.

Průběhy vnitřních sil N, V_z, M_y od zatížení působícího ve svislé rovině xz určujeme stejným postupem jako u rovinně namáhaného prutu (viz odst. 4.4 třetího modulu). Zatížení působící ve vodorovné rovině xy nosníku vyvolává složky vnitřních sil V_y, M_z, jejichž průběhy (obr. 4.7c) vycházejí z hodnot:

$$V_{y,b} = V_{y,c} = F_2 = 2 \text{ kN}, \quad V_{y,a} = F_2 + q_y \cdot 2 = 2 + 1{,}73 \cdot 2 = 5{,}46 \text{ kN},$$

$$M_{z,b} = -M_{z,1} = -0{,}2 \text{ kNm}, \quad M_{z,d} = F_2 \cdot 1 - M_{z,1} = 2 \cdot 1 - 0{,}2 = 1{,}8 \text{ kNm},$$

$$M_{z,c} = F_2 \cdot 2 - M_{z,1} = 2 \cdot 2 - 0{,}2 = 3{,}8 \text{ kNm},$$

$$M_{z,a} = F_2 \cdot 4 - M_{z,1} - Q_{y,1} \cdot 1 = 2 \cdot 4 - 0{,}2 + 1{,}73 \cdot 2 \cdot 1 = 11{,}26 \text{ kNm}.$$

Zkrucující momentové zatížení vyvolává kroutící momenty $T = M_z$, jejichž průběh (obr. 4.7c) vyneseme z hodnot

$$T_{bd} = M_{x,b} = M_{x,2} + M_{x,3} = -0{,}8 - 0{,}2 = -1{,}0 \text{ kNm} = T_{db},$$

$$T_{dc} = T_{db} + M_{x,d} = -1{,}0 - 1{,}0 = -2{,}0 \text{ kNm} = T_{cd} = T_{ca},$$

$$T_{ac} = T_{ca} + m_x \cdot 2 = -2{,}0 + 0{,}49 \cdot 2 = -1{,}02 \text{ kNm}.$$

Složky reakce ve vetknutí a se dají určit z hodnot složek vnitřních sil v podporovém průřezu, takže dostaneme (s uvedením směru vektoru) R_{ax} = 0,5 kN (doprava), R_{ay} = 5,46 kN (dozadu), R_{az} = 3,6 kN (nahoru), M_{ax} = 1,02 kNm (doprava), M_{ay} = 4,8 kNm (dopředu), M_{az} = 11,26 kNm (nahoru).

Příklad 4.2

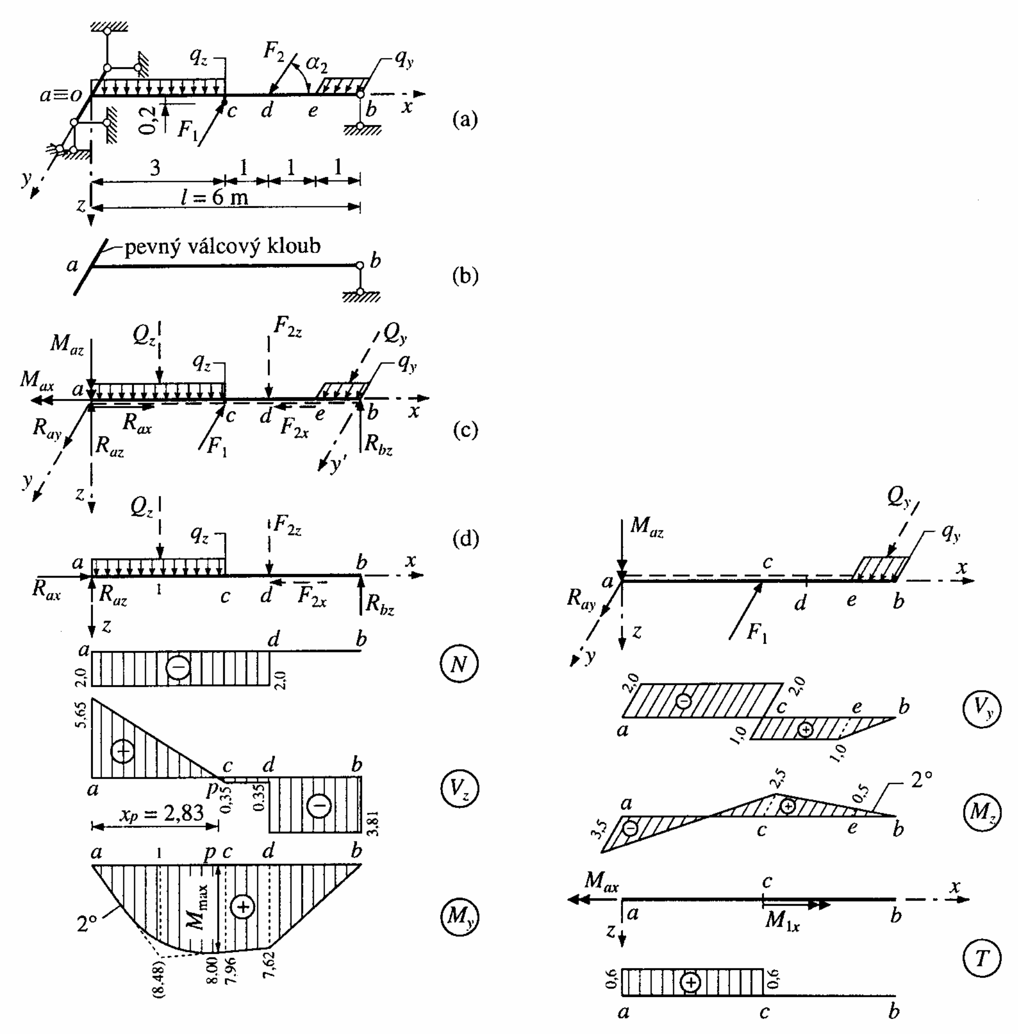
Zadání

Určete průběh složek vnitřních sil na *přímém* vodorovném *nosníku* podepřeném šesti kyvnými pruty (obr. 4.8a) pro zatížení $q_z = 2$ kNm^{-1}, $F_2 = 4$ kN s $\alpha_2 = 60°$ ve svislé rovině xz, zatížení $q_y = 1$ kNm^{-1} ve vodorovné rovině xy a osamělou sílu $F_1 = 3$ kN působící ve směru osy y ve vzdálenosti $p_1 = 0{,}2$ m od osy nosníku.

Řešení

Uspořádání pěti kyvných prutů na levém konci a nosníku pomocí krátké tuhé části je ekvivalentní pětinásobné vazbě (neposuvnému válcovému kloubu s osou $O \equiv y$ podle obr. 4.8b) se složkami reakcí R_{ax}, R_{ay}, R_{az}, M_{ax}, M_{az} (obr. 4.8c). Pravý konec b nosníku je podepřen svislým kyvným prutem s reakcí R_{bz}, která zabraňuje jeho posunutí ve svislém směru.

Při ohybu ve svislé rovině xz působí nosník jako prostý nosník (se složkami reakcí R_{ax}, R_{az}, R_{bz}), při ohybu ve vodorovné rovině xy jako konzolový nosník (se složkami reakcí R_{ax}, R_{ay}, M_{az}). Při osovém namáhání a při kroucení se uplatňuje příslušná vazba na levém konci a nosníku (reakce R_{ax}, M_{ax}).



Obr. 4.8: Prostorově namáhaný vodorovný nosník

Výpočet složek reakcí vnějších vazeb provedeme ze šesti statických podmínek rovnováhy obecné prostorové soustavy sil (obr. 4.8c). Nejprve sílu F_2 rozložíme do pravoúhlých složek F_{2x} = 2 kN, F_{2z} = 3,46 kN a spojitá rovnoměrná zatížení q_y, q_z nahradíme náhradními břemeny Q_y = 1 kN a Q_z = 6 kN.

Statické podmínky rovnováhy pak mají tvar

$$\sum F_{ix} = 0: \quad R_{ax} - F_{2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{ax} = 2 \text{ kN},$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad R_{ay} + Q_y - F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{ay} = 2 \text{ kN},$$

$$\sum M_{iy} = 0: \quad R_{bz} \cdot 6 - F_{2z} \cdot 4 - Q_z \cdot 1{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{bz} = 3{,}81 \text{ kN},$$

$$\sum M_{iy'} = 0: \quad -R_{az} \cdot 6 + Q_z \cdot 4{,}5 + F_{2z} \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{az} = 5{,}65 \text{ kN},$$

$$\sum M_{ix} = 0: \quad -M_{ax} + F_1 \cdot 0{,}2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{ax} = 0{,}6 \text{ kNm},$$

$$\sum M_{iz} = 0: \quad M_{az} + Q_y \cdot 5{,}5 - F_1 \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{az} = 3{,}5 \text{ kNm}$$

a kontrola je

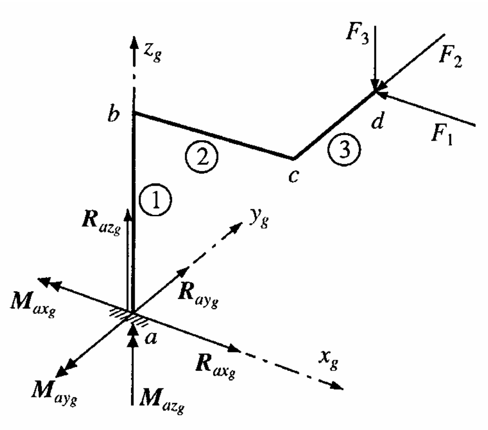
$$\sum F_{iz} = 0: \quad -R_{az} - R_{bz} + Q_z + F_{2z} = 0.$$

Průběhy složek vnitřních sil jsou bez výpočtu pořadnic uvedeny na obr. 4.8d.

Příklad 4.3

Zadání

Stanovte průběh složek vnitřních sil na prostorově lomeném konzolovém nosníku (obr. 4.9), sestávajícím ze tří přímých částí délek $l_1 = 5$ m, $l_2 = 4$ m, $l_3 = 3$ m navzájem spojených monoliticky pod pravými úhly, zatíženém osamělými silami $F_1 = 10$ kN, $F_2 = F_3 = 20$ kN.



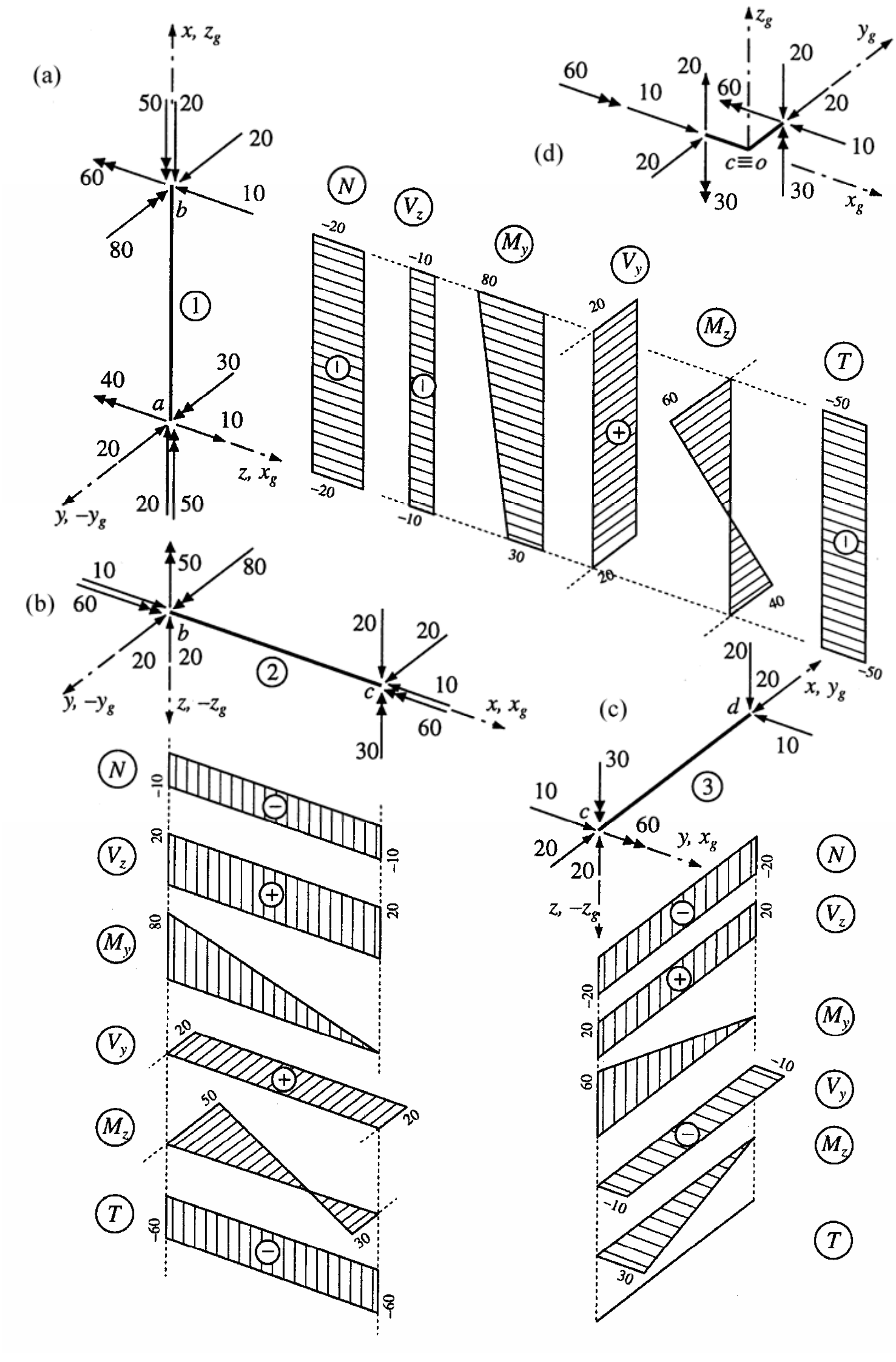
Obr. 4.9: Prostorově lomený konzolový nosník

Řešení

Složky reakcí ve vetknutí *a* lomeného konzolového nosníku (obr. 4.9) určíme ze šesti globálních statických podmínek rovnováhy a získáme

$$R_{axg} = F_1 = 10 \text{ kN},$$
$$R_{ayg} = F_2 = 20 \text{ kN},$$
$$R_{azg} = F_3 = 20 \text{ kN},$$
$$M_{axg} = F_2\, l_1 - F_3\, l_3 = 40 \text{ kNm},$$
$$M_{ayg} = -F_1\, l_1 + F_3\, l_2 = 30 \text{ kNm},$$
$$M_{azg} = -F_1\, l_3 + F_2\, l_2 = 50 \text{ kNm}.$$

Koncové síly a momenty na jednotlivých vyjmutých prutech lomeného nosníku jsou i s daným zatížením a průběhy složek vnitřních sil nakresleny v axonometrickém pohledu na obr. 4.10, kde je rovněž pro uzel *c* ověřena rovnováha. Pokud bychom složky vnitřních sil řešili postupem od volného konce *d* konzolového nosníku, nebylo by nutné předem stanovit složky reakcí dokonalého vetknutí.



Obr. 4.10: *Průběhy složek vnitřních sil na jednotlivých prutech nosníku v lokálních souřadnicových soustavách*

Příklad 4.4

Zadání

Stanovte průběh složek vnitřních sil na půdorysně lomeném konzolovém nosníku (balkonovém nosníku) pro svislé zatížení $F = 2$ kN, $q_1 = 1$ kNm^{-1}, $q_2 = 2$ kNm^{-1} (obr. 4.11a, b).

Řešení

Funkce posouvajících sil $V(x)$, ohybových momentů $M(x)$ a krouticích momentů $T(x)$ určíme po jednotlivých prutech $a-b$, $b-c$, $c-d$ v jejich lokálních souřadnicových soustavách (obr. 4.11a) a vyčíslíme pořadnice v koncových průřezech.

Prut $a-b$:

$$V(x_1) = -F - q_1\,x_1 = -2 - x_1\,,$$

$$M(x_1) = -F\,x_1 - \frac{1}{2} q_1\,x_1^2 = -2\,x_1 - 0{,}5\,x_1^2\,,$$

$$T(x_1) = 0;$$

v koncových průřezech a, b

$$V(x_1 = 0) = V_a = -2 \text{ kN},$$

$$V(x_1 = l_1) = V_b = -2 - 2 = -4 \text{ kN},$$

$$M(x_1 = 0) = M_a = 0,$$

$$M(x_1 = l_1) = M_b = -2 \cdot 2 - 0{,}5 \cdot 2^2 = -6 \text{ kNm}.$$

Prut $b-c$:

$$V(x_2) = -F - q_1\,l_1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{q_2}{l_2}\,x_2 \cdot x_2 = -4 - 0{,}25\,x_2^2\,,$$

$$M(x_2) = -F\,(1 + x_2) - q_1\,l_1\,(0{,}5 + x_2) - \frac{1}{2}\cdot\frac{q_2}{l_2}\,x_2 \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{3} =$$

$$= -3 - 4\,x_2 - \frac{1}{12}x_2^3\,,$$

$$T(x_2) = F \cdot 1{,}73 + q_1\,l_1 \cdot \frac{1{,}73}{2} = 5{,}20 \text{ kNm};$$

v koncových průřezech b, c

$$V_b = -4 \text{ kN},\quad V_c = -4 - 0{,}25 \cdot 4^2 = -8 \text{ kN},\quad M_b = -3 \text{ kNm},$$

$$M_c = -3 - 4 \cdot 4 - \frac{1}{12} \cdot 4^3 = -24{,}33 \text{ kNm},\quad T_b = T_c = 5{,}20 \text{ kNm}.$$

Prut $c-d$:

$$V(x_3) = -F - q_1\,l_1 - \frac{1}{2}\,q_2\,l_2 = -8 \text{ kN},$$

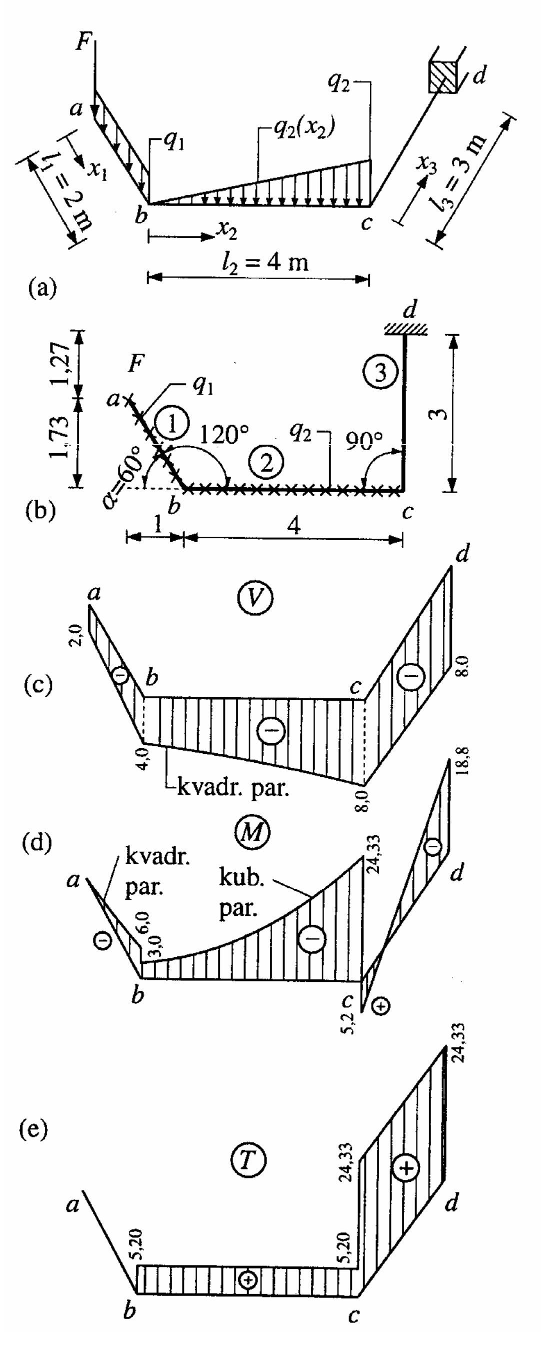
$$M(x_3) = F\,(1{,}73 - x_3) + q_1\,l_1\,(0{,}5 \cdot 1{,}73 - x_3) - \frac{1}{2} q_2\,l_2\,x_3 = 5{,}20 - 8\,x_3\,,$$

$$T(x_3) = F\,(1 + l_2) + q_1\,l_1\,(0{,}5 + l_2) + \frac{1}{2} q_2\,l_2 \cdot \frac{1}{3} l_2 = 24{,}33 \text{ kNm};$$

v koncových průřezech c, d

$V_c = V_d = -8$ kN, $M_c = 5{,}20$ kNm, $M_d = 5{,}20 - 8 \cdot 3 = -18{,}80$ kNm,
$T_c = T_d = 24{,}33$ kNm.

Na obr. 4.11c–e jsou znázorněny spojené obrazce vnitřních sil pro všechny pruty balkonového nosníku.



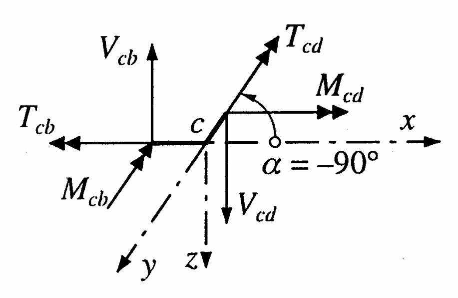
Obr. 4.11: Konzolový lomený balkonový nosník

Kontrola návaznosti sil a momentů v uvolněném uzlu c (obr. 4.12) třemi statickými podmínkami rovnováhy:

$$\sum F_{iz} = 0: \quad -V_{cb} + V_{cd} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{cb} = V_{cd}$$

$$\sum M_{ix} = 0: \quad -T_{cb} + M_{cd} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{cb} = M_{cd}$$

$$\sum M_{iz} = 0: \quad -M_{cb} - T_{cd} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{cb} = -T_{cd}$$



Obr. 4.12: Uvolněný uzel c balkonového nosníku

Shrnutí

Tato kapitola uzavírá naše seznamování se Základy stavební mechaniky. Rozšířili jsme si v ní poznatky z řešení reakcí a průběhů vnitřních sil z rovinných prutových konstrukcí na staticky určité prutové konstrukce prostorově namáhané.

5 Studijní prameny

5.1 Seznam použité literatury

[1] Kadlčák, J., Kytýr, J. *Statika stavebních konstrukcí I. Základy stavební mechaniky. Staticky určité prutové konstrukce*. Druhé vydání. VUTIUM, Brno 2000

[2] Novotná, H., Cais, S., Ptáček, M. *Teoretická mechanika.* SNTL/ALFA, Praha 1983

5.2 Seznam doplňkové studijní literatury

[3] Halliday, D., Resnick, R. a Walker, J. *Fyzika*. VUTIUM, Brno 2000

[4] Juliš, K., Brepta, R. *Mechanika I. Statika a kinematika.* Technický průvodce 65. SNTL, Praha 1986

[5] Meriam, J. L. *Engineering Mechanics. Statics and Dynamics.* John Wiley & Sons, New York 1978

[6] Cais, S. *Statika stavebních konstrukcí – Dějiny stavební mechaniky.* Doplňková skripta. ČVUT, Praha 1991

5.3 Odkazy na další studijní zdroje a prameny

[7] http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians

Poznámky