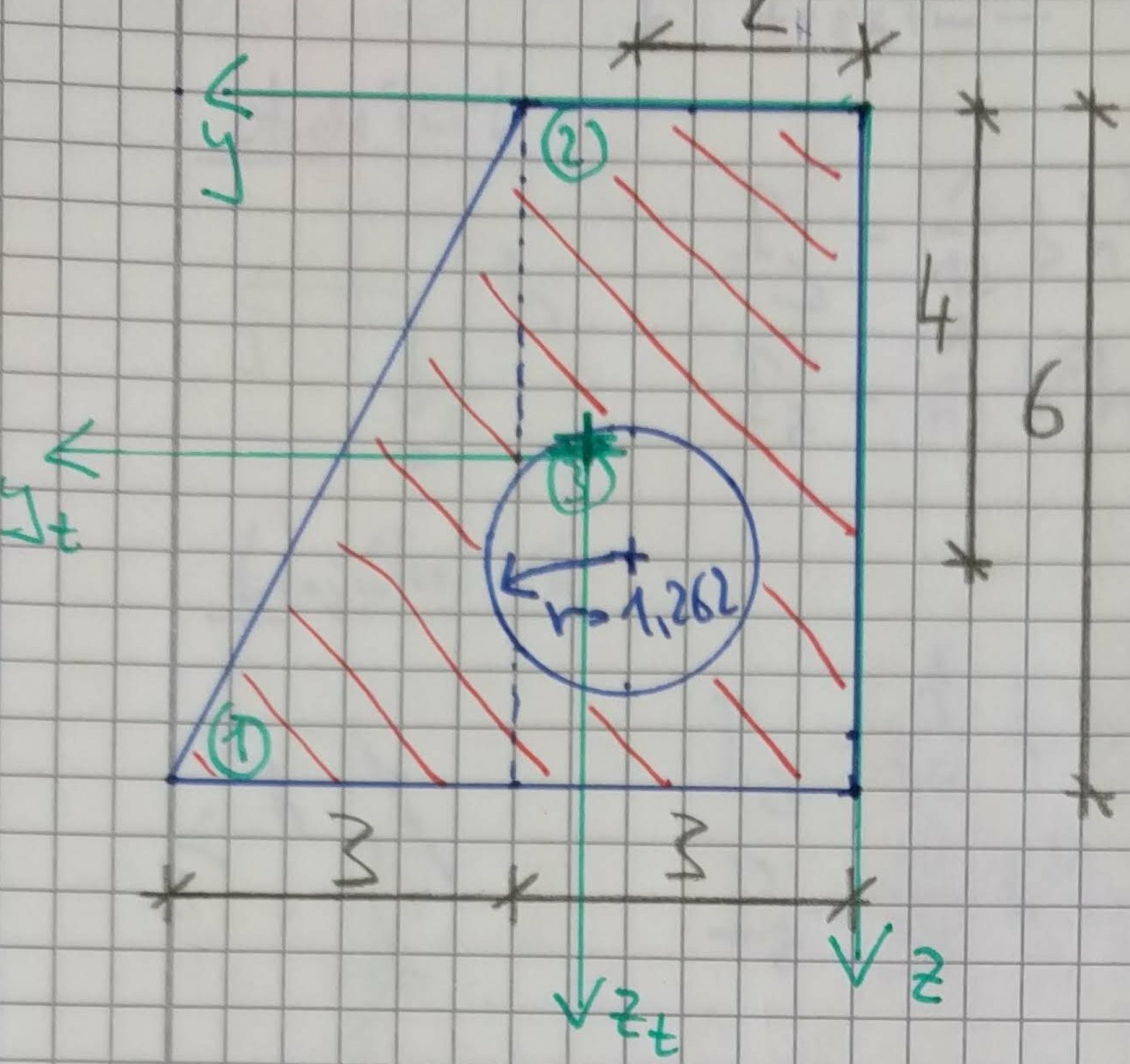
Průřezové charakteristiky



I Plocha $[m^2; mm^2]$

$$A_1 = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 m^2$$

$$A_2 = b \cdot h = 3 \cdot 6 = 18 m^2$$

$$A_3 = \pi r^2 = 5 m^2$$

$$A_{celk} = \sum_{i=1}^{3} A_i =$$
$$= 9 + 18 - 5 = 22 m^2$$

II. Statické momenty k osám $[m^3; mm^3]$

$$S_{yi} = A_i \cdot z_{ti}$$
$$S_{zi} = A_i \cdot y_{ti}$$

$$S_{y1} = 9 \cdot 4 = 36 m^3 \qquad S_{z1} = 9 \cdot 4 = 36 m^3$$

$$S_{y2} = 18 \cdot 3 = 54 m^3 \qquad S_{z2} = 18 \cdot 1{,}5 = 27 m^3$$

$$S_{y3} = 5 \cdot 4 = 20 m^3 \qquad S_{z3} = 5 \cdot 2 = 10 m^3$$

$$S_{ycelk} = \sum A_i \cdot z_{ti} = \sum S_{yi} = 36 + 54 - 20 = 70 m^3$$

$$S_{zcelk} = \sum A_i \cdot y_{ti} = \sum S_{zi} = 36 + 27 - 10 = 53 m^3$$

Statický moment k těžištní ose je nulový!

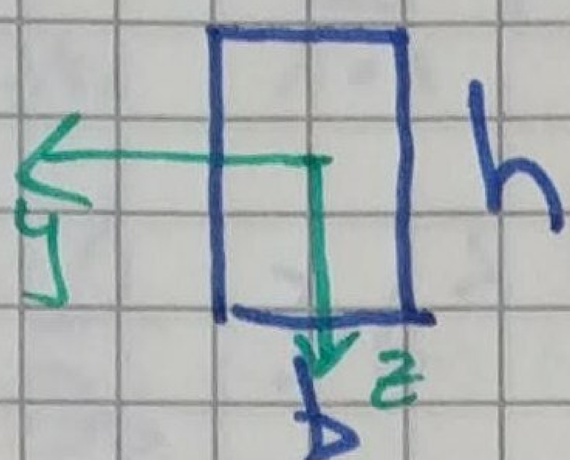
III. Těžiště průřezu

$$S_{ycelk} = A_{celk} \cdot z_{tc} \Longrightarrow z_{tc} = \frac{S_{ycelk}}{A_{celk}} = \frac{70}{22} = 3{,}182 m$$

$$S_{zcelk} = A_{celk} \cdot y_{tc} \Longrightarrow y_{tc} = \frac{S_{zcelk}}{A_{celk}} = \frac{53}{22} = 2{,}409 m$$

IV Momenty setrvačnosti, deviační moment k těžišťním osám: $[m^4; mm^4]$

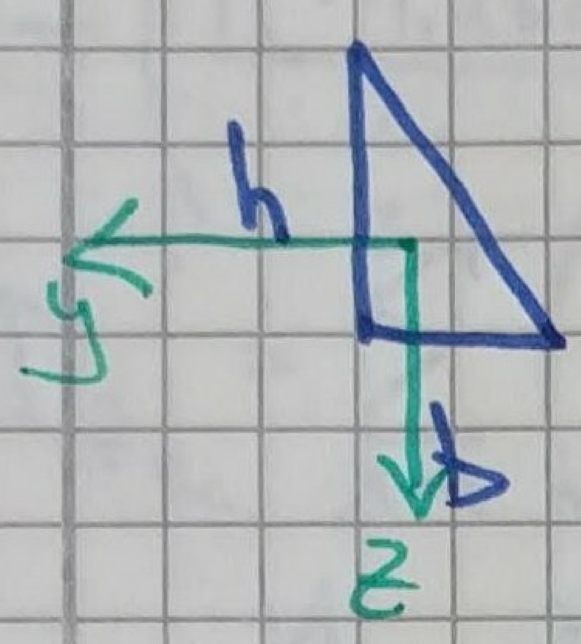
obdélník



$$I_y = \frac{1}{12} b h^3 \qquad D_{yz} = \emptyset$$

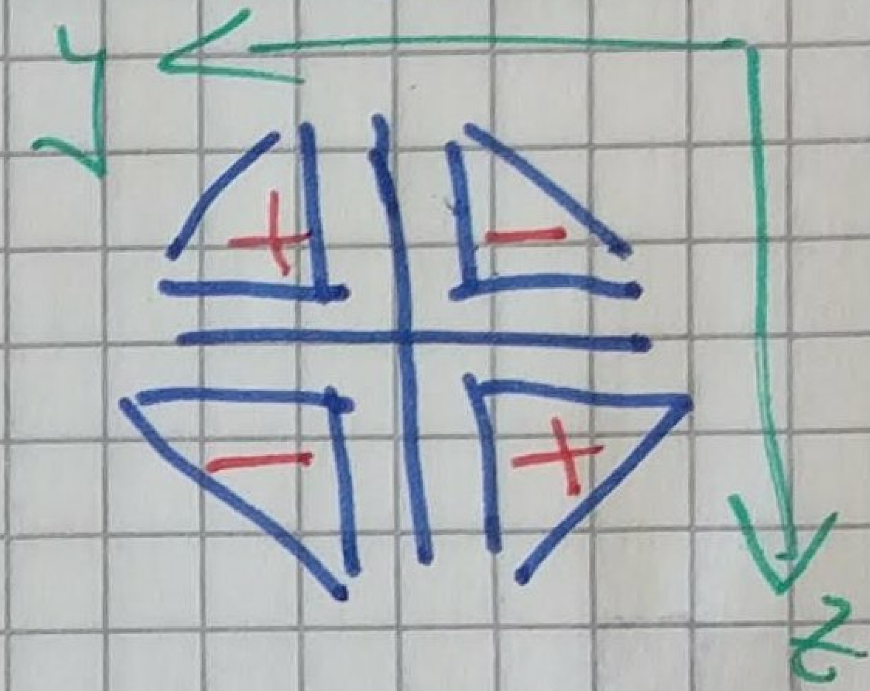
$$I_z = \frac{1}{12} b^3 h$$

trojúhelník

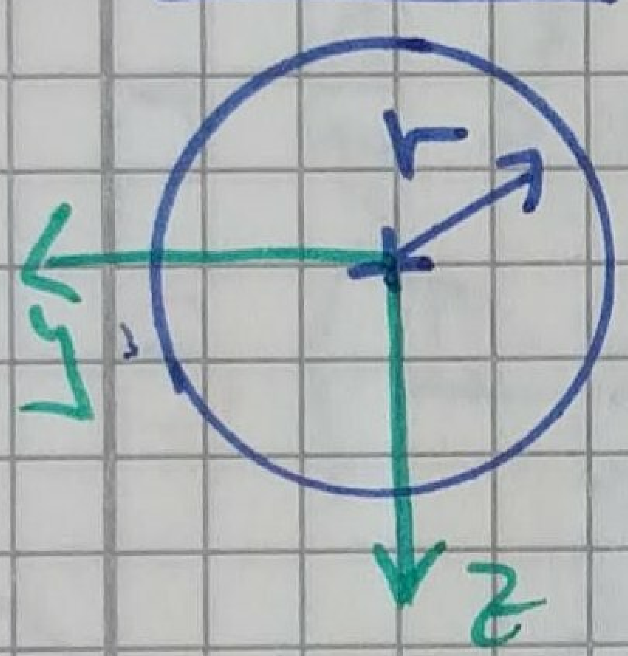


$$I_y = \frac{1}{36} b h^3 \qquad D_{yz} = \pm \frac{1}{72} b^2 h^2$$

$$I_z = \frac{1}{36} b^3 h$$



kruh



$$I_y = I_z = \frac{\pi r^4}{4} \qquad D_{yz} = \emptyset$$

V Steinerova věta

→ Momenty setrvačnosti k posunutým osám

Moment setrvačnosti k mimotěžišťní ose y' rovnoběžné s těžišťní osou y_t se rovná těžišťnímu momentu setrvačnosti I_y zvětšenému o součin plochy A a čtverce vzdálenosti obou os $(y_t - y')$

$$I_{y'} = I_y + A \cdot z^2 \qquad D_{y'z'} = D_{yz} + A \cdot y \cdot z$$

$$I_{z'} = I_z + A \cdot y^2$$

Moment setrvačnosti k těžišťní ose

→ vzorový příklad

$$I_{y_{tc}} = \sum_{i=1}^{3} \left(I_{y_i} + A_i \left(z_{t_i} - z_{tc} \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{36} \cdot 3 \cdot 6^3 + \frac{3 \cdot 6}{2} \cdot (0{,}818)^2 +$$

$$+ \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6 \, (-0{,}182)^2 +$$

$$- \left(\frac{\pi \cdot 1{,}262^4}{4} + \pi \cdot 1{,}262^2 \cdot 0{,}818^2 \right) = \underline{\underline{73{,}287 \, m^4}}$$

$$I_{z_{tc}} = \sum_{i=1}^{3} \left(I_{z_i} + A_i \left(y_{t_i} - y_{tc} \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{36} \cdot 3^3 \cdot 6 + \frac{3 \cdot 6}{2} \cdot 1{,}591^2 +$$

$$+ \frac{1}{12} \, 3^3 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot (-0{,}909)^2 -$$

$$- \left(\frac{\pi \cdot 1{,}262^4}{4} + \pi \cdot 1{,}262^2 \cdot (-0{,}409)^2 \right) = \underline{\underline{52{,}838 \, m^4}}$$

$$D_{y_{tc} z_{tc}} = \sum_{i=1}^{3} \left(D_{yz_i} + A_i \left(z_{t_i} - z_{tc} \right) \left(y_{t_i} - y_{tc} \right) \right) =$$

$$= + \frac{1}{72} \cdot 3^2 \cdot 6^2 + \frac{3 \cdot 6}{2} \cdot 1{,}591 \cdot 0{,}818 +$$

$$+ \emptyset \quad + 3 \cdot 6 \cdot (-0{,}909)(-0{,}182) -$$

$$- \left(\emptyset \quad + \pi \cdot 1{,}262^2 \, (-0{,}409) \cdot 0{,}818 \right) =$$

$$= \underline{\underline{20{,}865 \, m^4}}$$

VI Hlavní centrální momenty setrvačnosti

$$I_{1,2} = \frac{I_{y_{tc}} + I_{z_{tc}}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{y_{tc}} - I_{z_{tc}}\right)^2 + 4D_{y_{tc}z_{tc}}^2}$$

$$I_1 = 86{,}292\ m^4$$

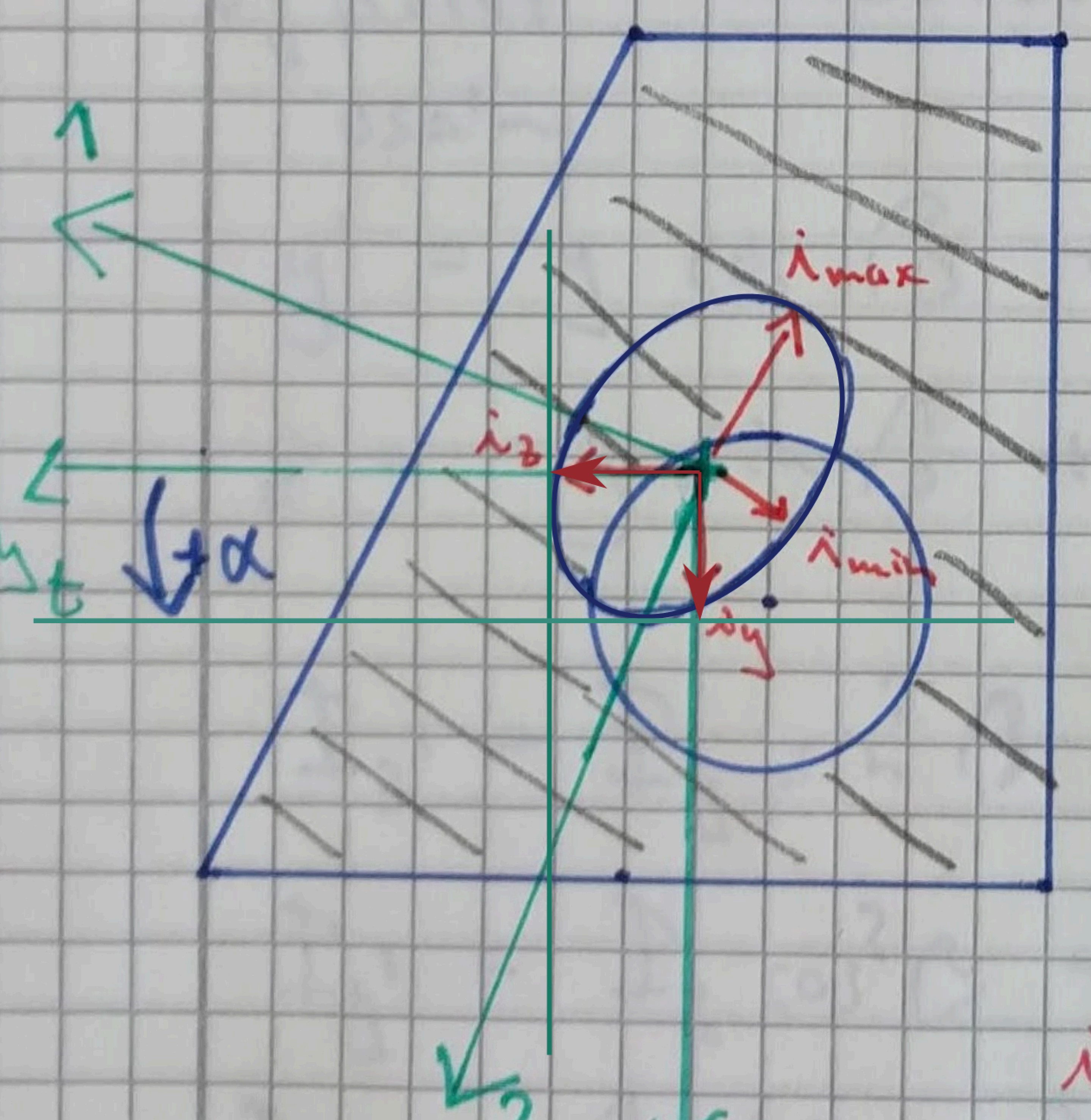
$$I_2 = 39{,}824\ m^4$$

natočení hlavních os

$$tg\,2\alpha = \frac{2D_{y_{tc}z_{tc}}}{I_z - I_y}$$

$$\alpha = -31{,}952°$$

VII Elipsa setrvačnosti průřezu



$$I_y = A \cdot i_y^2 \qquad I_z = A \cdot i_z^2$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

$$i_{max} = \sqrt{\frac{I_1}{A}} \qquad i_{min} = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$$

Poloměr setrvačnosti průřezu i_y k těžištní ose y_t je definován jako vzdálenost od těžiště, kde má hmotný bod, do kterého je soustředěna veškerá hmota průřezu, stejný moment setrvačnosti k ose y_t jako celý průřez.

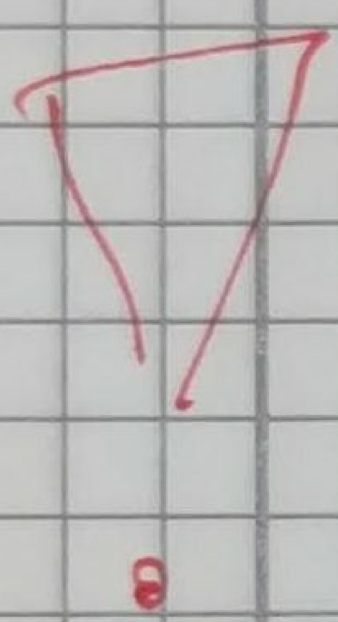
Množina takových bodů pro všechny těžištní osy je nazývána elipsa setrvačnosti průřezu.

$$i_y = \sqrt{\frac{73{,}275}{22}} = 1{,}825 \text{ m}$$

$$i_z = \sqrt{\frac{52{,}835}{22}} = 1{,}550 \text{ m}$$

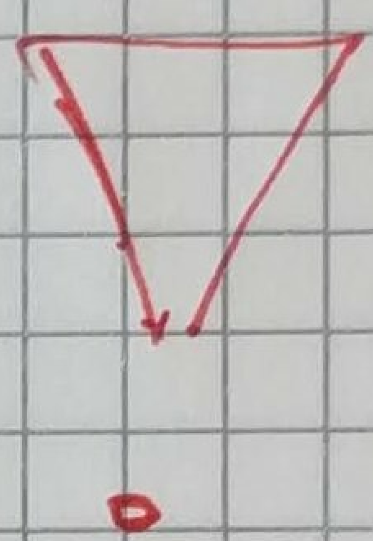
$$i_{max} = \sqrt{\frac{86{,}282}{22}} = 1{,}980 \text{ m}$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{39{,}824}{22}} = 1{,}345 \text{ m}$$

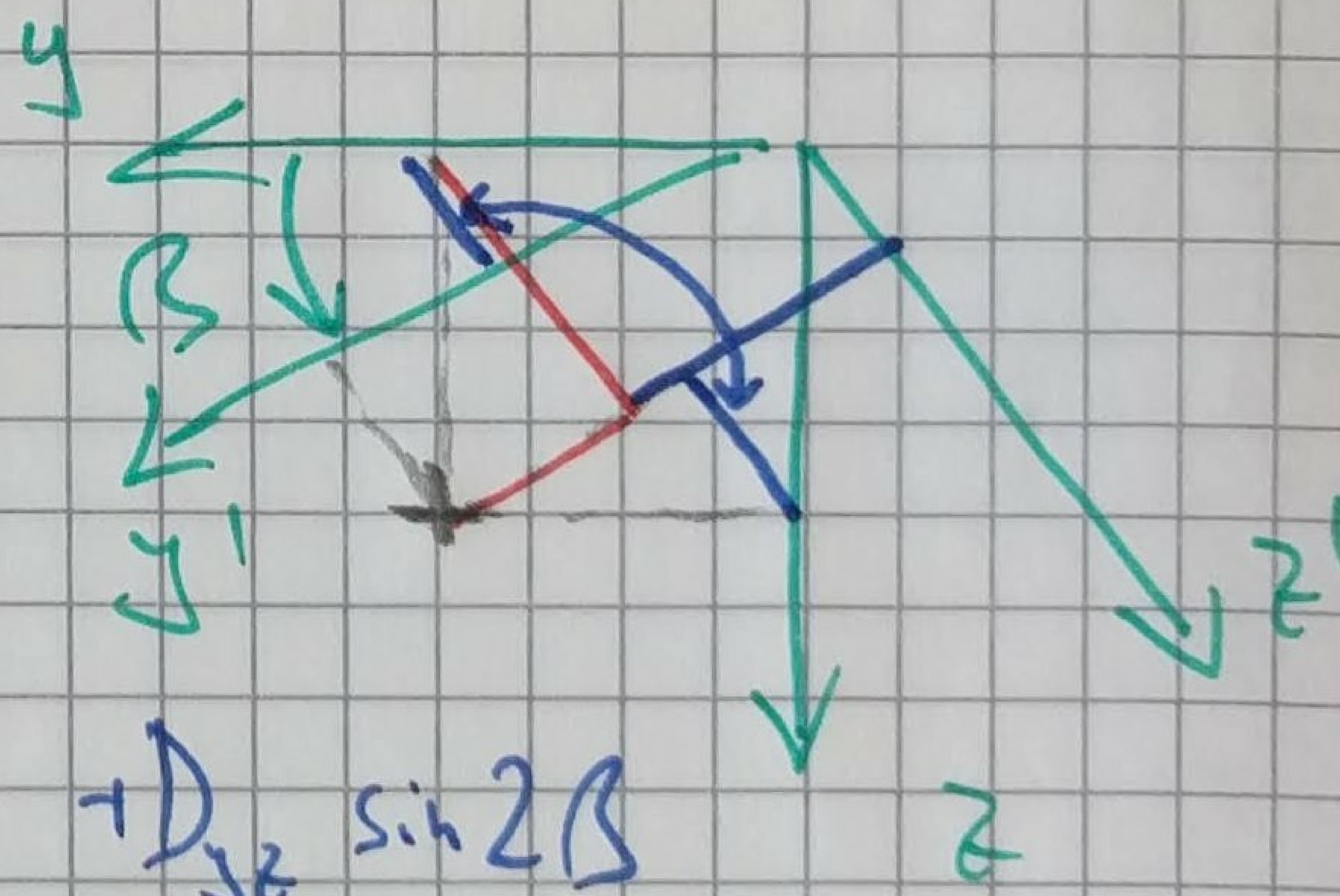


$$i_{max} \geq \begin{matrix} i_y \\ i_z \end{matrix} \geq i_{min}$$

$$I_1 \geq \begin{matrix} I_y \\ I_z \end{matrix} \geq I_2$$



Výpočet momentů setrvačnosti k pootočeným osám



$$y' = y \cos\beta + z \sin\beta$$

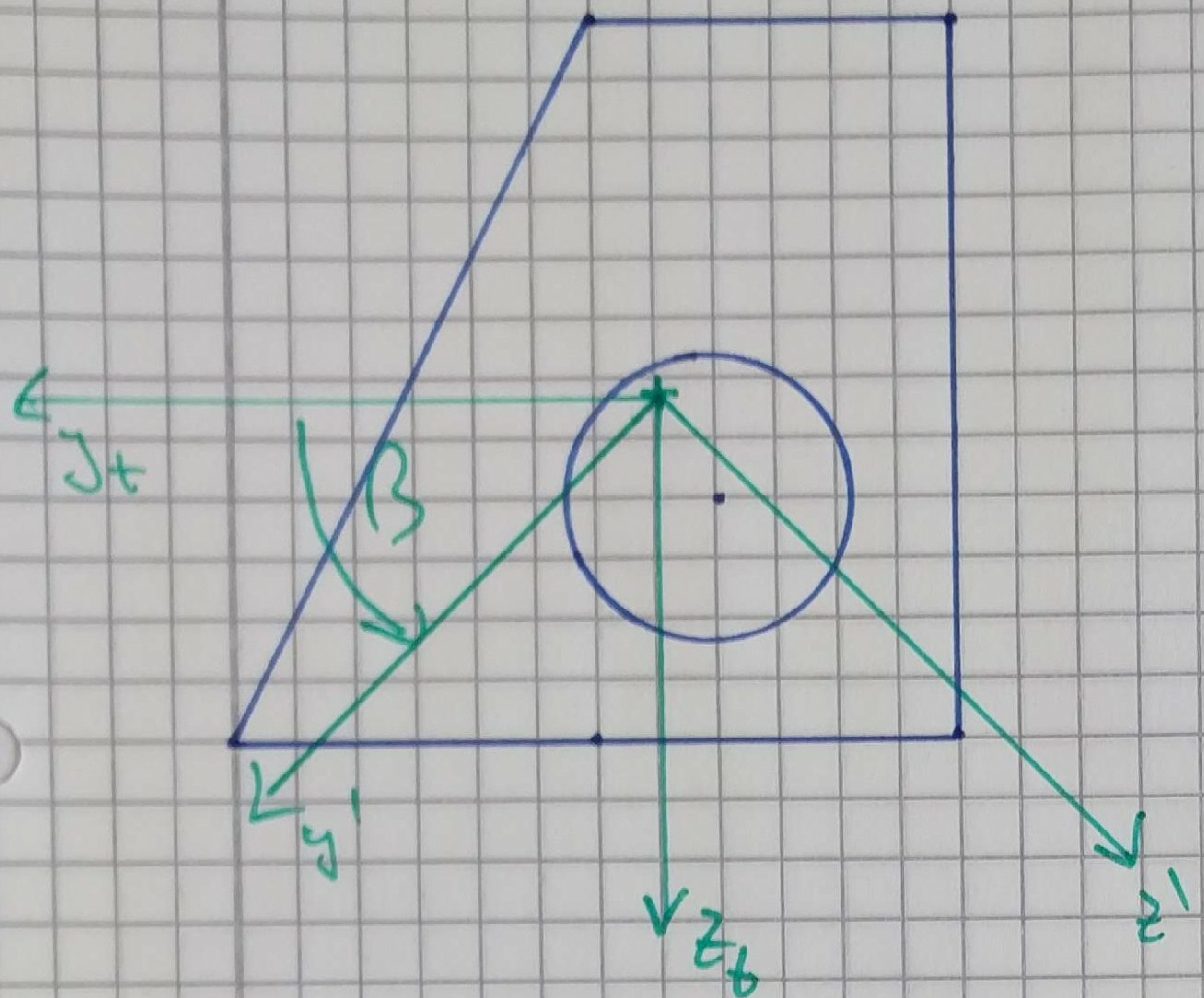
$$z' = -y \sin\beta + z \cos\beta$$

$$I_{z'} = I_y \sin^2\beta + I_z \cdot \cos^2\beta + D_{yz} \sin 2\beta$$

$$I_{y'} = I_y \cos^2\beta + I_z \sin^2\beta - D_{yz} \sin 2\beta$$

$$D_{y'z'} = \frac{1}{2}\left(I_y - I_z\right) \sin 2\beta + D_{yz} \cos 2\beta$$

Vypočítejte momenty setrvačnosti k těžišťovým osám pootočeným o 45° na vzorovém příkladě

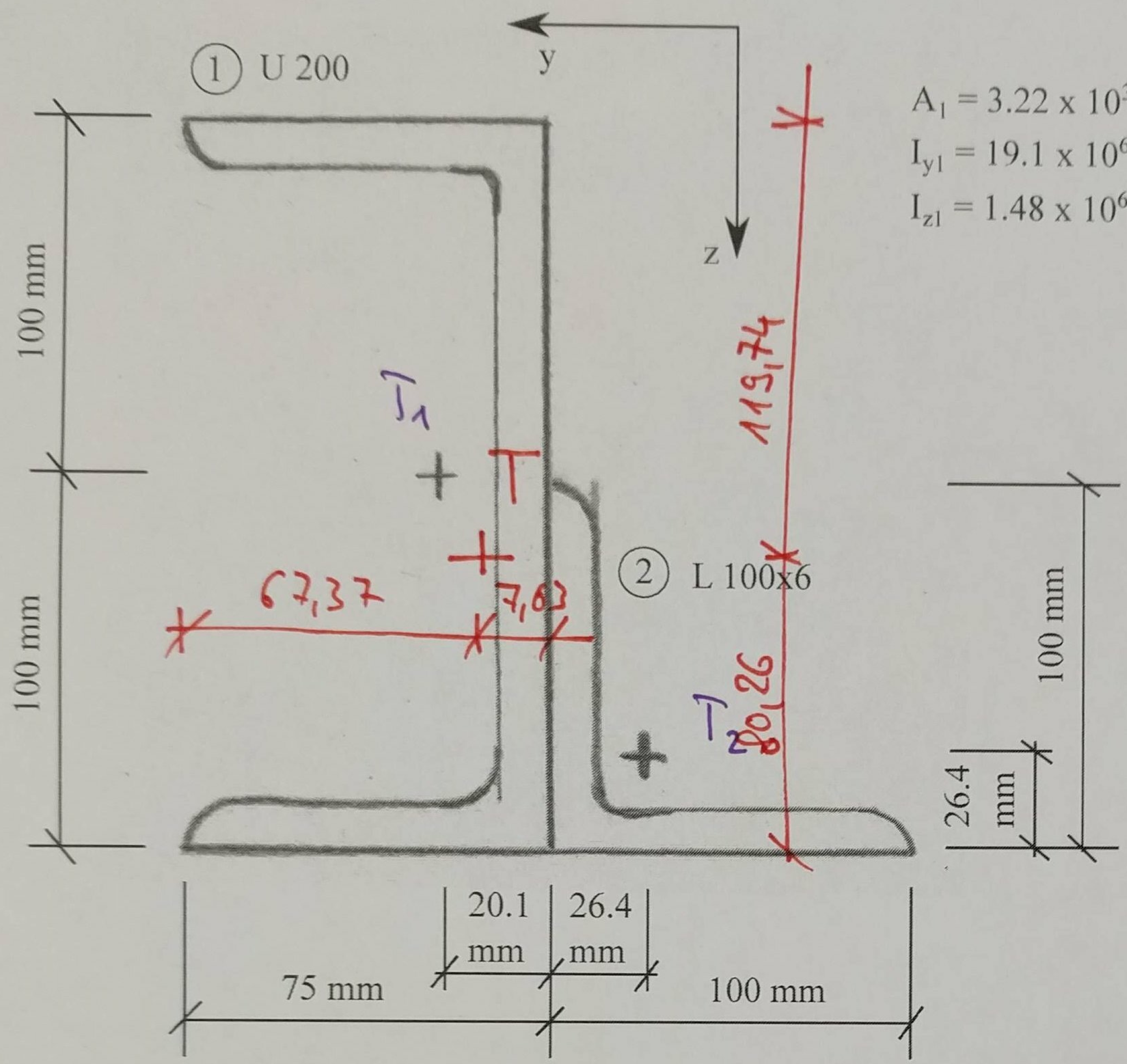


$I_{z'} = 83{,}923\ m^4$

$I_{y'} = 42{,}193\ m^4$

$D_{y'z'} = 10{,}22\ m^4$

Vypočítejte moment setrvačnosti I_{ZT} [mm^4] k težištní ose z složeného průřezu
souřadnice zaokrouhlujte na 0.1 mm, výsledné hodnoty na 3 platné číslice



$A_1 = 3.22 \times 10^3\ mm^2$ $A_2 = 1.18 \times 10^3\ mm^2$
$I_{y1} = 19.1 \times 10^6\ mm^4$ $I_{y2} = 1.11 \times 10^6\ mm^4$
$I_{z1} = 1.48 \times 10^6\ mm^4$ $I_{z2} = 1.11 \times 10^6\ mm^4$

$$y_T = \frac{A_2 \cdot (-(20{,}1+26{,}4))}{A_1 + A_2} = -12{,}47\ mm$$

$$z_T = \frac{A_2 \cdot (100 - 26{,}4)}{A_1 + A_2} = 19{,}74\ mm$$

$$I_{yT} = I_{y1} + A_1 (0 - 19{,}74)^2 + I_{y2} + A_2 ((100 - 26{,}4) - 19{,}74)^2 =$$

$$= 24{,}89 \cdot 10^6\ mm^4$$

$$I_{zT} = I_{z1} + A_1 (0 - (-12{,}47))^2 + I_{z2} + A_2 (-(20{,}1+26{,}4) - (-12{,}47))^2 =$$

$$= 4{,}457 \cdot 10^6\ mm^4$$