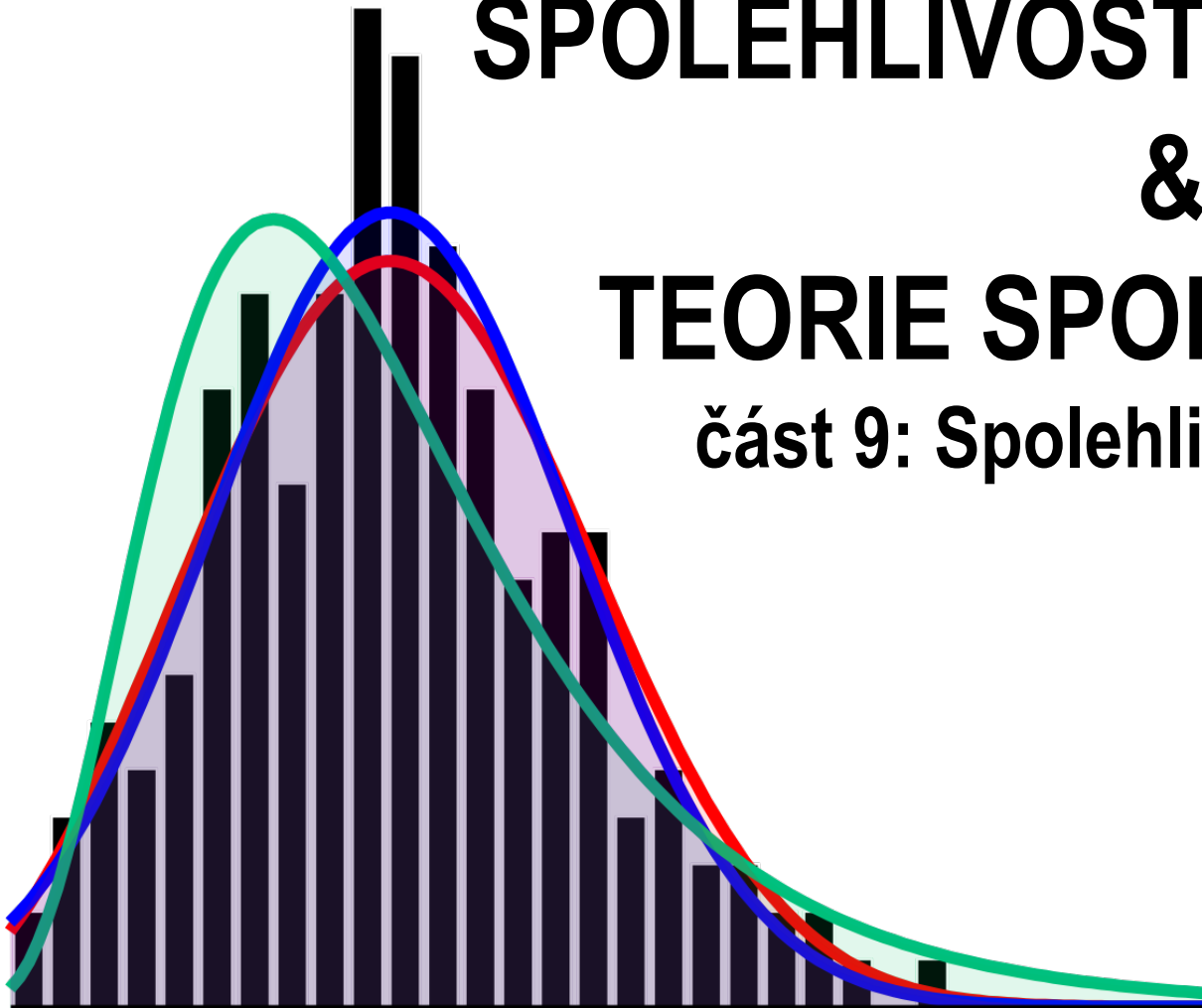


SPOLEHLIVOST KONSTRUKCÍ & TEORIE SPOLEHLIVOSTI

část 9: Spolehlivost systémů

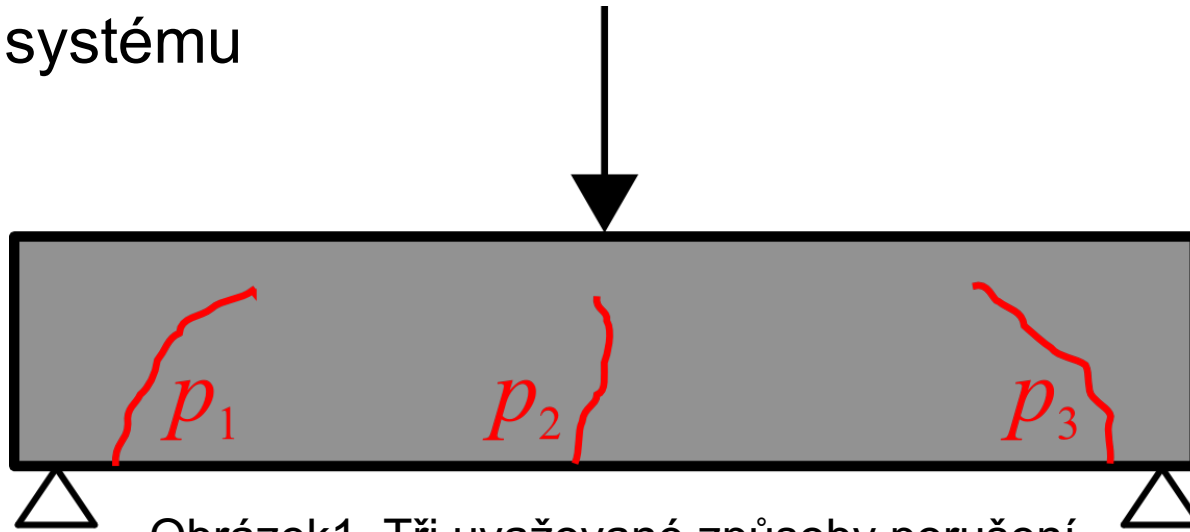


Drahomír Novák
Jan Eliáš
David Lehký

část 9 Spolehlivost systémů

System nespolehlivých komponent

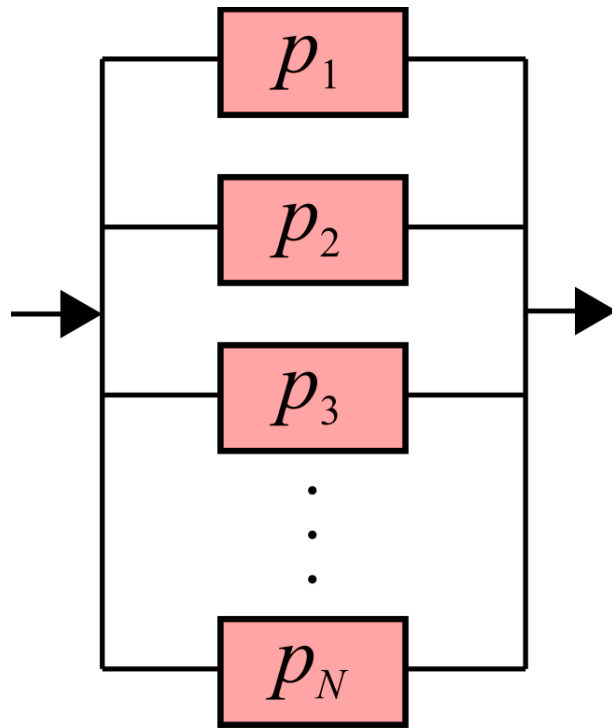
- většinou máme systém **komponent**, kde každá z nich může selhat
- $G_1, G_2, G_3, \dots, G_N$ – rezervy spolehlivosti pro N komponent (mohou být vzájemně **závislé** či **nezávislé**)
- $p_1, p_2, p_3, \dots, p_N$ – pravděpodobnosti poruchy N komponent
- G, p_f – rezerva spolehlivosti a pravděpodobnost poruchy celého systému



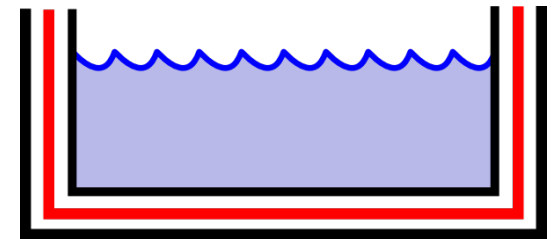
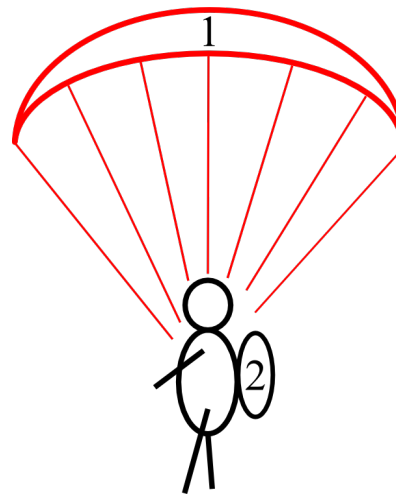
Obrázek1. Tři uvažované způsoby porušení

Paralelní systémy

- systém selže pouze když selžou **všechny** jeho komponenty



- parašutista s dvěma padáky
- vodní nádrž se záchytnými nádržemi
- staticky neurčitá konstrukce

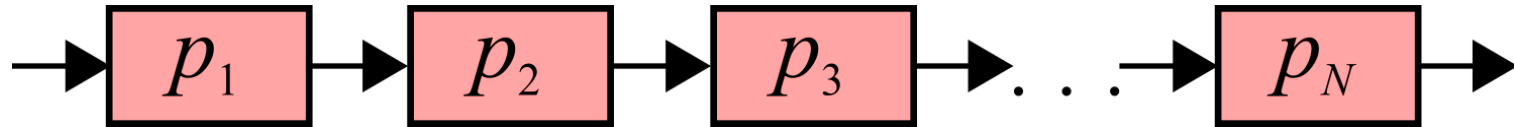


Obrázek 2. Schéma paralelního systému

Obrázek 3. Příklady paralelních systémů

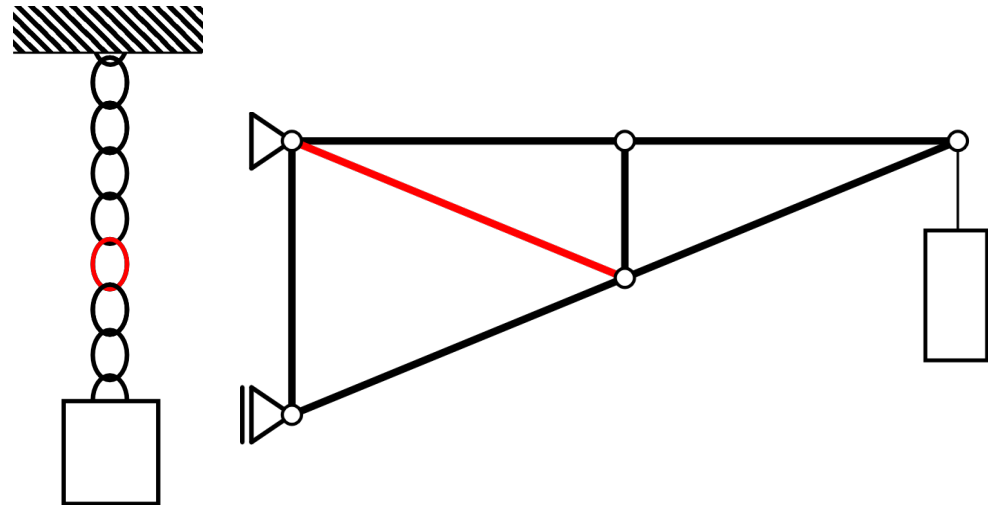
Sériové systémy

- systém selže kdykoliv selže **kterákoliv** jeho komponenta



Obrázek 4. Schéma sériového systému

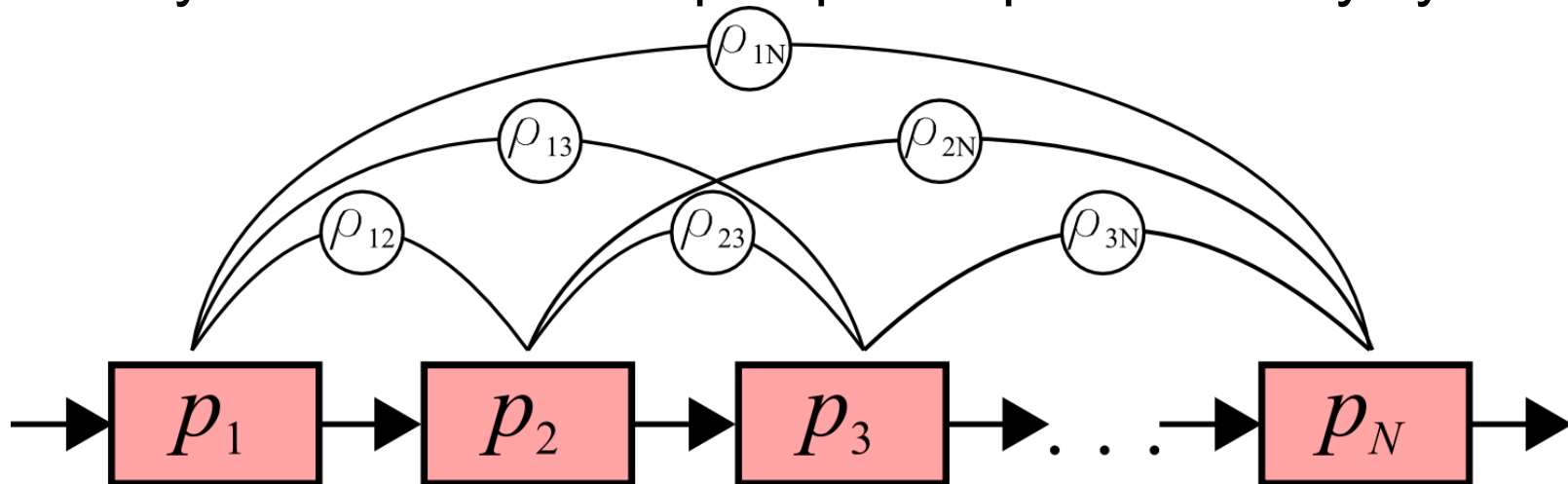
- řetěz v tahu
- staticky určité konstrukce



Obrázek 5. Příklady sériových systémů

Závislé komponenty

- **Nezávislý** systém má rezervy spolehlivosti svých komponent vzájemně nezávislé
- **Pozitivně korelovaný** systém má rezervy spolehlivosti svých komponent vzájemně nezávislé nebo pozitivně korelované
- **Negativně korelovaný** systém má alespoň jeden pár rezerv spolehlivosti svých komponent negativně korelovaný
- analytické řešení dostupné pouze pro nezávislý systém

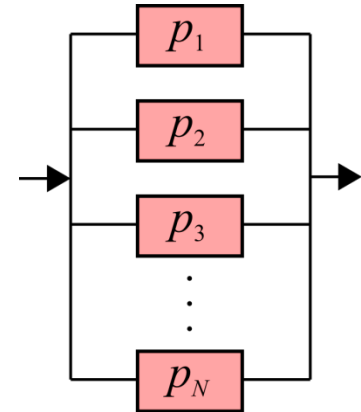


Obrázek 6. Vzájemná korelace

Paralelní systémy

- pravděpodobnost, že všechny **nezávislé** komponenty selžou je jednoduše

$$p_f = \prod_{i=1}^N p_i$$



- **pozitivně závislé** komponenty jsou horší, protože pokud jedna selže, ostatním se zvyšuje pravděpodobnost selhání

$$p_f \leq \min(p_1, p_2, p_3, \dots, p_N)$$

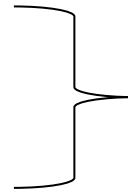
- **negativně závislé** komponenty jsou lepší, protože pokud jedna selže, ostatním se snižuje pravděpodobnost selhání

$$p_f > 0$$

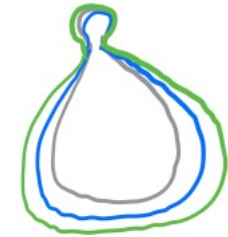
Paralelní systémy

Příklad: Máme 3 igelitové tašky naplněné vodou. Tašky mají následující p-stí protržení:

- Billa ... 10 % ($p_{f,1} = 0,1$)
- Albert ... 8 % ($p_{f,2} = 0,08$)
- Tesco ... 5 % ($p_{f,3} = 0,05$)



nezávislé



Zjistěte p-st protržení tašek, pokud jsou **vloženy jedna do druhé (paralelní systém)**:

$$p_f = \prod_{i=1}^N p_{f,i} = 0,1 \cdot 0,08 \cdot 0,05 = 0,0004$$

Pokud jsou **plně pozitivně závislé**:

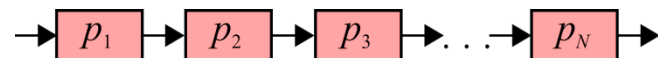
$$p_f = \min(0,1; 0,08; 0,05) = 0,05$$



Sériové systémy

- pravděpodobnost, že všechny **nezávislé** komponenty vydrží

$$r = \prod_{i=1}^N r_i \Rightarrow 1 - p_f = \prod_{i=1}^N (1 - p_i)$$



$$p_f = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - p_i) \approx \sum_{i=1}^N p_i$$

← pokud jsou všechny p_i malé

- **pozitivně závislé** komponenty jsou lepší, protože pokud jedna vydrží, ostatním se zvyšuje pravděpodobnost že vydrží také $p_f \geq \max(p_1, p_2, p_3, \dots, p_N)$

- **negativně závislé** komponenty jsou horší, protože pokud jedna vydrží, ostatním se zvyšuje pravděpodobnost že selžou

$$p_f < 1$$

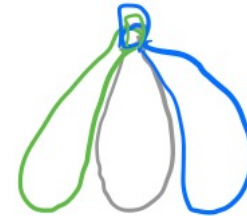
Sériové systémy

Příklad: Máme 3 igelitové tašky naplněné vodou. Tašky mají následující p-stí protržení:

- Billa ... 10 % ($p_{f,1} = 0,1$)
- Albert ... 8 % ($p_{f,2} = 0,08$)
- Tesco ... 5 % ($p_{f,3} = 0,05$)



nezávislé



Zjistěte p-st protržení tašek, pokud jsou **neseny vedle sebe (sériový systém)**:

$$p_f = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - p_{f,i}) = 1 - (1 - 0,1) \cdot (1 - 0,08) \cdot (1 - 0,05) = 0,2134$$

Pokud jsou **plně pozitivně závislé**:

$$p_f = \max(0,1; 0,08; 0,05) = 0,1$$

Sériové systémy

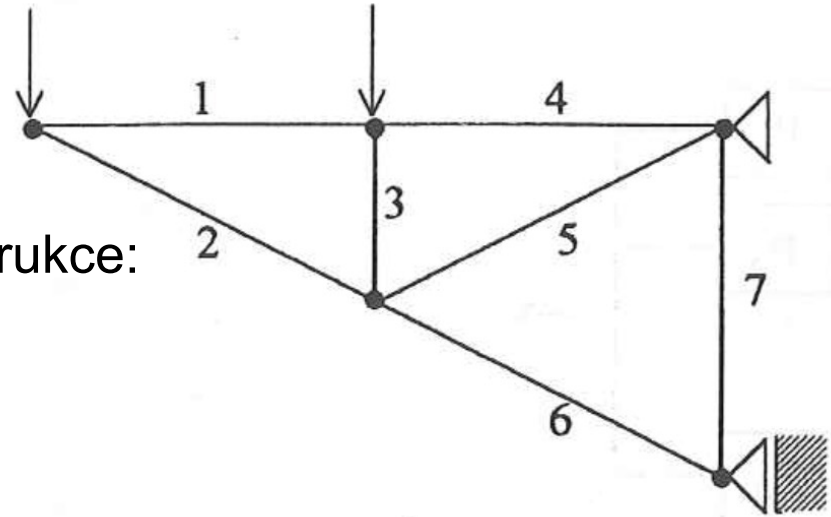
Příklad: Staticky určitá příhradová konstrukce se 7 pruty.

Každý prut se poruší s p -stí:

$$p_{f,i} = 0,01$$

Pravděpodobnost porušení celé konstrukce:

$$\begin{aligned} p_f &= 1 - \prod_{i=1}^N (1 - p_{f,i}) = \\ &= 1 - (1 - 0,01)^7 = 0,068 \end{aligned}$$

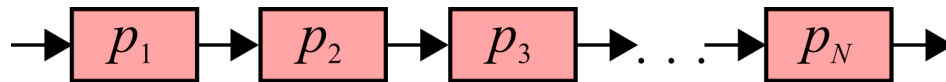


Pokud má jeden z prutů **horší vlastnosti**, např.: $p_{f,1} = 0,1$

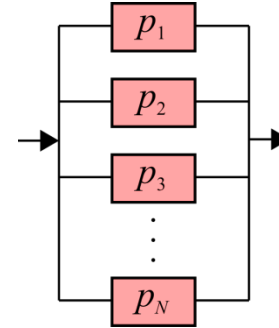
$$p_f = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - p_{f,i}) = 1 - (1 - 0,1)(1 - 0,01)^6 = 0,153$$

Výrazný vliv **nejslabšího** prvku!

Shrnutí



komponenty v sérii



paralelní
komponenty

negativní
závislost

↑

$$p_f < 1$$

↓

pozitivní

$$p_f = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - p_i)$$

↑

$$p_f \geq \max_{i=1}^N (p_i)$$

↓

$$p_f \leq \min_{i=1}^N (p_i)$$

$$p_f = \prod_{i=1}^N p_i$$

nezávislé

$$p_f > 0$$

pozitivní
závislost

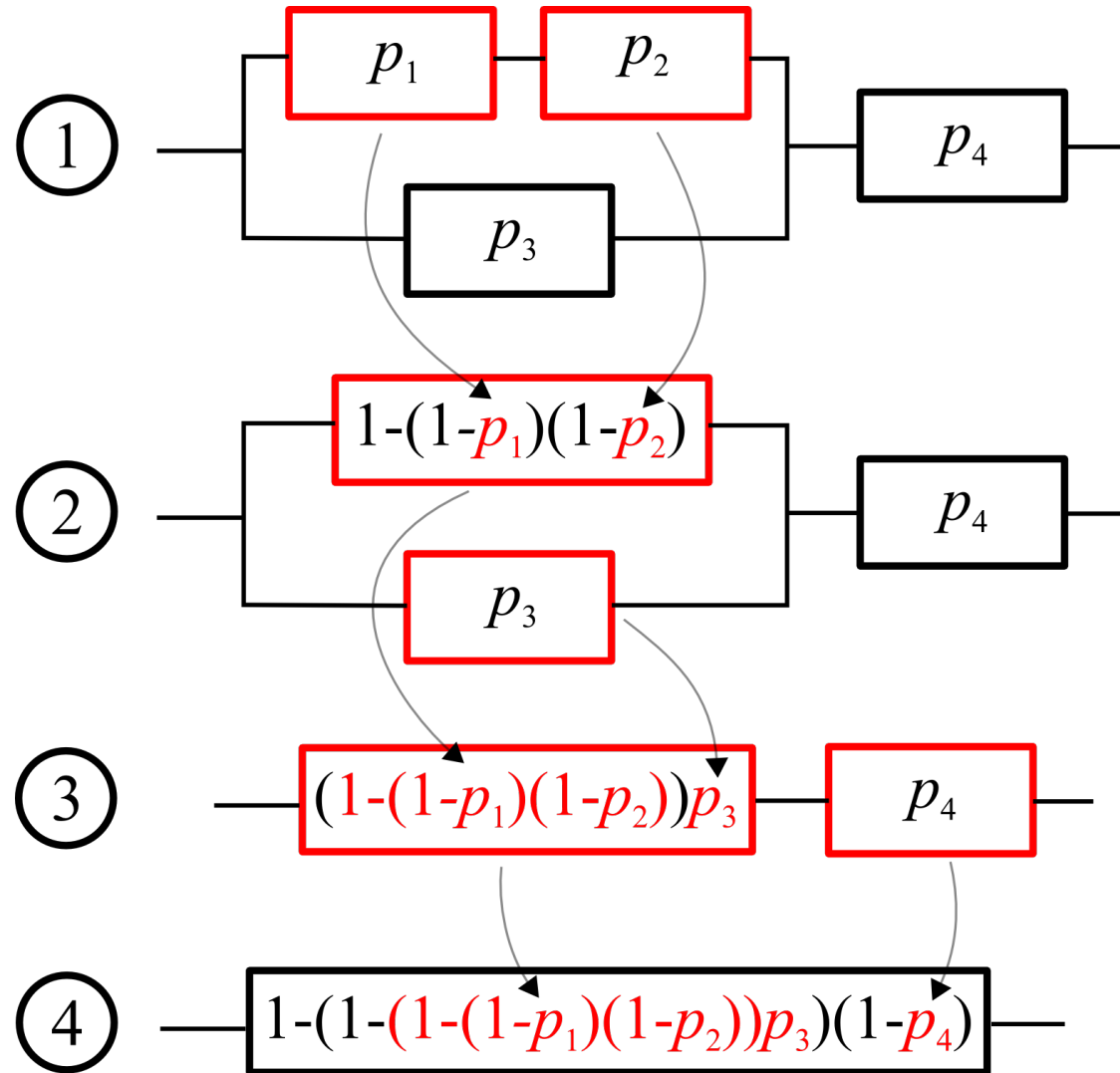
↑

↓

negativní

Sériové-paralelní kombinované systémy

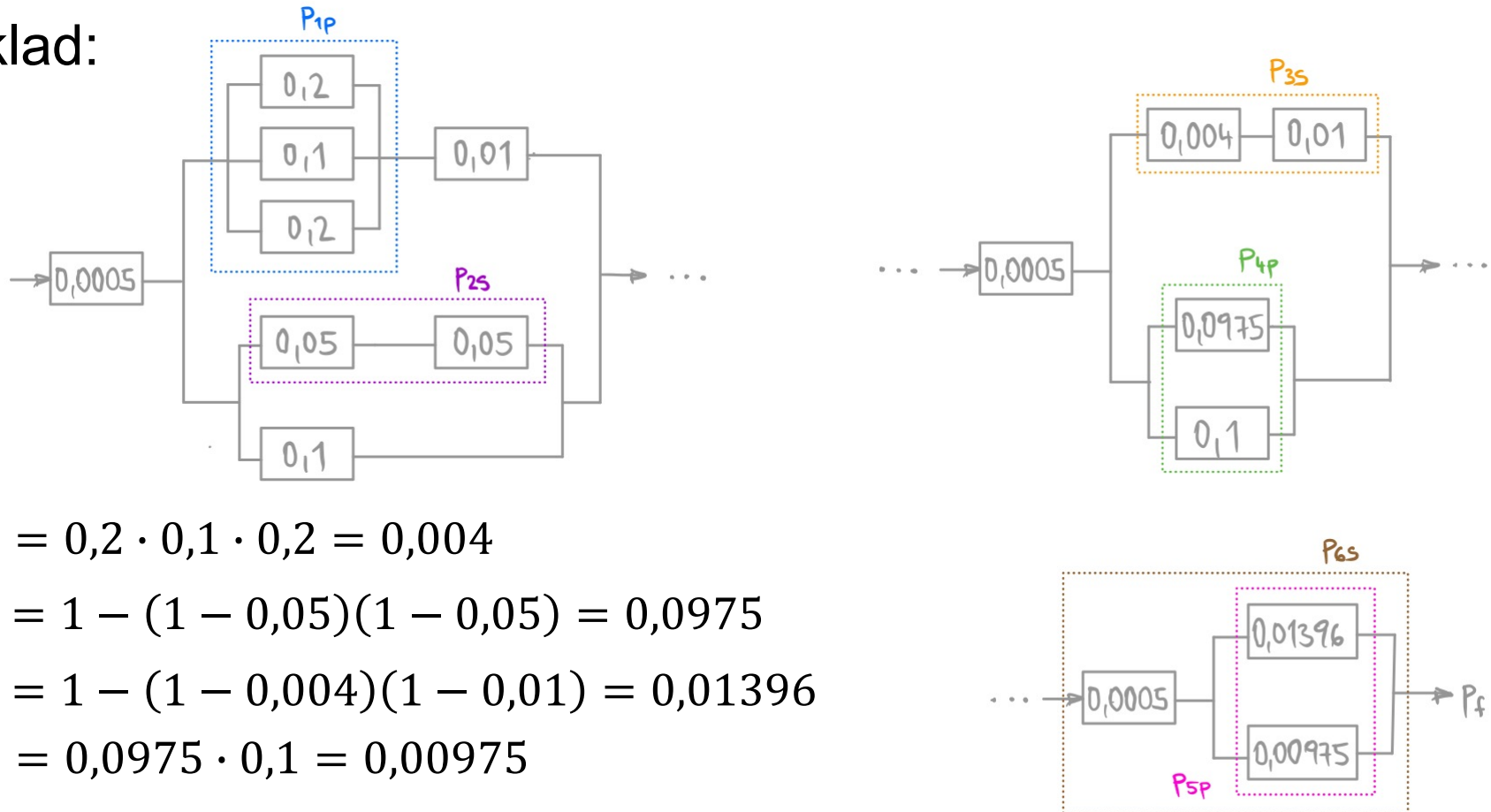
- nejčastější typ systémů
- v případě nezávislosti komponent lze pravděpodobnost poruchy určit redukcí sériových a paralelních částí krok po kroku



Obrázek 7. Nezávislý kombinovaný systém

Sériové-paralelní kombinované systémy

Příklad:



$$p_{1p} = 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 0,004$$

$$p_{2s} = 1 - (1 - 0,05)(1 - 0,05) = 0,0975$$

$$p_{3s} = 1 - (1 - 0,004)(1 - 0,01) = 0,01396$$

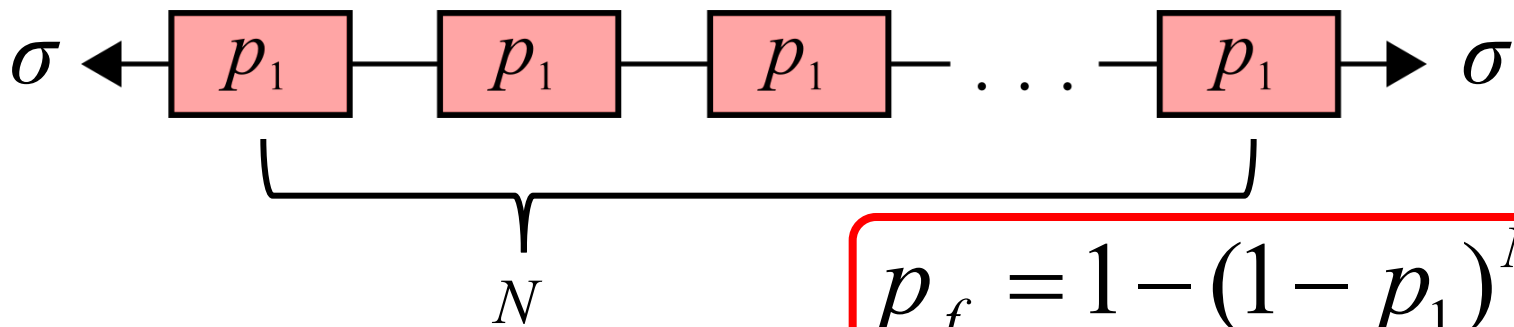
$$p_{4p} = 0,0975 \cdot 0,1 = 0,00975$$

$$p_{5p} = 0,01396 \cdot 0,00975 = 0,00013611$$

$$p_f = p_{6s} = 1 - (1 - 0,0005)(1 - 0,00013611) = 0,0006360$$

Weibullova teorie porušení (Weibull 1931)

- řetěz N **identických nezávislých** komponent pod napětím σ
- pravděpodobnost každé z komponent je p_1



$$p_f = 1 - (1 - p_1)^N$$

- každá z komponent má Weibullovo rozdělení pevnosti

$$p_1 = F_{\text{strength}}(\sigma) = 1 - \exp\left(-\left\langle \frac{\sigma}{s_0} \right\rangle^m\right)$$

pak:

$$p_f = 1 - \exp\left(-\left\langle \frac{\sigma}{s_0} \right\rangle^m N\right)$$

Obrázek 8. Weibullův řetěz

Závislost střední hodnoty pevnostu na N

- řetěz má také Weibullovo rozdělení s odlišným param. měřítka

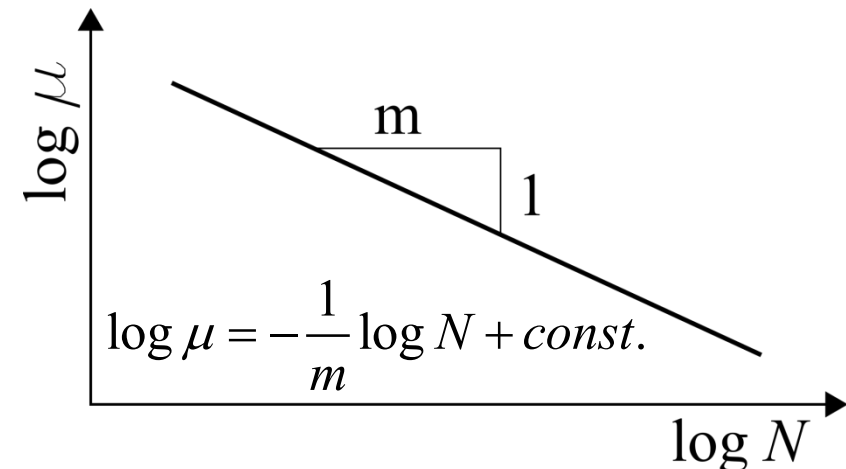
$$p_f = 1 - \exp \left(- \left\langle \frac{\sigma}{s_0} \right\rangle^m N \right) = 1 - \exp \left(- \left\langle \frac{\sigma}{s_1} \right\rangle^m \right), \text{ where } s_1 = \frac{s_0}{\sqrt[m]{N}}$$

- střední hodnota a variační koeficient takového rozdělení

$$\mu = \frac{s_0}{\sqrt[m]{N}} \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right), \quad \nu = \sqrt{\frac{\Gamma(1 + 2/m)}{\Gamma^2(1 + 1/m)} - 1} \quad \leftarrow \text{nezávislý na } N$$

- střední **pevnost** závislá na **délce řetězu**

pokud $m=6$	N=1	$\mu=10$ MPa
	N=10	$\mu=6.8$ MPa
	N=100	$\mu=4.64$ MPa
	N=1000	$\mu=3.16$ MPa
	N=10000	$\mu=2.15$ MPa



Obrázek 9. Weibullův vliv velikosti

Obecný tvar tělesa a zatížení

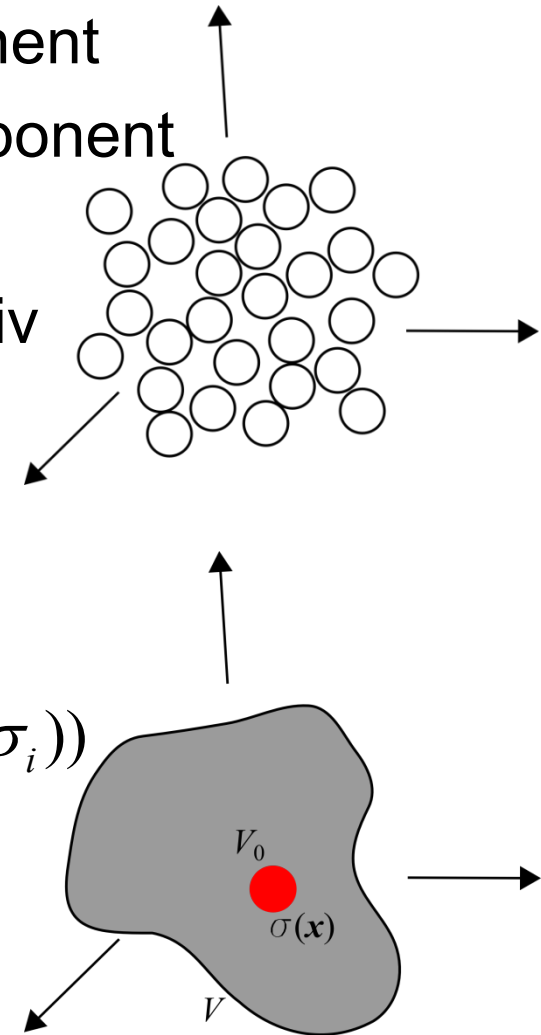
- těleso z **identických nezávislých** komponent
- pravděpodobnost poruchy každé z komponent $p_1(\sigma_i)$ závisí na napjatosti komponenty σ_i
- konstrukce selže kdykoliv selže kterákoliv z komponent

$$1 - p_f = \prod_{i=1}^N 1 - p_1(\sigma_i)$$

$$\ln(1 - p_f) = \ln\left(\prod_{i=1}^N 1 - p_1(\sigma_i)\right) = \sum_{i=1}^N \ln(1 - p_1(\sigma_i))$$

- v **limitním případě**

$$\ln(1 - p_f) = \int_V \ln(1 - p_1(\bar{\sigma}(\mathbf{x}))) \frac{dV}{V_0}$$



Obrázek10. Obecný tvar tělesa a zatížení

Obeční tvar tělesa a zatížení

- funkce c transformuje tensor napětí na reálné číslo

$$\bar{\sigma}(\mathbf{x}) = c(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}))$$

- nejjednodušší forma = nejvyšší hlavní napětí

$$\bar{\sigma}(\mathbf{x}) = \sigma_I(\mathbf{x})$$

- pak
$$p_f = 1 - \exp \left[\int_V \ln(1 - p_1(\bar{\sigma}(\mathbf{x}))) \frac{dV}{V_0} \right]$$

- předpokládejme, že p_1 má Weibullovo rozdělení

$$p_1(\sigma_I(\mathbf{x})) = 1 - e^{-\left\langle \frac{\sigma_I(\mathbf{x})}{s_0} \right\rangle^m}$$

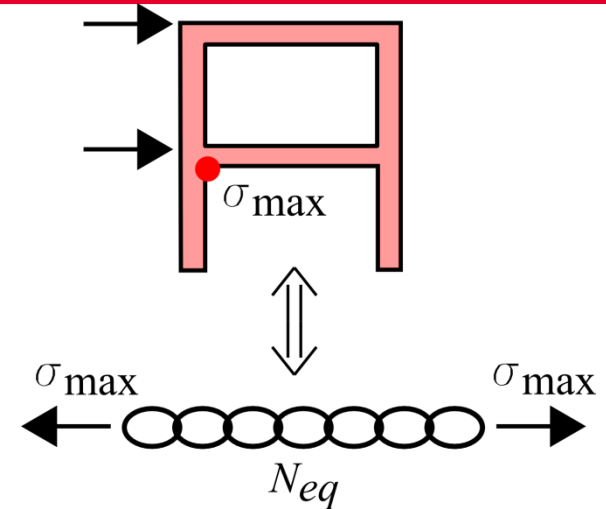
pak

$$p_f = 1 - \exp \left[- \int_V \left\langle \frac{\sigma_I(\mathbf{x})}{s_0} \right\rangle^m \frac{dV}{V_0} \right]$$

Ekvivalence konstrukce a řetězu

- rovnici můžeme přepsat jako

$$p_f = 1 - \exp \left[- \left\langle \frac{\sigma_{\max}}{s_0} \right\rangle^m N_{eq} \right]$$



Obrázek 11. Equivalency to chain

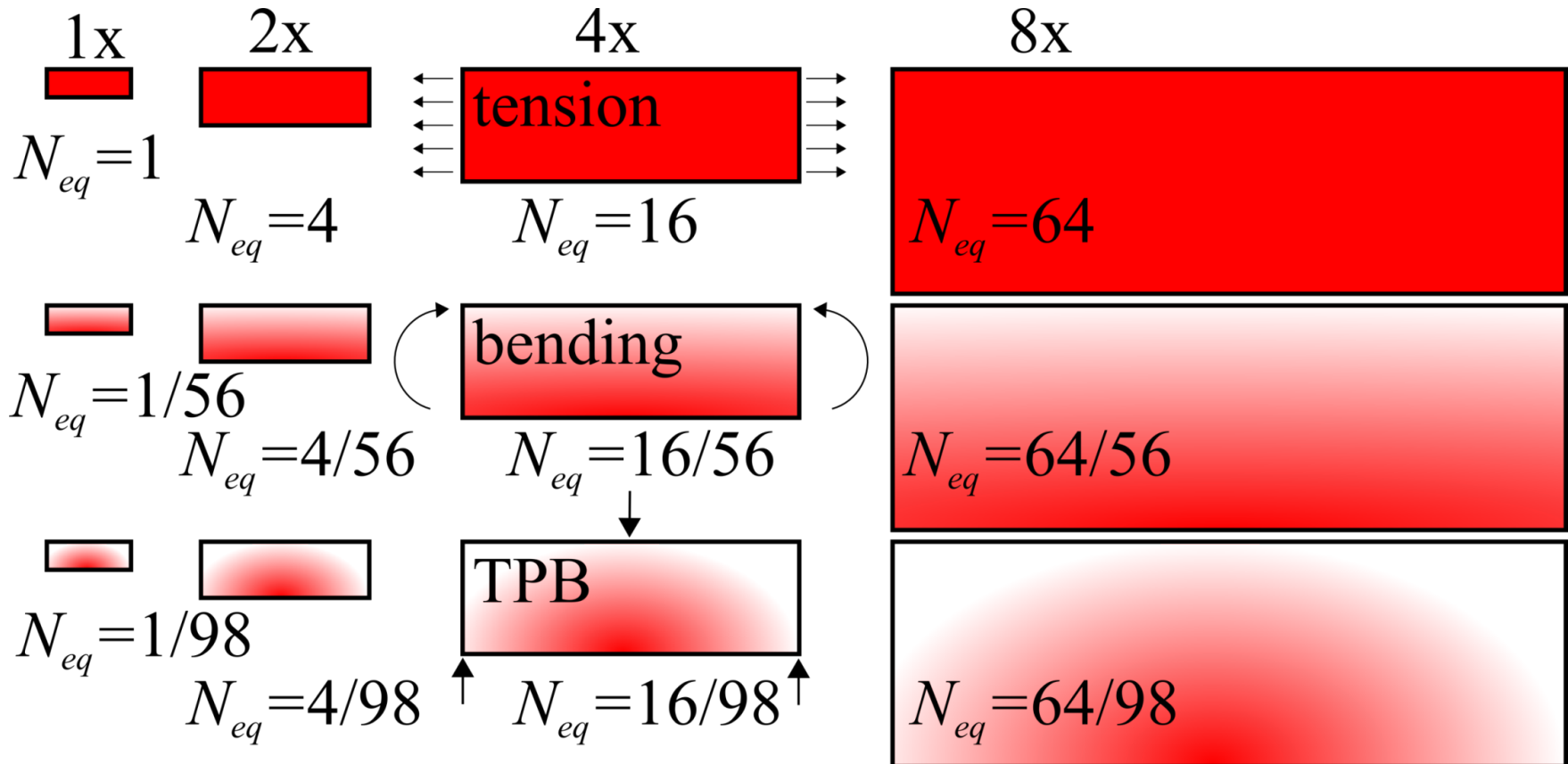
kde $\sigma_{\max}$ je libovolně zvolená kladná konstanta (typicky **maximální napětí**) a N_{eq} je **ekvivalentní počet** článků řetězu pod $\sigma_{\max}$

$$N_{eq} = \int_V \left\langle \frac{\sigma_I(\mathbf{x})}{\sigma_{\max}} \right\rangle^m \frac{dV}{V_0}$$

- každá konstrukce je (z pravděpodobnostního hlediska) **ekvivalentní řetězu** o délce N_{eq} pod napětím $\sigma_{\max}$

Příklad ekvivalentní délky řetězu

- maximální napětí je ve všech konstrukcích stejné, $m=6$



Obrázek 12. Ekvivalentní délky řetězu pro různá namáhání



Komentář k Weibullově teorii

- předpoklady neplatí pro železobetonové konstrukce
 - konstrukce **nejsou křehké** – lokální porucha nevede k poruše celé konstrukce, protože napětí je přerozděleno výztužnými tyčemi (**nejedná se o sériový systém**)
 - pevnost materiálu v jednotlivých bodech **není nezávislá** - ale spíše pozitivně korelovaná s vyšší korelací pro body, které jsou si blíže a s nižší korelací pro vzájemně vzdálenější body
 - skutečná pevnost materiálu má pravděpodobně **Weibullovo** rozdělení pouze na levém ocase, zbytek rozdělení by měl být **Normální**
- jak pracují normy s Weibullovým vlivem velikosti?
 - Pro větší konstrukce je většinou požadován vyšší stupeň bezpečnosti. Navíc, přeceněný součinitel vlastní tíhy má výraznější vliv u velkých konstrukcí.
- jak pracují se závislostí p_f na napjatosti v tělese?
 - Nijak, pracují jen s maximálním napětím $\sigma_{\max}$.