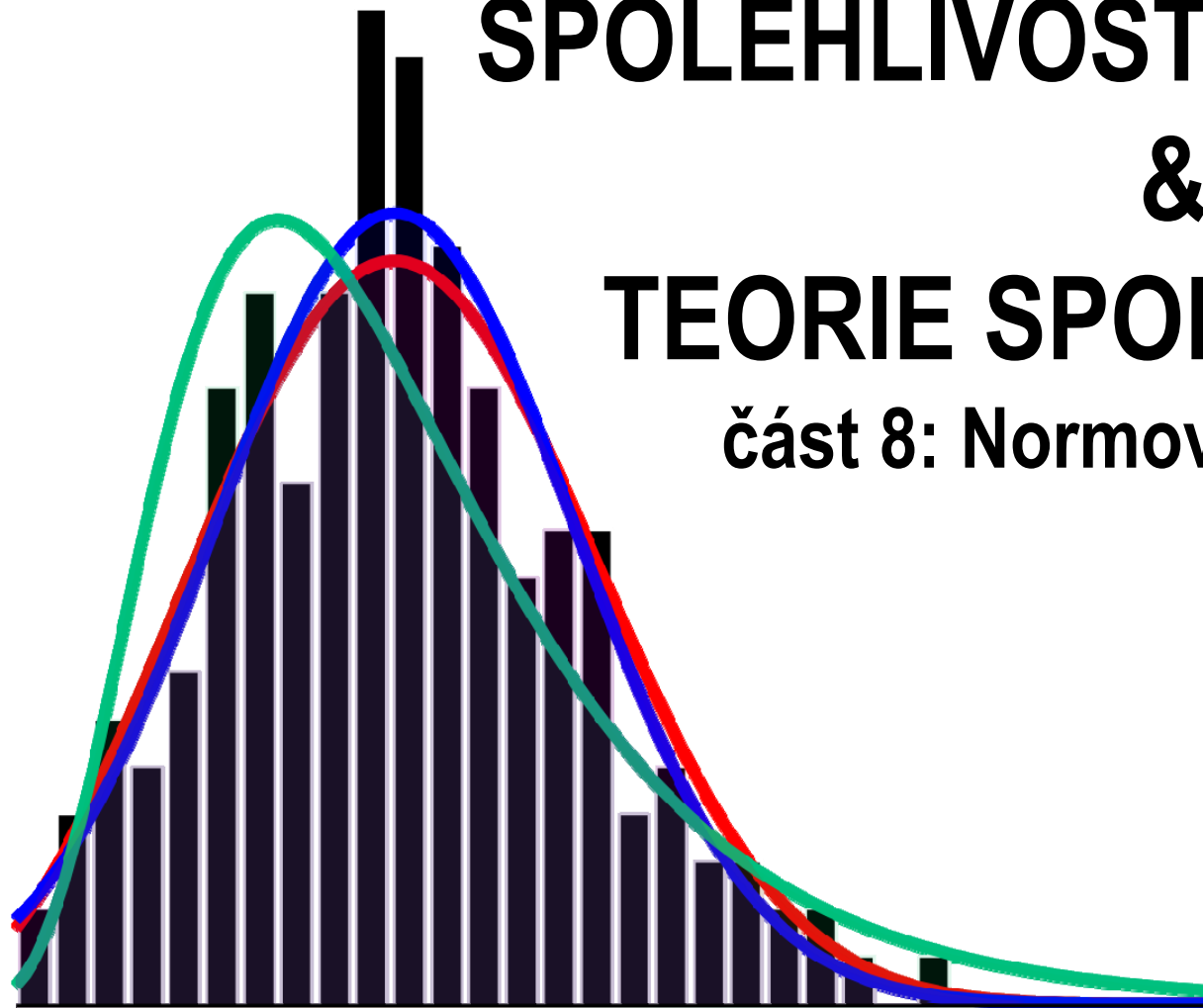


SPOLEHLIVOST KONSTRUKCÍ & TEORIE SPOLEHLIVOSTI

část 8: Normové předpisy II

Drahomír Novák
Jan Eliáš
Lukáš Novák





část 8 Normové předpisy II



Čtyři úrovně spolehlivostních metod

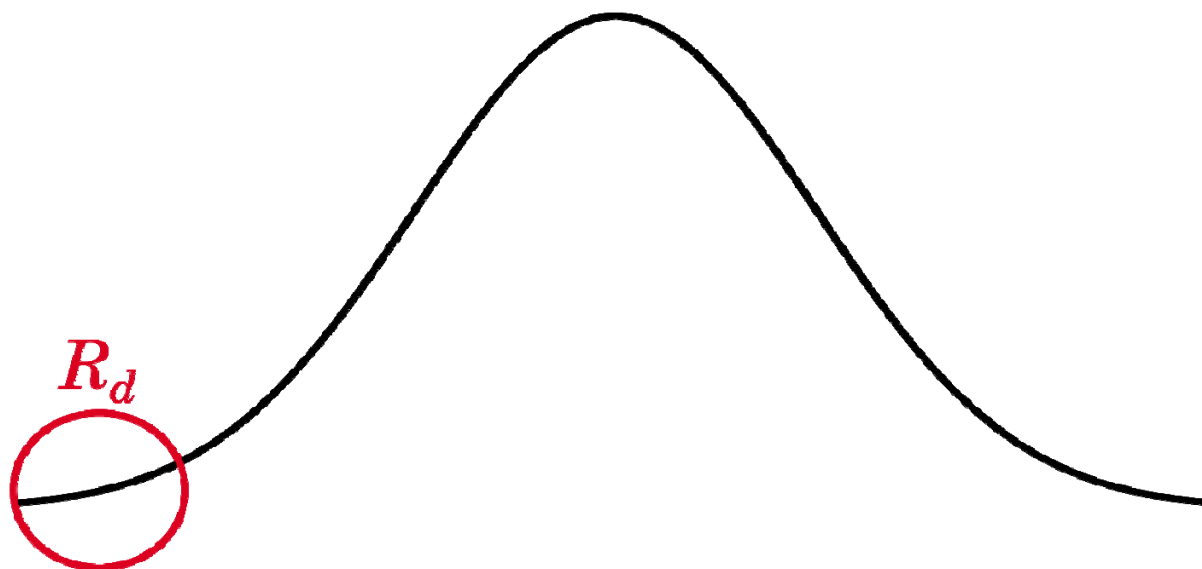
- I. úroveň (EUROKÓDY)
 - každá základní veličina vstupuje do výpočtu pouze **jedinou** (návrhovou) **hodnotou**
- II. Úroveň (POLO-PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODY)
 - každá základní veličina je zde popsána **dvěma statistickými parametry** (obvykle střední hodnotou a směrodatnou odchylkou)
- III. úroveň (PLNĚ PRAVDĚPODOBNOSTNÍ PŘÍSTUP)
 - všechny základní veličiny jsou popsány vhodným **teoretickým modelem rozdělení pravděpodobnosti**
- IV. Optimalizace nákladů a spolehlivosti (Cost-Risk analysis)
 - uvažuje navíc **ekonomickou** stránku problému



Čtyři úrovně spolehlivostních metod

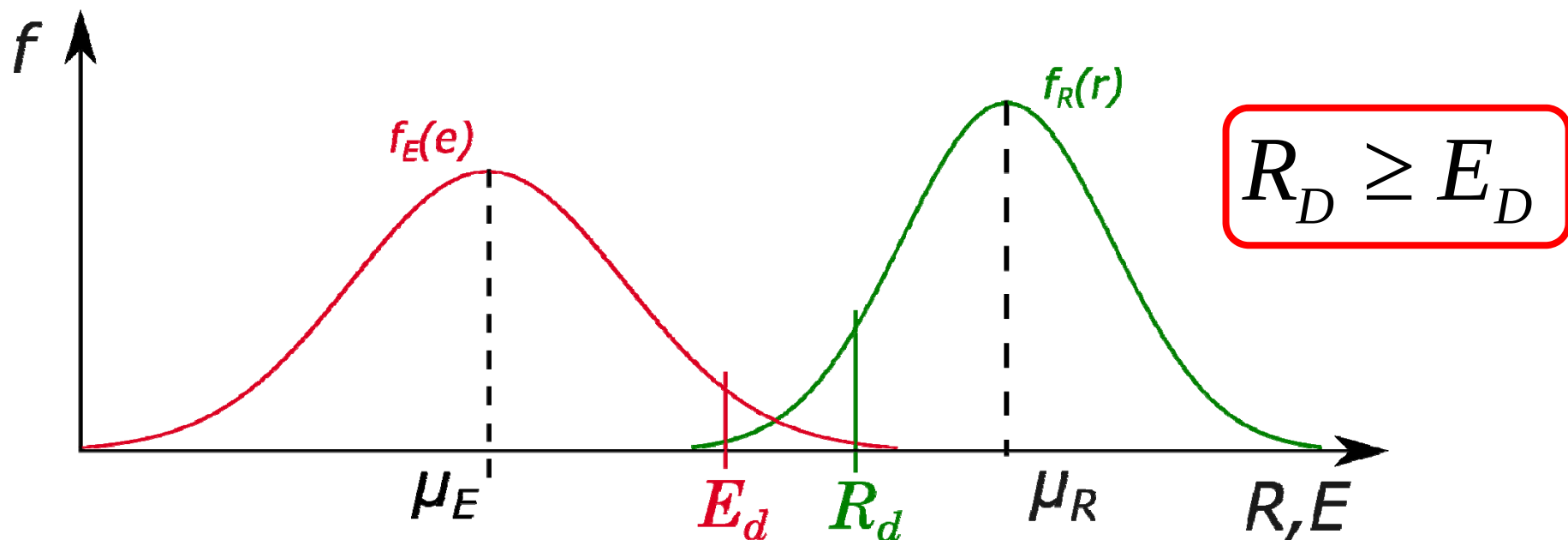
- I. úroveň (EUROKÓDY)
 - každá základní veličina vstupuje do výpočtu pouze **jedinou** (návrhovou) **hodnotou**
- II. Úroveň (POLO-PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODY)
 - každá základní veličina je zde popsána **dvěma statistickými parametry** (obvykle střední hodnotou a směrodatnou odchylkou)
- III. úroveň (PLNĚ PRAVDĚPODOBNOSTNÍ PŘÍSTUP)
 - všechny základní veličiny jsou popsány vhodným teoretickým modelem rozdělení pravděpodobnosti
- IV. Optimalizace nákladů a spolehlivosti (Cost-Risk analysis)
 - uvažuje navíc ekonomickou stránku problému

I. úroveň - Eurokód



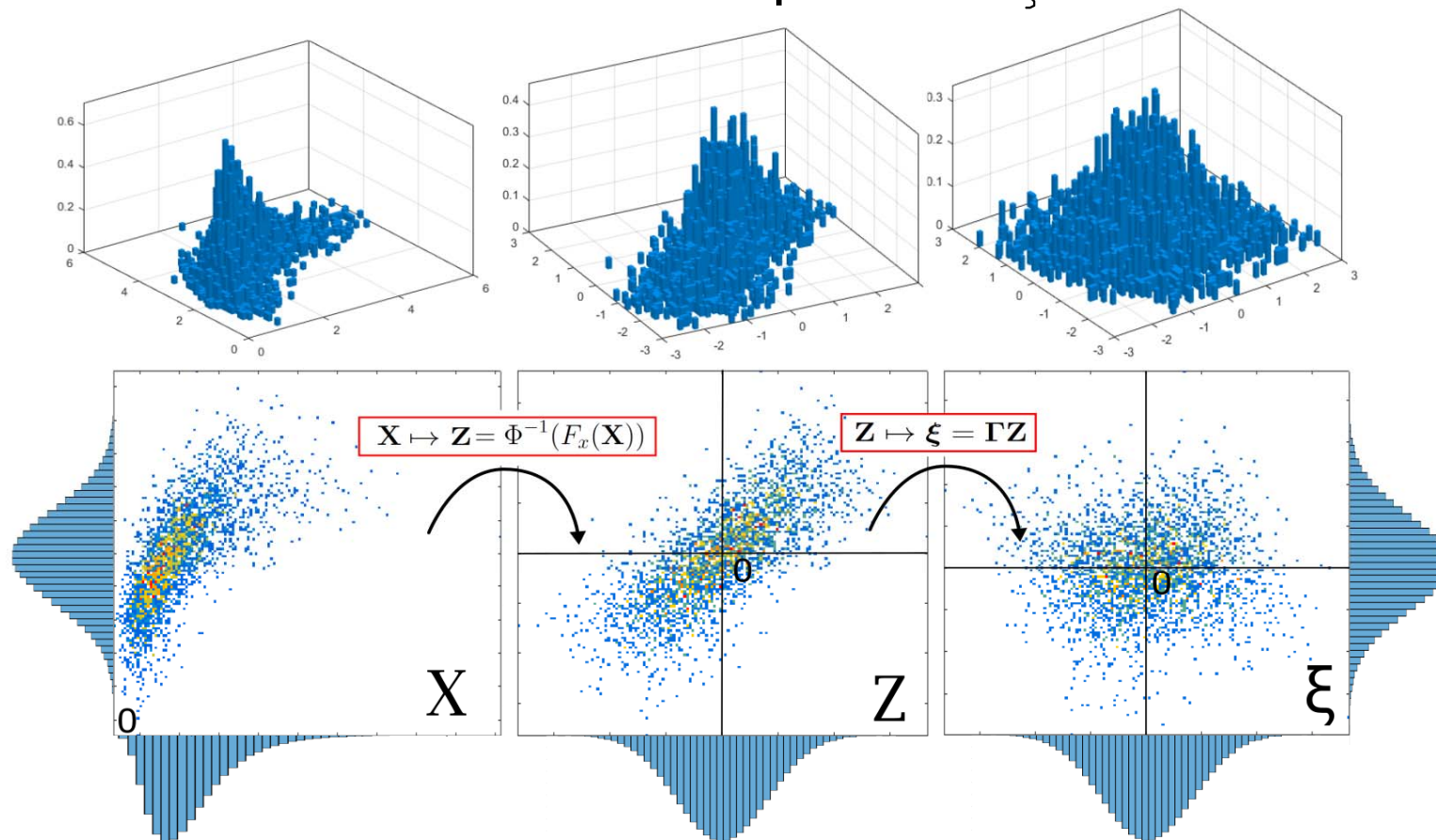
Spolehlivostní pozadí

- odolnost R a účinky zatížení E jsou dvě náhodné veličiny
- **návrhová odolnost R_D** : fce návrhové pevnosti atd.
- **návrhové účinky zatížení E_D** : fce návrhových zatížení atd.
- dílčí součinitele bezpečnosti odvozeny na základě **FORM**



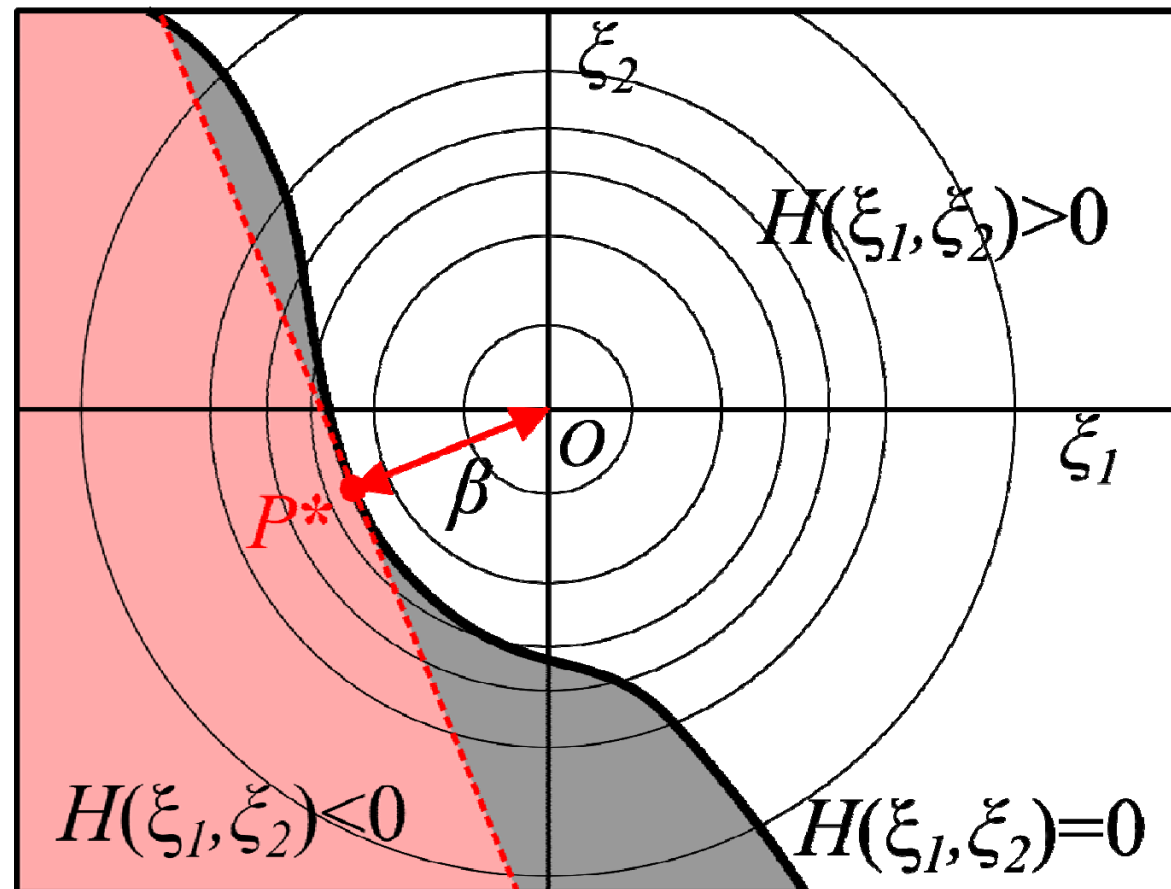
First Order Reliability Method

1. Transformace náhodných veličiny do standardního normálního nekorelovaného prostoru ξ



First Order Reliability Method

2. Linearizace v návrhovém bodě P^* (Taylorův rozvoj)





First Order Reliability Method

2. Linearizace v návrhovém bodě P^* (Taylorův rozvoj)

$$g(\xi) = Z = g(P^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} (\xi_i - P_i^*)$$

$$g(P^*) = 0 \rightarrow Z = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} \xi_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} P_i^*$$



First Order Reliability Method

3. Nejkratší vzdálenost k počátku soustavy souřadnic β

Hessova forma (hyper)plochy:
$$\frac{a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_0}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = 0$$

Vzdálenost k počátku soustavy:
$$\beta = \left| \frac{a_0}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right|$$

$$Z = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} \xi_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} P_i^* \rightarrow \beta = \frac{-\sum_{i=1}^n \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} P_i^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} \right]^2}}$$



Citlivostní součinitele FORM

Směrové kosiny jako citlivostní součinitele vstupních veličin

Hessova forma (hyper)plochy:
$$\frac{a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_0}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = 0$$

Směrové kosiny:
$$\alpha_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \quad \alpha_2 = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

$$Z = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} \xi_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} P_i^* \rightarrow \alpha_i = \frac{\frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial g(P^*)}{\partial \xi_i} \right]^2}}$$



Zobecnění FORM pro funkce R a E

$$g(\mathbf{X}) = g_R(R_1, \dots, R_i, \dots, R_m) - g_E(E_1, \dots, E_j, \dots, E_n)$$

- Za předpokladu nezávislých veličin lze odvodit směrové kosiny pro R a E :

$$\alpha_{R_i} = \frac{\frac{\partial g_R(r^*)}{\partial R_i} \sigma_{R_i}}{\sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial g_R(r^*)}{\partial R_i} \sigma_{R_i} \right)^2}_{\sigma_R^{*2}} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g_E(e^*)}{\partial E_j} \sigma_{E_j} \right)^2}_{\sigma_E^{*2}}}}$$



Zobecnění FORM pro funkce R a E

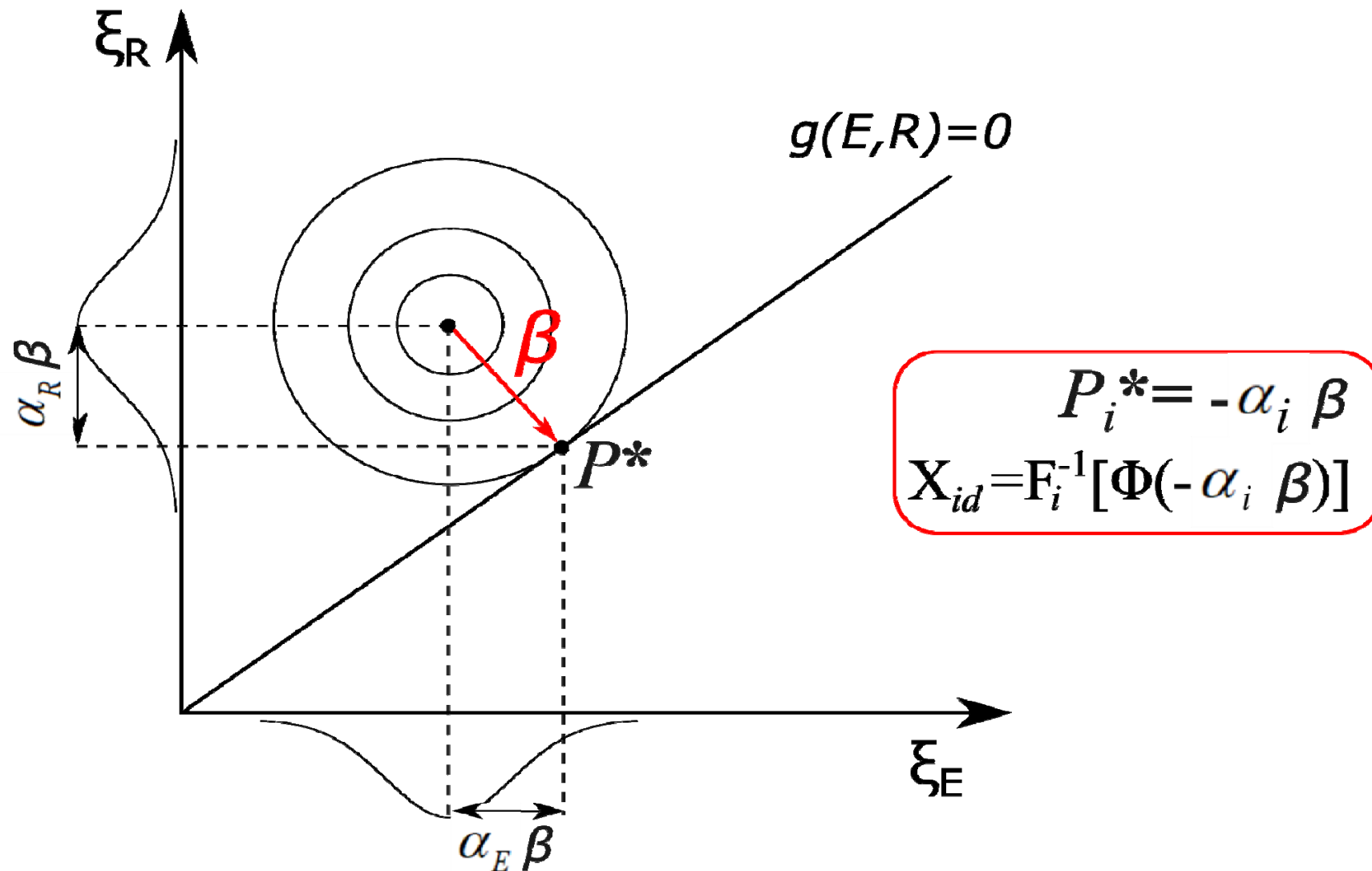
- Vliv veličiny R_i na variabilitu funkce odolnosti

$$\alpha_{R_i} = \frac{\sigma_R^*}{\sqrt{\sigma_R^{*2} + \sigma_E^{*2}}} \cdot \frac{\frac{\partial g_R(r^*)}{\partial R_i} \sigma_{R_i}}{\sigma_R^*} = \alpha_R \cdot \widetilde{\alpha}_{R_i}$$

- Vliv odolnosti R konstrukce na celkovou variabilitu

- Stejný postup vede na: $\alpha_{E_i} = \alpha_E \cdot \widetilde{\alpha}_{E_i}$

Grafické znázornění FORM



FORM a Eurocode

- Návrhový bod je určen souřadnicemi v ξ :

$$P_i^* = -\alpha_i \beta$$

- V Eurocode byly statisticky stanoveny obecné hodnoty:

$$\alpha_R = 0.8$$

$$\alpha_E = -0.7$$

$$\widetilde{\alpha}_{R_1} = \widetilde{\alpha}_{E_1} = 1.0$$

$$\widetilde{\alpha}_{R_i} = \widetilde{\alpha}_{E_j} = 0.4$$

- Dle EN 1990 použitelné v hranicích:

$$0.15 < \frac{\sigma_E}{\sigma_R} < 7.6$$



Návrhová hod. materiálových vlastností

$$X_d = \eta X_k / \gamma_M$$

- γ_M je **dílčí součinitel spolehlivosti** materiálu nebo výrobku daný v EN 1992 až 1999; obsahuje nejistotu materiálu i modelové nejistoty

$$\gamma_M = \gamma_m \gamma_{Rd}$$

- η převodní součinitel vystihující účinek doby trvání zatížení, vliv objemu a rozměrů, účinky vlhkosti, teploty aj.
- X_k je **charakteristická hodnota** stanovená jako 5% kvantil
- X_d je kvantil odpovídající bezpečnostním požadavkům

Podstata návrhových hodnot dle EC

- odhad návrhové hodnoty materiálových vlastností X_d na základě **EN 1990 příloha D „Navrhování pomocí zkoušek“**
- odhad kvantilu za předpokladu Lognormální rozdělení

- odhad rozptylu

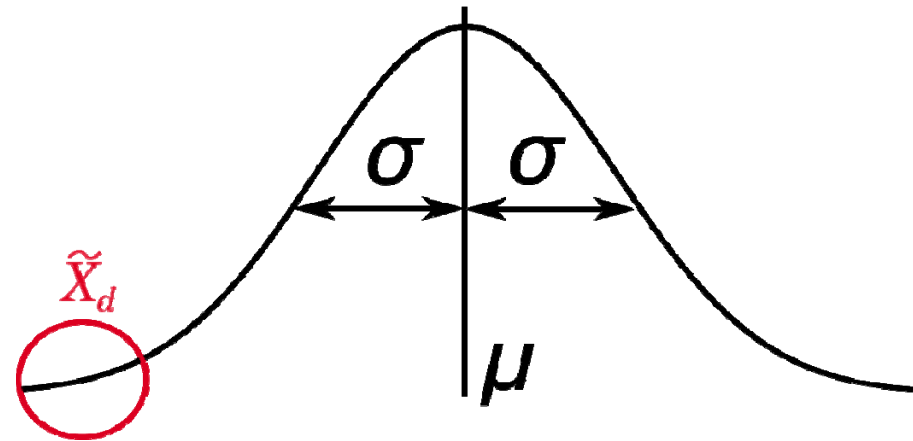
$$\sigma_X^2 \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2$$

$$\tilde{X}_{id} = \mu_X \exp\left(-\alpha_{R_i} \beta \frac{\sigma_X}{\mu_X}\right)$$

- odhad střední hodnoty

$$\mu_X \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- FORM $\rightarrow \alpha_R = 0.8$





Cílová spolehlivost podle EC 1

Tabulka 1. EuroCode cílové pravděpodobnosti poruchy – mezní stavy **únosnosti**

následky	jeden rok	životnost
RC3 (velké)	5.2 1.0×10^{-7}	4.3 8.5×10^{-6}
RC2 (střední)	4.7 1.3×10^{-6}	3.8 7.2×10^{-5}
RC1 (malé)	4.2 1.3×10^{-5}	3.3 4.8×10^{-4}

$$\beta_{\lim}$$

$$p_{\lim}$$

Tabulka 2. EuroCode cílové pravděpodobnosti poruchy – mezní stavy **použitelnosti**

následky	jeden rok	životnost
RC2 (střední)	2.9 0.00187	1.5 0.0668

Stanovení návrhových hodnot materiálových vlastností



- dle EN 1990 úprava kvantilu $\alpha_R \beta$ dle počtu provedených zkoušek materiálu (nejistota odhadu statistických momentů)
- nutno zahrnout nejistoty modelu odolnosti konstrukce

$$X_d = \frac{\widetilde{X}_d}{\gamma_{Rd}} \qquad \gamma_M = \frac{X_k}{X_d}$$

Dílčí součinitele bezpečnosti materiálu jsou odvozeny pomocí **teorie pravděpodobnosti** a **matematické statistiky**. Jejich úprava je možná pomocí laboratorních zkoušek a měření.



Odvození dílčích součinitelů v EN

- $\alpha_R = 0.8 \quad \beta = 3.8$
- $V_X = \sqrt{V_m^2 + V_G^2 + V_f^2}$
- CoV modelových nejistot V_m
- CoV geometrických nejistot V_G
- CoV materiálových nejistot V_f

$$X_d = \mu_X \exp(-\alpha_{R_i} \beta V_X)$$
$$X_k = \mu_X \exp(-1.64 V_f)$$

Materiál	V_m	V_G	V_f	V_X
Beton	0.05	0.05	0.15	0.166

$$\gamma_M = X_k / X_D = \exp(-1.64 \cdot 0.15 + 0.8 \cdot 3.8 \cdot 0.166) = 1.3$$

$$\eta = 1.15 \rightarrow \gamma_C = \gamma_M \cdot \eta = 1.3 \cdot 1.15 \approx \underline{\underline{1.5}}$$

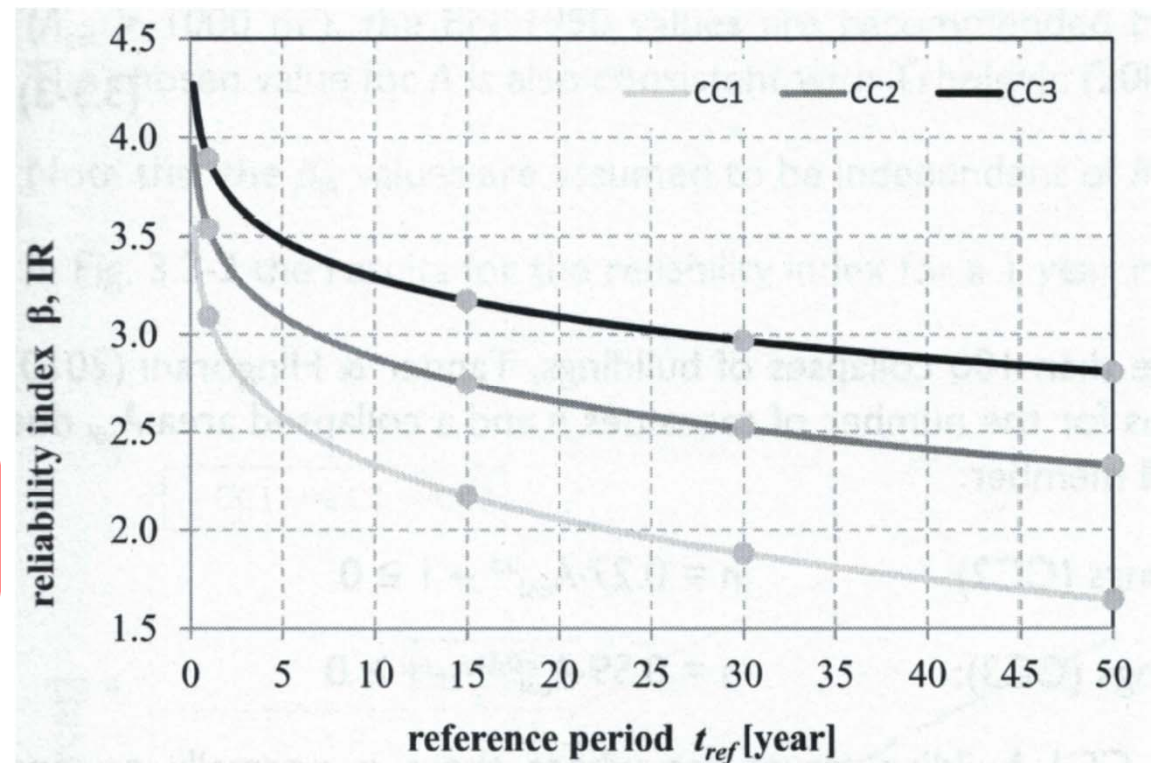
Návrhová životnost konstrukcí a dílčí součinitelé bezpečnosti



- ISO 2394, JCSS: PMC 2001
- stejný princip, jen upravit cílový index spolehlivosti
- Fib Bulletin 80:
 - **Bezpečnost** osob
 - Ekonomické následky

$$\beta_t = \Phi^{-1} \left\{ \Phi \left(\beta_{annual} \right)^t \right\}$$

$$\tilde{X}_d = \mu_X \exp \left(-\alpha_{R_i} \beta \frac{\sigma_X}{\mu_X} \right)$$



[Převzato z *fib* Bulletin 80]

Dílčí součinitele pro existující kce

- Fib Bulletin 80: „Partial factor methods for existing concrete structures“; ISO 2394
 - úprava cílového indexu spolehlivosti
 - úprava statistických parametrů
 - úprava součinitele modelových nejistot (geometrické nejistoty)
 - běžně: $\gamma_{Rd2} = 1.05$
 - důkladné měření: $\gamma_{Rd2} = 1.00$

$$\widetilde{X}_d = \mu_X \exp \left(-\alpha_R \beta \frac{\sigma_X}{\mu_X} \right)$$

$$X_d = \frac{\widetilde{X}_d}{\gamma_{Rd}}$$

$$\gamma_{Rd} = \frac{1}{1 - \alpha_R \beta V_{\theta R}}$$

$$\gamma_{Rd} = \gamma_{Rd1} \gamma_{Rd2}$$

nejistoty modelu

nejistoty geometrie

Dílčí součinitelé pro existující kce

- Statistické momenty jednotlivých veličin a modelových nejistot v souladu s Eurocode lze nalézt např. ve fib Bulletin 80, JCSS: PCM 2001

[Převzato z fib Bulletin 80]

Variable	Notation	Type	μ_x / X_k	V_x
Load effects				
Self-weight of <i>in situ</i> concrete	g_{sw}	N	1.00	0.04
Other permanent actions	g_{pa}	N	1.00	0.10
Imposed floor loads (sum of sustained and transient loads)	q_{imp}	Gumbel	0.68	0.26
Model uncertainties for load effect calculations:				
– bending moments	$\theta_{E,M}$	LN	1.00	0.10
– axial forces	$\theta_{E,N}$	LN	1.00	0.05
– shear forces	$\theta_{E,V}$	LN	1.00	0.10
Resistance variables				
Concrete compressive strength	f_c	LN	1.24	0.18
Yield strength of reinforcing steel	f_{ys}	LN	1.12	0.053
Area of reinforcing steel	A_s, A_{sw}	N	1.00	0.02
External dimensions of RC cross-sections	a, b, h, b_w	N	1.00	0.03
Effective depth	d	N	1.00	0.04
Resistance model uncertainties:				
– Bending moments	$\theta_{R,M}$	LN	1.00	0.05
– Axial compression	$\theta_{R,N}$	LN	1.00	0.05
– Tensile force in the web	θ_{R,V_s}	LN	1.00	0.05
– Diagonal compression in the web	θ_{R,V_c}	LN	1.40	0.25



Úprava součinitelů pro účinky zatížení

- stejná podstata jako u odolnosti konstrukce
- proměnná zatížení zpravidla **stejná** (žádné nebo neprůkazné doplňující statistické informace)
- dílčí součinitele pro stálé zatížení lze upravit na základě získaných informací (měření)

$$\gamma_G = \gamma_{Ed,G} \gamma_g$$

nejistoty modelu

nejistoty účinků zatížení

- úprava součinitele modelových nejistot:

- příznivé účinky: $\gamma_{Ed,G} = 1.00$

- nepříznivé účinky: $\gamma_{Ed,G} = 1.07$

$$\gamma_{Ed} = \left(\frac{\mu_{\theta E}}{\theta_{Ek}} \right) \exp(-\alpha_E \beta V_{\theta E})$$

Úprava součinitelů pro účinky zatížení



- úprava součinitele nejistot účinků zatížení:
 - předpoklad Normálního rozdělení
 - střední hodnota a variabilita z přesného měření

$$\gamma_g = \mu_G (1 - \alpha_E \beta V_G)$$

- příznivé účinky: $\alpha_E = 0.32$
- nepříznivé účinky: $\alpha_E = -0.7$

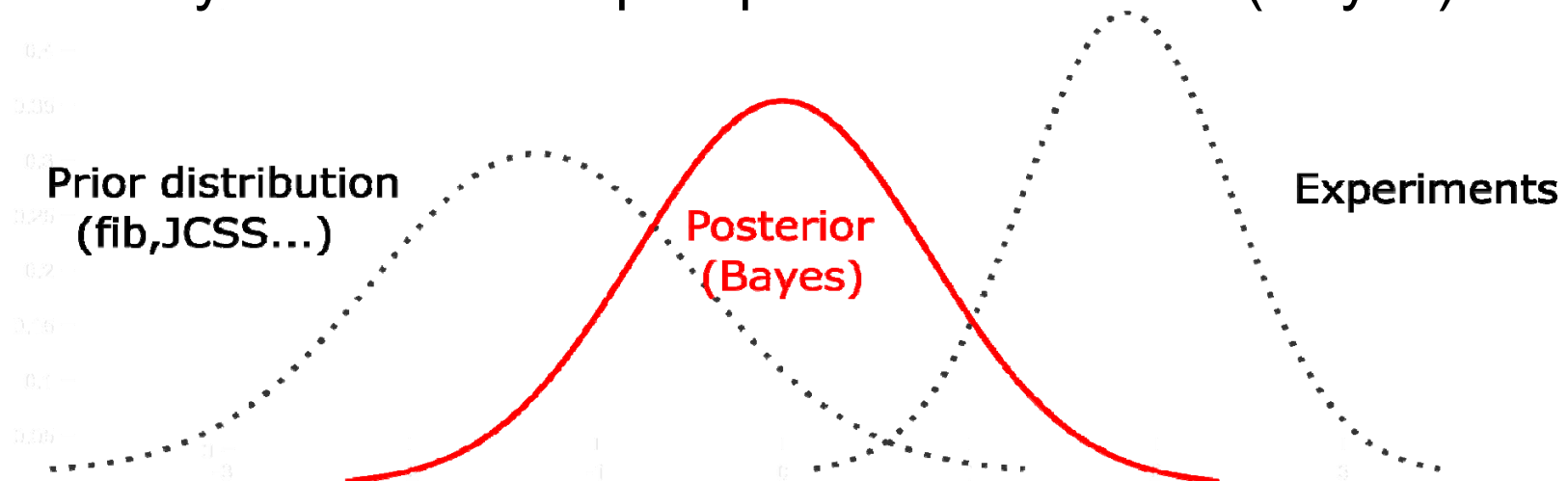
Odhad statistických parametrů

1. Využití tabulek dle Eurocode, JCSS: PMC 2001, Fib Model Code

2. Laboratorní zkoušky a bodové odhady μ a σ^2

$$\mu_X \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \sigma_X^2 \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2$$

3. Využití měření a předpokladu rozdělení (Bayes)





Globální součinitel bezpečnosti

- dle **EN 1992-2** lze v kombinaci s **NLMKP** využít metodu globálního součinitele bezpečnosti

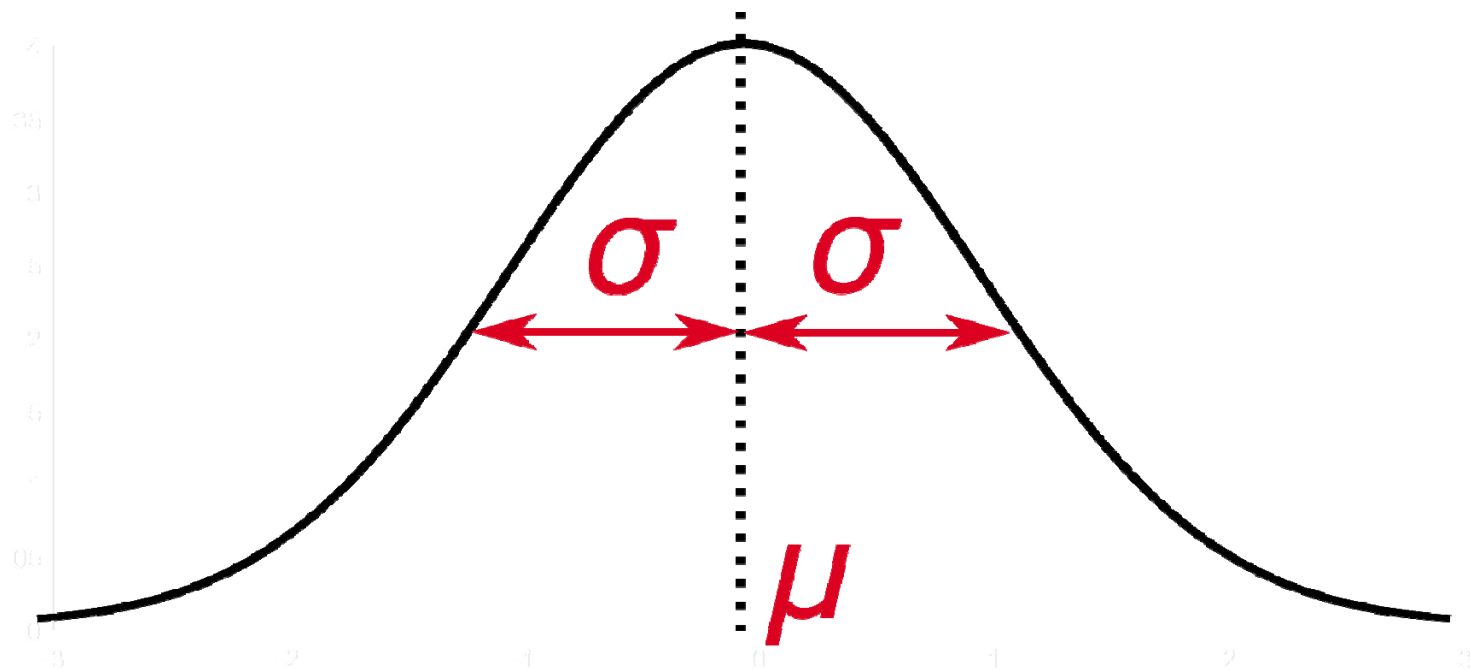
$$R_d \neq R(X_d)$$

- numerická simulace NLMKP využívá střední hodnoty materiálových vlastností výztuže a redukované hodnoty parametrů betonu (zohlednění vyšší variability betonu)
- globální součinitel bezpečnosti je stanoven na 1.27

$$R_d = \frac{R(f_{ym}, \tilde{f}_{cm}, \dots)}{\gamma_R}$$

$$\tilde{f}_{cm} = \gamma_s 1.1 \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \approx 0.85 f_{ck}$$

II. úroveň – Polo-pravděpodobnostní metody

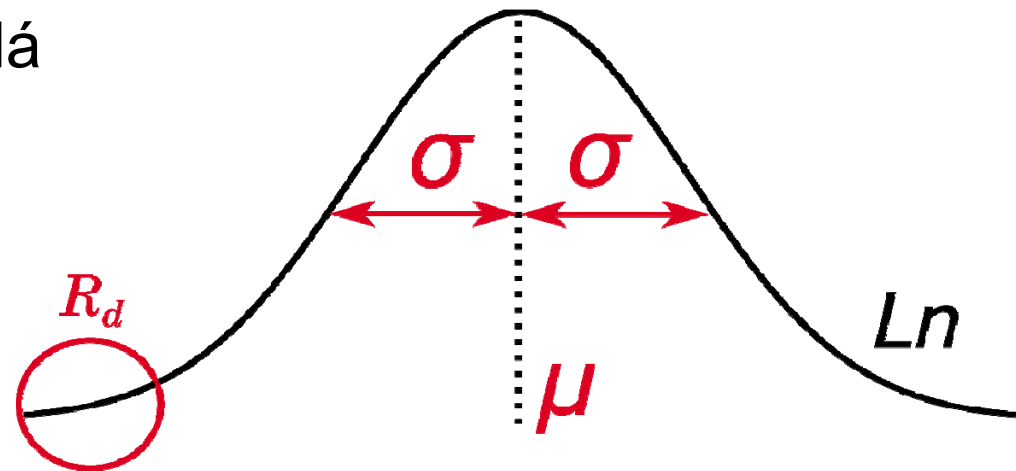


Polo-pravděpodobnostní metody

- Alternativní metody dle odborné literatury (fib Model Code 2010, JCSS: Probabilistic model code 2001) pro **odhad statistických momentů** rozdělení odolnosti konstrukce R
- Předpoklad Lognormálního rozdělení
- Často v kombinaci s metodou konečných prvků
- Návrhová hodnota odolnosti konstrukce poté odpovídá kvantilu:

$$R_d = \mu_R \exp(-\alpha_R \beta V_R)$$

$$V_R = \sqrt{V_m^2 + V_G^2 + V_f^2}$$





Odhad variačního koeficientu (ECoV)

Střední hodnota

–obecně např. pomocí MC (LHS)

- velké množství realizací
- + konvergence ke správnému řešení

$$\mu_R \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i$$

–Taylorův rozvoj (první členy)

- problém u nelineárních funkcí
- + pouze jeden výpočet s středními hodnotami

$$\mu_R \approx R(\mathbf{X}_m)$$

–Numerická kvadratura (např. Rosenblueth)

- závislost na počtu vstupních NV
- + redukce počtu realizací



Odhad variačního koeficientu (ECoV)

Rozptyl

–obecně např. pomocí MC (LHS)

- velké množství realizací
- + konvergence ke správnému řešení

$$\sigma_R^2 \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu_R)^2$$

–Taylorův rozvoj (první členy) (Schlune)

- problém u nelineárních funkcí
- + n výpočtů (MKP); vhodné pro $\pm$ lin. fce.

$$\sigma_R^2 \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial r(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2$$

–Využití odhadu 5% kvantilu (Červenka)

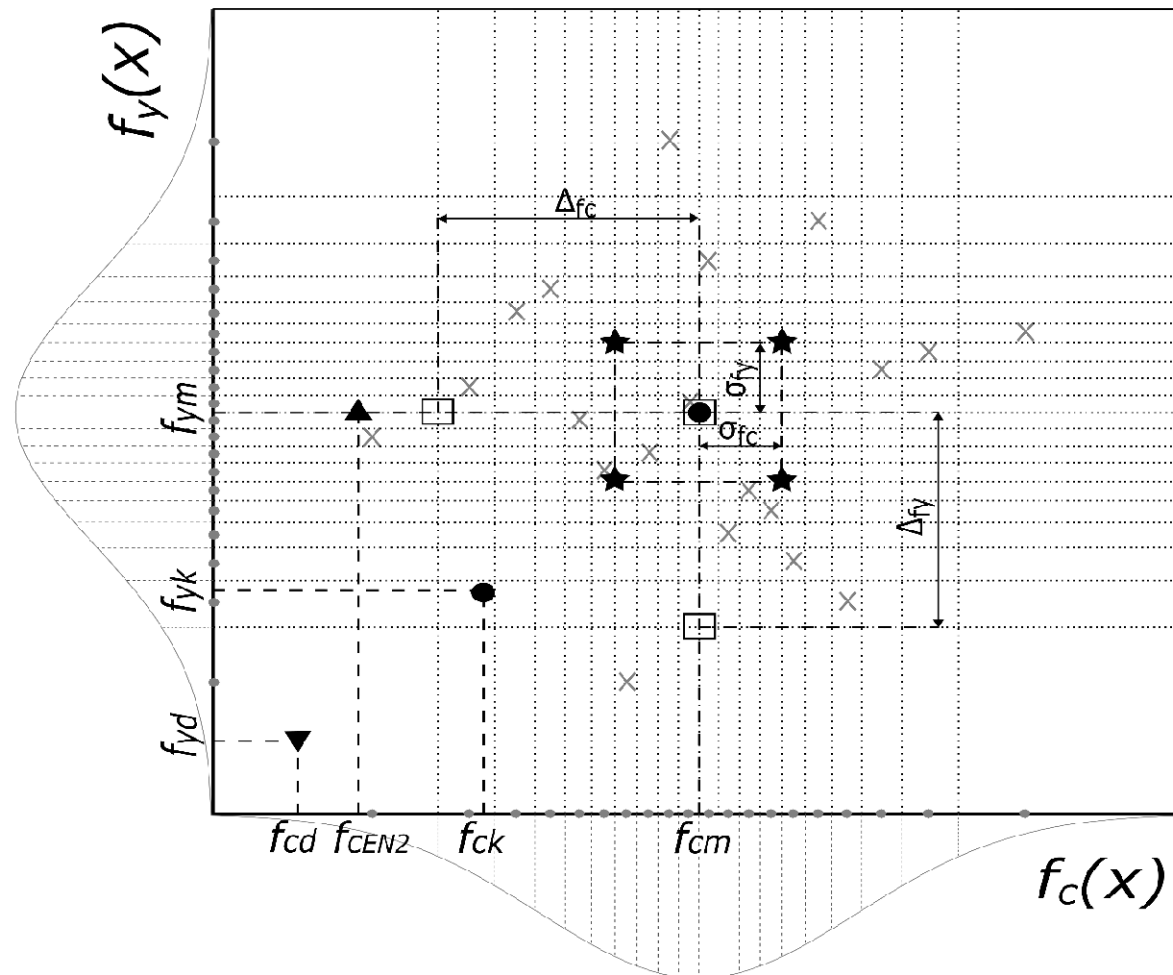
- velice silný předpoklad
- + pouze dvě simulace

$$V \approx \frac{1}{1.645} \ln \left(\frac{\mu_R}{R(\mathbf{X}_k)} \right)$$

–Numerická kvadratura (např. Rosenblueth)

- závislost na počtu vstupních NV
- + redukce počtu realizací

Zobrazení návrhových metod ve 2D



n	SAMPLING POINTS
X	X Latin Hypercube Sampling
1	▼ Partial Safety Factor
1	▲ EN 1992 - 2
2	● ECoV by Červenka
3	□ ECoV by Schlune et al.
4	★ Numerical Quadrature

Ukázka praktické aplikace a srovnání

- Stanovení návrhové hodnoty odolnosti střešních předpjatých nosníků pomocí nelineární metody konečných prvků
- Srovnání dostupných normativních a alternativních spolehlivostních metod

