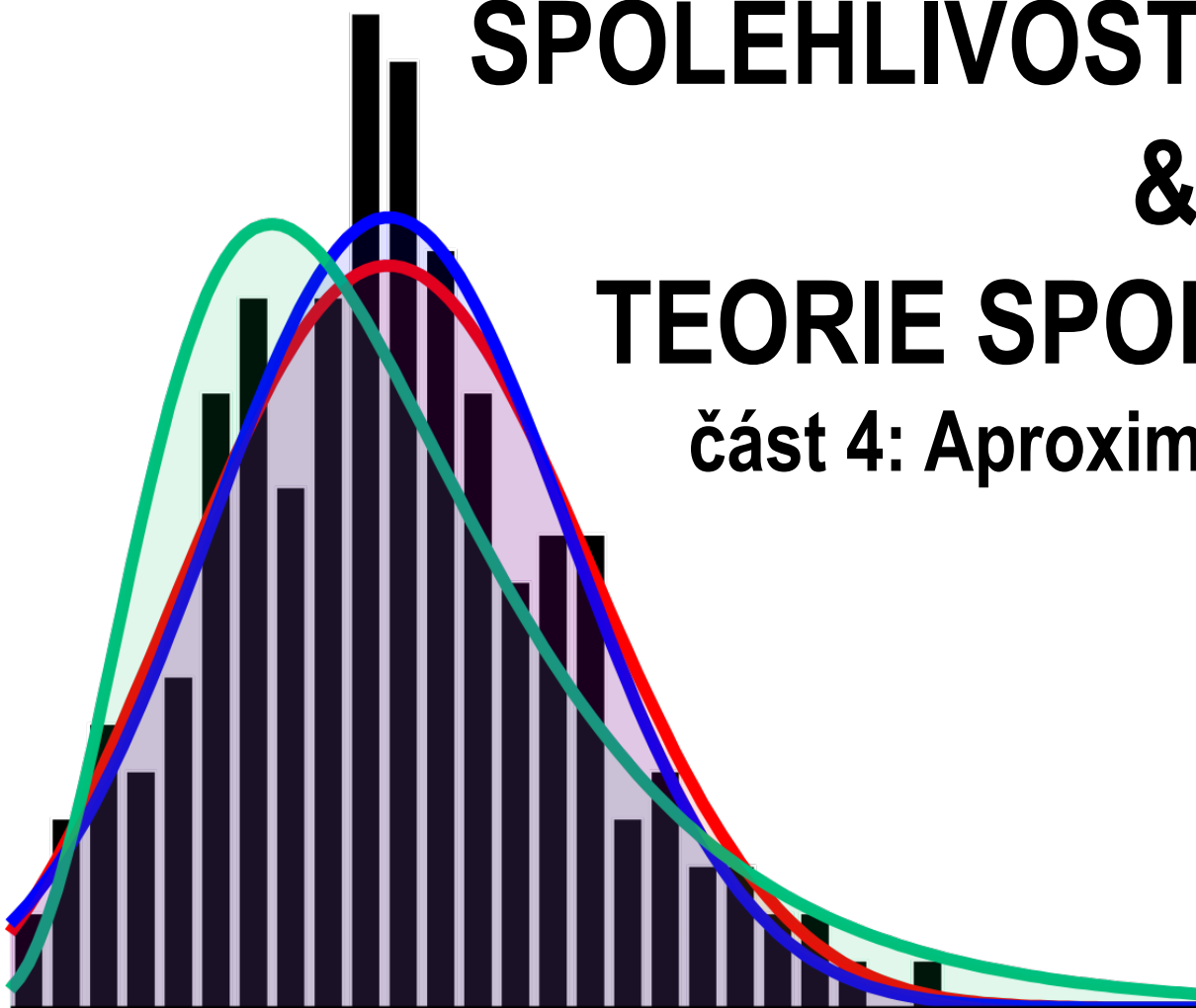


SPOLEHLIVOST KONSTRUKCÍ & TEORIE SPOLEHLIVOSTI

část 4: Aproximační techniky



Drahomír Novák
Jan Eliáš
David Lehký

část 4 Aproximační techniky

Opakování: Rezerva spolehlivosti

–funkce mezního stavu, funkce poruchy

$$Z = G(X_1, X_2, \dots, X_n) = G(\mathbf{X})$$

($\mathbf{X}$ – vektor vstupních veličin)

explicitní či implicitní funkce náhodných veličin

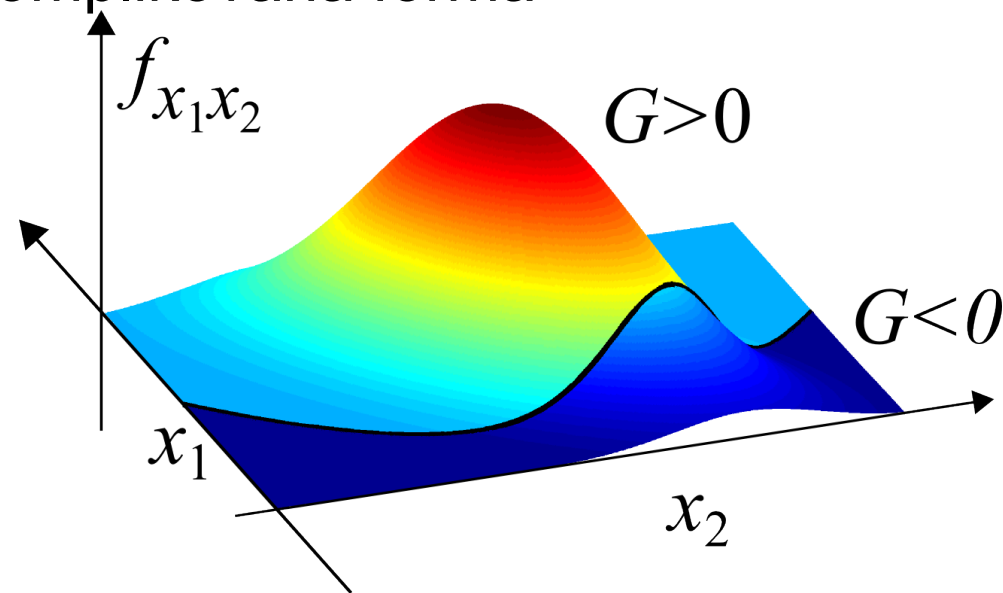
jednoduchá či extrémně komplikovaná forma

–bezpečná oblast

$$G \geq 0$$

–oblast poruchy

$$G < 0$$



Opakování: Pravděpodobnost poruchy

$$p_f = P(Z < 0) = P(G(\mathbf{X}) < 0)$$

Obecně se integruje sdružená hustota p-sti přes oblast poruchy:

$$p_f = \int \int \dots \int_{G < 0} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Pro nezávislé veličiny lze přepsat na součin marginálních hustot p-sti:

$$p_f = \int \int \dots \int_{G < 0} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

0

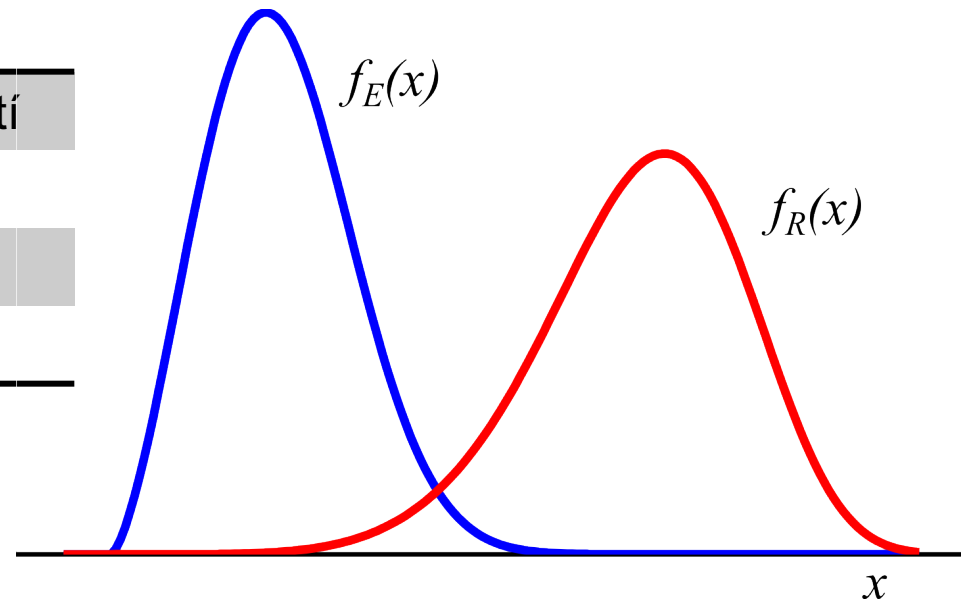
Opakování: Jednoduchý případ

–pokud lze rezervu spolehlivosti vyjádřit jako

$$Z = R - E$$



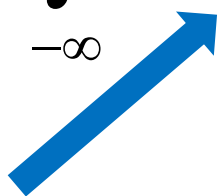
odolnost	účinek zatížení
pevnost	maximální napětí
povolený průhyb	průhyb
teplota tání	teplota
příjmy	výdaje



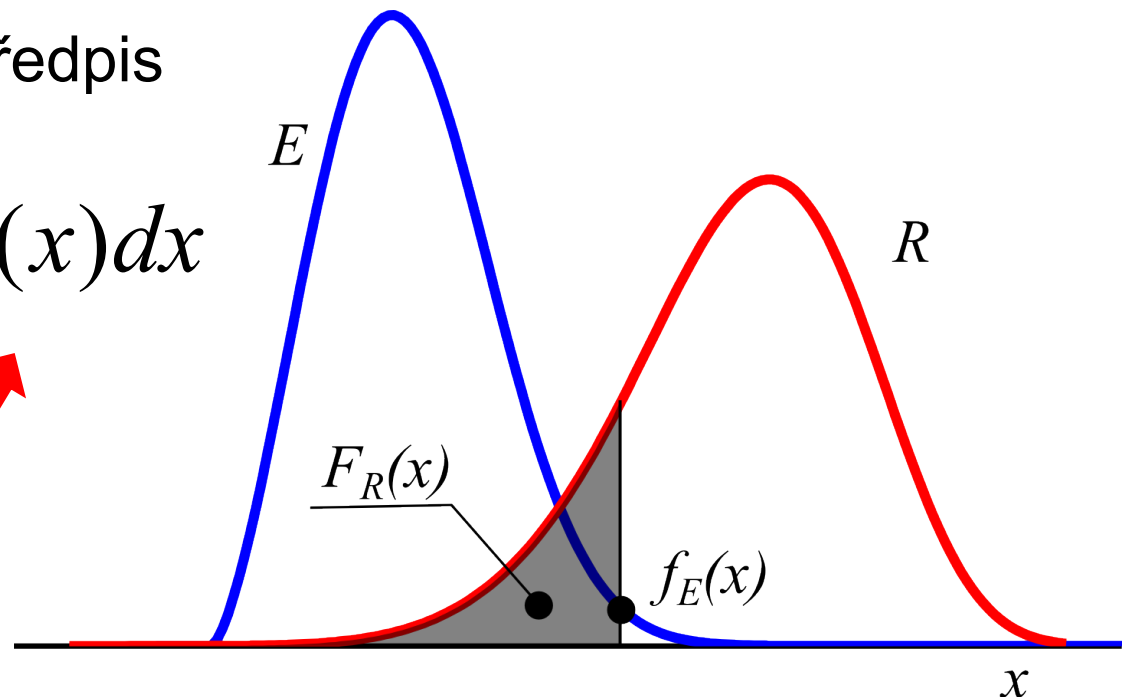
Opakování: Konvoluční integrál

–jednoduchý integrační předpis

$$p_f = \int_{-\infty}^{\infty} f_E(x) F_R(x) dx$$



“pravděpodobnost”
že $E = x$



pravděpodobnost
že $R < x$

$$p_f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^e f_E(e) f_R(r) dr de = \int_{-\infty}^{\infty} f_E(e) F_R(e) de$$

Opakování: Podmínka spolehlivosti

–nejobecnější podmínka spolehlivosti – pravděpodobnost poruchy musí být nižší než limitní **cílová pravděpodobnost poruchy**

$$p_f \leq p_{\text{lim}}$$

nebo alternativně

$$\beta \geq \beta_{\text{lim}}$$

–podmínka musí být splněna **po určitou dobu** t – dobu životnosti konstrukce!

–**při praktickém návrhu konstrukce** je podmínka spolehlivosti specifikována v patřičných normových předpisech jako tzv. mezní stav

–ve shodě s **Eurokódy!**

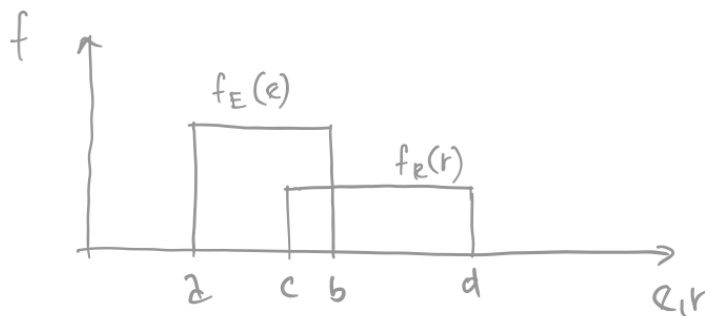
Opakování: Jak určit p_f ?

- **přímá integrace** (náročné či prakticky nemožné)
- **simulační metody**
 - Monte Carlo
 - LHS
 - Importance Sampling
 - atd.
- **aproximační techniky**
 - Cornellův index spolehlivosti
 - FORM
 - SORM
 - atd.

Příklad přímé integrace



Př: Stanovte p-st poruchy.



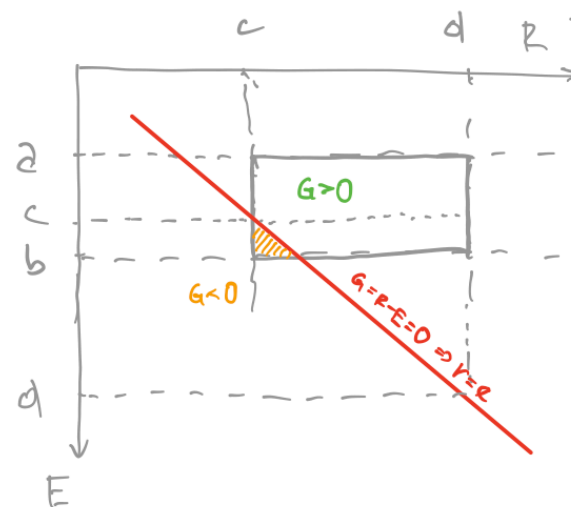
$$f_E(e) = \begin{cases} 0 & e \notin (a, b) \\ \frac{1}{b-a} & e \in (a, b) \end{cases}$$

$$f_R(r) = \begin{cases} 0 & r \notin (c, d) \\ \frac{1}{d-c} & r \in (c, d) \end{cases}$$

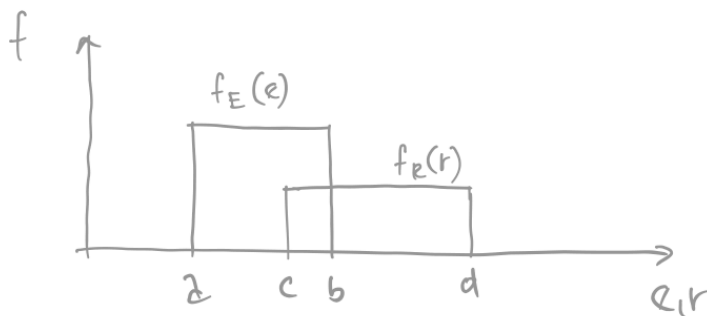
R a E jsou nezávislé

$$Z = G(R, E) = R - E$$

$$P_f = P(G < 0) = P(R - E < 0)$$



Příklad přímé integrace



$$f_E(e) = \begin{cases} 0 & e \notin (a, b) \\ \frac{1}{b-a} & e \in (a, b) \end{cases}$$

$$f_R(r) = \begin{cases} 0 & r \notin (c, d) \\ \frac{1}{d-c} & r \in (c, d) \end{cases}$$

Obecně :

$$P_f = \iint_{G < 0} f_R(r) \cdot f_E(e) \, dr \, de = \int_c^b \int_c^b \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{d-c} \, dr \, de = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_c^b [r]_c^b \, de =$$

$$= \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_c^b (b-c) \, de = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \left[\frac{e^2}{2} - ce \right]_c^b = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \left(\frac{1}{2}b^2 - bc - \frac{1}{2}c^2 + c^2 \right) =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}b^2 - bc + \frac{1}{2}c^2}{(b-a)(d-c)} = \boxed{\frac{(b-c)^2}{2(b-a)(d-c)}}$$

Příklad přímé integrace

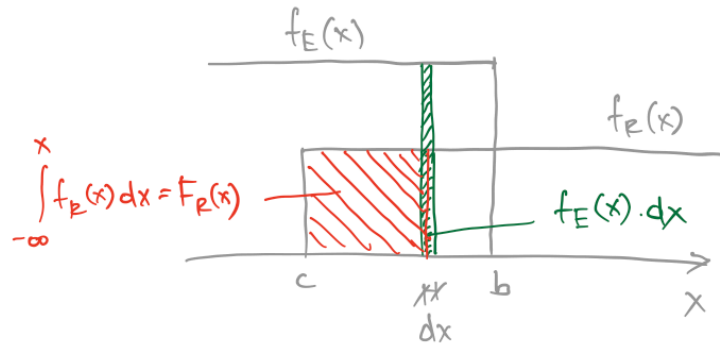


konvoluční integrál – dvě nezáv. vel. $R \in E, Z = R - E$

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} f_E(x) \cdot F_R(x) dx$$

$$P\left(E \in \left\langle x - \frac{dx}{2}; x + \frac{dx}{2} \right\rangle\right) = f_E dx$$

$$P(R \leq x) = F_R(x)$$



$$F_R(x) = \int_c^x \frac{1}{d-c} dx = \left[\frac{x}{d-c} \right]_c^x = \frac{1}{d-c} (x-c) = \frac{x-c}{d-c}$$

$$P_f = \int_c^b \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x-c}{d-c} dx = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \left[\frac{x^2}{2} - cx \right]_c^b = \frac{\frac{b^2}{2} - cb - \frac{c^2}{2} + c^2}{(b-a)(d-c)} =$$

$$= \boxed{\frac{(b-c)^2}{2(b-a)(d-c)}}$$

Příklad přímé integrace



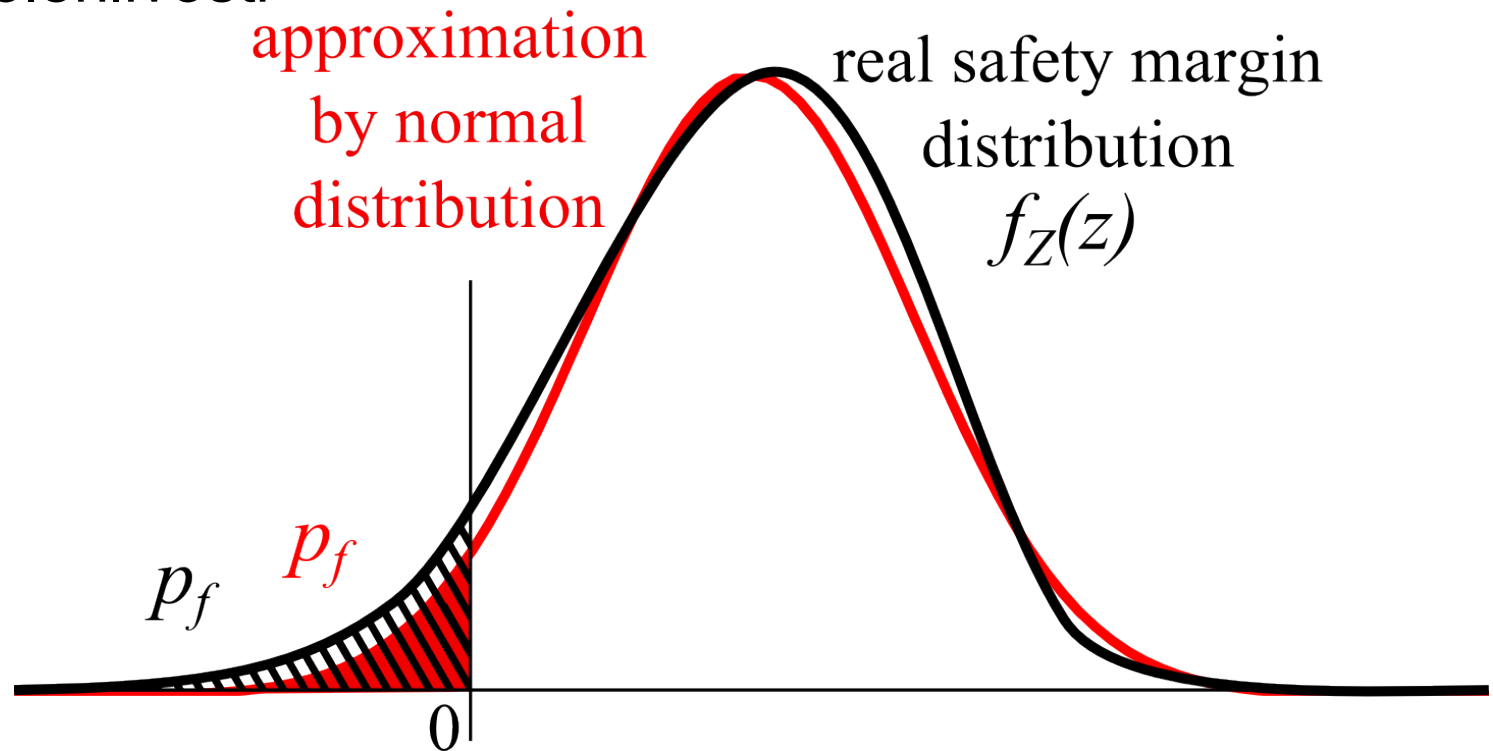
Konkrétně např.: $E = (1; 3)$; $R = (2; 4)$



$$P_f = \frac{(3-2)^2}{2(3-1)(4-2)} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

Cornellův index spolehlivosti

- aproximace je založena na předpokladu, že rezerva spolehlivosti Z je **normálně** rozdělena
- potřebujeme **střední hodnotu** m_Z a **směrodatnou odchylku** s_Z rezervy spolehlivosti



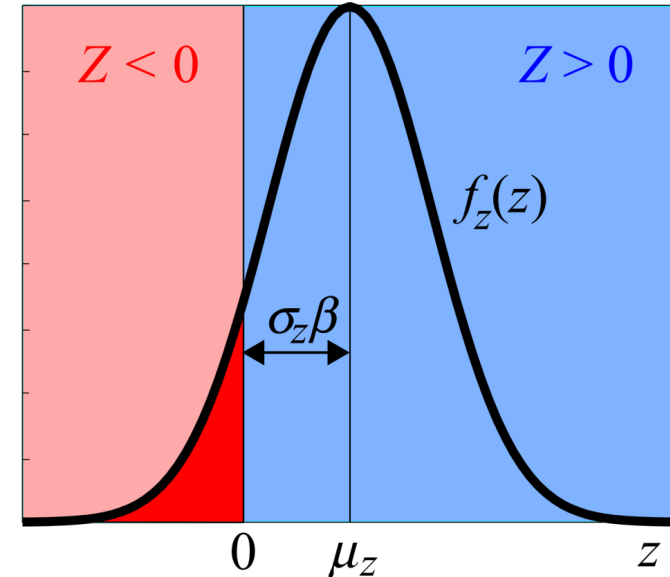
Cornellův index spolehlivosti

– index samotný je vzdálenost (se znaménkem) střední hodnoty μ_Z od nuly v jednotkách směrodatné odchylky σ_Z

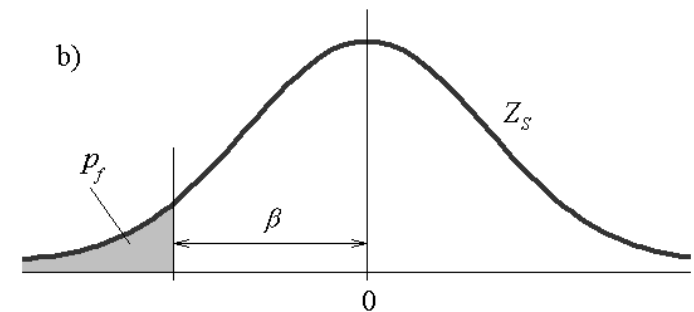
$$\beta_c = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}}$$

– pravděpodobnost poruchy je pak aproximována (za předpokladu normálně rozdělené rezervy spolehlivosti) jako:

$$p_f = \Phi(-\beta_c)$$



rezerva spolehlivosti ve **standardizovaném** prostoru (0,1)

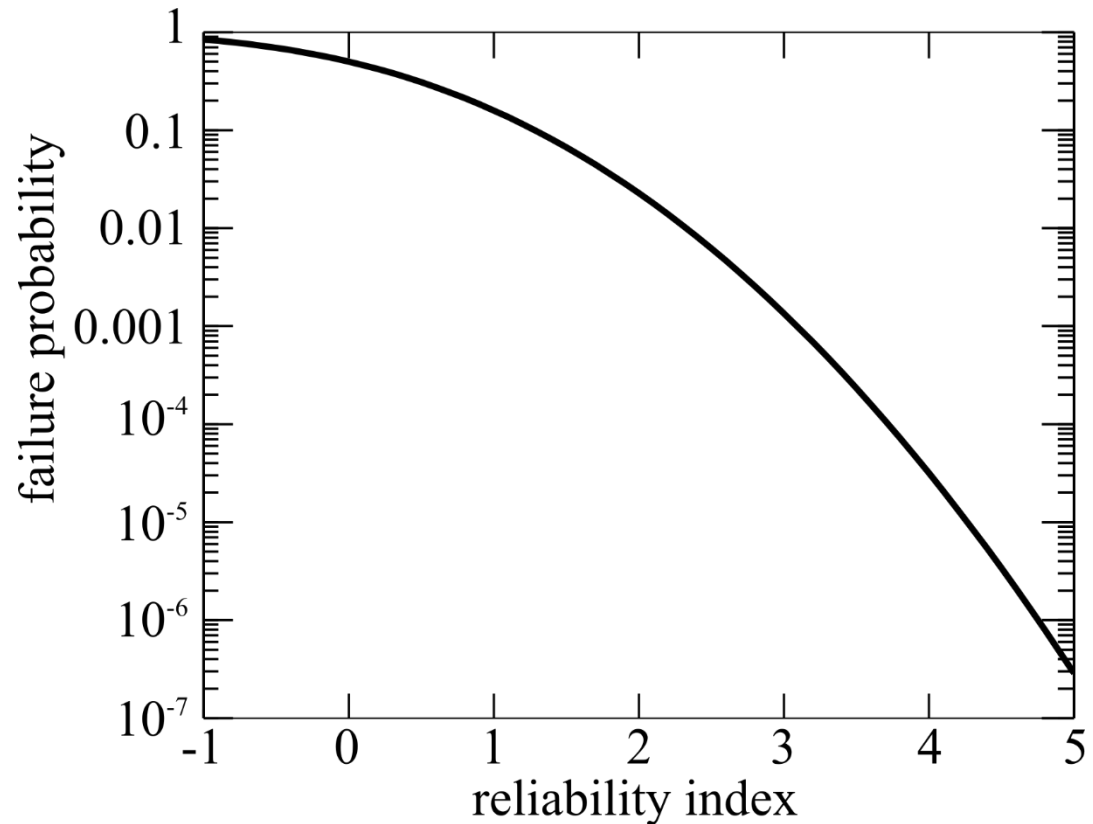


Proč index spolehlivosti?

–jednoduše zapamatovatelný, méně chyb při čtení desetinných míst, obsažen v normách ...

Tabulka 1. Pravděpodobnosti poruchy odpovídající indexům spolehlivosti

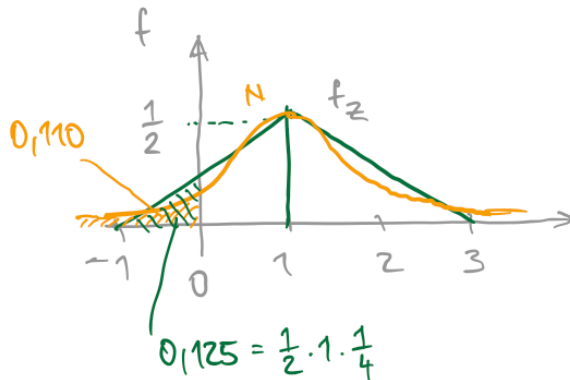
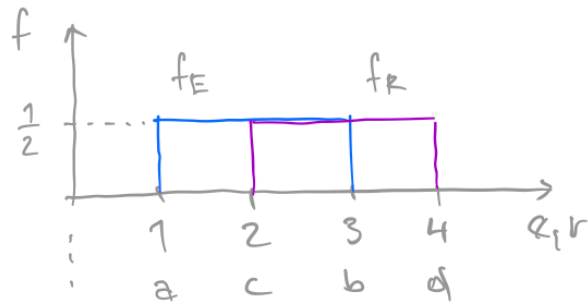
β_c	p_f
1	0.159
2	0.0228
3	0.0013
4	0.000032
5	0.00000029



Index spolehlivosti vs. pravděpodobnost poruchy

Příklad: Cornellův index spolehlivosti

$$Z = R - E; \quad E = (1; 3); \quad R = (2; 4) - \text{nezávislé}$$



$$\mu_R = \frac{a+b}{2} = 3; \quad \mu_E = 2$$

$$\sigma_R = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \sigma_E = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_E = 1$$

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\beta_c = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \underline{\underline{1,225}}$$

$$P_f = \Phi(-\beta_c) = \underline{\underline{0,110}} \quad \text{Excel: } =\text{NORM.DIST}(-\beta_c; 0; 1; 1)$$

Přesné řešení (viz výše):

$$P_f = \frac{1}{8} = \underline{\underline{0,125}}$$

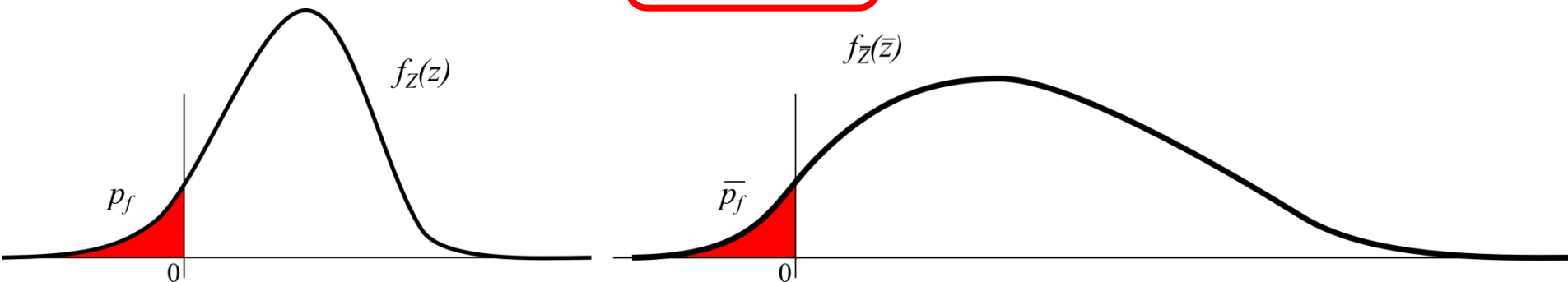
Nevýhody Cornellova indexu

- velké chyby pokud je rozdělení rezervy spolehlivosti velmi odlišné od **normálního rozdělení**
- výsledek závislý na volbě **formulace** rezervy spolehlivosti

$$Z = R - E < 0 \Leftrightarrow \bar{Z} = 1 - \frac{R}{E} < 0$$

$$p_f = \bar{p}_f$$

$$\beta_c \neq \bar{\beta}_c$$



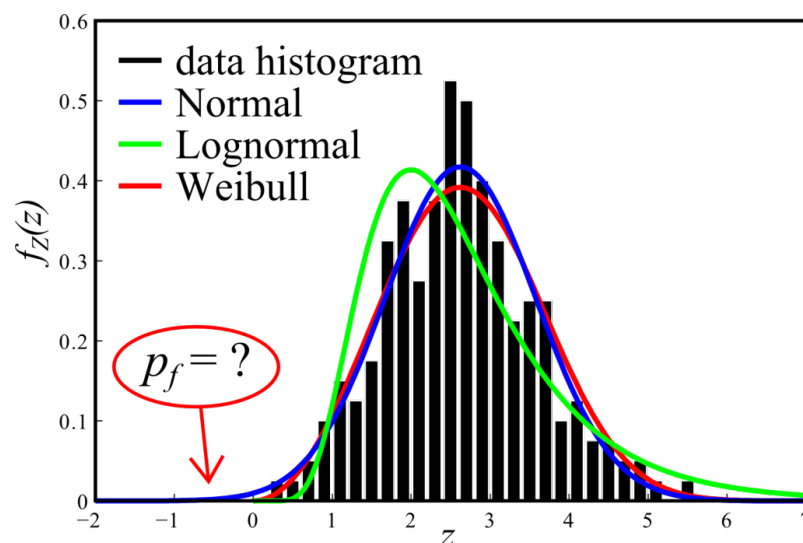
Rozdíl v Cornellových indexech spolehlivosti

Složitější $G(\mathbf{X})$ – odhad rozdělení

- Pokud je výpočet $Z=G(\mathbf{X})$ složitější než jen $R-E$, tzn. nelze snadno vyjádřit $\mu_R, \sigma_R, \mu_E, \sigma_E$, pak lze využít simulační metody (MC, LHS) a získat **sadu náhodných realizací Z** .
- Z nich se vyhodnotí **μ_Z, σ_Z a vhodné rozdělení** z testů dobré shody (Kolmogorov Smirnov test, Chi-kvadrát test).
- Pak lze stanovit Cornellův index β_c (pokud **normální**).
- Nebo p_f (**jiná rozdělení**) jako:

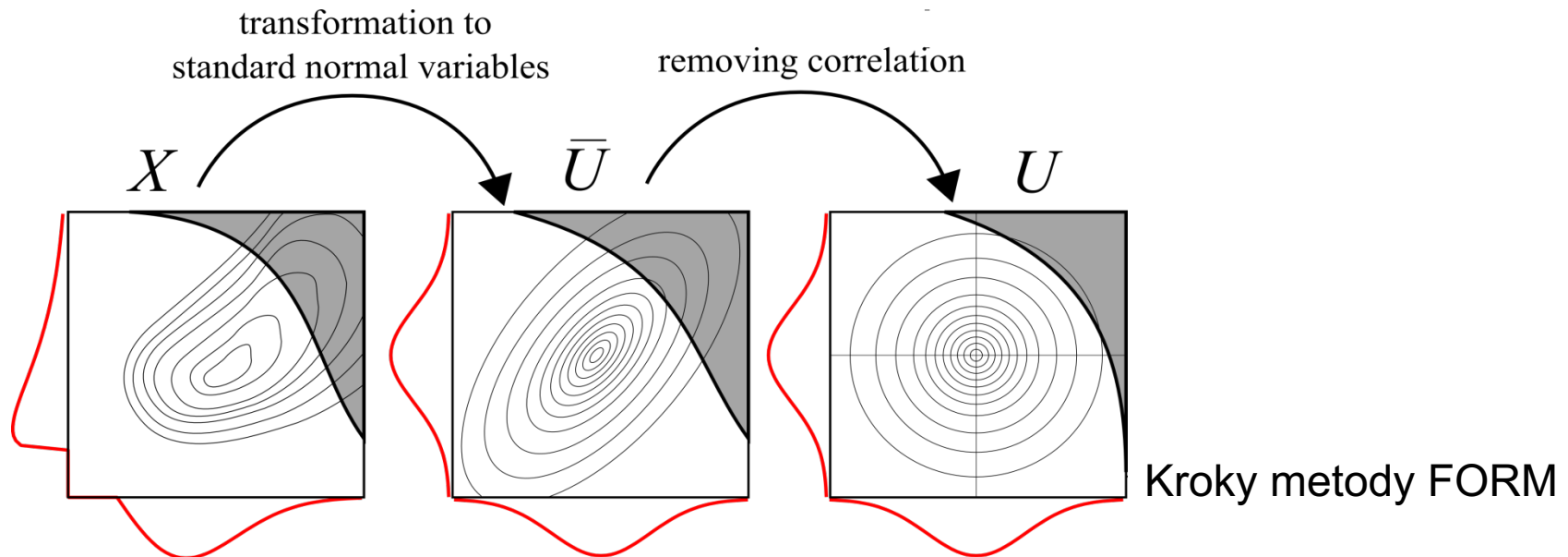
$$p_f = \Phi_{fitted}(0)$$

- **funguje celkem dobře** pro rozdělení zvonovitého tvaru
- problémy: nedostatečná databáze rozdělení, **pdf nezvonovitého tvaru!**



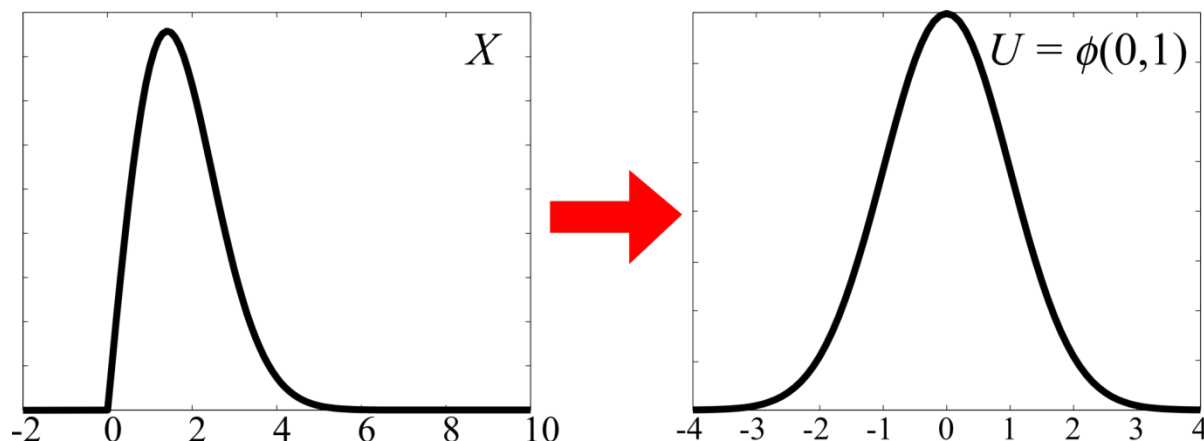
Hasofer-Lind index (FORM)

- odstraňuje nevýhody Cornellova indexu (ale má jiné)
- obsahuje tři kroky
 - transformace všech veličin na standardní normální veličiny
 - odstranění korelace
 - hledání návrhového bodu a aproximace hranice poruchy těčnou v návrhovém bodě



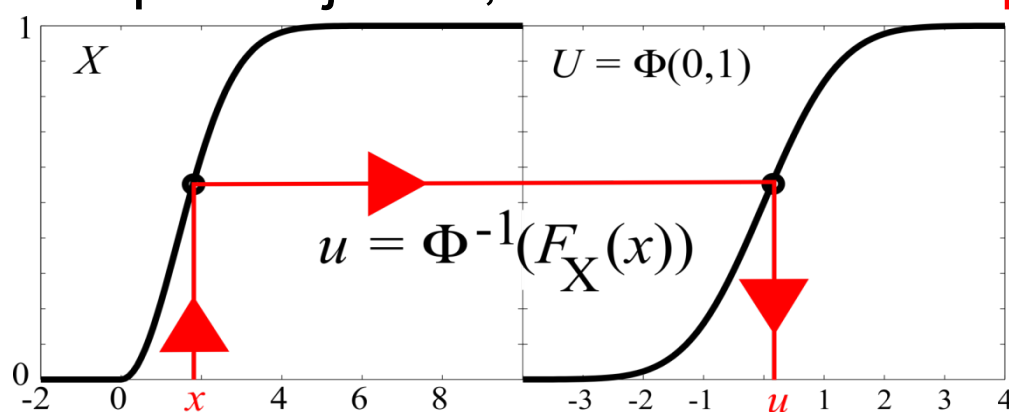
Pravděpodobnostní transformace

–obecně existuje nekonečně mnoho bijektivních transformací



Transformace X na
standardní normální
veličinu U

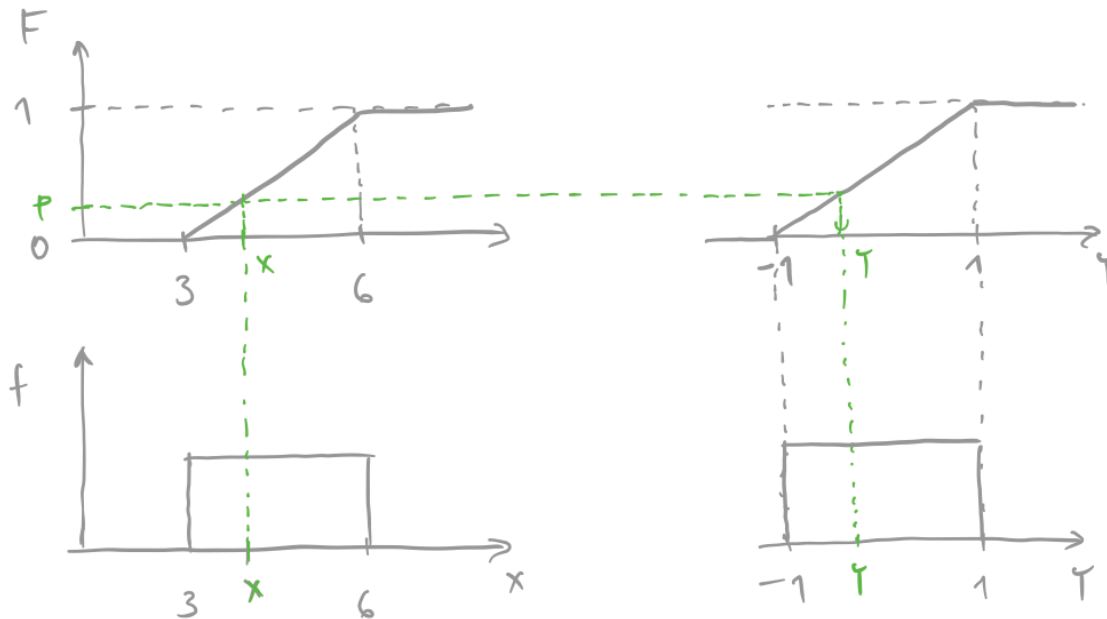
–avšak pouze jedna, která **zachovává pravděpodobnost**



Iso-
pravděpodobnostní
transformace X na
standardní normální
veličinu U

Příklad isopravděpodobnostní transf.

$$X \sim R(3, 6) \Rightarrow Y = R(-1, 1)$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 3 \\ \frac{x-3}{3} & 3 \leq x \leq 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < -1 \\ \frac{y+1}{2} & -1 \leq y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

Příklad isopravděpodobnostní transf.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 3 \\ \frac{x-3}{3} & 3 \leq x \leq 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < -1 \\ \frac{y+1}{2} & -1 \leq y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

Shodná hodnota p-stí p:

$$F_X(x) = F_Y(y) = p \Rightarrow y = F_Y^{-1}(p) = F_Y^{-1}(F_X(x))$$

$$F_X(x) = p = \frac{x-3}{3}$$

$$F_Y(y) = p = \frac{y+1}{2} \Rightarrow y = F_Y^{-1}(p) = 2p-1 \Rightarrow y = 2\left(\frac{x-3}{3}\right)-1$$

$$y = \frac{2}{3}x - 3$$

$$\text{kontrola : } x=3 \Rightarrow y=-1$$

$$x=6 \Rightarrow y=1$$

Pozn.:

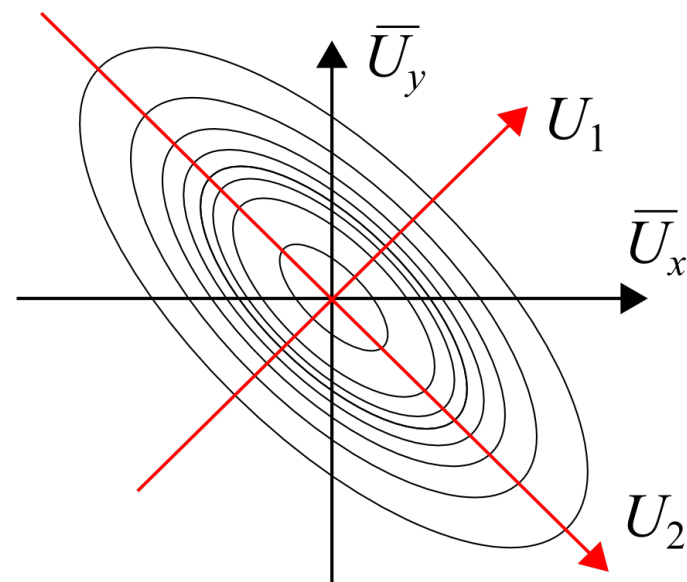
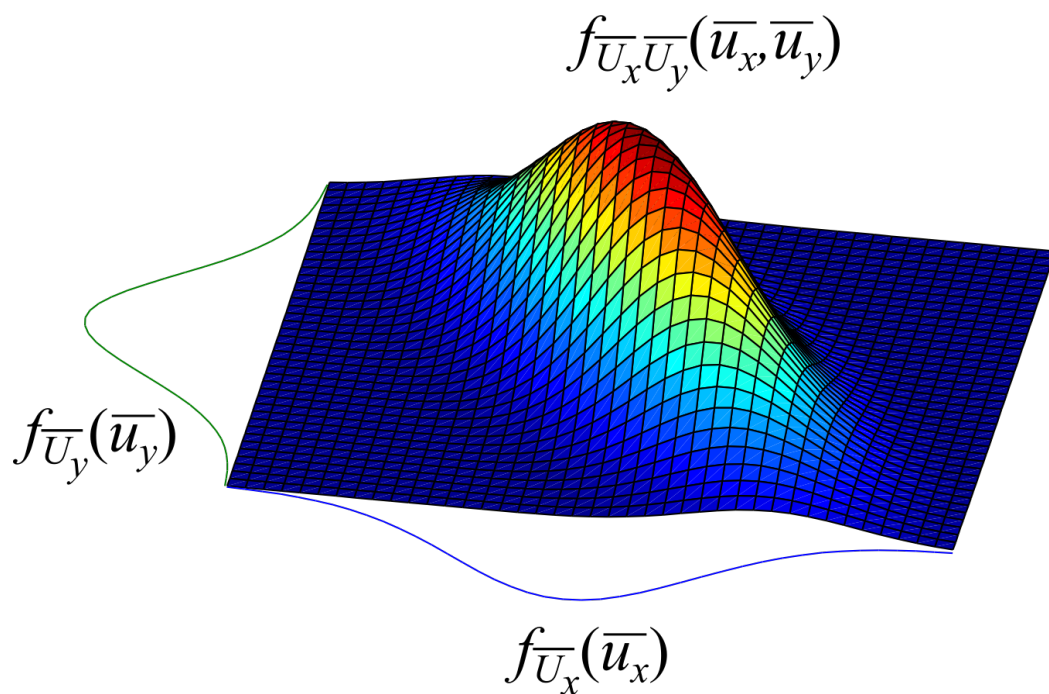
Pro Normální rozdělení $X \sim N(\mu_X, \sigma_X) \Rightarrow U_X \sim N(0;1)$:

$$Y = U_X = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}$$

$$F_X(x) \Rightarrow \Phi_U(u)$$

Odstranění korelace

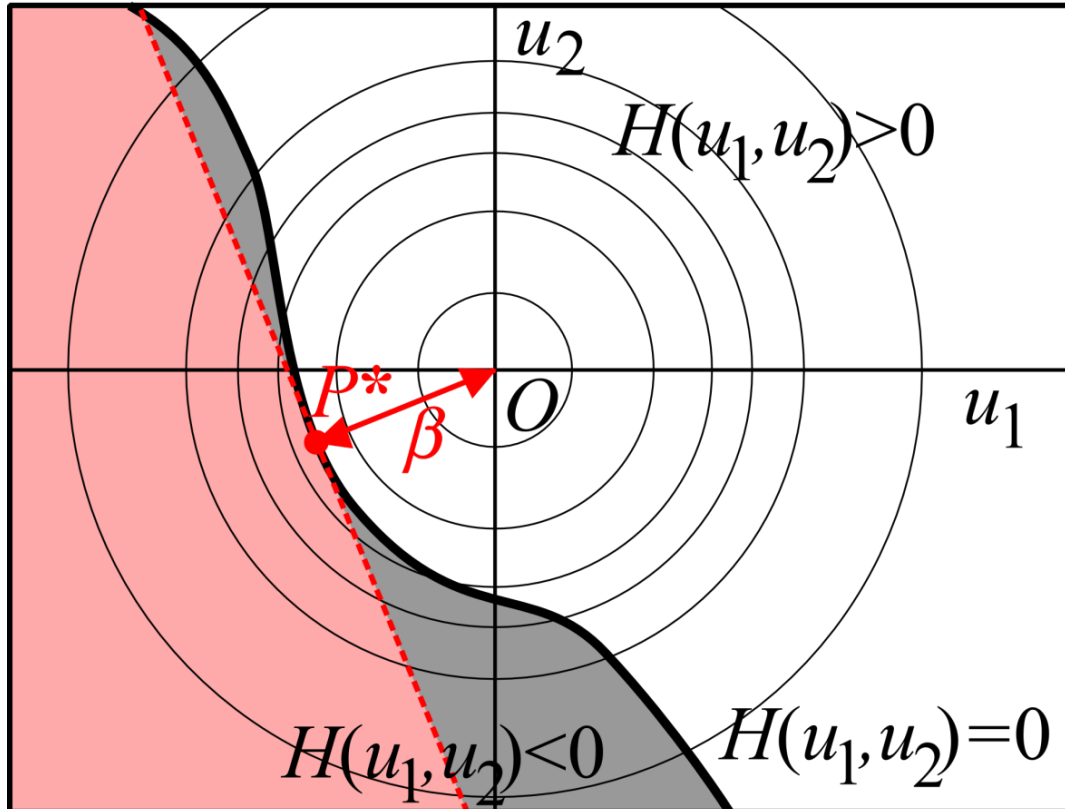
- například rozkladem korelační matice do vlastních vektorů
- nezávislé veličiny jsou pak ve směrech vlastních vektorů



Rozklad korelovaných veličin na nekorelované

FORM: Návrhový bod a tečna

- transformace $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{U}$ & transformace $G(\mathbf{X})$ na $H(\mathbf{U})$
- **návrhový bod** P^* je bod na hranici poruchy $H(\mathbf{U}) = 0$ s nejkratší vzdáleností β k počátku soustavy souřadnic



- hranice poruchy je pak nahrazena **tečnou** v návrhovém bodě
- a spolehlivostní integrál vede na

$$p_f = \Phi(-\beta)$$

FORM

- Index spolehlivosti – nejkratší spojnice z hranice poruchy k počátku
- nejprve je nutné najít návrhový bod P^*
- optimalizační problém: optimalizace v mnohodimenzionálním prostoru náhodných veličin, lokální a globální minimum, nelinearita, ...

$$\text{minimalizace } \beta = \sqrt{u^T u}$$
$$\text{za podmínky } g(u) = 0,$$

Příklad: Index spolehl. metodou FORM



$$X \sim N(1; 3) ; Y \sim N(8; 4) \quad - \text{nezávislé}$$

$$Z = G(X; Y) = Y - X \quad - \text{Z bude mít rovněž norm. rozdělení}$$

$\Rightarrow \beta_c$ bude přesné (Cornell)

Cornell:

$$\begin{aligned} \mu_Z &= \mu_Y - \mu_X = 7 \\ \sigma_Z &= \sqrt{\sigma_Y^2 + \sigma_X^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \mu_Z &= \mu_Y - \mu_X = 7 \\ \sigma_Z &= \sqrt{\sigma_Y^2 + \sigma_X^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}} \right\} Z \sim N(7; 5)$$

$$\beta_c = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{7}{5} = \underline{\underline{1,4}} \Rightarrow p_f = \Phi(-\beta) = \underline{\underline{0,0808}} \quad \text{PŘESNÉ}$$

Příklad: Index spolehl. metodou FORM



Isopravděpodobnostní transformace:

$$U_Y = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} = \frac{Y - 8}{4} \quad ; \quad U_X = \frac{X - 1}{3}$$

$$Y = 4U_Y + 8 \quad ; \quad X = 3U_X + 1$$

$$\underline{H} = Y - X = 4U_Y + 8 - 3U_X - 1 = \underline{4U_Y - 3U_X + 7} \quad \dots \text{vše přímky}$$

$$\text{kdýž } H=0: \quad U_Y = \frac{3}{4} U_X - \frac{7}{4} \quad \Rightarrow \quad k = \tan \alpha = \frac{3}{4} = 0,75 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$U_X = 0 : U_Y = -\frac{7}{4} = -1,75$$

$$U_Y = 0 : U_X = \frac{7}{3} = 2,3$$

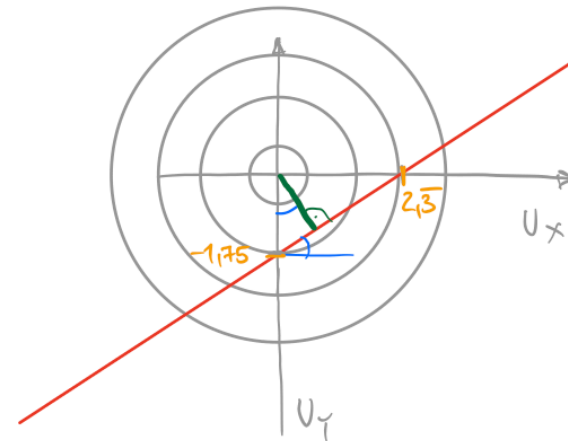
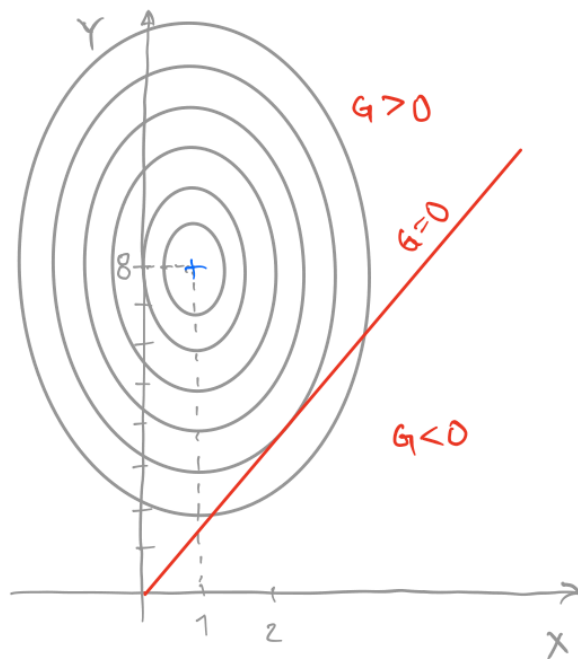
Příklad: Index spolehl. metodou FORM



$$když \bar{H}=0: U_Y = \frac{3}{4} U_X - \frac{7}{4} \Rightarrow k = \tan \alpha = \frac{3}{4} = 0,75 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$U_X = 0: U_Y = -\frac{7}{4} = -1,75$$

$$U_Y = 0: U_X = \frac{7}{3} = 2,3$$



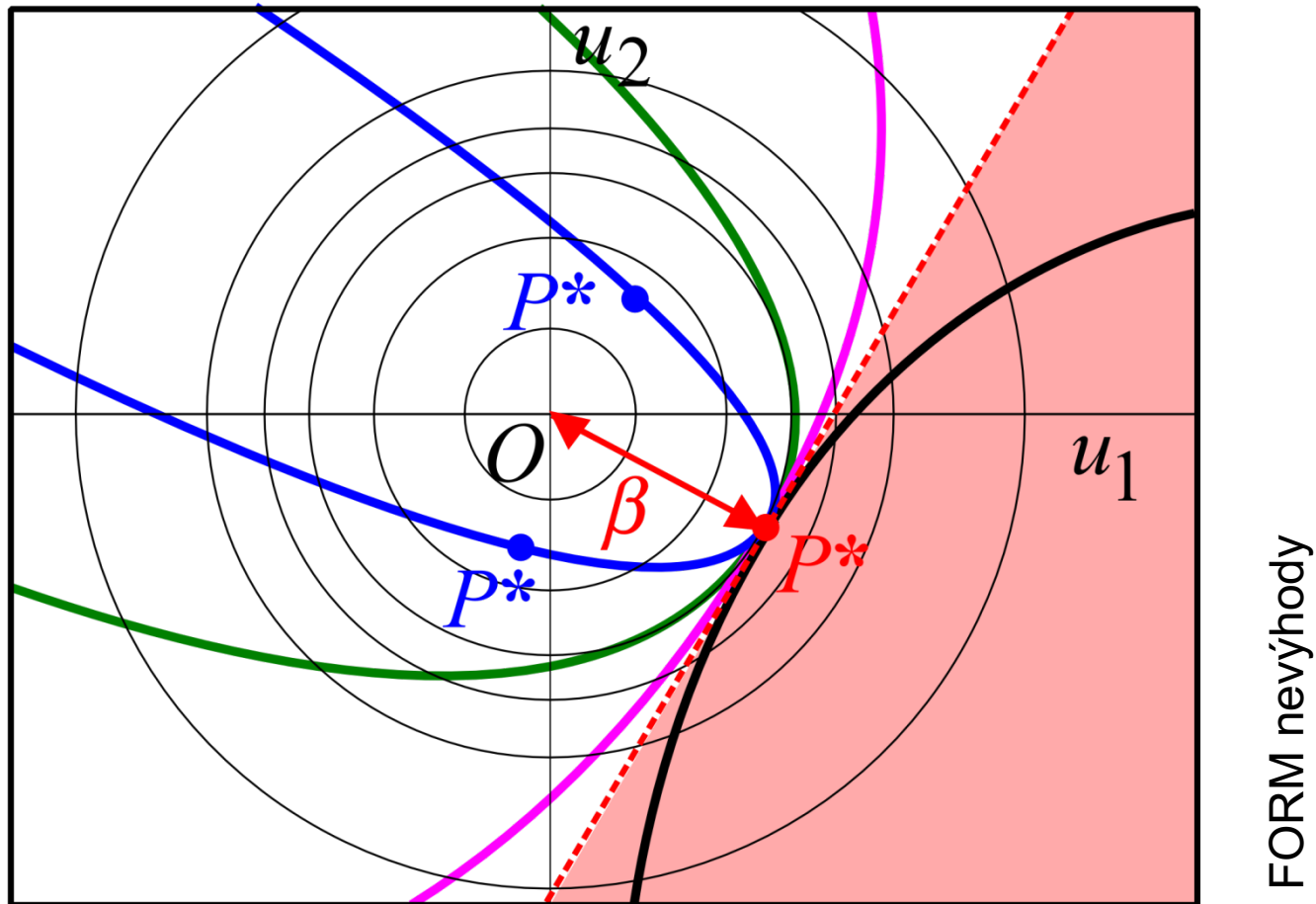
$$\beta = 1,75 \cdot \cos \alpha = \underline{\underline{1,4}}$$

$$P_f = \Phi(-\beta) = \underline{\underline{0,0808}}$$

PŘESNĚ (linearizace přímkou)

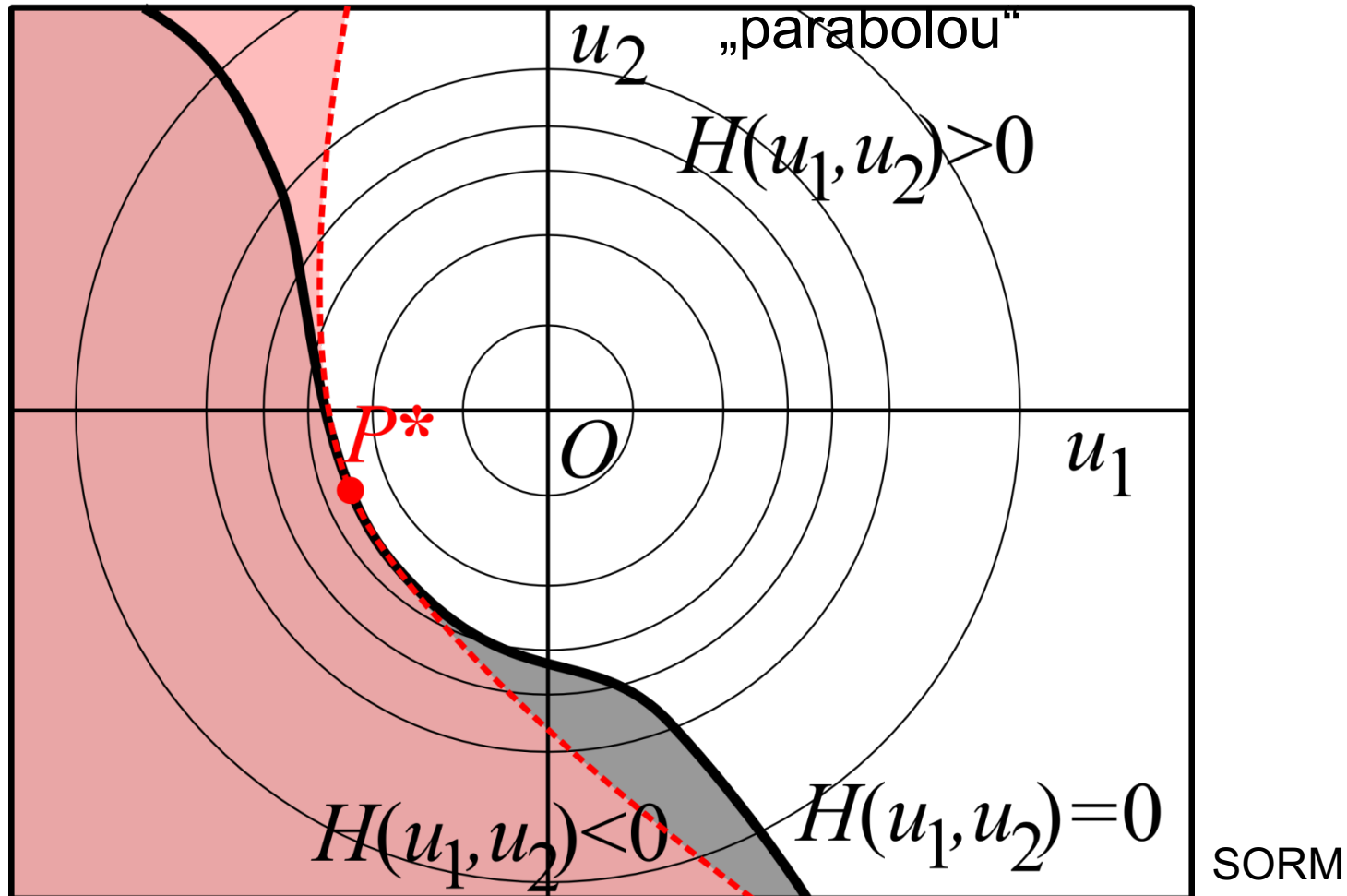
FORM nevýhody

–vysoká křivost hranice poruchy, více návrhových bodů, ...



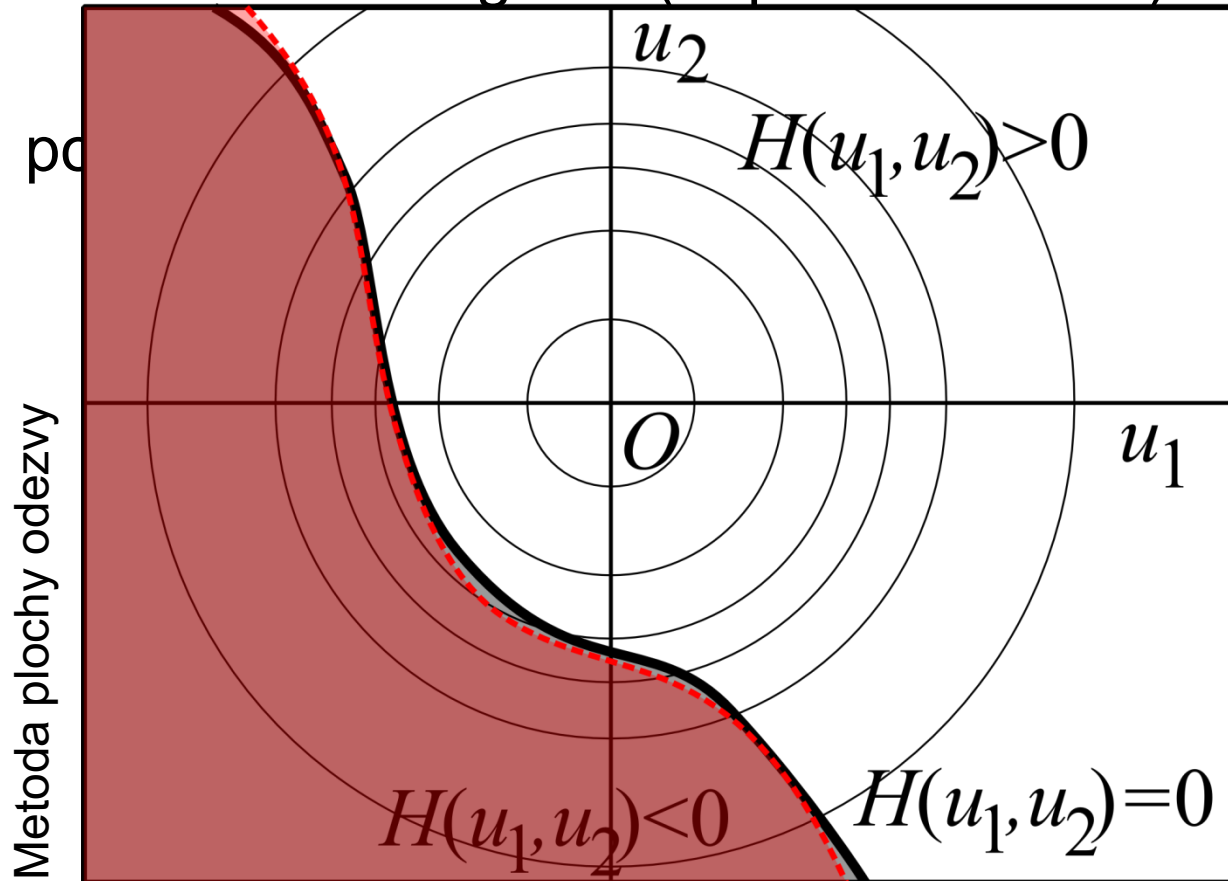
Spolehlivostní metoda druhého řádu

–SORM = nahrazení hranice poruchy v návrhovém bodě



Metoda plochy odezvy

- aproximace hranice poruchy pomocí např. polynomu
- numerická integrace (např. MC či LHS) s použitím přibližné



hranice

Metoda plochy odezvy

$$g(X) \longrightarrow \bar{g}(Y) = a_0 + \sum_{i=1}^n b_i Y_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} Y_i Y_j$$

$$Y_i = (X_i - x_{ci}) / \sigma_{xi} \quad a_0 = g(x_c)$$

- aproximace funkce rezervy spolehlivosti (polynomiální, pomocí neuronové sítě, ...)
- aplikace simulačních technik typu MC
- počet vyčíslení funkce mezního stavu, regrese $N = (n-1)(n-2)/2 - 1$
- volba interpolačních bodů v $g(X) = 0$