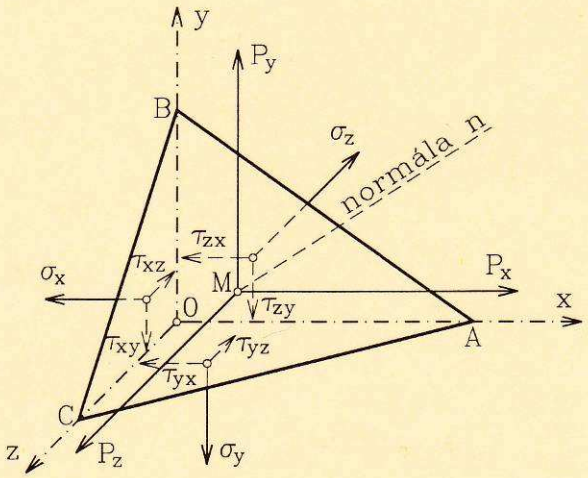
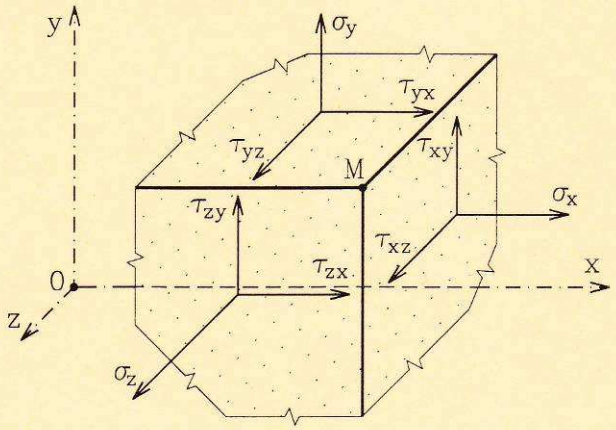
PRUŽNOST A PLASTICITA I

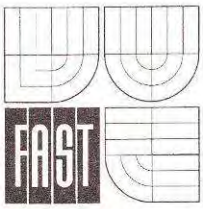




Svatopluk Šmiřák

UČEBNÍ TEXTY VYSOKÝCH ŠKOL

Vysoké učení technické v Brně
Fakulta stavební



Doc. Ing. Svatopluk Šmiřák, CSc.

Pružnost a plasticita I

pro distanční studium

CERM

Akademické nakladatelství s.r.o. Brno

© Svatopluk Šmiřák 1995, 1999

PŘEDMLUVA

Tento učební text je určen především pro studenty distančního studia stavební fakulty (2.ročník). Tomu je přizpůsobeno rozdělení látky, posloupnost témat i zařazení příkladů do textu. Skriptum může být rovněž užíváno studenty denního studia, kde je tento předmět zařazen také do druhého ročníku všech oborů stavební fakulty.

Do skripta nebyla zařazena některá témata, která jsou tradiční součástí nauky o pružnosti a plasticitě: energie napjatosti a deformační práce, kroucení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu a některá další. Je to zdůvodněno tím, že jsou ve výuce zařazena do jiných předmětů (Statika stavebních konstrukcí, Pružnost a plasticita II) nebo se přednášejí jen na některých oborech. Pro tato témata se předpokládá vydání samostatných učebních textů. Týká se to též výkladu teorie plasticity, jejíž systematický výklad není do předmětu Pružnost a plasticita I zařazen. Proto jsou ve skriptu vyloženy jen některé základní případy aplikace teorie plasticity na analýzu prutů.

Učební text byl zpracován v době, kdy se postupně do naší technické praxe zavádějí tzv. Eurokódy, tedy společné normy Evropské unie, a to ve svých předběžných verzích. Přináší to určité změny v názvosloví a značkách veličin, které již jsou v tomto skriptu uplatněny. Je třeba ovšem počítat s tím, že v procesu přijímaní evropských předpisů do naší normalizační soustavy bude docházet ještě k určitým změnám a upřesněním.

Všem uživatelům budu vděčný za upozornění na případné chyby a opomenutí v textu.

Brno, září 1995

Autor

OBSAH

1 Úvod, základní pojmy 4
1.1 Úkoly a výchozí předpoklady teorie pružnosti a plasticity 4
1.2 Vnitřní síly, napětí 5
1.3 Deformace, posuny 9
1.4 Fyzikální vztahy mezi napětími a deformacemi 11
1.5 Spolehlivost nosné konstrukce 16

2 Tah a tlak 19
2.1 Napětí při osovém tahu a tlaku 19
2.2 Přetvoření taženého (tlačeného) prutu 22
2.3 Návrh a posouzení taženého prutu 30
2.4 Staticky neurčité případy tahu a tlaku pružných prutů 34
2.5 Staticky neurčité soustavy v pružnoplastickém oboru 44

3 Napětí v ohýbaných nosnících 49
3.1 Normálová napětí při ohybu 49
3.2 Návrh a posouzení ohýbaného nosníku v pružném oboru 52
3.3 Smyková napětí při ohybu (masivní průřezy) 58
3.4 Smyková napětí v tenkostěnných nosnících. Střed smyku 64
3.5 Složené nosníky 70
3.6 Ohyb nehomogenních (spřažených) nosníků v pružném oboru 72
3.7 Ohyb nosníků v pružnoplastickém oboru 77

4 Přetvoření ohýbaných nosníků 88
4.1 Diferenciální rovnice ohybové čáry 88
4.2 Integrace diferenciální rovnice ohybové čáry - staticky určité případy 91
4.3 Složitější případy zatížení - Clebschova metoda 96
4.4 Mohrova metoda 101
4.5 Nosníky proměnného průřezu 106
4.6 Staticky neurčité případy ohybu 109
4.7 Vliv smyku na přetvoření nosníků 114

5 Kroucení 119
5.1 Kroucení prutů kruhového a mezikruhového průřezu 119
5.2 Kroucení prutů obecného průřezu 123
5.3 Kroucení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu 126

5.4 Kroucení tenkostěnných prutů uzavřeného průřezu 129
5.5 Staticky neurčité podepření v kroucení 133

6 Prostý smyk 136

7 Složené případy namáhání prutu 139
7.1 Prostorový ohyb 139
7.2 Mimostředný tah a tlak 144
7.3 Jádro průřezu 150
7.4 Mezní plastická únosnost při prostorovém ohybu 154
7.5 Mezní plastická únosnost při mimostředném tahu a tlaku 157

8 Stabilita a vzpěrná pevnost prutů 161
8.1 Eulerovo řešení stability přímého pružného prutu 161
8.2 Obecnější případy zatížení a podepření prutu 169
8.3 Ztráta stability v pružnoplastickém oboru 172
8.4 Kombinace vzpěrného tlaku s ohybem 175
8.5 Pevnostní pojetí vzpěru. Posouzení prutů na vzpěr 178

9 Úvod do rovinné a prostorové napjatosti 183
9.1 Hlavní napětí při rovinné napjatosti 183
9.2 Hlavní napětí při prostorové napjatosti 189
9.3 Diferenciální rovnice rovnováhy 191
9.4 Deformační (geometrické) rovnice 193
9.5 Fyzikální rovnice - obecný Hookův zákon 194
9.6 Volné kroucení prutu nekruhového průřezu 197

10 Kritéria pevnosti a plasticity 202
10.1 Porušení materiálu a jeho modelování 202
10.2 Kritéria pevnosti (plasticity) pro materiály se shodnou mezí pevnosti (kluzu) v tahu a tlaku 203
10.3 Materiály s různou pevností v tahu a tlaku 206
10.4 Únavová pevnost 207

Literatura 210

1 Úvod, základní pojmy

1.1 Úkoly a výchozí předpoklady teorie pružnosti a plasticity

Teorie pružnosti a teorie plasticity jsou součásti mechaniky kontinua pevné fáze - deformovatelných těles. Předmětem zkoumání jsou především **napětí** (intenzita vnitřních sil) v tělese, resp. v konstrukci a **deformace** (přetvoření) - geometrické změny rozměrů a tvaru těles. Studuje se též **stabilita** - schopnost zachovat nebo obnovit původní rovnovážný stav soustavy bez samovolného narůstání deformací.

Teorie pružnosti a plasticity (TPP) využívá poznatků vědních oborů, které studují **pevnost** materiálu, tj. schopnost odolávat vnějším účinkům bez porušení. Při aplikaci na stavební inženýrství naopak TPP vytváří teoretický základ pro **teorii konstrukcí** (ocelových, betonových, dřevěných aj.), protože konečným cílem stavebního inženýra - konstruktéra je navrhnout dostatečně spolehlivou nosnou konstrukci tak, aby odolávala účinkům zatížení, teplotních změn, vynucených přetvoření a jiných vlivů.

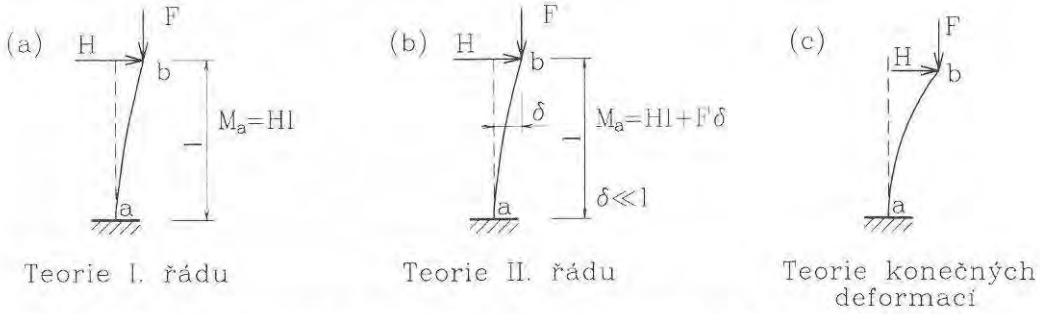
Tradičně se rozlišovala **technická** nauka o pružnosti a pevnosti, využívající řady zjednodušujících předpokladů a zabývající se jednoduššími prvky - především nosníky, a **matematická** teorie pružnosti a plasticity, užívající více metod vyšší matematické analýzy a zkoumající náročnější úlohy (plošné konstrukce - stěny, desky a skořepiny, obecná tělesa). Hranice mezi oběma vědními obory však nebyly nikdy jednoznačné a v současnosti se dále stírají tím, že metody pro výpočet nejrůznějších typů konstrukcí se budují na společných teoretických výchozích principech, využívajících rozsáhlých možností současné výpočetní techniky.

Nejjednodušší pojetí teorie pružnosti, které můžeme označit jako klasickou lineární pružnost, se opírá především o tyto **výchozí předpoklady**:

1. **Spojitost látky**. Těleso pokládáme za kontinuum, zaplňující celý objem bez mezer - nezabýváme se mikrostrukturou materiálu. Tento přístup umožňuje pojímat napětí i deformace jako spojité funkce.
2. **Homogenita a izotropie**. Homogenní (stejnorodou) látkou rozumíme takovou, jejíž fyzikální vlastnosti jsou ve všech místech shodné. Nerespektujeme tedy nahodilé vady a nerovnoměrnosti; jestliže však v konstrukci záměrně kombinujeme dva nebo více materiálů - např. beton a ocel, pak ovšem rozlišujeme vlastnosti jednotlivých složek a předpoklad homogenní látky tak opouštíme. Izotropní materiál má vlastnosti nezávislé na směru, což přibližně platí u řady stavebních látek, nikoli však např. u dřeva aj.
3. **Lineární pružnost**. Pružností rozumíme schopnost látky vracet se po odstranění příčin změn (např. zatížení) do původního stavu. Pokud platí přímá úměrnost mezi napětím a deformací - Hookův zákon, hovoříme o **fyzikální linearitě**.
4. **Malé deformace**. U stavebních konstrukcí je zcela oprávněný předpoklad, že změny jejich tvaru jsou velmi malé stejně tak jako posuny jednotlivých bodů (např. průhyby nosníků) ve srovnání s rozhodujícími rozměry prvků konstrukce. To umožňuje řadu zjednodušení při matematickém řešení úloh pružnosti a obvykle vede k lineárním

závislostem - hovoříme o **geometrické linearitě**. Výjimkou je použití tzv. teorie II. řádu, jak bude zmíněno dále.

5. **Statické zatěžování**. Předpokládáme dostatečně povlovné narůstání vnějších účinků (např. zatížení) a v důsledku toho i napětí a deformací, takže je možné zanedbat dynamické účinky.
6. **Počáteční nenapjatost**. Při určování napětí vycházíme z představy, že ve výchozím stavu byla veškerá napětí rovna nule. Případná vnitřní pnutí vyvolaná např. výrobou (válcováním ocelových nosníků, svařováním apod.) nejsou tedy v řešení podle teorie pružnosti zahrnuta a určují se jinak.



Obr. 1.1 *Teorie malých deformací I. a II. řádu, teorie konečných deformací*

Uvedené předpoklady umožňují uplatnění **principu superpozice** - skládání účinků, který je založen na linearitě všech matematických závislostí.

Určitou výjimku představuje postup podle **teorie II. řádu**, při němž se podmínky rovnováhy sestavují pro **deformovanou** konstrukci, tedy respektuje se vliv posunů a pootočení na velikost silových veličin. Ilustruje to obr. 1.1, kde podle teorie II. řádu zavádíme příspěvek Fδ k ohybovému momentu ve vetknutí. Tím je porušena linearita vztahů mezi silami a deformacemi a je omezeno uplatnění principu superpozice. Přitom i nadále můžeme pokládat deformace za velmi malé; studiem úloh, kdy posuny jsou řádově srovnatelné s délkami prutů apod., se zabývá teorie konečných deformací.

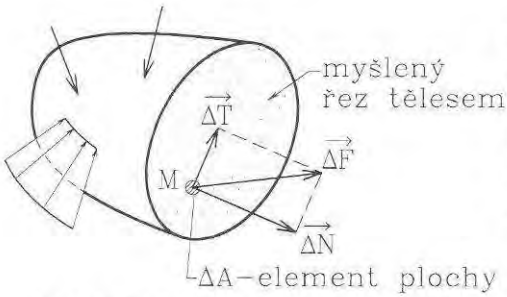
Plasticitou rozumíme schopnost látky deformovat se bez porušení nevratným, tvárným způsobem. Zatížení a odlehčení se neřídí shodnými zákonitostmi, v tělese (konstrukci) zůstávají i po odstranění zatížení trvalé deformace, případně i zbylá (reziduální) napětí. Deformační závislosti pak již nejsou lineárními - jde o tzv. **fyzikální nelinearitu**, principu superpozice tedy nelze využít. Kromě přepokladu lineární pružnosti však v teorii plasticity vycházíme s týchž přepokladů, jak byly uvedeny výše. V nosných stavebních konstrukcí se využívá plastických vlastností oceli, a to jak u ocelových, tak zejména u železobetonových konstrukcí vyztužených vložkami z oceli, jež se může výrazně plasticky deformovat.

1.2 Vnitřní síly, napětí

Na těleso (konstrukci) působí **vnější síly** buď v podobě povrchových nebo objemových sil (např. gravitačních). Vnější síly může me rozdělit na primární, které označujeme jako **zatížení**, a sekundární - podporové reakce, které vznikají jako odezva na účinky přilože-

ného zatížení i jiných vlivů. Pokud je těleso v klidu, tvoří všechny vnější síly rovnovážnou soustavu.

Vnitřní síly jsou ty, jimiž na sebe vzájemně podle principu akce a reakce působí dvě části tělesa oddělené libovolným myšleným řezem. V průřezu prutu, tj. v řezu kolmém k jeho střednici, jsou charakterizovány složkami své výslednice: normálovou a posouvající silou, ohybovým momentem atd.



Obr. 1.2 *K definici napětí*

Velikosti vnitřních sil samy o sobě - bez vztahu k velikosti a tvaru "odporující" plochy - nevypovídají příliš o míře namáhání tělesa, prvku konstrukce. Významnější veličinou je v tomto ohledu **napětí**, které je jedním z klíčových pojmů teorie pružnosti a plasticity.

K jeho definici si představme, že v určitém řezu tělesem - např. rovinném, v okolí vyšetřovaného bodu M (obr. 1.2) vymezíme malou plošku o obsahu ΔA a určíme výslednici vnitřních sil, které na ní působí - vektor $\Delta\vec{F}$. Rozložíme-li tuto elementární sílu do dvou složek, a to do normály ($\Delta\vec{N}$) a do roviny řezu ($\Delta\vec{T}$), pak limity poměru těchto sil k obsahu zmenšující se oblasti

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\vec{N}}{\Delta A}, \qquad \tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\vec{T}}{\Delta A} \tag{1.1}$$

označujeme jako **normálové** a **smykové** (tangenciální, tečné) **napětí** v bodu M daného řezu tělesem. Uvažovaný bod zůstává ovšem při limitním přechodu stále uvnitř plošného elementu.

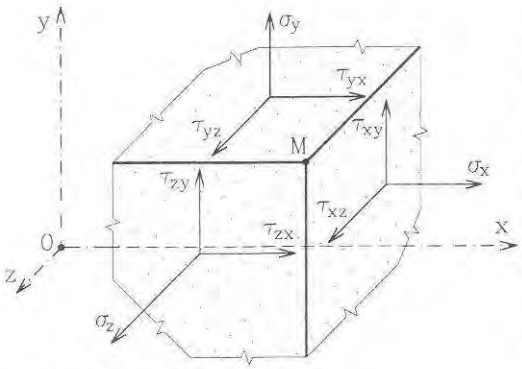
Z uvedené definice je zřejmý rozměr napětí: je to síla dělená plochou; základní měrnou jednotkou je **pascal** (Pa), tedy newton dělený čtverčním metrem $\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2}$. Tato jednotka je však pro praktické použití příliš malá a proto doporučenou jednotkou, v níž se vykazují hodnoty napětí je megapascal:

$$\mathrm{MPa} = 10^6\ \mathrm{Pa} = \mathrm{MN/m^2} = \mathrm{N/mm^2}\,. \tag{1.2}$$

Napětí v určitém bodu tělesa v řezu jistého sklonu je tedy vektor, charakterizovaný svými složkami. Týmž bodem můžeme ovšem vést libovolný (nekonečný) počet řezů, z nichž v každém je napětí obecně jiné. Souhrně všechny tyto hodnoty označujeme jako **stav napjatosti** tělesa v uvažovaném bodu. Lze dokázat, že stav napjatosti má povahu tenzoru, definovaného jednoznačně v pravoúhlé soustavě souřadnic maticí složek napětí

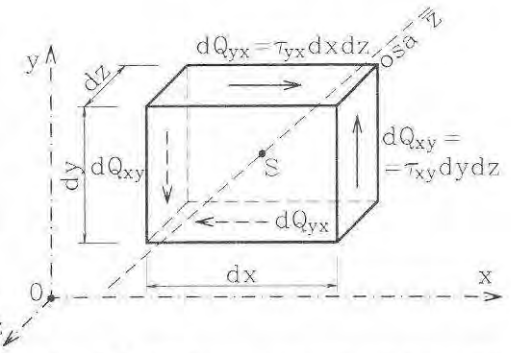
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Význam jednotlivých složek se ozřejmí podle obr. 1.3, na němž jsou vykresleny na rovinách rovnoběžných se souřadnicovými rovinami (pro názornost vyobrazení jsou



Obr. 1.3 *Složky napětí*

odsunuty od bodu M, k němuž je vztahujeme). Za kladné plochy řezu vedeného vyšetřovaným bodem pokládáme vždy ty, jejichž vnější normála má shodný smysl s osami souřadnic - jsou to ty, jež jsou na obr. 1.3 zobrazeny. **Normálová** napětí, jež označujeme indexem osy shodného směru, pokládáme za kladná tehdy, mají-li na kladných ploškách smysl shodný s osami souřadnic. **Smyková** napětí, která jsou na každé plošce dána dvěma složkami, mají první index shodný s orientací normály k této rovině, druhý pak souhlasí s osou souřadnic, s níž je složka smykového napětí rovnoběžná. Na záporných ploškách, tj. na odvrácených stěnách myšleného vyňatého kvádru v okolí bodu, směřují všechny složky napětí vždy opačným směrem než na znázorněných kladných ploškách.



Obr. 1.4 *Vzájemnost smykových napětí*

Mezi složkami smykových napětí platí vzájemné závislosti, které můžeme odvodit z momentových podmínek rovnováhy. Mysleme si z tělesa vydělen malý kvádr o hranách dx, dy a dz - obr. 1.4. Elementární síly na jeho stěnách obdržíme vynásobením příslušné složky napětí plochou stěny kvádru, na níž působí - např. $dQ_{xy} = \tau_{xy}\, dy\, dz$. Na obr. 1.4 jsou vyznačeny jen ty síly, které vyvolávají momenty k ose z vedené těžištěm kvádru S rovnoběžně s osou z. Z momentové podmínky rovnováhy k této ose

$$\Sigma M_z = 0: \qquad dQ_{xy}\, dx - dQ_{yx}\, dy = \tau_{xy}\, dy\, dz\, dx - \tau_{yx}\, dx\, dz\, dy = 0$$

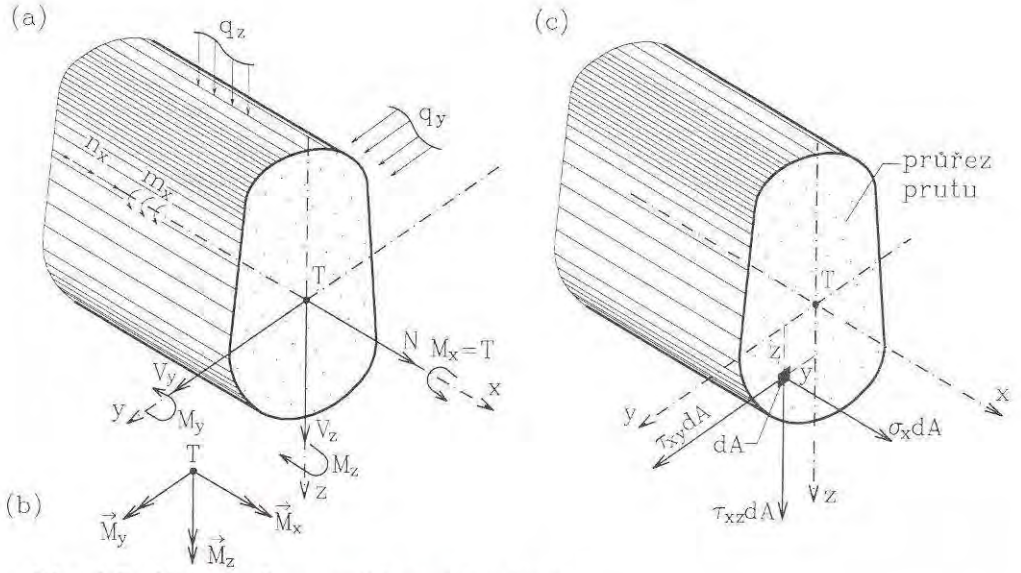
vyjde (po vydělení rovnice součinem $dx\ dy\ dz$) první rovnice (1.4) a analogickým postupem nebo záměnou indexů zbývající dvě:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}\,, \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}\,, \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz}\,. \tag{1.4}$$

Tyto rovnice se označují jako **věta o vzájemnosti smykových napětí**. Matice (1.3) popisující tenzor napětí je symetrická, takže stav napjatosti v bodu tělesa je jednoznačně určen šesti nezávislými složkami napětí; podrobněji budou tyto souvislosti probrány v kap. 9.

● Vztahy mezi vnitřními silami a napětími v průřezu prutu

V tomto učebním textu se budeme zabývat především **analýzou prutů**. Na obr. 1.5 je přehledně uvedeno označení a kladný smysl veličin, jak budou užity v dalším výkladu. Osu x ztotožníme s osou prurtu, za osy y a z volíme hlavní centrální, tj. těžištní osy



Obr. 1.5 *Vnitřní síly a napětí v průřezu prutu*

setrvačnosti průřezu (jde o tutéž pravotočivou soustavu souřadnic, jakou zavádíme u prostorových úloh, pootočenou však o 90° kolem osy x).

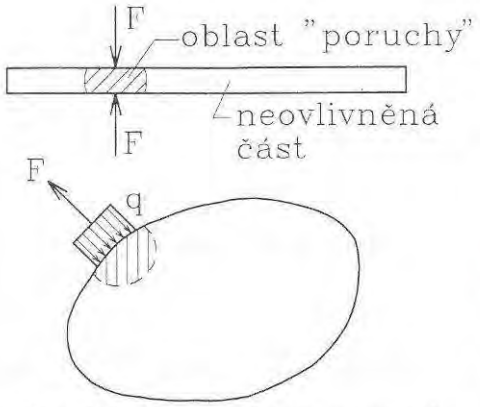
Kladný smysl složek výslednice vnitřních sil je zvolen tak, že jejich vektory souhlasí se zvoleným smyslem os souřa dnic. **Diferenciální podmínky rovnováhy**, odvozené ve statice přímého prutu, pak mají tento tvar:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} &= -n_x, \quad \frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}x} = -q_y, \\ \frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}x} &= -q_z, \quad \frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}x} = -V_y, \\ \frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} &= V_z, \quad \frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -m_x \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

První rovnice se vztahuje k osovému namáhání, další dvě k ohybu v rovině xz, tj. svislé (Schwedlerovy vztahy), následují analogické rovnice pro ohyb v rovině xy a poslední rovnice se vztahuje ke kroucení ($M_x = T$ je krouticí neboli torzní moment).

Složky elementární vnitřní síly působící na libovolné elementární plošce průřezu prutu získáme vynásobením složek napětí σ_x, τ_{xy} a τ_{xz} plochou $\mathrm{d}A$, jak je znázorněno na obr. 1.5c. Integrací jejich silových a momentových účinků po celé ploše získáme složky výslednice vnitřních sil v průřezu

$$\left.\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x \mathrm{d}A, \quad M_x = T = \int_A \left(\tau_{xz} y - \tau_{xy} z\right)\mathrm{d}A, \\ V_y &= \int_A \tau_{xy} \mathrm{d}A, \quad M_y = \int_A \sigma_x z \,\mathrm{d}A, \\ V_z &= \int_A \tau_{xy} \mathrm{d}A, \quad M_z = -\int_A \sigma_x y \,\mathrm{d}A, \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$



Obr. 1.6 *K Saint-Venantovu principu lokálnosti*

Tyto rovnice vyjadřují podmínky **statické ekvivalence** vnitřních sil v průřezu prutu. Musí být splněny vždy - v pružném nebo plastickém či jiném stavu, neurčují však konkrétní rozložení napětí po průřezu.

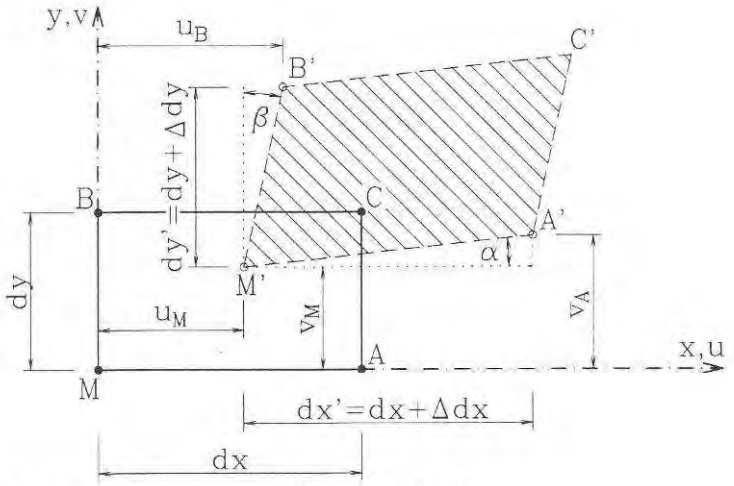
Řešení napjatosti těles často usnadňuje tzv. **Saint-Venantův princip** lokálního účinku. Lze jej formulovat takto: rovnovážná soustava sil přiložená k malé oblasti pružného tělesa ovlivní výrazněji jeho stav napjatosti jen v blízkém okolí (v oblasti "poruchy"), kdežto ve vzdálenějších bodech má zanedbatelné účinky - obr. 1.6.

Tohoto principu často využíváme ke zjednodušení povrchového zatížení jeho náhradou jiným, staticky ekvivalentním, pro výpočet příhodnějším (např. náhrada spojitého zatížení soustředěného na malé ploše osamělým břemenem apod.). Saint-Venantův princip je intuitivně přijatelný, ve své obecné podobě je však těžko dokazatelný a jeho účinnost je u různých typů konstrukcí (těles) dosti rozdílná.

1.3 Deformace, posuny

Vlivem zatížení, příp. jiných účinků (změny teploty atp.) se tělesa deformují (přetvoří). Tyto geometrické změny můžeme popsat pomocí **poměrných deformací** nebo prostřednictvím složek **posunů**, tj. přemístění jednotlivých bodů tělesa.

Poměrné deformace rozlišujeme délkové a úhlové. Délkové (ε) označujeme též jako **poměrné prodloužení** (zkrácení), je to poměr přírůstku délky k její původní hodnotě. Úhlovou deformaci (γ) nazýváme též **zkosením** nebo poměrným posunutím a rozumíme tím změnu úhlu mezi dvěma úsečkami, které byly před deformací vzájemně kolmé. Délkové i úhlové deformace jsou bezrozměrnými veličinami.



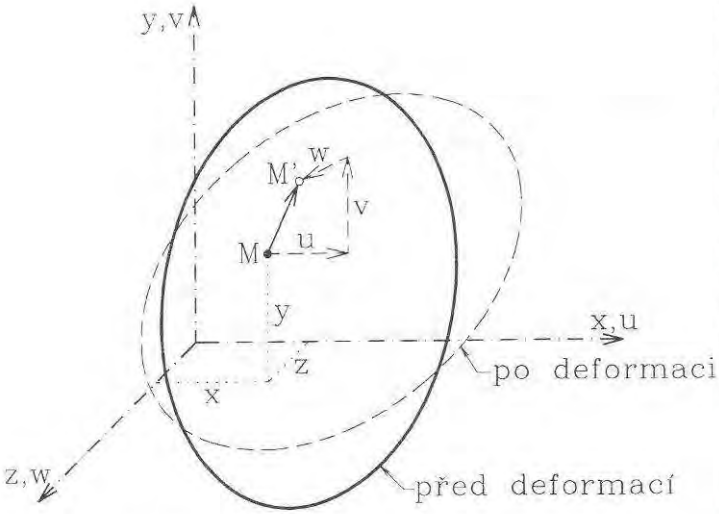
Obr. 1.7 *Poměrné deformace (délkové a úhlové)*

Na obr. 1.7 je znázorněna deformace elementárního obdélníkového prvku v rovině xy, při níž se vrcholy přemístí do poloh označených čárkami (M',..). Poměrná prodloužení ve směru x a y a zkosení jsou

$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{\Delta dx}{dx}, \qquad \varepsilon_y = \frac{dy' - dy}{dy} = \frac{\Delta dy}{dy}, \qquad \gamma_{xy} = \alpha + \beta, \tag{1.7}$$

kde dx, dy jsou původní délky stran a dx', dy' jejich délky po deformaci; Δdx, Δdy jsou tedy přírůstky délek. Úhly α a β jsou pootočení stran obdélníku - obr. 1.7. Připomeňme, že při splnění předpokladu **malých deformací** jsou veškeré poměrné deformace velmi malá čísla: $\varepsilon << 1, \gamma << 1$ (na obr. 1.7 jsou pro názornost zveličeny), takže můžeme uplatnit řadu pravidel pro počítání s malými čísly. Tak např. úhly můžeme ztotožnit s jejich tangentami ($\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha$), délky šikmých úseků s jejich průměty ($M'A' \approx dx$) apod.

Zcela analogicky jako v rovině xy můžeme odvodit deformace i v dalších rovinách, takže stav deformace v bodu tělesa je definován **šesti složkami**: ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz} a γ_{zx}. Jimi je též určen tzv. tenzor deformace, který je uspořádán analogicky jako tenzor napětí (1.3).



Obr. 1.8 *Složky posunů u, v, w*

Geometrii tělesa v jeho deformovaném stavu můžeme rovněž jednoznačně popsat pomocí složek **posunů** (přemístění) libovolného bodu tělesa. Tyto složky do směrů os souřadnic x, y, z označujeme u, v a w, a pokládáme je za kladné, mají-li shodný smysl s osami souřadnic - obr. 1.8. Jsou ovšem funkcemi polohy bodu - např. $u = u(x,y,z)$ apod.

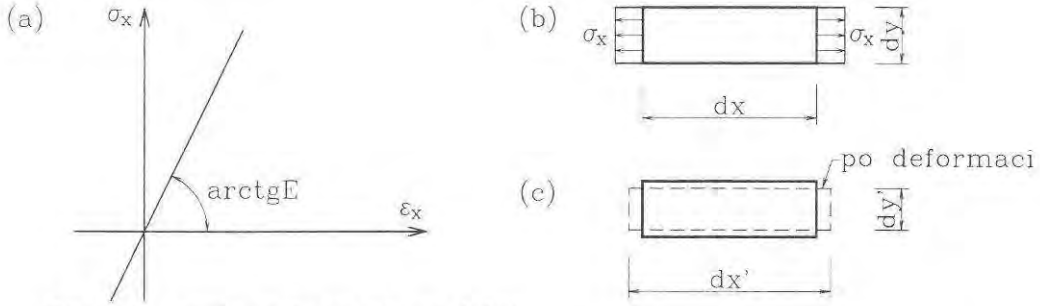
Známe-li složky posunu každého bodu, je plně definována geometrie deformovaného tělesa (včetně jeho translace a natočení v prostoru jako celku), takže můžeme odvodit velikost všech poměrných deformací definovaných výše. Je to zřejmé i z obr. 1.7: známe-li posuny jednotlivých vrcholů (některé z nich jsou na obrázku označeny, např. u_M, v_M aj.), dovedeme z nich odvodit všechny poměrné deformace vystupující v rovnicích (1.7). V obecném tvaru pro prostorový případ deformace jsou tyto tzv. **geometrické rovnice** odvozeny v kapitole 9 - viz rov. (9.16).

1.4 Fyzikální vztahy mezi napětími a deformacemi

Vzájemné vztahy mezi napětími a deformacemi závisí na fyzikálních, především mechanických vlastnostech materiálů. Pr oto označujeme tyto závislosti jako **fyzikální rovnice**. Zjišťováním vlastností stavebních látek a jejich zkoušením se zabývá samostatný předmět, na nějž navážeme. Do kategorie fyzikálních rovnic též patří popis účinků změn teploty aj.

● Lineárně pružný materiál. Hookův zákon

Pro pružný materiál platí jednoznačná závislost mezi napětími a deformacemi ve všech fázích působení, tedy při zatěžování i odlehčování, zatěžování v opačném smyslu apod. Tato závislost by teoreticky mohla být i nelineární, praktický význam má však především pružnost lineární.



Obr. 1.9 *Hookův zákon v tahu (a tlaku)*

Pro elementární kvádr namáhaný jen normálovým napětím ve směru osy x (jednoosá napjatost) - obr. 1.9, je lineární vztah mezi poměrným prodloužením ε_x a normálovým napětím σ_x vyjádřen **Hookovým zákonem** v tahu a tlaku

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \tag{1.8}$$

kde E je **modul pružnosti** v tahu a tlaku (Youngův), což je fyzikální konstanta, která má rozměr napětí a obvykle se udává v MPa.

Rozměry prvku měřené kolmo ke směru působícího napětí (v příčném směru) se rovněž změní a poměrná prodloužení jsou

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\upsilon\varepsilon_x = -\upsilon\frac{\sigma_x}{E}, \tag{1.9}$$

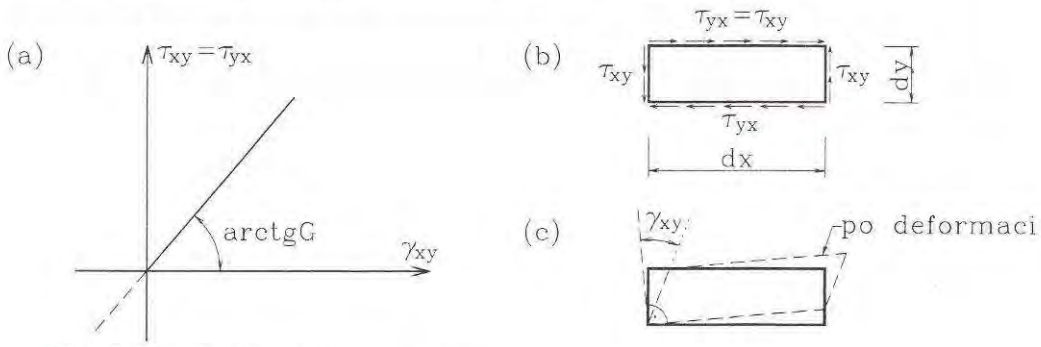
mají tedy opačný smysl než v podélném směru x, při $\sigma_x > 0$ tedy dochází v příčném směru ke zkrácení. Bezrozměrnou fyzikální konstantu υ (dříve též označovanou μ) nazýváme **Poissonovým součinitelem** příčné deformace. Je to číslo kladné a nemůže nabýt hodnoty

větší než 0,5, neboť pak by např. všestranně tlačené těleso zvětšovalo svůj objem - srov. rov. (9.20) v kap. 9.

Hookův zákon byl rovnicemi (1.8) a (1.9) formulován pro případ tahu ve směru x; analogické vztahy pro jednoosou napjatost ve směru y nebo z získáme záměnou indexů. Deformace při současném působení všech tří normálových napětí (σ_x, σ_y a σ_z) pak získáme superpozicí - tak např. ve směru x je

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \upsilon\frac{\sigma_y}{E} - \upsilon\frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right], \tag{1.10}$$

výrazy pro ε_y a ε_z plynou opět záměnou indexů - viz rovnice (9.18).



Obr. 1.10 *Hookův zákon ve smyku*

Obdobně jako pro tah a tlak platí i lineární závislost mezi zkosením a smykovým napětím - Hookův zákon ve smyku. V rovině xy (obr. 1.10)

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \tag{1.11}$$

kde G je modul pružnosti ve smyku [MPa]. V rovinách yz a zx platí rovnice analogické k (1.11).

Rozborem stavu deformace v rovině lze dokázat, že u **izotropní** látky nejsou uvedené tři fyzikální konstanty E, G a υ vzájemně nezávislé a že mezi nimi platí vztah

$$\frac{E}{G} = 2\left(1+\upsilon\right). \tag{1.12}$$

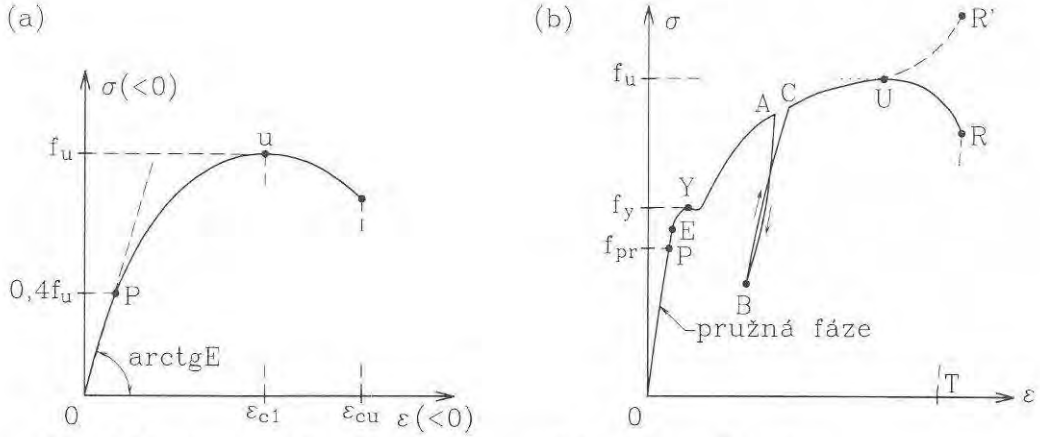
Izotropní látku lze tedy charakterizovat **dvěma elastickými konstantami**, třetí pak již plyne z rovnice (1.12). Uvážíme-li dříve zmíněné rozmezí pro Poissonův součinitel $0 \le \upsilon \le 0{,}5$, pak z rovnice (1.12) lze odvodit, že modul ve smyku G musí být v rozmezí $E/3$ až $E/2$.

Hodnoty E, G a υ se zjišťují zkouškami a jsou uváděny v literatuře - viz např. [3]. Vykazují vždy určitý rozptyl a pro základní konstrukční materiály se zavádějí určitými standardními hodnotami, tak např. pro **ocel**: E = 210 000 MPa, G = 81 000 MPa, υ = 0,3. U **betonu** záleží na pevnostní třídě, modul E (sečnový) se pohybuje v dosti širokém

rozmezí 20 000 MPa až 40 000 MPa, Poissonův součinitel se zavádí $\upsilon = 0{,}2$ a pak $G \cong 0{,}42E$. **Dřevo** není izotropním materiálem a má jinou hodnotu modulu ve směru vláken (např. $E_{//} = 10\,000$ MPa pro kvalitní jehličnaté dřevo) a kolmo k nim ($E_{\perp} = 300$ MPa), modul ve smyku $G = 600$ MPa.

● Nepružný materiál. Plasticita

Jak je známo z nauky o vlastnostech a zkoušení stavebních látek, reálné materiály se Hookovým zákonem řídí jen v omezené míře, některé jen při malých napětích. Tak např. na obr. 1.11a je znázorněn pracovní diagram - křivka $\sigma(\varepsilon)$ pro **beton v tlaku** a jeho možná aproximace v počáteční fázi proložením přímky (sečny) bodem P odpovídajícím napětí rovnému 40% meze pevnosti f_u (ultimate - mezní). Je zřejmé, že výstižnější by byla parabolická náhrada, jak se s tím čtenář seznámí blíže v betonovém stavitelství.



Obr. 1.11 *Pracovní diagram (a) betonu v tlaku a (b) oceli v tahu*

Na obr. 1.11b je znázorněn pracovní diagram konstrukční **oceli** v tahu. Až do meze úměrnosti f_{pr} (proporcionality) je závislost lineární - platí Hookův zákon. Při vyšším napětí je již přímá úměrnost porušena a k výraznému nárůstu deformací dochází po dosažení **meze kluzu** f_y (yield - kluz). Pak vzniká určité "zpevnění", napětí narůstají až k **mezi pevnosti** f_u, což je maximální dosažené konvenční napětí (určované bez přihlédnutí k místnímu zúžení tyče; skutečné napětí roste dále, jak je vyznačeno čárkovaně).

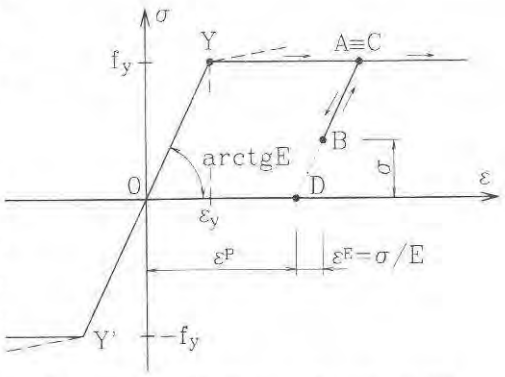
Pružné působení se ohraničuje **mezí pružnosti**, která je poněkud vyšší než mez úměrnosti (odpovídá bodu E na diagramu). Při vyšších napětích, zejména po překročení meze kluzu vnikají již **plastické deformace**, které mají nevratný charakter. Tak např. jestliže po dosažení bodu A na diagramu snížíme napětí, neprobíhá odlehčení podle původní křivky, ale přibližně rovnoběžně s počáteční větví $\overline{OP}$, tedy podle Hookova zákona, takže plastická část deformace nepomine (ani při úplném odlehčení). Při opětovném zvýšení napětí rovněž probíhají deformace zpočátku přibližně pružně (úsek $\overline{BC}$) a pak navážou na původní křivku.

Jednoduchý modelem takového působení je tzv. **ideální pružnoplastický materiál**, který můžeme charakterizovat takto (obr. 1.12):

a) v počáteční fázi, dokud napětí nedosáhne meze kluzu, tj $|\sigma| < f_y$, je materiál v **pružném stavu** a řídí se Hookovým zákonem - úsek $\overline{Y'Y}$,

b) po dosažení meze kluzu ($|\sigma| = f_y$) je materiál v **plastickém stavu** a deformace mohou volně narůstat - např. podél úseku $\overline{YA}$,

c) odlehčení (úsek $\overline{AB}$), případně opětovné zvýšení napětí ($\overline{BC}$) probíhá opět lineárně pružně, dokud není znovu dosaženo meze kluzu v tahu či tlaku.



Obr. 1.12 *Ideální pružnoplastický materiál*

V obecném případu (bod B diagramu) sestává deformace z pružné části ε^E a plastické ε^P, která nepomine ani při úplném odlehčení (bod D). Její velikost není jednoznačně určena - závisí na "historii" zatěžování.

Na pracovním diagramu ideálního pružnoplastického materiálu na obr. 1.12 nejsou plastické (vodorovné) větve nijak omezeny. Ve skutečnosti nelze připustit libovolné plastické deformace a předepisují se určité meze. Tomu musí též odpovídat vlastnosti použitého materiálu - především dostatečná **tažnost**, jíž se obvykle rozumí plastické protažení přetržené tyče, vyjádřené v procentech (odpovídá úseku $\overline{OT}$ na obr. 1.11b). Např. ocel ve svařovaných konstrukcích má mít tažnost alespoň 15%, rovněž u betonářské výztuže je vyžadována určitá tažnost apod.

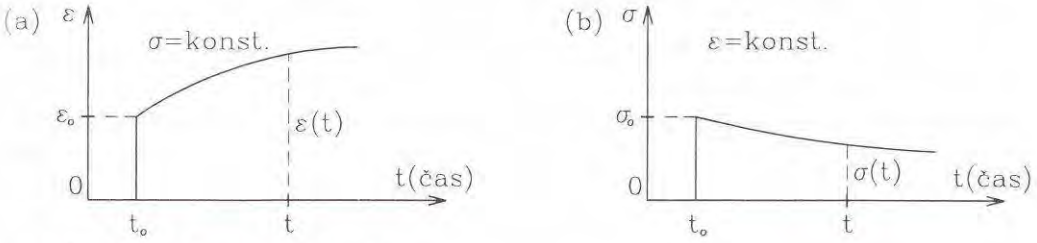
Pružnoplastické vlastnosti materiálů je možné modelovat i jinými pracovními diagramy - např. se vzestupnou větví v plastickém oboru (na obr. 1.12 čárkovaně). U látek s nízkou pevností v tahu se v nejjednodušším pojetí zcela vylučují tahová napětí, takže se diagram pro $\varepsilon > 0$ ztotožní s osou ε, tj. klade se $\sigma = 0$.

Závěrem připomeňme, že uplatnění plastických vlastností ve výpočtech má určité hranice. Deformační křivka, tj. pracovní diagram každého materiálu závisí též na rychlosti zatěžování, teplotě a dalších faktorech. Při proměnném napětí opakujícím se v mnoha cyklech se uplatní tzv. **únava materiálu** při napětích podstatně nižších než je mez kluzu při jednorázovém zatížení. Těmto otázkám bude blíže věnována pozornost v kapitole 10.

● Dotvarování a relaxace

Až dosud jsme předpokládali, že velikosti deformací ani napětí nezávisí na **čase**, tedy že veškeré změny se uskuteční bezprostředně po přiložení zatížení a dále se již nemění. Existují však jevy, u kterých hraje časový faktor významnou roli, ty jsou předmětem studia **reologie** (nauka o přetváření, tečení). Ve stavební praxi jde především o dotvarování a relaxaci.

Dotvarování můžeme charakterizovat jako dodatečný "samovolný" růst deformací aniž se zvyšuje napětí. Na obr. 1.13a je na vodorovnou osu vynášen čas t: jestliže v okamžiku vzniku napětí t_0 je okamžitá deformace ε_0, pak v čase t je $\varepsilon(t) > \varepsilon_0$. S tímto jevem se setkáváme např. u betonu, dřeva, některých zemin (např. u jílů) aj. Dotvarování souvisí s rozmanitými procesy probíhajícími ve struktuře materiálu a závisí na řadě faktorů



Obr. 1.13 *Dotvarování a relaxace*

- např. u betonu na složení betonové směsi, vlhkosti prostředí, stáří betonu v okamžiku vnesení napětí atp. Dlouhodobý nárůst deformací může být velmi podstatný a je třeba jej respektovat.

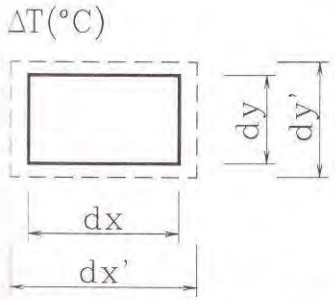
Relaxace (ochabování) je projevem téhož jevu, avšak při odlišném uspořádání: vyvození určité deformace ε vyvoláme počáteční napětí σ_0, a to pak v průběhu času klesá aniž se mění velikost deformace ε - obr. 1.13b. Tak např. vneseme-li určité napětí do kabelů v prvku předpjatého betonu, projeví se v průběhu času snížení napětí - ztráta předpětí vlivem relaxace (analogie s chováním strun hudebního nástroje).

Pro teoretické zkoumání těchto jevů lze využít různých **reologických medelů**: Hookova (elastická pružina), Newtonova (píst s otvory ve viskózní kapalině) a jejich vzájemných kombinací - viz [4], [5]. V současné době jsou pro jednotlivé materiály formulovány výpočtové metody opírající se zejména o výsledky zkoušek a dlouhodobých měření, jak bude podrobněji vysvětleno v odborných předmětech.

• Deformace od změny teploty

Změní-li se teplota prvku tělesa o přírůstek ΔT, a může-li prvek volně dilatovat, pak poměrné deformace vyvozené touto změnou jsou

$$\varepsilon_{xT} = \varepsilon_{yT} = \varepsilon_{zTD} = \alpha_T \Delta T, \qquad \gamma_{xyTD} = \gamma_{yzT} = \gamma_{zxT} = 0. \tag{1.13}$$



Obr. 1.14 *Deformace od změny teploty*

Prvek (elementární kvádr) tedy rovnoměrně zvětší své rozměry, nikoli však svůj tvar. Není-li mu nijak v deformaci bráněno, nevyvodí teplotní změna žádná napětí.

Fyzikální konstanta α_T je **součinitel tepelné roztažnosti** [$^oC^{-1}$]. U oceli se zavádí obvykle hodnotou $12 \cdot 10^{-6}$ $(^oC)^{-1}$, u betonu $10 \cdot 10^{-6}$ $(^oC)^{-1}$, u dřeva $3 \cdot 10^{-6}$ $(^oC)^{-1}$, u zdiva $5 \cdot 10^{-6}$ $(^oC)^{-1}$ atd. Pro různé další materiály jsou uvedeny jeho hodnoty v [3].

1.5 Spolehlivost nosné konstrukce

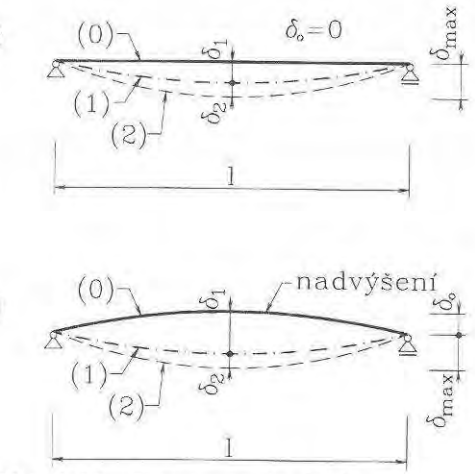
Výpočet vnitřních sil, napětí a deformací nosné stavební konstrukce není sám o sobě cílem, nýbrž prostředkem k posouzení jejího správného návrhu. Kritéria a postupy posouzení bezpečnosti a funkčnosti nosných prvků se neustále vyvíjejí (dříve se např. srovnávala extrémní napětí s tzv. dovoleným namáháním apod.), v současnosti se všeobecně přijímá metodika posuzování podle **mezních stavů**, zakotvená jak v našich normativních předpisech, tak v zaváděných evropských normách - Eurokódech (EC). Podrobný výklad této problematiky bude podán v kurzu spolehlivosti nosných konstrukcí, zde se omezíme jen na stručný nástin základních pojmů.

Nosná konstrukce má být navržena tak, aby byla **spolehlivá**, tj. aby po celou dobu své předpokládané životnosti byla schopna užívání k požadovanému účelu s přijatelně malou pravděpodobností poruchy. Svou spolehlivost ztrácí, jestliže překročí některý z mezních stavů. Rozlišujeme přitom dvě skupiny mezních stavů:

- mezní stavy únosnosti,
- mezní stavy použitelnosti.

Mezní stavy únosnosti mají povahu havárie konstrukce: její úplné nebo částečné zřícení, porušení celistvosti některých prvků (zlomení, přetržení), ztráta stability jako celku - např. překlopení opěrné zdi, sesuv objektu atp. Jde o stavy, kdy je ohrožena bezpečnost lidí, nebo kdy taková situace bezprostředně hrozí. Tato kategorie mezních stavů má nejvyšší míru závažnosti.

Mezní stavy použitelnosti spočívají především ve vzniku nadměrných deformací (např. průhybů) nebo nepřijatelných vibrací a jiných dynamických stavů konstrukce. Velikosti průhybů je třeba omezit jednak s ohledem na bezporuchový chod strojního a technologického zařízení a také proto, aby se vyloučily (nebo omezily na přijatelnou míru) poruchy výplní - oken, příček apod. Svou roli též hraje estetický dojem souvisící s důvěrou v bezpečnost konstrukce.



Obr. 1.15 *Posuzované průhyby*

Pro stanovení přípustných hodnot průhybů dávají předpisy určitá doporučení, v nichž se rozlišuje průhyb od stálého zatížení v okamžiku zabudování prvku δ_1, dodatečný průhyb od nahodilého zatížení a od časového nárůstu průhybu od stálého zatížení (např. od dotvarování) δ_2 a maximální průhyb δ_{max} měřený od spojnice podpor, tj. po odečtení případného nadvýšení - viz obr. 1.15

$$\delta_{max} = \delta_1 + \delta_2 - \delta_0. \tag{1.14}$$

U betonových konstrukcí se doporučuje, aby bylo $\delta_{max} < l/250$ (l je rozpětí nosníku nebo dvojnásobek vyložení konzoly), $\delta_2 < l/500$. U ocelových konstrukcí má být obvykle

$\delta_{max} < l/500$ a pro stropnice $\delta_2 < l/250$, pro průvlaky $\delta_2 < l/400$, pro překlady $\delta_2 < l/600$ atd. Podobná doporučení jsou formulována i pro vodorovné posuny budov a jiných objektů.

Při výpočtu vnitřních sil, napětí a deformací konstrukce vycházíme z účinků **zatížení**, příp. dalších vlivů. Obecně rozlišujeme dvě úrovně (hladiny) zaváděných zatížení:

- charakteistické hodnoty zatížení,
- výpočtové (návrhové) hodnoty zatížení.

Charakteristické hodnoty zatížení F_k (též: provozní, normové) jsou takové, které můžeme v průběhu užívání jako maximální hodnoty skutečně očekávat. U vlastní tíhy jsou dány projektovanými rozměry a objemovými tíhami materiálů, u nahodilého zatížení lidmi jsou uváděny v předpisech (např. pro obytné místnosti, úřady, obchodní plochy atp.), v jiných případech vyplývají např. z požadavků technologie nebo jsou dány požadavkem objednatele stavby. Klimatická zatížení (od účinků větru, sněhu aj.) jsou uváděna v předpisech v závislosti na zeměpisné poloze a jiných faktorech.

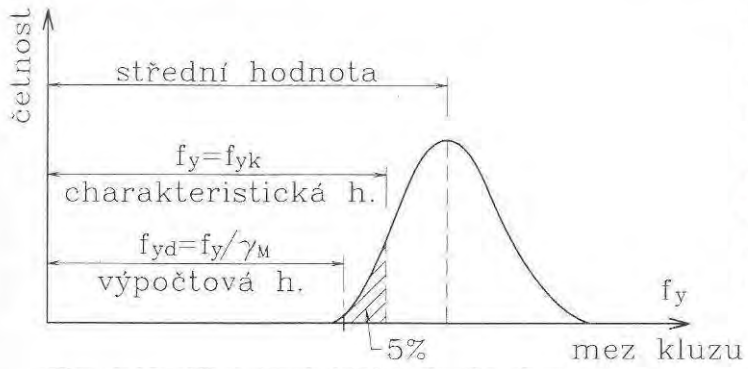
Výpočtové hodnoty zatížení F_d (design - návrh) se určují z charakteristických hodnot vynásobením dílčím součinitelem spolehlivosti zatížení γ_F (obvykle $\gamma_F > 1$, je-li vyšší zatížení nepříznivější). Součinitel zatížení se diferencuje pro různé typy zatížení, např. pro stálé a dlouhodobé zatížení γ_G a pro nahodilé γ_Q. Pak tedy

$$F_d = \gamma_G F_G + \gamma_Q F_Q , \tag{1.15}$$

kde F_G znamená stále a F_Q nahodilé zatížení. Doporučené hodnoty podle EC jsou $\gamma_G = 1{,}35$, $\gamma_Q = 1{,}50$; v ČR se navrhuje zavedení nižších hodnot: $\gamma_G = 1{,}20$, $\gamma_Q = 1{,}40$.

Při posouzení mezního stavu **použitelnosti** zavádíme hodnoty **charakteristického** zatížení F_k. Vnitřní síly pak označujeme indexem k, např. normálovou sílu N_{Sk}, ohybový moment M_{Sk} atp. (index S znamená vnitřní sílu). Při posouzení na mezní stav **únosnosti** se uplatní obvykle **výpočtové** zatížení F_d, odpovídající vnitřní síly pak značíme N_{Sd}, M_{Sd} atp.

Pevnosti materiálu rovněž rozlišujeme charakteristické a výpočtové. **Charakteristická pevnost** f_k se odvozuje za statistického rozboru skutečných vlastností materiálu a volí se jako určitý (např. 5%) kvantil, tj. jako hodnota, pod níž klesne sledovaná pevnost při dostatečně rozsáhlé sérii zkoušek nejvýše u určitého procenta vzorků. Na obr. 1.16 je to znázorněno pro mez kluzu oceli.



Obr. 1.16 *Charakteristická a výpočtová pevnost*

Výpočtová pevnost se odvodí z charakteristické pevnosti dělením dílčím součinitelem

spolehlivosti materiálu γ_M

$$f_d = \frac{f_k}{\gamma_M}. \tag{1.16}$$

Velikosti součinitelů γ_M se rovněž stanovují ze statistického rozboru skutečných vlastností stavebních materiálů. U **ocelových** konstrukcí $\gamma_M = 1{,}1 \div 1{,}2$, např. pro ocel Fe360 (St235), jejíž mez kluzu je $f_y = 235$ MPa a mez pevnosti $f_u = 360$ MPa (charakteristické hodnoty), je podle našich předpisů $\gamma_M = 1{,}1$ atp.. Připomeňme, že mez kluzu přebírá u oceli často roli charakteristické pevnosti ($f_k = f_y$). U **betonových** konstrukcí se pro beton zavádí $\gamma_M = 1{,}5$, pevnosti betonu závisí na jeho třídě - např. pro třídu C20/25 je pevnost v tlaku $f_{ck} = 20$MPa, min. pevnost v tahu $f_{tk} = 1{,}5$ MPa. U **dřevěných** prvků $\gamma_M = 1{,}3$, mimoto se hodnoty pevností modifikují součinitelem k_{mod} (násobným), závislým na délce trvání zatížení a na vlhkosti (pro běžné případy je $k_{mod} = 0{,}6 \div 0{,}9$). Pevnosti ve směru rovnoběžně s vlákny pro třídu dřeva (jehličnatého) SI se doporučují: v tahu $f_{tk} = 13$ MPa, v tlaku $f_{ck} = 20$ MPa, při ohybu $f_{mk} = 22$ MPa. Podrobnosti jsou předmětem výkladu v příslušných odborných předmětech.

Únosnost označujeme indexem R; je-li odvozena z výpočtových pevností, pak připojujeme index d. Tak např. únosnost průřezu prutu v tahu je pak N_{Rd}, v ohybu M_{Rd} atp. **Podmínka spolehlivosti** při posouzení podle mezního stavu únosnosti pak spočívá v tom, že vnitřní síly (S) vznikající např. v průřezu prutu od výpočtového zatížení nesmějí překročit odpovídající hodnoty únosnosti (R) určené z výpočtových pevností, tedy např.

$$N_{Sd} \le N_{Rd}, \qquad M_{Sd} \le M_{Rd}, \tag{1.17}$$

a podobně pro další vnitřní síly nebo jejich kombinace. U lineárně pružného materiálu můžeme podmínku spolehlivosti formulovat v napětích:

$$\sigma_d \le f_d. \tag{1.18}$$

2 Tah a tlak

2.1 Napětí při osovém tahu a tlaku

Osovým (prostým) tahem nebo tlakem přímého prutu rozumíme takový způsob namáhání, při němž jedinou nenulovou složkou vnitřních sil v libovolném průřezu prutu je **normálová síla** N; je-li kladná ($N > 0$), jedná se o tah, v opačném případě ($N < 0$) jde o tlak. Všechny ostatní složky výslednice vnitřních sil jsou rovny nule:

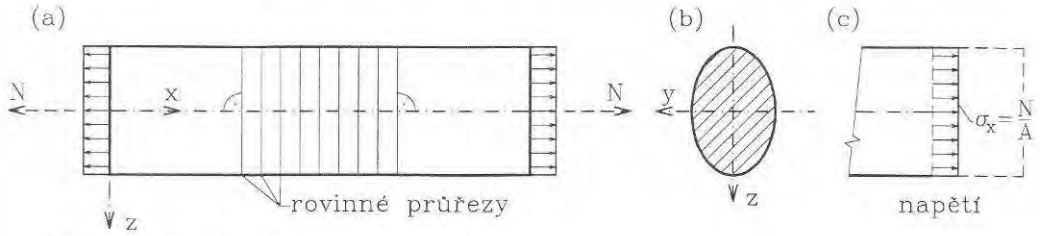
$$V_y = V_z = 0, \quad M_x = M_y = M_z = 0. \tag{2.1}$$

Při určení napjatosti a deformací osově namáhaného prutu se obvykle vychází z těchto dvou **základních předpokladů** (hypotéz):

a) průřezy zůstávají rovinnými a kolmými k ose prutu i po deformaci (Bernoulliova hypotéza),

b) podélná vlákna na sebe vzájemně netlačí.

Pro běžné případy prutů jsou tyto předpoklady dostatečně výstižné, o výjimkách bude zmínka níže.



Obr. 2.1 *Prostý tah přímého prutu*

První předpoklad má povahu deformační (geometrickou) a plyne z něho, že příčné průřezy (na obr. 2.1a jsou některé znázorněny) se nezkřiví a zůstanou vzájemně rovnoběžné. Důsledkem toho je, že jsou nulová zkosení $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$ a z Hookova zákona ve smyku (1.11) vyplývá

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \tag{2.2}$$

smyková napětí v průřezu jsou tedy rovna **nule**. Dalším důsledkem vzájemné rovnoběžnosti průřezů po deformaci je shodné poměrné protažení ε_x v určitém průřezu x = konst., takže s ohledem na platnost Hookova zákona v tahu - rov. (1.8) - jsou i normálová napětí v průřezu konstantní

$$\sigma_x\,(x = \text{konst.}) = \text{konst.} \tag{2.3}$$

Druhý předpoklad, že na sebe vzájemně netlačí "vlákna" prutu, vyjadřuje podmínku, že normálová napětí v rovinách kolmých k průřezu jsou rovna nule

$$\sigma_y = \sigma_z = 0. \tag{2.4}$$

Ze šesti (nezávislých) složek tenzoru napětí (1.3) je tedy nenulová pouze jediná složka; takový stav nazýváme **jednoosou** (přímkovou) **napjatostí**.

Napětí v průřezu prutu musí splňovat podmínky statické ekvivalence vnitřních sil (1.6), jak byly formulovány v odst. 1.2. Podmínky odsahující smyková napětí (jež jsou rovna nule) jsou splněny identicky, neboť podle rov. (2.1) jsou $V_y = V_z = M_x = 0$. Ve zbývajících třech rovnicích využijeme toho, že podle (2.3) je σ_x = konst. v každém průřezu, a respektujeme podmínku $M_y = M_z = 0$, definující prostý tah - rov. (2.1). Je tedy

$$N = \int_A \sigma_x \mathrm{d}A = \sigma_x \int_A \mathrm{d}A = \sigma_x A,$$
$$M_y = \int_A \sigma_x z \mathrm{d}A = \sigma_x \int_A z \mathrm{d}A = \sigma_x S_y = 0,$$
$$M_z = -\int_A \sigma_x y \mathrm{d}A = -\sigma_x \int_A y \mathrm{d}A = -\sigma_x S_z = 0.$$

V posledních dvou rovnicích znamenají S_y a S_z statické momenty průřezové plochy k osám y a z. Tyto osy jsme však zavedli jako těžištní, takže statické momenty plochy průřezu k nim jsou nulové ($S_y = S_z = 0$) a poslední dvě rovnice jsou splněny.

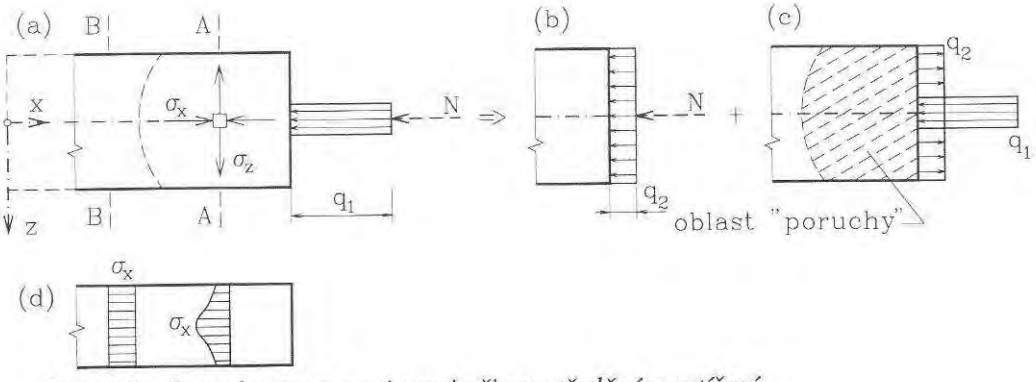
Z první rovnice plyne **velikost normálových napětí** v průřezu

$$\sigma_x = \frac{N}{A} . \tag{2.5}$$

Vraťme se nyní k obr. 2.1, na němž je znázorněn prut stálého průřezu, zatížený na koncích rovnoměrně rozloženým zatížením o výslednici N. V tomto případě, kdy zatížení konců je shodné s napětím σ_x uvnitř prutu, jsou výchozí předpoklady řešení splněny **přesně** a odvozené vztahy souhlasí se závěry matematické teorie pružnosti. Pokud se však odchýlíme od tohoto základního modelu - ať již způsobem zatížení nebo tvarem prutu, přestává být odvozené řešení dostatečně výstižné, jak bude vysvětleno níže.

Soustředěné zatížení na koncích prutu

Je-li osové zatížení na konci prutu soustředěno na malé ploše (na obr. 2.2 je znázorněn případ tlaku), vznikne v okolí konce prutu určitá oblast, kde neplatí výše uvedené vztahy pro napětí.



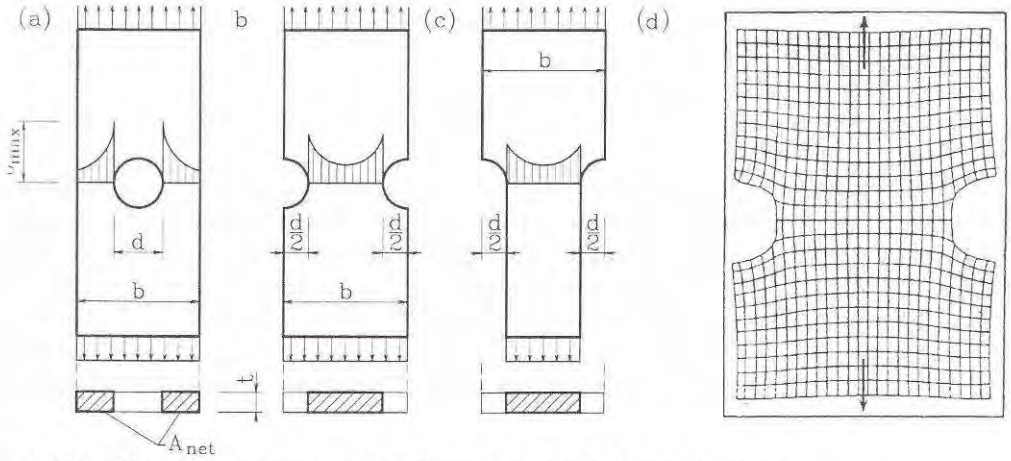
Obr. 2.2 *Poruchy stavu napjatosti při soustředěném zatížení*

Ze Saint-Venantova principu lokálnosti (odst. 1.2) vyplývá, že tato oblast "poruchy" je omezená - lze si to představit podle obr. 2.2 tak, že soustředěné zatížení nahradíme rovnoměrným zatížením o téže výslednici (obr. 2.2b) a pak toto zatížení zavedeme v opačném smyslu spolu s původním (obr. 2.2c). Stav dle (b) vede na rovnoměrné rozložení napětí v prutu a stav (c) představuje rovnovážnou soustavu sil, jejíž vliv je podle Saint-Venantova principu lokálně omezený.

V této okrajové tzv. **roznášecí oblasti** vzniká složitý prostorový stav napjatosti, při němž kromě nerovnoměrného rozložení normálových napětí σ_x po průřezu (srovnej průběhy σ_x v řezech *A,B* na obr. 2.2d) vznikají tahová napětí v příčném směru (σ_y, σ_z), jež mohou vést k roztržení prutu. Tento jev má význam především u betonových nosníků vzhledem k podstatně nižší pevnosti betonu v tahu než v tlaku.

● Pruty proměnného průřezu

U prutů s **povlovnou** změnou průřezu platí velmi dobře řešení odvozené pro prut stálého průřezu. Rozdělení normálových napět í po průřezu se liší jen málo od konstantního podle rovnice (2.5) a smyková napětí, jež v průřezu vzniknou, nenabývají příliš velkých hodnot (jejich poměr k normálovým napětí závisí na sklonu površek prutu).



Obr. 2.3 *Koncentrace pružných napětí při náhlé změně průřezu*

Jinak je tomu v případech **náhlé průřezové změny**, vyvolané např. otvorem, vruby, zúžením apod. Na obr. 2.3d je podrobně vykreslena deformace původně pravoúhlé sítě taženého prutu obdélníkového profilu se dvěma půlkruhovými výřezy. Je zřejmé, že Bernoulliova hypotéza zachování rovinnosti průřezů zde neplatí. V nejvíce oslabených průřezech (viz. obr. 2.3a, b, c) vzniká značně nerovnoměrné rozdělení napětí s maximální hodnotou

$$\sigma_{x,\max} = k\frac{N}{A_{net}}, \tag{2.6}$$

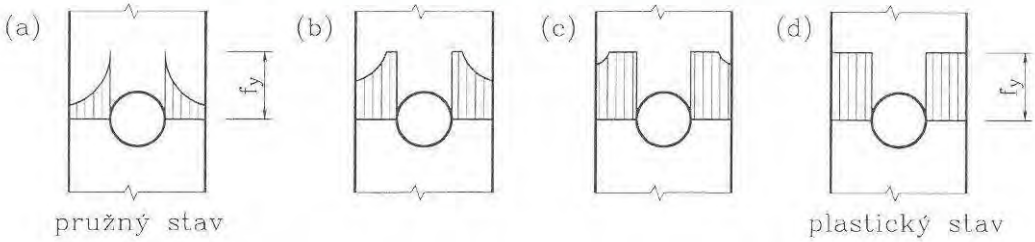
kde A_{net} je plocha oslabeného průřezu, tj. $A_{net} = t\,(b - d)$ a k je **součinitel koncentrace napětí**, závislý na geometrii prvku. Určuje se metodami matematické teorie pružnosti

nebo experimentálně. Např. pro pásnici s centricky umístěným otvorem (obr. 2.3a) platí podle [9] hodnoty uvedené v tabulce 2.1.

Tabulka 2.1 - *Součinitele koncentrace u kruhového otvoru*

d/b	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
k	3,00	2,72	2,51	2,35	2,24	2,16	2,11

Samotný součinitel koncentrace napětí nepostačuje ovšem k posouzení spolehlivosti prutu v místě průřezové změny; svůj vliv mají též ostatní složky napětí a zejména při mnohanásobném kolísání intenzity napětí může zde dojít k lomu vlivem tzv. **únavy materiálu** (viz. kap. 10). Týká se to nejen případů naznačených výše, ale řady konstrukčních detailů (přípojů aj.), jak se o tom pojednává v teorii ocelových konstrukcí.



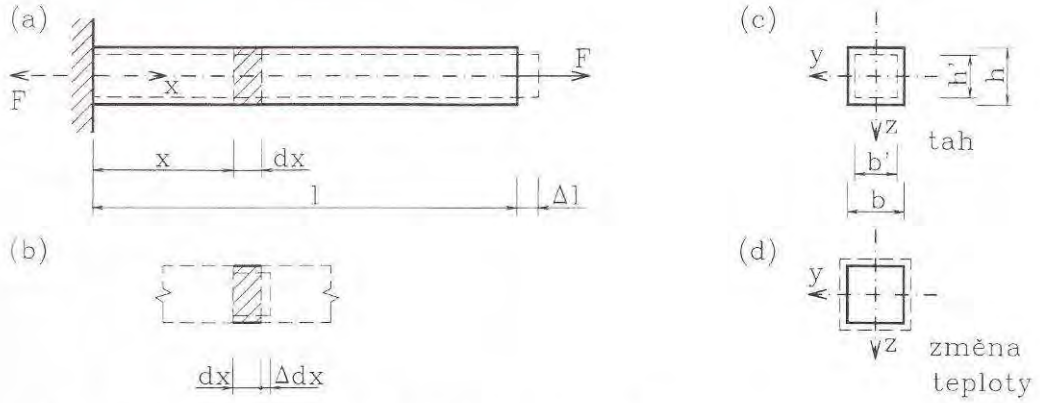
Obr. 2.4 *Plastické vyrovnání napětí v místě koncentrace*

Při klidném (statickém) namáhání materiálu s výraznou mezí kluzu a dostatečnou tažností je možné uvažovat s plastickým působením prutu. Spočívá v tom, že při postupném nárůstu osové síly dosáhne maximální normálové napětí meze kluzu f_y a tuto nepřekročí - srov. idealizovaný diagram pružnoplastického materiálu na obr. 1.12. Postupným zvyšováním zatížení se nakonec napětí vyrovnají v celém oslabeném průřezu, čímž je dosaženo mezního plastického stavu. Počítáme-li tedy i v místech náhlé průřezové změny s napětím N/A_{net}, zavádáme tím vlastně předpoklad **plastické únosnosti** taženého prutu.

Závěrem připomeňme, že u jednoosého stavu napjatosti, který vzniká při prostém tahu nebo tlaku, vymizí sice smyková napětí v průřezu prutu (řezu kolmém k ose) a v rovinách kolmých k průřezu, avšak v šikmých řezech jsou smyková napětí nenulová, jak plyne z podmínek rovnováhy - podrobněji bude tato otázka rozebrána v kap. 9 - srov. rovnice (9.5).

2.2 Přetvoření taženého (tlačeného) prutu

Při zjišťování přetvoření (deformací) taženého n. tlačeného prutu budeme vycházet ze vztahu (2.5), nebudeme tedy brát zřetel na případné poruchy napjatosti zmíněné výše. Vliv vlastní tíhy (při svislé ose prutu) bude vyšetřován jako samostatný zatěžovací případ. Pokud bude prut tlačen, platí odvození jen za předpokladu, že je dokonale přímý a nedojde u něho ke ztrátě stability - blíže viz. kap. 8.



Obr. 2.5 *Deformace taženého prutu stálého průřezu*

Uvažujeme nejprve případ prutu stálého průřezu zatíženého jen na koncích dle obr. 2.5. V tomto případě je normálová síla konstantní $N = F$, takže prodloužení všech délkových elementů je shodné (při A = konst.) a z definice poměrného protažení - rov. (1.7) a z Hookova zákona v tahu - rov. (1.8) je celkové prodloužení prutu

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dx = \int_0^l \varepsilon_x dx = \int_0^l \frac{\sigma_x}{E} dx = \frac{N}{EA}\int_0^l dx = \frac{Nl}{EA}, \tag{2.7}$$

kde $N = F$. Tento vztah můžeme pokládat za alternativní formulaci Hookova zákona. Inverzí z něho plyne tahová síla vyjádřena pomocí prodloužení

$$N = \frac{EA}{l}\Delta l = k\Delta l, \tag{2.8}$$

kde jsme zavedli veličinu charakterizující **tuhost prutu** (stálého průřezu) v tahu

$$k = \frac{EA}{l} \tag{2.9}$$

- je to síla potřebná k protažení prutu o jednotkovou délku (kN/m apod.). Její převrácená hodnota charakterizuje poddajnost prutu.

Jak bylo uvedeno v odst. 1.4, probíhají v pružné látce příčné deformace úměrně Poissonovu součiniteli υ, takže příčné rozměry - např. výška h (obr. 2.5c) - se změní o hodnotu plynoucí z rov. (1.9)

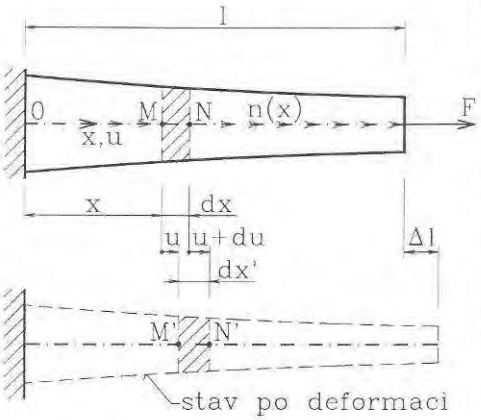
$$h' - h = \Delta h = h\varepsilon_z = -h\upsilon\frac{\sigma_x}{E} = -\upsilon\frac{Nh}{EA}. \tag{2.10}$$

Tyto příčné deformace nemají u tažených prutů velký význam a v dalším se jimi nebudeme zabývat.

Od **změny teploty** ΔT (ve ^{0}C), je-li konstantní v celém prutu, plyne celkové prodloužení prutu z rovnice (1.13)

$$\Delta l_T = \int_0^l \varepsilon_{xT} \mathrm{d}x = \int_0^l \alpha_T \Delta T \mathrm{d}x = \alpha_T \Delta T l. \tag{2.11}$$

Přitom α_T je součinitel tepelné roztažnosti [^{0}C^{-1}] zmíněný v odst. 1.4. Změna teploty vyvolá rovněž přírůstek příčných rozměrů průřezu - obr. 2.5d.



Obr. 2.6 *Obecný prut - deformace*

Uvažujme nyní **obecný případ** spojitě osově zatíženého prutu s proměnným průřezem. Posuvy u ve směru osy x jsou vzhledem k zachování rovinnosti průřezů společné všem bodům téhož průřezu, stačí tedy sledovat body na ose prutu - obr. 2.6. Posune-li se bod M o délku u, soumezný bod N o délku $(u + \mathrm{d}u)$, pak délka $\overline{M'N'}$ (po deformaci) je rovna

$$\mathrm{d}x' = \mathrm{d}x + (u + \mathrm{d}u) - u = \mathrm{d}x + \mathrm{d}u$$

a poměrná deformace podle rovnice (1.7) je pak

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}x' - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{(\mathrm{d}x + \mathrm{d}u) - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{2.12}$$

Vyjádříme-li nyní poměrnou deformaci ε_x z Hookova zákona (1.8) a za normálové napětí σ_x pak dosadíme z rov. (2.5), obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N(x)}{EA(x)}, \tag{2.13}$$

což je **diferenciální rovnice taženého prutu**. Jde-li o staticky určitý nosník, dovedeme určit průběh normálových sil $N(x)$ a pravá strana rovnice (2.13) tedy představuje známou funkci. Rovnici tedy můžeme integrovat a pro podélné posuvy u tak odvodíme

$$u = \int \frac{N(x)}{EA(x)} \mathrm{d}x + C, \tag{2.14}$$

kde C je integrační konstanta, kterou určíme z podmínky nulového posunu v místě podepření. Postup ukážeme na příkladech.

Příklad 2.1

Určete posuvy a celkové prodloužení prutu stálého průřezu od účinku vlastní tíhy, je-li objemová tíha γ.

Řešení:

V tomto případě je plocha konstantní A = konst., mění se jen normálová síla, která je v obecném průřezu x rovna tíze spodní oddělené části prutu, jejíž objem je $V = Ax$:

$$N(x) = \gamma A x,$$

takže dosazením do rovnice (2.14) a integrací

$$u = \int \frac{\gamma A x}{EA}\,\mathrm{d}x = \frac{\gamma}{2E}x^2 + C.$$

Posun na horním konci je nulový $u(l) = 0$, což poskytne podmínku pro určení integrační konstanty C:

$$u(l) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\gamma}{2E}l^2 + C = 0 \;\Rightarrow\; C = -\frac{\gamma l^2}{2E}.$$

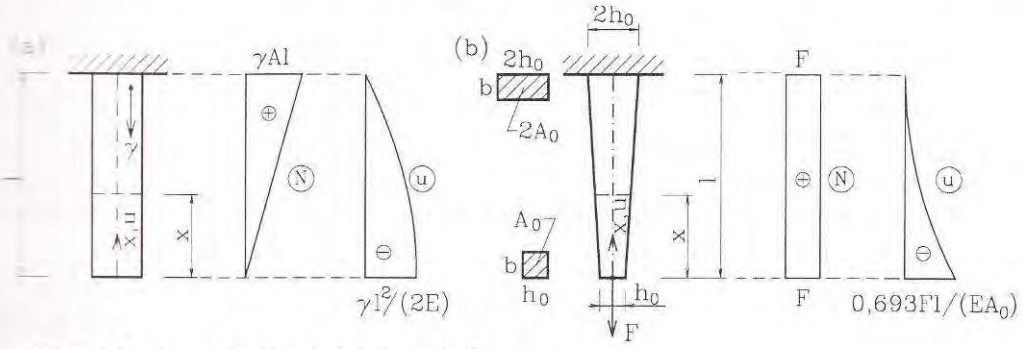
Rovnice pro posun $u(x)$ je tedy

$$u(x) = -\frac{\gamma}{2E}\left(l^2 - x^2\right).$$

Posuny jsou záporné, neboť směřují dolů - proti smyslu osy x. Znázornění průběhu veličin viz. obr. 2.7a. Celkové prodloužení je rovno kladně uvažovanému posunu spodního konce

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{Ql}{2EA}, \tag{2.15}$$

kde $Q = \gamma A l$ označuje celkovou tíhu prutu. Ze srovnání se vztahem (2.7) pro sílu přiloženou na konci prutu vyplývá, že zavedeme-li polovinu tíhy na horním i spodním konci prutu, bude výsledné prodloužení shodné s výsledkem (2.15).



Obr. 2.7 *K příkladům 2.1 (a) a 2.2 (b)*

Příklad 2.2

Odvoďte posuny prutu obdélníkového průřezu s lineárně proměnou výškou podle obr. 2.7b (na horním konci je výška dvojnásobná). Vlastní tíhu neuvažujte.

Řešení:

Označíme-li průřezovou plochu na spodním okraji A_0 (= bh_0), pak v obecném řezu x je

$$A(x) = \frac{A_0}{l}(l + x).$$

Normálová síla je konstantní $N = F$, takže z rovnice (2.14) je

$$u = \int \frac{N(x)}{EA(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{Fl}{EA_0}\int \frac{1}{l+x}\,\mathrm{d}x = \frac{Fl}{EA_0}\ln(l+x) + C \qquad \text{(a)}$$

Na horním okraji $x = l$ je posun nulový, takže

$$u(l) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{Fl}{EA_0}\ln(2l) + C = 0 \;\Rightarrow\; C = -\frac{Fl}{EA_0}\ln(2l).$$

Dosazením do (a) po úpravě je posun v obecném místě a celkové protažení:

$$u(x) = \ln\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{l}\right)\right]\frac{Fl}{EA_0}, \qquad \Delta l = |u(0)| = \ln 2\,\frac{Fl}{EA_0} \cong 0{,}693\frac{Fl}{EA_0}.$$

Průběh $u(x)$ je znázorněn na obr. 2.7b.

Příklad 2.3

Odvoďte prodloužení prutu řešeného v předešlém příkladu od účinku vlastní tíhy (objemová tíha je γ). Úlohu řešte samostatně.

Odpověď:

$$\Delta l = (3 - 2\ln 2)\frac{\gamma l^2}{4E} \cong 0{,}403\frac{\gamma l^2}{E}.$$

Obvykle nás nejvíce zajímá **celkové protažení** nebo zkrácení prutu. Je to rozdíl posunů obou konců prutu neboli

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)}{EA(x)}\,\mathrm{d}x. \qquad (2.16)$$

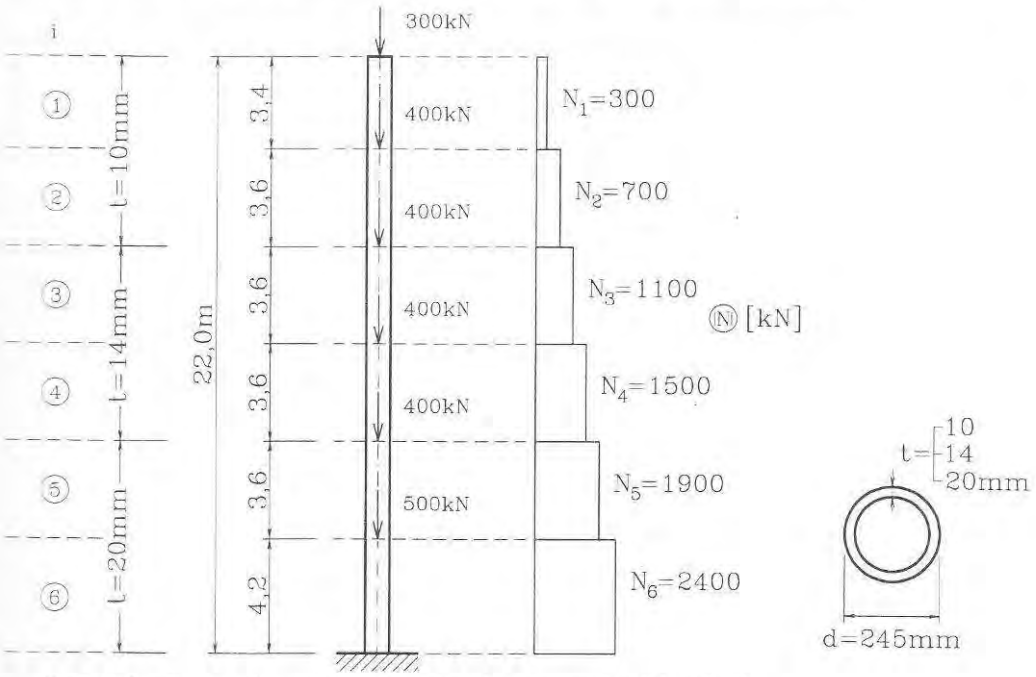
Často lze prut rozdělit na konečný počet intervalů o délkách l_i (i = 1, 2, ..., n), z nichž v každém jsou normálová síla, plocha průřezu a modul pružnosti konstantní. Pak můžeme nahradit integrál součtem a rovnice (2.16) přejde na tvar

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i l_i}{E_i A_i} \tag{2.17}$$

což je vlastně aplikace základního vztahu (2.7).

Příklad 2.4

Určete celkové zkrácení ocelového sloupu šestipodlažní budovy, zatíženého v úrovni jednotlivých podlaží tlaky od železobetonových stropních desek dle obr. 2.8. Sloup tvoří trubka vnějšího průměru d = 245 mm s odstupňovanou tloušťkou po dvou podlažích (t = 10, 14 a 20 mm - viz obr. 2.8). Vliv vlastní tíhy není třeba uvažovat.



Obr. 2.8 *K výpočtu zkrácení ocelového sloupu (příklad 2.4)*

Řešení:

Jednotlivé průřezové plochy převezmeme z tabulek, např. [3], nebo vypočteme - např. pro horní dvě podlaží je

$$A_1 = A_2 = \frac{\pi}{4}\left[d^2 - (d-2t)^2\right] = \frac{\pi}{4}\left[245^2 - (245 - 2\cdot 10)^2\right] =$$
$$= 7{,}38\cdot 10^3\,\mathrm{mm}^2 = 7{,}38\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$$

Analogicky určíme $A_3 = A_4 = 10{,}16 \cdot 10^{-3}$ m^2, $A_5 = A_6 = 14{,}14 \cdot 10^{-3}$ m^2. Průběh normálových sil je uveden na obr. 2.8, modul pružnosti je konstantní $E = 210\,000$ MPa = $210 \cdot 10^6$ kPa (normálové síly dosadíme v kN). Z rovnice (2.17) je pak

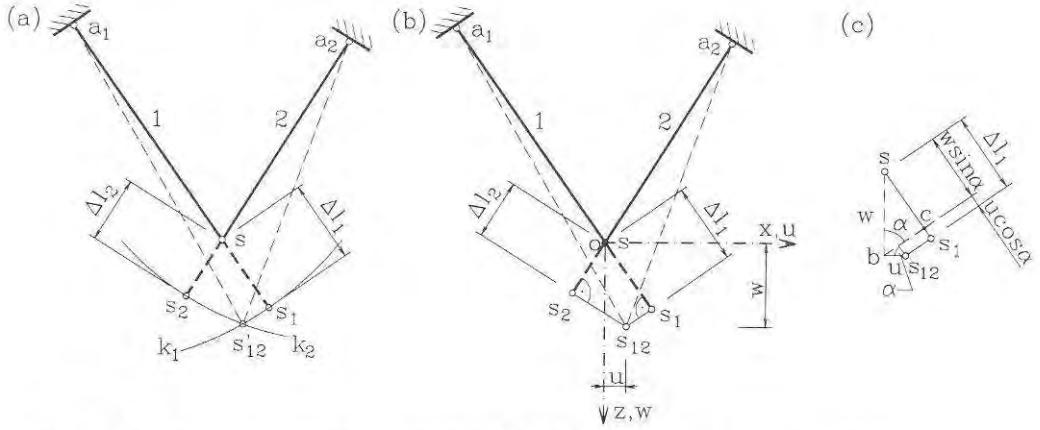
$$\Delta l = \frac{1}{E}\sum \frac{N_i l_i}{A_i} =$$

$$= \frac{1}{210 \cdot 10^6}\left(\frac{300 \cdot 3{,}4}{7{,}38 \cdot 10^{-3}} + \frac{700 \cdot 3{,}6}{7{,}38 \cdot 10^{-3}} + \frac{1100 \cdot 3{,}6}{10{,}16 \cdot 10^{-3}} + \frac{1500 \cdot 3{,}6}{10{,}16 \cdot 10^{-3}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1900 \cdot 3{,}6}{14{,}14 \cdot 10^{-3}} + \frac{2400 \cdot 4{,}2}{14{,}14 \cdot 10^{-3}} \right) = 0{,}0124\text{m} = 12{,}4\text{mm}$$

● Složky posunů styčníku (v rovině)

Při řešení soustav prutů je často nutné vyjádřit vzájemné kinematické (geometrické) souvislosti mezi přírůstky délek jednotlivých prutů spojených ve styčníku. Uvedeme to na dvojném styčníku podle obr. 2.9.



Obr. 2.9 *Geometrické vztahy mezi prodloužením prutů a posuny styčníku*

Předpokládejme, že jsou známa prodloužení obou prutů Δl_1 a Δl_2. Představíme-li si oba pruty nejprve ve styčníku uvolněny, pak po prodloužení zaujmou jejich konce polohu v bodech s_1 a s_2 - obr. 2.9a. Aby bylo možné konce obou prutů opět spojit, je třeba pruty pootočit kolem jejich protilehlých konců (podporových bodů) do vzájemného průsečíku kružnic k_1 a k_2, tj. do bodu s'_{12}. Protože však jsou všechny posuvy velmi malé, můžeme oblouky nahradit tečnami, tedy kolmicemi k původním osám prutů vztyčenými v bodech s_1a s_2 dle obr. 2.9b. Jejich vzájemný průsečík s_{12} udává s dostatečnou přesností novou polohu styčníku.

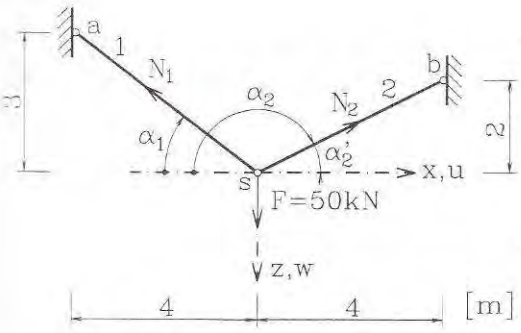
Pro vyjádření souvislostí mezi posuny je účelné proložit styčníkem pravoúhlou (globální, nezávislou na orientaci prutů) soustavu souřadnic - např. x, z (obr. 2.9b), a posun

styčníku vyjádřit složkami u a w. Prodloužení Δl libovolného prutu, který svírá s osou x úhel α (na obr. 2.9c znázorněno pro prut 1), pak lze vyjádřit vztahem

$$\Delta l = u \cos\alpha + w \sin\alpha, \tag{2.18}$$

neboť $\overline{cs}_1 = \overline{bs}_{12} \cos\alpha$ a $\overline{sc} = \overline{sb} \sin\alpha$.

Příklad 2.5



Obr. 2.10

Soustava složená ze dvou kloubově připojených prutů podle obr. 2.10 je zatížena svislým břemenem $F = 50$ kN. Určete protažení prutů a posuv styčníku. Oba pruty jsou ocelové tyče kruhového profilu ∅ 20 mm.

Řešení:

Jedná se o staticky určitou soustavu (dvojný styčník), takže osové síly N_1 a N_2 v prutech můžeme určit z podmínek rovnováhy sil ve styčníku s, do něhož umístíme počátek soustavy souřadnic x, z (obr. 2.10).

Z geometrie soustavy plynou délky prutů a gonimetrické funkce:

$$l_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5{,}0\text{m}, \qquad l_2 = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4{,}472\text{m},$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{3}{5} = 0{,}6, \qquad \sin\alpha_2' = \sin\alpha_2 = \frac{2}{4{,}472} = 0{,}4472,$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{4}{5} = 0{,}8, \qquad \cos\alpha_2' = -\cos\alpha_2 = \frac{4}{4{,}472} = 0{,}8944.$$

Podmínky rovnováhy ve směru x (→) a z (↓) jsou obecně a číselně:

$$\left.\begin{aligned} \textstyle\sum F_x = 0\text{:}\ & -N_1 \cos\alpha_1 + N_2 \cos\alpha_2' = 0, \\ \textstyle\sum F_z = 0\text{:}\ & -N_1 \sin\alpha_1 - N_2 \sin\alpha_2' = -50, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & -N_1 \cdot 0{,}8 + N_2 \cdot 0{,}8944 = 0, \\ & -N_1 \cdot 0{,}6 - N_2 \cdot 0{,}4472 = -50. \end{aligned}$$

Řešením obdržíme $N_1 = 50{,}00$ kN $= 50{,}00 \cdot 10^{-3}$MN, $N_2 = 44{,}72$ kN $= 44{,}72 \cdot 10^{-3}$ MN.

Plocha průřezu kruhu o průměru 20 mm je $A = 314{,}2$ mm^2 $= 314{,}2 \cdot 10^{-6}$ m^2, modul pružnosti oceli $E = 210\,00$ MPa. Z rovnice (2.7) jsou protažení

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA} = \frac{50{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 5{,}0}{210000 \cdot 314{,}2 \cdot 10^{-6}} = 3{,}79 \cdot 10^{-3}\text{m} = 3{,}79\text{mm},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA} = \frac{44{,}72 \cdot 10^{-3} \cdot 4{,}472}{210000 \cdot 314{,}2 \cdot 10^{-6}} = 3{,}03 \cdot 10^{-3}\text{m} = 3{,}03\text{mm}.$$

Pomocí rovnice (2.18) vyjádříme vztahy mezi u, w a Δl_1 a Δl_2:

$$\left.\begin{aligned} u\cos\alpha_1 + w\sin\alpha_1 &= \Delta l_1 \\ u\cos\alpha_2 + w\sin\alpha_2 &= \Delta l_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 0{,}8u + 0{,}6w &= 3{,}79, \\ -0{,}8944u + 0{,}4472w &= 3{,}03. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dvou rovnic vyjdou posuny styčníku: u = -0,14 mm (posun doleva), w = 6,50 mm (pokles).

Příklad 2.6

Pro soustavu dle předchozího příkladu určete všechny veličiny za předpokladu, že břemeno F = 50 kN je odkloněno od svislice o úhel 30° směrem doprava. Úlohu řešte samostatně.

Výsledky:

N_1 = 55,80 kN, N_2 = 221,96 kN, u = 1,12 mm, w = 5,56 mm.

2.3 Návrh a posouzení taženého prutu

Jak bylo uvedeno v odst. 1.5, posuzujeme konstrukce a jejich prvky na dva mezní stavy: únosnosti a použitelnosti. U tažených prutů, uvažovaných samostatně, se uplatní více posouzení **únosnosti**, neboť protažení dílčích prutů dosahují jen vyjímečně nepřípustných hodnot (to však již neplatí u soustav složených z tažených a tlačených prutů - průhybů příhradových nosníků).

Pokud jde o pruty namáhané na **tlak**, lze u nich téměř vždy očekávat, že při jejich ztrátě únosnosti dojde k vybočení, proto je posuzujeme na **vzpěr** (viz. kap. 8) a nikoli na prostý tlak - s výjimkou velice masivních krátkých sloupů. V této kapitole se proto posouzením jejich únosnosti nebudeme zabývat.

Při posouzení únosnosti taženého prutu v určitém průřezu vycházíme ze vztahu (2.5). Maximální přípustnou normálovou sílu (výpočtovou) N_{Rd} získáme jako součin plochy a výpočtové pevnosti f_d, tedy

$$N_{Rd} = Af_d = \frac{Af_k}{\gamma_M}, \tag{2.19}$$

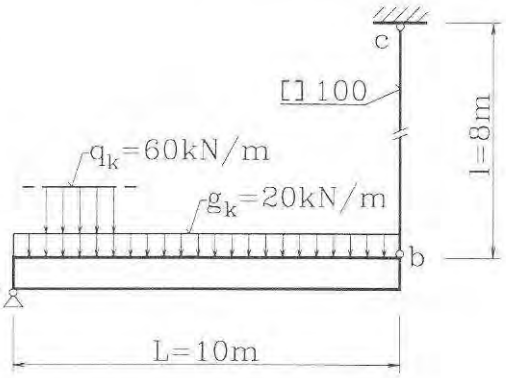
kde jsme užili rovnice (1.16). Normálová síla v prutu N_{Sd}, určená z výpočtových zatížení, pak nesmí překročit tuto hodnotu, tedy

$$N_{Sd} \le N_{Rd} \tag{2.20}$$

- srov. relaci (1.17). Postup osvětlíme na modelovém příkladu.

Příklad 2.7

Na ocelovém táhle, jež tvoří dvě válcované tyče průřezu U100, je na jednom svém konci zavěšen nosník, zatížený stálým zatížením g_k = 20 kN/m a nahodilým q_k = 60 kN/m - viz obr. 2.11. Posuďte táhlo na mezní stav únosnosti, je-li mez kluzu oceli $f_y = f_k$ = 235 MPa a dílčí součinitel materiálu γ_M = 1,1, a ověřte, zda pokles bodu *b* od nahodilého zatížení nepřekročí hodnotu δ_2 = 5 mm, zadanou jako technologický požadavek..



Obr. 2.11

Řešení:

Ze zadaných charakteristických (provozních) hodnot zatížení určíme výpočtové (návrhové) vynásobením součiniteli γ_F dle odst. 1.5:

$$q_d = \gamma_G g_k + \gamma_Q q_k = 1{,}2 \cdot 20 + 1{,}4 \cdot 60 = 108{,}0 \text{ kN/m}.$$

Normálová síla, vyvozená tímto zatížením v táhle je

$$N_{Sd} = \frac{1}{2} q_d L = \frac{1}{2} 108 \cdot 10{,}0 = 540{,}0 \text{ kN}.$$

Plocha jednoho profilu U 100 (z tabulek) je 1350 mm^2, tedy celého průřezu: A = 2700 $mm^2 = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$ m^2. Výpočtová (návrhová) únosnost průřezu podle rovnice (2.19) je tedy

$$N_{Rd} = \frac{Af_k}{\gamma_M} = \frac{Af_y}{\gamma_M} = \frac{2{,}70 \cdot 10^{-3} \cdot 235}{1{,}1} = 0{,}5768 \text{ MN} = 576{,}8 \text{ kN}.$$

(Alternativní zápis, vycházející ze vztahu MPa = N/mm^2, je

$$N_{Rd} = \frac{Af_y}{\gamma_M} = \frac{2700 \cdot 235}{1{,}1} = 576{,}8 \cdot 10^3 \text{ N} = 576{,}8 \text{ kN}.)$$

Podmínka (2.20)

$$N_{Sd} = 540{,}0 \text{ kN} \le N_{Rd} = 576{,}8 \text{ kN}$$

je splněna, táhlo tedy vyhoví na mezní stav únosnosti.

Pokles bodu *b* vyvozuje nahodilé zatížení q_k = 60 kN/m. Osová síla v táhle

$$N_{Sk} = \frac{1}{2} q_k L = \frac{1}{2} 60 \cdot 10 = 300 \text{ kN} = 0{,}3 \text{ MN}.$$

Protažení táhla podle (2.7)

$$\Delta l = \frac{N_{Sk} l}{EA} = \frac{0{,}3 \cdot 8{,}0}{210000 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-3}} = 4{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 4{,}2 \text{ mm} < \delta_2 = 5 \text{ mm}$$

- táhlo vyhoví i na mezní stav použitelnosti.

Příklad 2.8

V taženém prutu spodního pásu příhradového vazníku vzniká výpočtová osová síla $N_{Sd} = 200$ kN. Posuďte, zda vyhoví trubka TR ∅ 60x5 mm (vnější průměr $d = 600$ mm, tloušťka 5 mm), je-li $f_y = 235$ MPa a $\gamma_M = 1{,}1$.

Řešení:

Průřezová plocha

$$A = \frac{\pi}{4}\left[d^2 - (d - 2t)^2\right] = \frac{\pi}{4}\left[60^2 - (60 - 2 \cdot 5)^2\right] = 864 \text{ mm}^2 = 864 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.$$

Výpočtová únosnost v tahu

$$N_{Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_M} = \frac{964 \cdot 10^{-6} \cdot 235}{1{,}1} = 0{,}1846 \text{ MN} = 184{,}6 \text{ kN}.$$

Podmínka (2.20) tedy není splněna, neboť

$$N_{Sd} = 200 \text{ kN} > N_{Rd} = 184{,}6 \text{ kN},$$

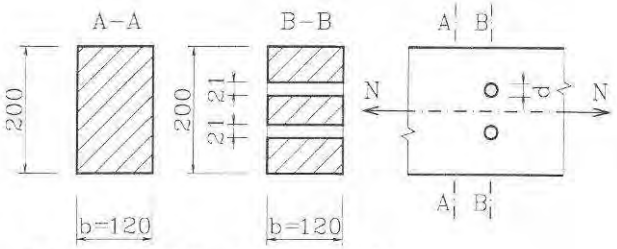
je tedy nutno zvolit větší průřez. Ze vztahů (2.19) a (2.20) lze určit nutnou minimální plochu

$$A_{\min} = \frac{N_{Sd} \gamma_M}{f_y} = \frac{0{,}200 \cdot 1{,}1}{235} = 936 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 936 \text{ mm}^2.$$

Trubka TR ∅ 60x5,5 mm má plochu $A = 942$ mm^2, takže vyhoví. Posouzení spolehlivosti pro nově navržený průřez se přenechává čtenaři.

Příklad 2.9

Dřevěný trám obdélníkového průřezu 120x200 mm je tažen výpočtovou silou N_{Sd} = 160 kN. Posuďte únosnost v plném průřezu a v průřezu oslabeném dvěma otvory Ø21 mm pro svorníky - obr. 2.12. Výpočtová pevnost je



Obr. 2.12 *Tažený dřevěný trám*

$$f_d = k_{\mathrm{mod}} \frac{f_k}{\gamma_M} = 0{,}8 \frac{13{,}0}{1{,}3} = 8{,}0 \text{ MPa},$$

kde f_k - charakteristická pevnost, γ_M - dílčí součinitel spolehlivosti materiálu, k_{mod} - modifikační součinitel (vliv vlhkosti a trvání zatížení).

Řešení:

Plocha plného a oslabeného průřezu:

$$A = 120 \cdot 200 = 24{,}0 \cdot 10^3 \text{ mm}^2 = 24{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2,$$

$$A_{net} = A - 2db = 24{,}0 \cdot 10^3 - 2 \cdot 21 \cdot 120 = 18{,}96 \cdot 10^3 \text{ mm}^2 = 18{,}96 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Výpočtová pevnost plného průřezu

$$N_{Rd} = A f_d = 24{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}0 = 0{,}192 \text{ MN} = 192{,}0 \text{ kN} > N_{Sd} = 160{,}0 \text{ kN}$$

- průřez vyhoví. V oslabeném průřezu

$$N_{Rd} = A_{net} f_d = 18{,}96 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}0 = 0{,}1517 \text{ MN} = 151{,}7 \text{ kN} < N_{Sd} = 160{,}0 \text{ kN}.$$

V místě oslabení prut nevyhoví.

Příklad 2.10

Určete maximální hodnotu výpočtové síly F_d, kterou je možné zatížit soustavu na obr. 2.10 (příklad 2.5), je-li f_y = 235 MPa a γ_M = 1,1. Úlohu řešte samostatně.

Výsledek:

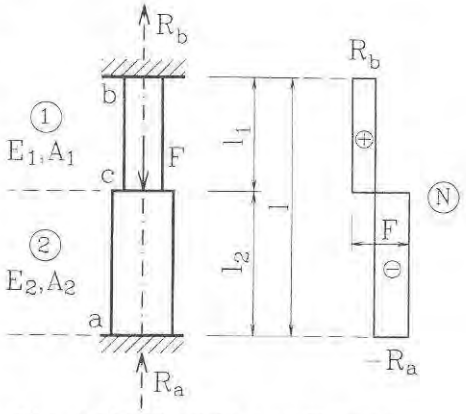
$$F_d \leq 67{,}1 \text{ kN}.$$

2.4 Staticky neurčité případy tahu a tlaku pružných prutů

U staticky neurčitých úloh převyšuje počet neznámých sil (reakcí) počet **podmínek rovnováhy**. Pokud jde o jediný prut namáhaný osově, je k dispozici jedna podmínka rovnováhy - silová ve směru osy prutu, takže při podepření ve dvou nebo více bodech (kloubově nebo vetknutím) jde o staticky neurčitý případ. U soustavy tažených (tlačených) prutů spojených ve styčnících nebo podepírajících tuhou desku či těleso je **stupeň statické neurčitosti** dán rozdílem mezi skutečným počtem odebraných stupňů volnosti a celkovým počtem stupňů volnosti podepíraného hmotného objektu.

Podmínky rovnováhy je pak zapotřebí doplnit **podmínkami deformačními** (přetvárnými), které mají geometrickou povahu a vyjadřují vztahy mezi posuvy nebo deformacemi nezbytné k dodržení předepsaného podepření a spojitosti soustavy (konstrukce). Jejich počet je roven stupni statické neurčitosti soustavy.

Vzájemnou souvislost mezi silovými a deformačními veličinami pak udávají **fyzikální rovnice**, což jsou u pružných prutů veškeré vztahy vycházející z Hookova zákona, jak byly odvozeny v odst. 2.2, příp. též závislosti deformací na změnách teploty apod. Prostřednictvím fyzikálních rovnic vstupují do řešení úlohy materiálové a rozměrové charakteristiky (modul pružnosti E, plocha A), na nichž je tedy - na rozdíl od staticky určitých soustav - závislé i rozdělení vnitřních sil.



Obr. 2.13 *Staticky neurčitý prut*

Uvažujme stupňovitý sloupek podle obr. 2.13, zatížený silou F na rozhraní obou úseků a nepoddajně upevněný na obou koncích. V tomto případě jde zřejmě o úlohu 1x staticky neurčitou, protože pro dvě reakce R_a a R_b v podporách máme jen jednu podmínku rovnováhy

$$R_a + R_b - F = 0. \tag{b}$$

Deformační podmínku můžeme formulovat tak, že celkové prodloužení prutu musí být při daném podepření rovno nule:

$$\Delta l = 0. \tag{c}$$

Fyzikální rovnicí pak vyjádříme vztah mezi prodloužením Δl a neznámými silami R_a, R_b. Normálové síly v jednotlivých úsecích jsou zřejmě $N_1 = R_b$, $N_2 = -R_a$ (obr. 2.13), takže podle rovnice (2.17) je

$$\Delta l = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} + \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{R_b l_1}{E_1 A_1} - \frac{R_a l_2}{E_2 A_2}. \tag{d}$$

Dosadíme-li odtud do rovnice (c), tedy položíme-li pravou stranu rovnice (d) rovnu nule, získáme deformační podmínku vyjádřenou v silách (R_a, R_b), Jejím řešením spolu s podmínkou rovnováhy (b) odvodíme:

$$R_a = \frac{E_2 A_2 l_1}{E_1 A_1 l_2 + E_2 A_2 l_1} F, \qquad R_b = \frac{E_1 A_1 l_2}{E_1 A_1 l_2 + E_2 A_2 l_1} F. \tag{e}$$

Ze struktury těchto vztahů je patrné, že rozdělení sil je ovlivněno parametry E, A, l_i. Ještě zřetelněji se to projeví vyjádřením pomocí tuhostí k_1, k_2, jak jsme je zavedli rovnicí (2.9). Pak nabude deformační podmínka tvar

$$\Delta l = \frac{N_1}{k_1} + \frac{N_2}{k_2} = \frac{R_b}{k_1} - \frac{R_a}{k_2} = 0 \ , \tag{f}$$

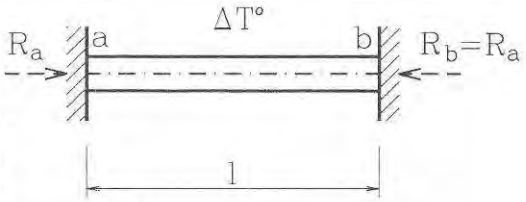
odkud vyplývá, že reakce jsou úměrné tuhostem úseků:

$$\frac{R_b}{R_a} = \frac{k_1}{k_2}, \tag{g}$$

což je rys charakteristický pro všechny pružné staticky neurčité soustavy: zvýšíme-li **tuhost** určitého prvku, zvýší se jeho **podíl** na přenášení vnějších sil.

Příklad 2.11

Odvoďte vztahy pro velikost normálové síly a napětí v prutu stálého průřezu nepoddajně uloženého na obou svých koncích od změny teploty ΔT (obr. 2.14). Vyčíslete tyto hodnoty pro bezestykovou kolejnici o ploše průřezu $A = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$ mm^2 při $\Delta T = 40^{\circ}$C.



Obr. 2.14

Řešení:

Ze statické podmínky plyne, že reakce v obou podporách jsou shodné $R_b = R_a$. Z deformační podmínky tedy zbývá určit tuto hodnotu, jež je - až na znaménko - současně normálovou silou: $N = -R_a$. Deformační podmínka opět předepisuje nulové protažení, takže uplatněním fyzikálních vztahů (2.7) a (2.11) je

$$\Delta l = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Nl}{EA} + \alpha_T \Delta T l = 0 .$$

Odtud je normálová síla a normálové napětí

$$N = -\alpha_T \Delta T E A, \qquad \sigma_x = \frac{N}{A} = -\alpha_T \Delta T E . \tag{2.21}$$

Řešení tedy není závislé na délce (nulové je i poměrné protažení ε_x). Pro dané číselné hodnoty je

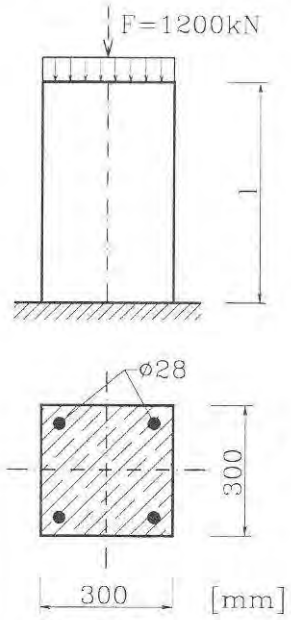
$$N = -12{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot 40 \cdot 210000 \cdot 6{,}25 \cdot 10^{-3} = -0{,}63 \text{ MN} = -630 \text{ kN},$$

$$\sigma_x = -12{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot 40 \cdot 210000 = -100{,}8 \text{ MPa}.$$

(Pro ocel: $\alpha_T = 12 \cdot 10^{-6}\ ^0C^{-1}$, $E = 210000$ MPa.)

Příklad 2.12

Betonový sloup čtvercového průřezu 300x300 mm je vyztužen čtyřmi pruty ∅28 mm - obr. 2.15. Určete napětí v betonu a ve výztuži při pružném působení sloupu, je-li zatížen tlakovou silou 1200 kN. Modul pružnosti betonu uvažujte E_c = 29000 MPa, betonářské výztuže E_s = 200000 MPa.



Obr. 2.15
Nehomogenní prut

Řešení:

Jde o případ **nehomogenního** prutu, jehož složky mají různé fyzikální vlastnosti. Z výsledné normálové síly převezmeme určitý díl betonová část (N_c) a zbytek výztuž (N_s). Statická podmínka ekvivalence sil v průřezu je

$$N_c + N_s = N. \tag{h}$$

Je-li soudržnost mezi ocelí a betonem dokonalá, deformují se shodně, tj. $\varepsilon_s = \varepsilon_c$ nebo

$$\Delta l_s = \Delta l_c \tag{i}$$

Pokud jsou oba materiály v pružném stavu, pak platí fyzikální rovnice (2.7)

$$\Delta l_s = \frac{N_s l}{E_s A_s}, \quad \Delta l_c = \frac{N_c l}{E_c A_c} \tag{j}$$

kde A_s a A_c jsou průřezové plochy výztuže a betonové části. Dosazením (j) do (i) a úpravou můžeme vyjádřit vztah mezi napětím ve výztuži

$$\sigma_s = \frac{N_s}{A_s} = \frac{E_s}{E_c}\frac{N_c}{A_c} = \frac{E_s}{E_c}\sigma_c = n\sigma_c, \tag{2.22}$$

kde jsme označili

$$n = \frac{E_s}{E_c} \tag{2.23}$$

Tento poměr modulů pružnosti se často nazývá **pracovním součinitelem**. Dosazením z (2.22) do statické podmínky (h) a úpravou je

$$N_C + N_S = \sigma_C A_C + \sigma_S A_S = \sigma_C A_C + n\sigma_C A_S = N,$$

a odtud

$$\sigma_c = \frac{N}{A_c + nA_s}, \quad \sigma_s = n\sigma_c \tag{2.24}$$

Výraz ve jmenovateli můžeme chápat jako **ideální plochu průřezu**, v níž se "tužší" materiál zavádí násobkem v poměru modulů pružnosti.

Číselně je pro zadané hodnoty:

$$n = \frac{200000}{29000} = 6{,}90\,,$$

$A_c = 0{,}3^2 = 90 \cdot 10^{-3}$ m^2 (plochy vložek se obvykle neodečítají),

$$A_s = 4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 28^2 = 2{,}46 \cdot 10^3 \text{ mm}^2 = 2{,}46 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2,$$

$$\sigma_c = \frac{-1{,}20}{(90 + 6{,}90 \cdot 2{,}46) \cdot 10^{-3}} = -11{,}22 \text{ MPa},$$

$$\sigma_s = 6{,}90 \cdot (-11{,}22) = -77{,}4 \text{ MPa}.$$

Normálová síla i napětí jsou tlakové.

• Staticky neurčité soustavy tažených prutů

U staticky neurčitých soustav složených z více tažených (tlačených) prutů spočívají deformační podmínky obvykle ve vyjádření vzájemných vztahů mezi protaženími jednotlivých prutů Δl_i, odvozených z rozboru kinematiky soustavy (zachování její spojitosti). Jestliže pak užijeme fyzikálních vztahů k vyloučení deformací Δl_i ze systému rovnic a řešíme vztahy mezi neznámými silami (N_i apod.), hovoříme o **silové variantě** (metodě) řešení. Jestliže naopak vyjádříme neznámé síly pomocí geometrických veličin, charakterizujících deformace (posuvy, pootočení apod.), a ty pak určujeme ze statických rovnic, jde o **deformační variantu**.

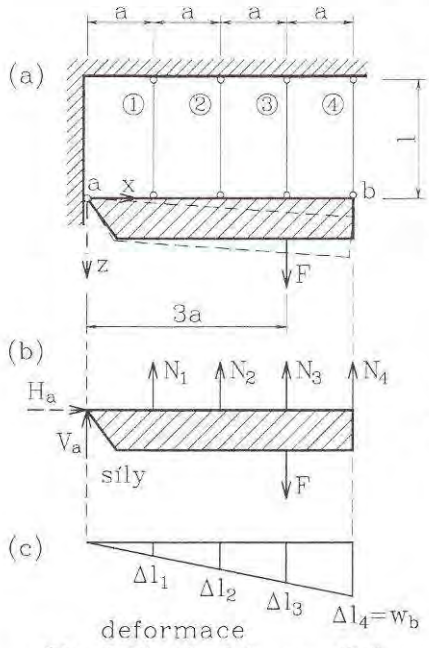
Příklad 2.13

Tuhá deska v rovině je v jednom bodě kloubově (neposuvně) podepřena a zavěšena na čtyřech shodných pravidelně rozložených táhlech. Určete osové síly v táhlech při zatížení silou F dle obr. 2.16.

Řešení:

Úloha je 3x staticky neurčitá, neboť pro šest neznámých sil (H_a, V_a, N_1, ..., N_4) máme k dispozici jen tři podmínky rovnováhy:

$$\sum F_x = 0: \quad H_a = 0,$$
$$\sum F_z = 0: \quad -V_a - N_1 - N_2 - N_3 - N_4 + F = 0, \qquad \text{(k)}$$
$$\sum M_a = 0: \quad N_1 a + N_2 2a + N_3 3a + N_4 4a - F3a = 0.$$



Obr. 2.16 *Staticky neurčitě podepřená tuhá deska*

Sestavíme proto deformační podmínky, jejichž počet odpovídá stupni statické neurčitosti, tj. tři rovnice, vyjadřující geometrické vztahy mezi prodlouženími pružných prutů (táhel). Tuhá deska se pootáčí kolem podporového bodu *a*, takže protažení Δl_i jsou úměrná vzdálenosti od tohoto středu otáčení (obr. 2.16c), tj. vzhledem k pravidelným vzájemným vzdálenostem vyplyne z úměr

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1, \quad \Delta l_3 = 3\Delta l_1, \quad \Delta l_4 = 4\Delta l_1. \qquad \text{(l)}$$

Ze vztahu (2.7) jsou protažení prutů (vzhledem ke shodným parametrům prutů je nemusíme rozlišovat indexy: $A_i = A$, $E_i = E$) rovna

$$\Delta l_i = \frac{N_i l}{EA}, \qquad i = 1,2,\ldots,4. \qquad \text{(m)}$$

Zvolíme-li silovou variantu řešení, vyloučíme Δl_i dosazením z (m) do (l):

$$\frac{N_2 l}{EA} = 2\frac{N_1 l}{EA} \Rightarrow N_2 = 2N_1; \qquad \text{(n)}$$
$$\text{analogicky: } N_3 = 3N_1, N_4 = 4N_1.$$

Takto jsme získali další tři rovnice vyjádřené v silách N_i, které spolu se statickými rovnicemi (k) stačí k řešení úlohy. Dosazením z rovnic (n) do momentové podmínky

$$N_1 a + 2N_1 \cdot 2a + 3N_1 \cdot 3a + 4N_1 \cdot 4a - 3F_a = 0$$

získáme $N_1 = 0{,}1F$. Dosazením do rovnic (n) a z prvních dvou rovnic (k) vypočteme všechny ostatní síly. Souhrnně je:

$$N_1 = 0{,}1F, \quad N_2 = 0{,}2F, \quad N_3 = 0{,}3F, \quad N_4 = 0{,}4F, \quad H_a = V_a = 0. \qquad \text{(o)}$$

Příklad 2.14

Řešte předešlou úlohu za předpokladu, že prut 1 má trojnásobnou plochu průřezu než zbývající tři ($A_1 = 3A$, $A_2 = A_3 = A_4 = A$).

Návod a výsledky:

Upraví se první rovnice (m) zavedením trojnásobné plochy A_1. Hledané síly jsou: $N_1 = N_3 = 0{,}28125\ F$, $N_2 = 0{,}1875\ F$, $N_4 = 0{,}375\ F$, $V_a = -0{,}125\ F$, $H_a = 0$.

Příklad 2.15

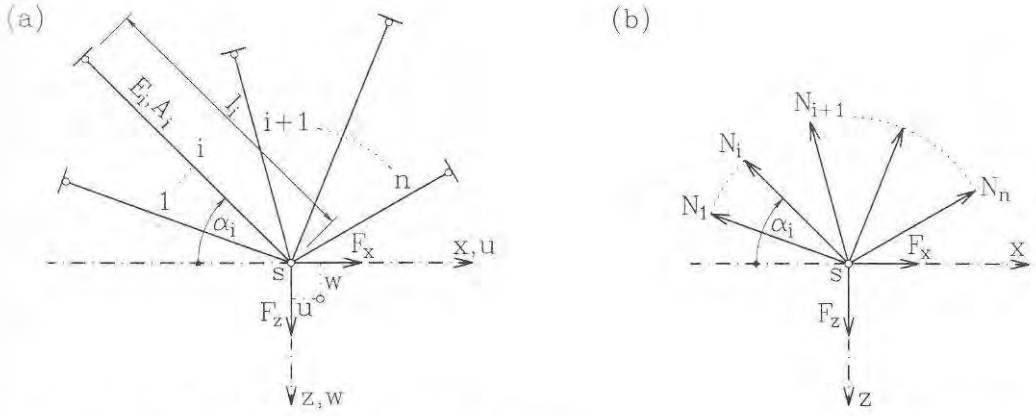
Původní soustavu (z příkl. 2.13) řešte pro případ, kdy nepůsobí vnější zatížení ($F = 0$) a všechny pruty se oteplí o ΔT. Řešte samostatně.

Návod a výsledky:

Fyzikální rovnice (l) se doplní o prodloužení vyvozené změnou teploty - rov. (2.11). Osové síly a reakce vyjdou rovny:

$$V_a = -N_1 = \frac{2}{3} EA\alpha_T \Delta T,\ N_4 = -N_2 = \frac{1}{3} EA\alpha_T \Delta T,\ N_3 = H_a = 0.$$

Soustava prutů spojených navzájem v jediném vícenásobném styčníku (obr. 2.17) má stupeň statické neurčitosti (n - 2), kde n je počet prutů. Řešení takového rovinného "svazku prutů" silovou metodou obvykle není výhodné, pokud není soustava symetrická apod. Uplatníme proto **deformační variantu**, u níž základní neznámé veličiny budou posuvy styčníku u a w.



Obr. 2.17 *Staticky neurčitý svazek prutů*

Dosadíme-li do rovnice (2.8) vztah (2.18), pak pro obecný i-tý prut obdržíme

$$N_i = k_i \Delta l_i = k_i \left(u \cos\alpha_i + w \sin\alpha_i \right), \qquad (2.25)$$

kde k_i je tuhost prutu podle rovnice (2.9). Podmínky rovnováhy pro rovinný svazek sil (obr. 2.17b) jsou

$$\sum F_x = 0: \quad -\sum_1^n N_i \cos\alpha_i + F_x = 0,$$
$$\sum F_z = 0: \quad -\sum_1^n N_i \sin\alpha_i + F_z = 0. \qquad (p)$$

Dosazením z (2.25) a úpravou obdržíme rovnice

$$u\sum_1^n k_i \cos^2\alpha_i + w\sum_1^n k_i \sin\alpha_i \cos\alpha_i = F_x,$$
$$u\sum_1^n k_i \sin\alpha_i \cos\alpha_i + w\sum_1^n k_i \sin^2\alpha_i = F_z. \qquad (q)$$

Zavedeme-li označení

$$K_{xx} = \sum_1^n k_i \cos^2\alpha_i, \quad K_{xz} = \sum_1^n k_i \sin\alpha_i \cos\alpha_i, \quad K_{zz} = \sum_1^n k_i \sin^2\alpha_i \qquad (2.26)$$

nabudou rovnice (q) jednoduchý tvar

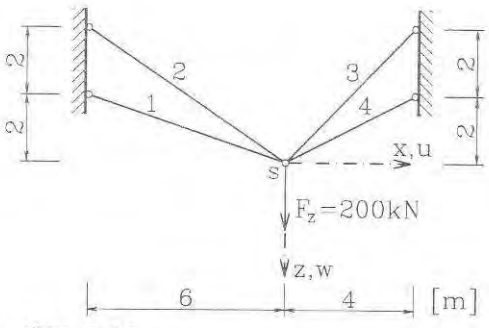
$$K_{xx}u + K_{xz}w = F_x,$$
$$K_{xz}u + K_{zz}w = F_y. \qquad (2.27)$$

Z těchto dvou rovnic určíme u, w a dosazením do (2.25) vyjdou osové síly N_i. Při užití deformační varianty jsou (v rovinném případě) vždy jen dvě neznámé složky posunů bez ohledu na počet prutů n.

Konstanty K (kN/m, MN/m) charakterizují tuhost **soustavy** jako celku: tak např. K_{xx} je síla nutná k posunutí styčníku vodorovně o jednotku délky, K_{zz} podobně ve svislém směru; K_{xz} je síla, která u těchto stavů musí působit ve směru kolmém tak, aby složka posuvu kolmá ke směru jednotkového posuvu byla rovna nule.

Příklad 2.16

Určete osové síly v prutech soustavy vyznačené na obr. 2.18. Pruty jsou z oceli (E = 210000 MPa): pruty 1 a 4 tvoří válcované tyče profilu U 80, pruty 2 a 3 mají kruhový průřez ∅ 25 mm.



Obr. 2.18

Řešení:

Výpočet je vhodné uspořádat do tabulky - viz tab. 2.2. Průřezová plocha válcované-

ho U 80 je 1100 mm^2, kruhové oceli průměru 25 mm pak 490,9 mm^2 - tyto hodnoty (v m^2) jsou uvedeny v prvním sloupci tabulky. Délky prutů l_i plynou z geometrie soustavy.

Tabulka 2.2 *K výpočtu staticky neurčité soustavy dle obr. 2.18*

i	$10^6 \cdot A_i$	l_i	k_i	$\sin\alpha_i$	$\cos\alpha_i$	$k_i\cos^2\alpha_i$	$k_i\sin\alpha_i\cos\alpha_i$	$k_i\sin^2\alpha_i$
	m^2	m	kN/m	1	1	kN/m	kN/m	kN/m
1	1100,0	6,325	36524	0,3162	0,9487	32871	10957	3652
2	490,9	7,211	14296	0,5547	0,8321	9897	6598	4399
3	490,9	5,657	18224	0,7071	-0,7071	9112	-9112	9112
4	1100,0	4,472	51654	0,4472	-0,8944	41324	-20662	10331
					Σ	93204	-12218	27494
						K_{xx}	K_{xz}	K_{zz}

Tuhosti prutů k_i jsou dány rovnicí (2.9); tak pro prut 1 je

$$k_1 = \frac{E_1 A_1}{l_1} = \frac{210000 \cdot 1100{,}0 \cdot 10^{-6}}{6{,}325} = 36{,}524 \text{ MN/m} = 36524 \text{ kN/m},$$

podobně pak další hodnoty k_i, jak jsou uvedeny v tabulce (veškeré údaje vznikly zaokrouhlením výsledků počítaných na více desetinných míst). Z délek l_i a jejich průmětů plynou hodnoty goniometrických funkcí α_i při respektování kvadrantu dle konvence na obr. 2.17. Další postup je zřejmý za záhlaví tabulky; součty posledních tří sloupců poskytují tuhosti K_{xx}, K_{xz} a K_{zz}, takže rovnice (2.27) jsou číselně

$$93204u - 12218w = 0,$$
$$-12218u + 27494w = 200.$$

Řešením je: $u = 1{,}013 \cdot 10^{-3}$ m, $w = 7{,}724 \cdot 10^{-3}$m. Dosazením do rovnice (2.25) je pro prut 1

$$N_1 = k_1(u\cos\alpha_1 + w\sin\alpha_1) = 36524(1{,}013 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}9487 + 7{,}724 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}3162) =$$
$$= 124{,}30 \text{ kN}.$$

Podobně vypočteme další síly: $N_2 = 73{,}30$ kN, $N_3 = 86{,}49$ kN, $N_4 = 131{,}65$ kN.

Příklad 2.17

Určete posuvy styčníku a osové síly v prutech téže soustavy (obr. 2.18), jsou-li všechny pruty shodného profilu U80. Řešte samostatně.

Výsledky:

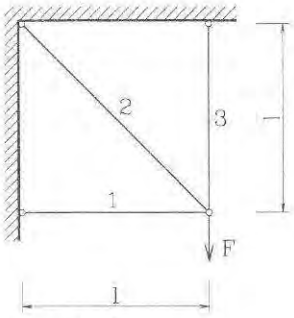
u = 0,622 mm, w = 4,734 mm, N_1 = 76,23 kN, N_2 = 100,70 kN, N_3 = 118,76 kN, N_4 = 80,64 kN.

Příklad 2.18

Určete síly v soustavě podle obr. 2.19, jsou-li všechny pruty z téhož materiálu a mají-li shodný průřez.

Výsledky:

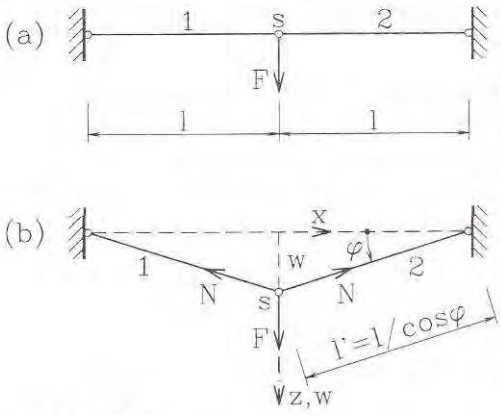
$N_1 = -0{,}2071F$, $N_2 = 0{,}2929F$, $N_3 = 0{,}7929F$.



Obr. 2.19

● Geometricky nelineární úlohy

Jak bylo uvedeno v odst. 1.1, vyšetřujeme obvykle rovnováhu a vnitřní síly na původní, nedeformované konstrukci (tělese), tj. podle teorie I.řádu. U lineárně pružného materiálu to pak vede k linearitě všech vztahů, což umožňuje užití principu superpozice aj.



Obr. 2.20

V některých případech to však nevede k cíli a je třeba sestavovat statické podmínky na **deformované soustavě**, tj. podle **teorie II. řádu**. Jako příklad uvedeme soustavu dvou kloubově připojených prutů, které leží ve shodné přímce, tedy svírají úhel 180°. Zavedeme-li ve styčníku sílu F kolmo k osám prutů (obr. 2.20a), pak z podmínek rovnováhy na nepřetvořené soustavě usoudíme, že rovnováha není možná, protože průměty osových sil do svislého směru jsou rovny nule (jde o výjimkový případ).

Uvažujme proto s poklesem styčníku o posun w, resp. s pootočením prutů φ (obr. 2.20b). Podmínka rovnováhy ve svislém směru je pak

$$-2N \sin\varphi + F = 0. \qquad (r)$$

Prodloužení prutů je

$$\Delta l = l' - l = \frac{l}{\cos\varphi} - l = l\frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi}. \qquad \text{(s)}$$

Z Hookova zákona ve tvaru dle rov. (2.8), tedy z fyzikálního vztahu, je

$$N = \frac{EA}{l}\Delta l = EA\frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi}. \qquad \text{(t)}$$

Dosazením do podmínky rovnováhy (r) po úpravě

$$2EA\sin\varphi\frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi} = F. \qquad \text{(u)}$$

Tato rovnice představuje jednoznačnou závislost mezi úhlem φ a silou F. Protože nadále předpokládáme malé deformace, můžeme z Taylorovy řady přibližně vyjádřit: $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$, a dosazením do (u) po úpravě získáme vztahy pro pootočení φ a posun w

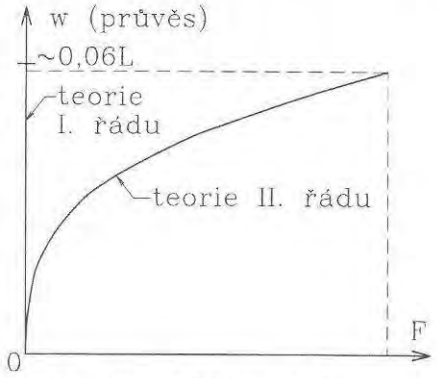
$$\varphi^3 = \frac{F}{EA} \Rightarrow \varphi = \sqrt[3]{\frac{F}{EA}}, \qquad w \approx \varphi l = l\sqrt[3]{\frac{F}{EA}}. \qquad (2.28)$$

Osová síla N úpravou vztahu (t) je

$$N = EA\frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi} \approx EA\frac{\varphi^2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{EAF^2}. \qquad (2.29)$$

Na obr. 2.21 je znázorněna závislost posun w na velikosti síly F. V počátku (pro $F \to 0$) je ečna svislá, což odpovídá neurčitosti posunu w zhledem k možným virtuálním pohybům sou-tavy.

Vnesením předpětí do prutů by se tuhost sou-tavy zvýšila.



Obr. 2.21 *Závislost w(F)*

Příklad 2.19

Určete číselně průvěs w, osovou sílu N a napětí σ_x v soustavě podle obr. 2.20, je-li $l = 4{,}0$ m a $F = 2$ kN. Pruty tvoří ocelové tyče kruhového průřezu ∅25 mm.

Řešení:

Plocha průřezu je $A = 490{,}9$ mm^2, $E = 210000$ MPa, takže součin

$$EA = 210000 \cdot 490{,}9 \cdot 10^{-6} = 103{,}1 \text{ MN} = 103100 \text{ kN}.$$

Ze vztahů (2.28) a (2.29) je

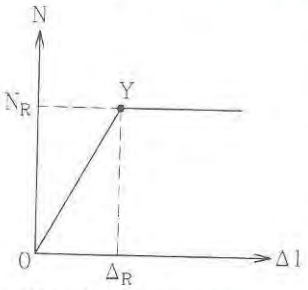
$$w = l\sqrt[3]{\frac{F}{(EA)}} = 4{,}0\sqrt[3]{\frac{2{,}0}{103100}} = 0{,}1075 \text{ m} = 107{,}5 \text{ mm},$$

$$N = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(EA)F^2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{103100 \cdot 2{,}0^2} = 37{,}2 \text{ kN}.$$

Napětí

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{37{,}2 \cdot 10^{-3}}{490{,}9 \cdot 10^{-6}} = 75{,}8 \text{ MPa}.$$

2.5 Staticky neurčité soustavy v pružnoplastickém oboru



Obr. 2.22 *Diagram $N(\Delta l)$*

Veškeré dosud odvozené vztahy předpokládaly lineárně pružný materiál, který se řídí Hookovým zákonem. Nyní rozšíříme naše úvahy o možnost přechodu taženého prutu do **plastického stavu** v okamžiku, kdy normálové napětí dosáhne meze kluzu f_y. Budeme přitom předpokládat ideální pružnoplastický materiál, jak byl popsán v odst. 1.4 a jak jej charakterizuje pracovní diagram na obr. 1.12. Označíme-li mezní plastickou osovou sílu N_R (též: N_{pl})

$$N_R = N_{pl} = Af_y \tag{2.30}$$

a k ní příslušné pružné prodloužení prutu (stálého průřezu)

$$\Delta_R = \frac{N_R l}{EA}, \tag{2.31}$$

můžeme pracovní diagram znázornit podle obr. 2.22.

Pokud je soustava tažených prutů **staticky určitá**, pak dosažení mezní plastické únosnosti v kterémkoli průřezu vede ke ztrátě únosnosti. Je-li konstrukce spolehlivě navržena, pak tohoto stavu nebude dosaženo a odezva konstrukce na zatížení bude jen pružná; plastické vlastnosti materiálu se tedy **neuplatní**.

U **staticky neurčitých** soustav však vyčerpání plastické únosnosti jednoho prutu nemusí obecně znamenat ztrátu únosnosti soustavy (konstrukce) jako celku, nýbrž pouze přechod do **pružnoplastické** fáze působení.

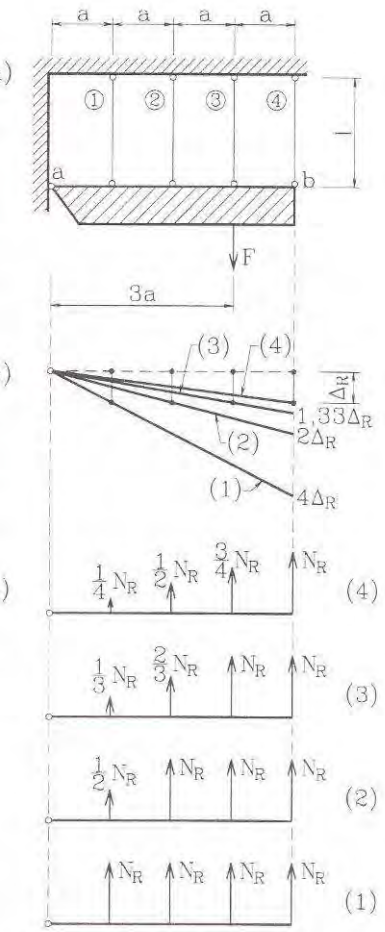
Ukážeme to na modelovém příkladu tuhé desky kloubově uložené na levém konci a zavěšené na čtyřech shodných prutech, kterou jsme v pružném stavu řešili v příkladu 2.13 - obr. 2.16.

Zvažme nejprve platnost vztahu užitých při pružném řešení. **Podmínky rovnováhy** (k) zůstávají **v platnosti** nezávisle na tom, v jakém stavu - pružném nebo plastickém - se soustava nalézá. Pro další užití přepíšeme momentovou rovnici takto:

$$F = \frac{1}{3}\left(N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4\right) \qquad \text{(v)}$$

Platí rovněž deformační rovnice zapsané v geometrickém tvaru (l).

Pokud však jde o fyzikální rovnice (m), tj. Hookův zákon, ty mají platnost jen pro ty pruty, které dosud nezplastizovaly, kdežto prodloužení zplastizovaných prutů není svázáno s velikostí osové síly (jež je N_R = konst.), nýbrž vyplývá z přetvoření pružných prutů.



Obr. 2.23 *Postupná plastifikace soustavy*

U dané soustavy je řešení **postupného zplastizování** poměrně jednoduché, protože tuhá deska má jediný stupeň volnosti: otáčí se kolem kloubové podpory v bodě *a*. Každý prut zplastizuje v okamžiku, kdy jeho protažení dosáhne velikosti Δ_R. Označíme-li tento stav (i), rozloží se proces přetváření v tyto fáze:

Jako první zplastizuje krajní prut 4. V okamžiku, kdy je právě na rozhraní mezi pružnou a plastickou větví diagramu (bod *Y* na obr. 2.22), platí ještě pružné řešení a síly v prutech jsou úměrné vzdálenostem od pevného kloubu - srov. rovnici (n), takže z $N_4 = N_R$ plyne:

$$N_1 = \frac{1}{4}N_R, \quad N_2 = \frac{1}{2}N_R, \quad N_3 = \frac{3}{4}N_R, \quad N_4 = N_R,$$

jak je vyznačeno na obr. 2.23c pro stav (4). K tomu příslušná hodnota zatěžující síly F se určí z rovnice (v):

$$F_{(4)} = F_{el} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}N_R + 2\frac{1}{2}N_R + 3\frac{3}{4}N_R + 4N_R\right) = \frac{5}{2}N_R = 2{,}50N_R,$$

což je v souladu s pružným řešením ($N_4 = 0{,}4F = N_R$). Tuto sílu jsme označili též jako F_{el} - **mez pružnosti** soustavy. Pokles pravého konce desky je $w_{(4)} = \Delta_R$.

Od tohoto okamžiku se již velikost síly $N_4 = N_R$ nemění. Jako další zplastizuje prut 3 v okamžiku, kdy jeho prodloužení dosáhne hodnoty $\Delta l_3 = \Delta_R$. V tomto stavu (3) jsou síly v dosud pružných prutech 1 a 2 úměrné vzdálenosti od kloubové podpory; jsou tedy rovny $N_1 = N_R/3$, $N_2 = 2N_R/3$ a z rovnice (v) je

$$F_{(3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}N_R + 2\frac{2}{3}N_R + 3N_R + 4N_R\right) = \frac{26}{9}N_R = 2{,}889N_R.$$

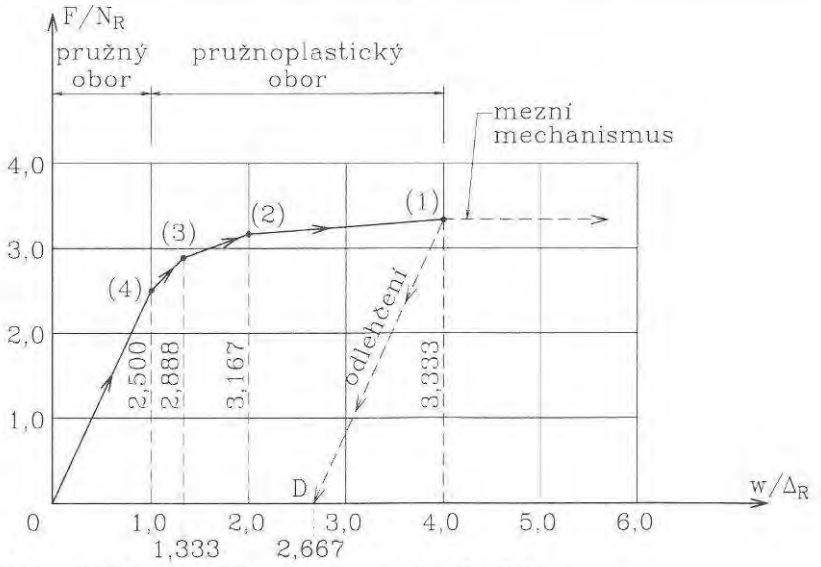
Pokles pravého konce v tomto okamžiku je $w_{(3)} = 4w_R/3$ (z úměry - srov. obr. 2.23b).

Zcela analogicky určíme stav, kdy právě zplastizoval prut 2. Jeho prodloužení je v tomto okamžiku rovno $\Delta l_2 = w_R$, takže posun pravého konce $w_{(2)} = 2\Delta_R$. Z rovnice (v) pak vyjde síla $F_{(2)} = 19N_R/6 = 3{,}167N_R$.

Konečně pak po zplastizování prutu 1 jsou všechny osové síly rovny N_R a zatěžovací síla je

$$F_{(1)} = F_{pl} = \frac{1}{3}\left(N_R + 2N_R + 3N_R + 4N_R\right) = \frac{10}{3}N_R = 3{,}333N_R,$$

což je tedy síla na **mezi plastické únosnosti** F_{pl}, jejímž dosažením je vyčerpána únosnost konstrukce. V okamžiku, kdy síla dostoupí této hodnoty, je $\Delta l_1 = \Delta_R$ a $w_{(1)} = 4\Delta_R$, a dále již nic nebrání volnému pootáčení tuhé desky - vzniká **plastický mechanismus** o jednom stupni volnosti.



Obr. 2.24 *Deformační křivka soustavy dle obr. 2.23*

Poměr mezního plastického zatížení k meznímu pružnému zatížení charakterizuje tzv. **plastickou rezervu** konstrukce. V našem případě

$$\frac{F_{pl}}{F_{el}} = \frac{3{,}333N_R}{2{,}500N_R} = 1{,}33$$

tedy plastická rezerva činí 33,3%.

Při **odlehčování** se materiál chová pružně (pokud napětí nedosáhne meze kluzu v tlaku) - obr. 1.12. Jestliže tedy v kterékoli fázi pružnoplastického působení snížíme velikost zatěžující síly F, pak platí pro změny osových sil i deformací pružné řešení dle rovnice (o) v příkl. 2.13. Tak např. přivedeme-li soustavu do mezního plastického stavu a vzápětí (dříve, než se začnou rozvíjet plastické deformace v prutu 1) ji zcela odtížíme, tj. přiložíme sílu $\Delta F = -F_{pl}$, vyjdou osové síly v prutech a pokles pravého konce v souladu s pružným řešením - rov. (n) - takto

$$N_1 = N_R + 0{,}1\Delta F = N_R - 0{,}1F_{pl} = N_R - 0{,}1 \cdot 3{,}3N_R = 0{,}667N_R,$$

$$N_2 = N_R + 0{,}02\Delta F = N_R - 0{,}2 \cdot 3{,}333N_R = 0{,}333N_R,$$

$$N_3 = N_R + 0{,}3\Delta F = N_R - 0{,}3 \cdot 3{,}333N_R = 0,$$

$$N_4 = N_R + 0{,}4\Delta F = N_R - 0{,}4 \cdot 3{,}333N_R = -0{,}333N_R,$$

$$w = 4\Delta_R - 0{,}4 \cdot 3{,}333\frac{N_R l}{EA} = 4\Delta_R - 1{,}333\Delta_R = 2{,}667\Delta_R.$$

Tyto hodnoty přestavují **reziduální síly** a deformaci, které v soustavě zůstanou i po odlehčení. Při novém přitížení by odezva soustavy na přírůstky zatížení byla pružná.

Grafické znázornění závislosti mezi deformacemi (posun w) a zatížením (síla F) je na obr. 2.24. Bod (4) odpovídá mezi pružnosti soustavy, bod (1) mezní plastické únosnosti, bod D následnému odlehčení.

Z výsledků vyšetřovaného modelového příkladu lze vyvodit některé obecné závěry pro pružnoplastické působení staticky neurčitých soustav (za předpokladu ideálního pružnoplastického materiálu bez zpevnění):

1. V určitém rozmezí - až do dosažení meze pružnosti v extrémně namáhaném prvku - soustava (konstrukce) působí **pružně**.
2. Po překročení meze pružnosti přecházejí postupně jednotlivé prvky do plastického stavu a závislost mezi zatížením a deformacemi přestává být lineární (lomená čára apod.). Jde o **fyzikální nelinearitu**, neboť jejím zdrojem jsou nelineární fyzikální vztahy. Princip superpozice již nelze uplatnit.
3. V okamžiku, kdy se vyřazením již zplastizovaných prvků změní zbylá soustava (sestávající z dosud nezplastizovaných, tedy pružně působících prvků) v kinematicky neurčitou s alespoň jedním stupněm volnosti, vznikne mezní **plastický mechanismus** a dosažená úroveň zatížení představuje **mezní plastické zatížení**

soustavy. Rozdíl mezi tímto zatížením a zatížením na mezi pružnosti soustavy představuje **plastickou rezervu** soustavy (konstrukce).

4. Při odlehčení probíhají změny (až do určité meze) pružně a v prvcích soustavy zůstávají **reziduální vnitřní síly** i ve zcela nezatíženém stavu.

Přechod od pružného stavu až k meznímu plastickému stavu lze sledovat **postupným výpočtem**, při němž se po přechodu každého dalšího prvku do plastického stavu modifikuje řešená pružná soustava. Pokud se zajímáme jen o konečný mezní stav, lze užít určitých **extremálních principů** - tzv. statické a kinematické věty, jak se čtenář dozví v podrobnějším kurzu teorie plasticity.

Příklad 2.20

Určete plastickou sílu F_{pl} soustavy podle obr. 2.19 (příklad 2.18) za předpokladu, že všechny pruty mají shodnou mezní normálovou sílu N_R (v tahu i tlaku - předpokládá se, že vybočení tlačeného prutu je konstruktivně zabráněno).

Návod a výsledek:

Využijte výsledků pružného řešení (příklad 2.18). Soustavu (staticky určitou), jež vznikne vyřazením prutu, který zplastizuje jako první, vyřešte na účinek přírůstku ΔF. Jeho velikost pak stanovte z podmínky, že v dalším prutu bude dosaženo mezní síly N_R.

Řešení:

$$F_{pl} = 1{,}707 N_R.$$

S využitím plastických vlastností se setkáváme rovněž u **nehomogenních nosníků**. Tak např. u tlačeného železobetonového sloupku podle obr. 2.15 jsme v pružném stavu odvodili vzájemný poměr mezi napětím ve výztuži a v betonové části - rov. (2.22). Při tomto poměru by však v okamžiku dosažení výpočtové pevnosti betonu bylo napětí ve výztuži výrazně pod její výpočtovou pevností. Pokud však přisoudíme betonu schopnost plasticky se přetvářet, může deformace nehomogenního sloupku pokračovat dále, a to až do vyčerpání výpočtové pevnosti výztuže. Výpočtová mezní síla je pak

$$N_{Rd} = A_c f_{cd} + A_s f_{sd} \tag{2.32}$$

kde A_c a f_{cd} jsou průřezová plocha a výpočtová pevnost betonu a A_s a f_{sd} analogické hodnoty výztuže.

3 Napětí v ohýbaných nosnících

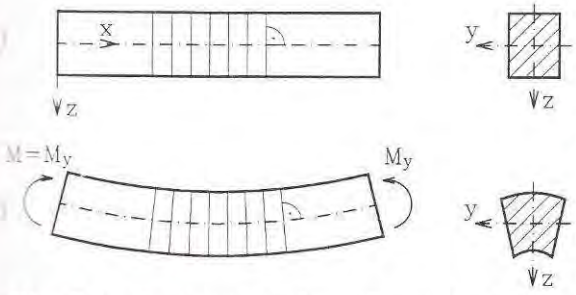
3.1 Normálová napětí při ohybu

Při ohybu nosníku (prutu) vznikají v jeho průřezech ohybové momenty a obvykle též posouvající síly. Původně přímá osa prutu se ohne, tj. změní se v rovinnou n. prostorovou křivku. V této kapitole se zaměříme na **rovinný ohyb**, při němž vnější síly včetně reakcí leží v jedné z hlavních rovin prutu nebo jsou k ní symetrické. Hlavní roviny jsou ty, které procházejí osou prutu x a některou z hlavních os setrvačnosti průřezu (y nebo z). U prutů, zejména tenkostěnných, s výrazně nesouměrným průřezem však musí rovina zatížení procházet spojnicí středů smyku průřezu, pukud nemá dojít ke kroucení. Tento jev bude blíže rozebrán později (odst. 3.4); zatím budeme předpokládat, že vyšetřujeme případy, kde se neuplatní.

Pro rovinný ohyb v rovině xz platí

$$N = V_y = 0, \quad M_x = M_z = 0 \tag{3.1}$$

a nenulovými složkami vnitřních sil jsou tedy **ohybový moment** M_y a **posouvající síla** V_z (v případech, kdy je rovina ohybu zřejmá, často vypouštíme indexy; pak znamená: $M = M_y$, $V = V_z$, $q = q_z$).



Obr. 3.1 *Rovinnost průřezů při prostém ohybu*

Ještě jednodušší základní případ představuje tzv. **prostý ohyb**, při němž jsou i posouvající síly rovny nule $V_z = 0$, a jedinou složkou působící v průřezu prutu je tedy ohybový moment $M = M_y$. Takový stav vyvodí např. zatížení dvojicemi sil o shodném momentovém účinku M_y na obou koncích prutu - obr. 3.1. Ohybové momenty jsou pak shodné ve všech průřezech a jsou rovny koncovým momentům.

Při odvození vztahu pro normálová napětí σ_x v průřezu vycházíme - podobně jako u osového tahu a tlaku - ze dvou základních předpokladů:

a) průřezy rovinné a kolmé k ose prutu před deformací zůstanou rovinnými a kolmými k deformované ose (Bernoulliova hypotéza),

b) podélná vlákna na sebe vzájemně netlačí, tj.

$$\sigma_y = \sigma_z = 0. \tag{3.2}$$

První předpoklad o rovinnosti a kolmosti průřezů k deformované ose je znázorněn na obr. 3.1. Má **deformační** (geometrickou) povahu a můžeme z něho odvodit vztahy mezi protažením jednotlivých "vláken" prutu (hmotných rovnoběžek s osou x).

Uvažujme elementární úsek prutu o délce dx. Vlivem ohybu se průřezy vzájemně pootočí o úhel dφ (obr. 3.2), na spodní straně, je-li $M_y > 0$, se vlákna prodlouží a nahoře se zkrátí. V určité úrovni je tedy **neutrální vrstva**, jejíž délka zůstane zachována; její poloměr křivosti označíme r. Budeme-li předběžně předpokládat, že neutrální vrstva prochází těžištěm průřezu, tedy osou x, pak platí (obr. 3.2)

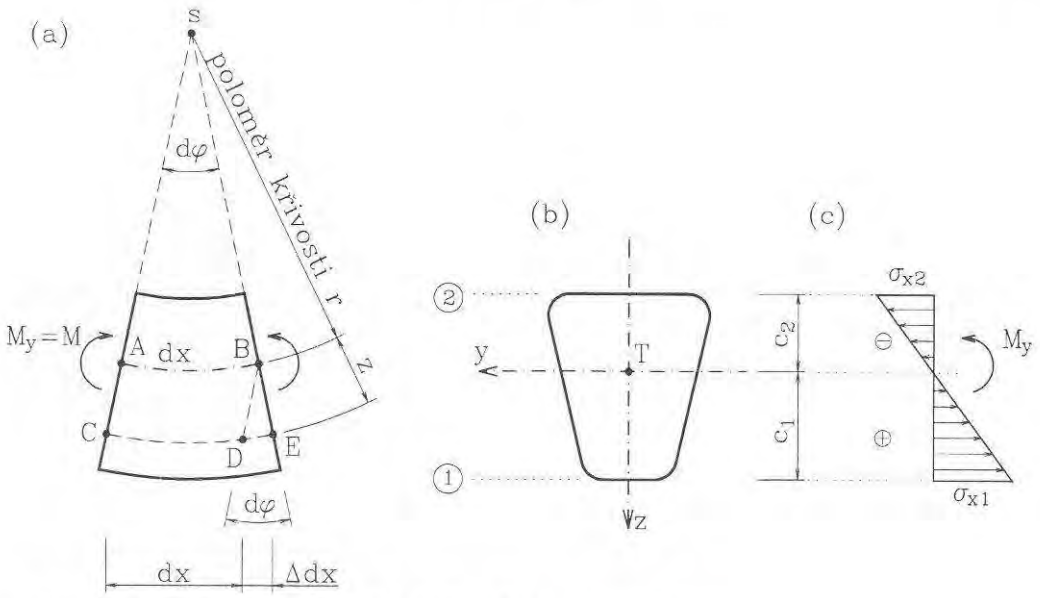
$$\mathrm{d}x = \overline{AB} = r\mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}x' = \overline{CE} = (r+z)\mathrm{d}\varphi, \quad \Delta\mathrm{d}x = \overline{DE} = \mathrm{d}x' - \mathrm{d}x = z\mathrm{d}\varphi .$$

Poměrné protažení obecného vlákna je tedy

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{z\mathrm{d}\varphi}{r\mathrm{d}\varphi} = \frac{z}{r}. \tag{a}$$

Poměrná protažení tedy probíhají lineárně po výšce průřezu. Abychom odtud odvodili rozložení napětí, použijeme pro lineárně **pružný materiál** Hookova zákona podle rovnice (1.8), neboť napětí σ_y a σ_z jsou podle přijatých předpokladů - rov. (3.2) - rovna nule. Je tedy

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{E}{r}z. \tag{3.3}$$



Obr. 3.2 *Deformace a napětí ohýbaného prutu (nosníku)*

V této rovnici neznáme poloměr křivosti r. Využijeme nyní **statické podmínky** ekvivalence vnitřních sil v průřezu prutu (1.6), a to ty z nich, jež obsahují normálová napětí σ_x. V souladu s rovnicemi (3.1) je $N = M_z = 0$, takže zmíněné rovnice po dosazení za σ_x z rovnice (3.3) jsou

$$N = \int_A \sigma_x \mathrm{d}A = \frac{E}{r}\int_A z\mathrm{d}A = \frac{E}{r}S_y = 0,$$

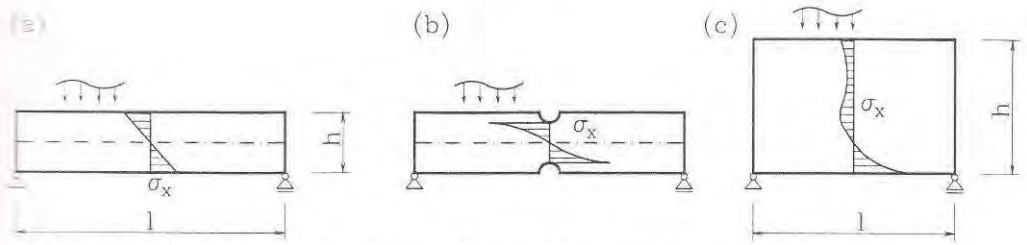
$$M_y = \int_A \sigma_x z\mathrm{d}A = \frac{E}{r}\int_A z^2\mathrm{d}A = \frac{E}{r}I_y, \qquad \text{(b)}$$

$$M_z = -\int_A \sigma_x y\mathrm{d}A = -\frac{E}{r}\int_A yz\mathrm{d}A = -\frac{E}{r}D_{yz} = 0.$$

V první rovnici snamená S_y statický moment průřezové plochy k ose y. Ten je roven nule, neboť osa y prochází těžištěm, takže tato rovnice je splněna a současně se tím potvrdil předpoklad, že neutrální vrstva prochází těžištěm a protíná tedy průřez v ose y, která je *neutrální osou*, na níž jsou normálová napětí σ_x rovna nule. Třetí rovnice je rovněž splněna, neboť deviační moment D_{yz} je roven nule, jestliže jsme zvolili za y, z hlavní osy setrvačnosti průřezu.

Z druhé rovnice (b) plyne vztah pro *křivost* ohnuté střednice prutu v rovině xz

$$\frac{1}{r} = \frac{M_y}{EI_y}. \qquad (3.4)$$



Obr. 3.3 *Průběh normálových napětí v průřezu nosníku a stěny*

Tato rovnice definuje deformace ohýbaného pružného prutu vyvozené ohybovými momenty a je výchozím vztahem pro určování přetvoření prutu - viz kap. 4. Jejím dosazením do rovnice (a) obdržíme

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z. \qquad (3.5)$$

Normálová napětí v průřezu tedy probíhají **lineárně po výšce nosníku** a extrémní hodnoty vznikají v krajních bodech (v krajních vláknech nosníku) - obr. 3.2c.

Odvozené řešení platí **přesně** pro případ prostého ohybu prutu stálého průřazu, pokud zatížení konců nosníku dvojicemi sil (tj. koncovými momenty) je realizováno způsobem shodným s rozložením vnitřních sil, tj. přímkovým. Při jiném způsobu zavedení koncových momentů platí rovnice (3.5) v dostatečné vzdálenosti od okrajů - v důsledku Saint-Venantova principu. V příčném směru se nosník rovněž deformuje v souladu s rovnicí (1.9): je-li při spodní straně v podélném směru tažen, pak v příčném směru se zkracuje úměrně Poissonovu součiniteli ν a naopak. Tvar průřezu po deformaci je vyznačen na obr. 3.1b pro obdélníkový průřez. Tyto deformace nemají u nosníků velký

význam a nebudeme je proto dále sledovat (určitou roli mají u velmi širokých nosníků, které působí jako jednosměrně ohýbané desky - příčná deformace u nich nemůže probíhat zcela volně a vznikají tak příčná normálová napětí σ_y, jak bude vysvětleno v teorii desek - viz lit. [13]).

V případě rovinného ohybu, při němž kromě ohybových momentů působí též posouvající síly, mají přijaté předpoklady a tedy i z nich odvozené závěry povahu **přibližných vztahů**. Smyková napětí, vyvolaná posouvajícími silami, způsobují zkosení a tím i ztrátu rovinnosti průřezů (deplanaci, zkřivení), takže Bernoulliova hypotéza zachování rovinnosti průřezů již neplatí. Výsledky zkoušek i podrobnější teoretické studie však potvrzují, že u dostatečně štíhlých prutů stálého nebo povlovně proměnného průřezu vystihuje lineární průběh normálových napětí podle rov. (3.5) skutečné poměry velmi dobře, je-li $l > 5h$ (obr. 3.3a). Neplatí to ovšem - podobně jako při prostém tahu - v místě náhlých průřezových změn, kde vznikají koncentrace napětí - obr. 3.3b. Prvky relativně značně vysoké ($l < 3h$) již nemají povahu prutů, jde o nosné stěny, u nichž je stav napjatosti i deformace složitější a vyšetřuje se metodami matematické pružnosti - viz [13]. Normálová napětí σ_x zde mají výrazně nelineární průběh (srov. obr. 3.3c).

Zcela analogickým postupem, jakého jsme užili při odvození rovnice (3.5) pro ohyb v rovině xz, získáme pro ohyb v rovině xy vztah

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y. \tag{3.6}$$

Záporné znaménko odpovídá přijaté znaménkové konvenci podle obr. 1.5: kladný ohybový moment M_z vyvolává kladná (tj. tahová) napětí v bodech se zápornou pořadnicí y (srov. poslední rovnici 1.6).

3.2 Návrh a posouzení ohýbaného nosníku v pružném oboru

Průřezový modul

Posuzujeme-li ohýbaný nosník podle teorie pružnosti, vycházíme z rovnice (3.5), resp. (3.6). Extrémní napětí vznikají v krajních bodech průřezu a při ohybu v rovině xz jsou rovna

$$\sigma_{x1} = \frac{M_y}{I_y} c_1, \qquad \sigma_{x2} = -\frac{M_y}{I_y} c_2, \tag{c}$$

kde c_1 a c_2 jsou vzdálenosti krajních bodů průřezu od těžištní osy y - obr. 3.2b. Jestliže označíme

$$W_{y1} = \frac{I_y}{c_1}, \qquad W_{y2} = \frac{I_y}{c_2}, \tag{3.7}$$

pak rovnice (c) můžeme vyjádřit takto:

$$\sigma_{x1} = \frac{M_y}{W_{y1}}, \qquad \sigma_{x2} = -\frac{M_y}{W_{y2}}. \tag{3.8}$$

Veličinu W nazýváme **průřezový modul**; má rozměr L^3 a udáváme ji v mm^3, m^3 apod. U obecného průřezu rozlišujeme dva průřezové moduly ke každé hlavní ose, tedy např. k ose y podle vztahů (3.7) modul ke spodním (W_{y1}) a horním (W_{y2}) vláknům; podobně je tomu vůči ose z. Pokud je však průřez k některé ose symetrický, jsou průřezové moduly k oběma krajním vláknům shodné a není třeba je odlišovat indexy.

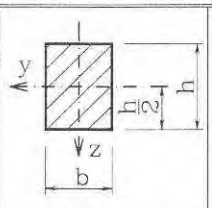
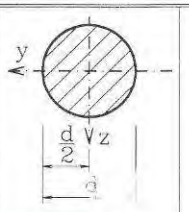
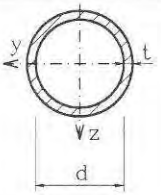
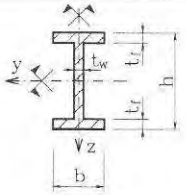
Tak pro **obdélníkový průřez** při označení podle tab. 3.1 je

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3, \quad c_1 = c_2 = \frac{h}{2}, \quad W_{y1} = W_{y2} = W_y = \frac{1}{6}bh^2, \tag{d}$$

k ose z záměnou označení

$$W_z = \frac{1}{6}hb^2.$$

Tabulka 3.1 *Průřezové moduly jednoduchých obrazců*

Tvar průřezu				
Průřezové moduly W_y, W_z	$W_y = \frac{1}{6}bh^2$ $W_z = \frac{1}{6}hb^2$	$W_y = W_z = \frac{\pi}{32}d^3$	$W_y = W_z = \frac{\pi}{32d}\cdot\left[d^4 - (d-2t)^4\right]$	$W_y = \frac{1}{6h}\left[bh^3 - (b-t_w)(h-2t_f)^3\right]$ $W_z = \frac{1}{6b}\left[2t_f b^3 + (h-2t_f)t_w^3\right]$

Pro plný kruhový průřez o průměru d je

$$I_y = I_z = \frac{\pi}{64}d^4, \quad c_1 = c_2 = \frac{d}{2}, \quad W_y = W_z = \frac{\pi}{32}d^3.$$

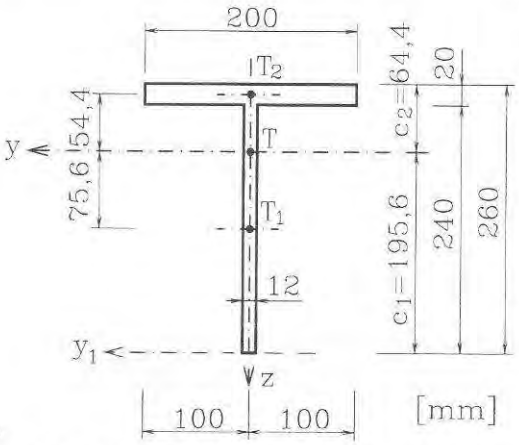
Podobně se odvodí průřezové moduly pro mezikruhový průřez a dvojose symetrický I-profil jak jsou uvedeny v rabulce 3.1. Vztahy pro další tvary průřezu a číselné hodnoty

průřezových modulů pro ocelové **válcované nosníky** jsou obsaženy např. ve Statických tabulkách [3].

Je třeba připomenout, že průřezový modul **složeného obrazce** nelze obecně odvodit jako součet hodnot platných pro dílčí části, ale je zapotřebí známými postupy určit moment setrvačnosti k příslušné ose a z rovnic (3.7) určit průřezové moduly. Ukážeme to na příkladu.

Příklad 3.1

Určete průřezové moduly k oběma hlavním osám symetrického T-průřezu podle obr. 3.4.



Obr. 3.4 *Symetrický T-průřez (k příkladu 3.1)*

Řešení:

Plocha stojiny A_w, pásnice A_f a celková plocha průřezu jsou

$$A_w = 12 \cdot 240 = 2880 \text{ mm}^2,$$
$$A_f = 200 \cdot 20 = 4000 \text{ mm}^2,$$
$$A = A_w + A_f = 6880 \text{ mm}^2.$$

Obvyklým způsobem určíme vzdálenost těžiště průřezu od spodního okraje:

$$c_1 = \frac{S_{y1}}{A} = \frac{1}{6880}(2880 \cdot 120 + 4000 \cdot 250) = 195{,}6 \text{ mm}.$$

Vzhledem k souměrnosti průřezu leží těžiště na ose symetrie z. S využitím Steinerovy věty vypočteme momenty setrvačnosti k oběma hlavním osám (potřebné kóty jsou vyznačeny na obr. 3.4):

$$I_y = \frac{1}{12}12 \cdot 240^3 + 2880 \cdot 75{,}6^2 + \frac{1}{12}200 \cdot 20^3 + 4000 \cdot 54{,}4^2 = 42{,}26 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

$$I_z = \frac{1}{12}240 \cdot 12^3 + \frac{1}{12}20 \cdot 200^3 = 13{,}37 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

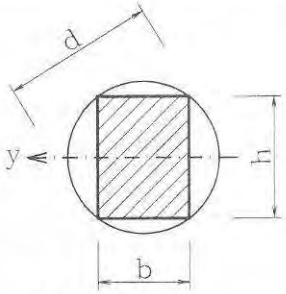
Průřezové moduly podle rovnic (3.7) jsou

$$W_{y1} = \frac{42{,}26 \cdot 10^6}{195{,}6} = 216 \cdot 10^3 \text{ mm}^3, \quad W_{y2} = \frac{42{,}26 \cdot 10^6}{64{,}4} = 656{,}2 \cdot 10^3 \text{ mm}^3,$$

$$W_z = \frac{13{,}37 \cdot 10^6}{100} = 133{,}7 \cdot 10^3 \text{ mm}^3.$$

Příklad 3.2

Určete při jaké volbě stran b, h získáme vyříznutím z kruhu o průměru d obdélníkový průřez s největším průřezovým modulem W_y - obr. 3.5.



Obr. 3.5

Řešení:

Uhlopříčka obdélníku je rovna průměru kruhu, takže

$$h^2 = d^2 - b^2. \tag{e}$$

Dosazením do vzorce (d) pro průřezový modul obdélníku

$$W_y = \frac{1}{6} bh^2 = \frac{1}{6} b\left(d^2 - b^2\right).$$

Podmínka extrému

$$\frac{\mathrm{d}W_y}{\mathrm{d}b} = \frac{1}{6}\left(d^2 - 3b^2\right) = 0.$$

Odtud a z rovnice (e) vyjde

$$b = \frac{1}{\sqrt{3}} d \cong 0{,}577d, \quad h = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} d \cong 0{,}816d.$$

Poměr stran $b/h \cong 0{,}707$, tedy přibližně 5:7.

Návrh a posouzení průřezu při ohybu

Při posouzení ohýbaného průřezu na mezní stav únosnosti podle teorie pružnosti rozhoduje napětí v krajních vláknech, které nesmí překročit výpočtovou (návrhovou) pevnost. U materiálů se shodnou výpočtovou pevností v tahu a tlaku rozhoduje vždy menší z obou průřezových modulů k uvažované ose, takže pro stručnost budeme zavádět např. k ose y

$$W_y = \min\left(W_{y1}, W_{y2}\right) \tag{3.9}$$

Pak výpočtový moment únosnosti průřezu v ohybu k ose y je

$$M_{Rd} = W_y f_d = W_y \frac{f_k}{\gamma_M} \tag{3.10}$$

kde opět znamená f_d výpočtovou pevnost materiálu, f_k charakteristickou pevnost (u oceli je to mez kluzu $f_k = f_y$) a γ_M je součinitel spolehlivosti materiálu.

Určíme-li tedy ve vyšetřovaném průřezu ohybový moment M_{Sd} vyvolaný výpočtovým zatížením, pak podmínka spolehlivosti zní

$$M_{Sd} \leq M_{Rd}, \tag{3.11}$$

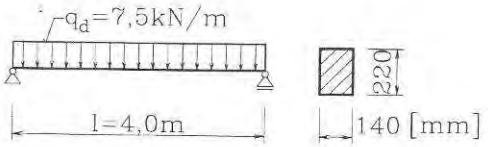
kde M_{Sd} zavádíme kladnou (absolutní) hodnotou. Má-li nosník stálý průřez, rozhoduje extrémní ohybový moment, tedy $M_{Sd} = |M_d|_{max}$.

Závěrem uveďme, že předchozí vztahy platí za předpokladu, že o potřebných dimenzích nosníku rozhoduje únosnost v ohybu, a že tato únosnost není ovlivněna smykovými napětími v rozhodujícím řezu nosníku. Dále též předpokládáme, že je zabezpečeno rovinné působení nosníku, takže nemůže dojít k jeho tzv. **klopení** (zkroucení), tedy ke ztrátě stability za ohybu. Blíže se o tom pojednává v odborných předmětech (kovové konstrukce aj.) stejně jako o dalších otázkách (oslabení průřezu otvory pro šrouby či nýty aj.), které zde nebudeme blíže sledovat.

Příklad 3.3

Posuďte podle mezního stavu únosnosti dřevěný trám obdélníkového průřezu 140x220 mm, je-li prostě uložen na rozpětí $l = 4{,}0$ m a zatížen výpočtovým (návrhovým) zatížením q_d = 7,5 kN/m - obr. 3.6. Výpočtovou pevnost dřeva uvažujte hodnotou $f_d = 13{,}54$ MPa.

Řešení:



Obr. 3.6

Průřezový modul podle rov. (d)

$$W_y = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}140 \cdot 220^2 =$$
$$= 1{,}129 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 = 1{,}129 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Výpočtový moment únosnosti podle (3.10)

$$M_{Rd} = W_y f_d = 1{,}129 \cdot 10^{-3} \cdot 13{,}54 = 15{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ MNm} = 15{,}3 \text{ kNm}.$$

Extrémní ohybový moment ve středu rozpětí je

$$M_{Sd} = \frac{1}{8}q_d l^2 = \frac{1}{8}7{,}5 \cdot 4{,}0^2 = 15{,}0 \text{ kNm} < M_{Rd} = 15{,}3 \text{ kNm}.$$

Podmínka (3.11) je tedy splněna, nosník vyhoví.

Příklad 3.4

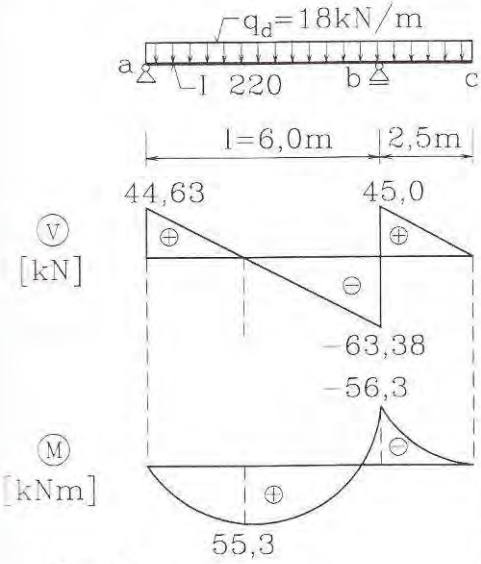
Navrhněte a posuďte průřez trámu z předchozího příkladu, je-li výpočtové zatížení dvojnásobné (q_d = 15,0 kN/m). Řešte samostatně.

Výsledek:

Potřebný průřezový modul je $2{,}22 \cdot 10^6$ mm^3. Vyhovuje profil 180x280 mm nebo 200x260 mm. (Rozměry trámů volíme obvykle v sudých násobcích cm.)

Příklad 3.5

Ocelový válcovaný nosník I 220 je podepřen podle obr. 3.7 a zatížen plným rovnoměrným zatížením o výpočtové (návrhové) intenzitě q_d = 18.0 kN/m. Posuďte nosník na mezní stav únosnosti, je-li f_y = 235 MPa a γ_M = 1,1.



Obr. 3.7

Řešení:

V tabulkách vyhledáme průřezový modul nosníku I 220, je roven $W_y = 278 \cdot 10^3$ mm^3 = $278 \cdot 10^{-6}$ m^3, takže výpočtový moment únosnosti

$$M_{Rd} = W_y \frac{f_y}{\gamma_M} = 278 \cdot 10^{-6} \frac{235}{1{,}1} =$$

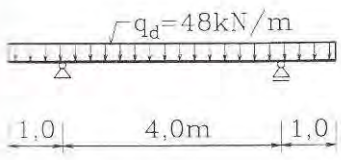
$$= 59{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ MNm} = 59{,}4 \text{ kNm}.$$

Dále staticky vyřešíme nosník na účinky výpočtového zatížení. Podporové reakce jsou R_a = 44,63 kN, R_b = 108,35 kN, průběh posouvajících sil $V = V_z$ a ohybových momentů $M = M_y$ určíme běžným postupem statiky - viz. obr. 3.7. V absolutní hodnotě největší ohybový moment vzniká nad pravou podporou, takže podmínka (3.11) je

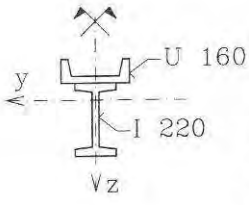
$$M_{Sd} = 56{,}3 \text{ kNm} < M_{Rd} = 59{,}4 \text{ kNm},$$

nosník vyhoví.

Příklad 3.6



Obr. 3.8



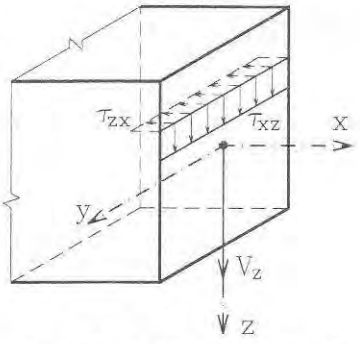
Ocelový nosník svařený z válcových tyčí I 220 a U 160 je podepřen a zatížen výpočtovým zatížením podle obr. 3.8. Mez kluzu f_y = 235 MPa, dílčí součinitel materiálu γ_M 1,1. Úlohu řešte samostatně.

Výsledky:

$W_y = 353 \cdot 10^3$ mm^3, $M_{Rd} = 75{,}4$ kNm, $M_{Sd} = 72{,}0$ kNm; nosník vyhoví.

3.3 Smyková napětí při ohybu (masivní průřezy)

Pokud není nosník namáhán prostým ohybem, vznikají v příčných průřezech posouvající síly a v jejich důsledku též smyková napětí. Jejich velikost nemůžeme odvodit z Bernoulliova deformačního předpokladu o zachování rovinnosti průřezu, neboť ten vylučuje smykové deformace (zkosení) a z Hookova zákona ve smyku - rov. (1.11) by smyková napětí byla rovněž rovna nule. Vyjdeme proto z podmínky rovnováhy a využijeme věty o vzájemnosti smykových napětí - rov. (1.4), z níž vyplývá, že složky smykového napětí ve svislém řezu τ_{xy} a ve vodorovném řezu τ_{zx} jsou shodné.



Obr. 3.9 *Vzájemnost složek τ_{xz} a τ_{zx}*

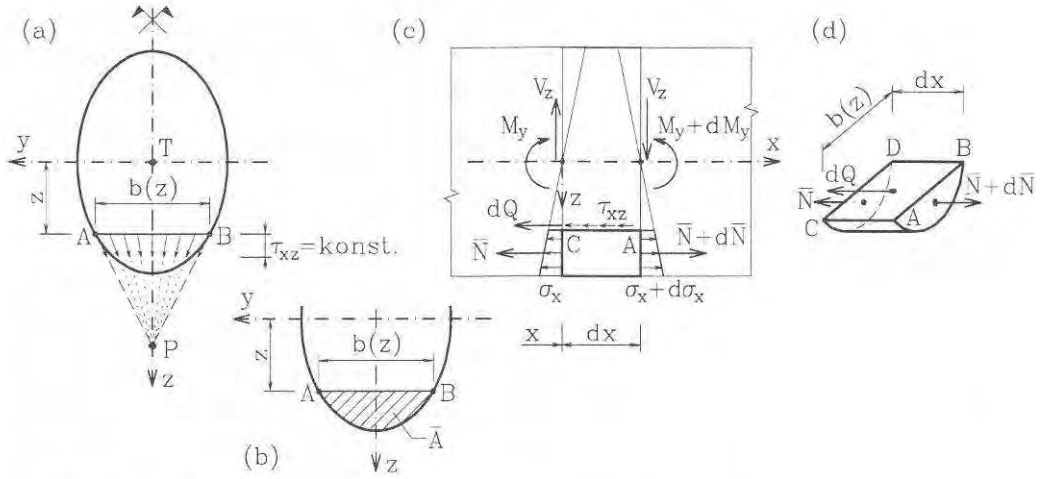
● Nosník stálého průřezu

Uvažujme nosník stálého průřezu symetrický k rovině xz (na obr. 3.10 svislé).

Vyjdeme ze dvou přibližných předpokladů, jak je formuloval Grashof:

a) podél rovnoběžky s neutrální osou (tj. podél přímky z = konst.) je svislá složka smykového napětí **konstantní**: τ_{xz} = konst.,

b) vektory výsledných smykových napětí podél této přímky směřují do **společného bodu** - průsečíku tečen k obrysu průřezu (bod P na obr. 3.10).



Obr. 3.10 *K odvození smykových napětí v ohýbaném nosníku*

Připomeňme, že smyková napětí na okraji průřezu musí mít směr **tečny k obrysu** při jakémkoli namáhání prutu, pokud povrch prutu není zatížen tangenciálním zatížením. Jiný směr by totiž vyvolával složku kolmou k obrysu, jež by podle věty o vzájemnosti smykového napětí musela být doprovázena odpovídající složkou na povrchu prutu.

Oba zavedené předpoklady jsou znázorněny na obr. 3.10a. Sledujme nyní elementární úsek nosníku o délce dx - obr. 3.10c. Ohybový moment v pravém průřezu je obecně odlišný od momentu v levém řezu, takže jím vyvolaná normálová napětí σ_x, jejichž lineární průběh po výšce se řídí rovnicí (3.5), jsou rovněž různá v obou řezech vzdálených navzájem o dx. Uvolníme-li nyní z myšleného elementu nosníku jeho spodní část, omezenou rovinou z = konst., pak výslednice normálových napětí na obou protilehlých ploškách budou rovněž rozdílné: v průřezu x je to $\overline{N}$, v soumezném průřezu $x + dx$ pak $\overline{N} + d\overline{N}$ - obr. 3.10c, d. Označíme-li jako $\overline{A}$ část plochy pod úsečkou $\overline{AB}$ (tj. přímkou z = konst.), pak integrací napětí σ_x, daných vztahem (3.5) po této ploše dostáváme sílu $\overline{N}$ a její diferenciál $d\overline{N}$:

$$\overline{N} = \int_{\overline{A}} \sigma_x \mathrm{d}A = \frac{M_y}{I_y} \int_{\overline{A}} z \mathrm{d}A = \frac{M_y}{I_y} \overline{S}_y, \tag{f}$$

$$\mathrm{d}\overline{N} = \frac{\mathrm{d}\overline{N}}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{M_y}{I_y} \overline{S}_y \right) \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} \frac{\overline{S}_y}{I_y} \mathrm{d}x = V_z \frac{\overline{S}_y}{I_y} \mathrm{d}x \,. \tag{g}$$

Zde znamená $\overline{S}_y$ statický moment oddělené části průřezu (zašrafované na obr. 3.10b) k ose y. Protože je průřez nosníku konstantní, uplatnila se derivace jen u ohybového momentu M_y a podle Schwedlerovy věty (třetí rovnice 1.5) vede na posouvající sílu V_z.

Na horní plošce odříznuté části (*ABDC* na obr. 3.10d) působí rovnoměrně rozdělená smyková napětí τ_{zx}, jejichž výslednice je

$$\mathrm{d}Q = \tau_{zx}\, b(z)\, \mathrm{d}x. \tag{h}$$

Z podmínky rovnováhy oddělené části ve směru x (obr. 3.10d)

$$-\mathrm{d}\overline{Q} - \overline{N} + (\overline{N} + \mathrm{d}\overline{N}) = 0$$

a z rovnice (g) a (h) plyne

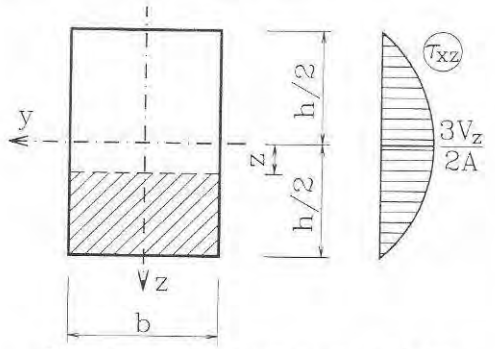
$$\mathrm{d}\overline{Q} = \tau_{zx} b(x) \mathrm{d}x = \mathrm{d}\overline{N} = V_z \frac{\overline{S}_y}{I_y} \mathrm{d}x \,. \tag{i}$$

Napětí $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ je tedy

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{V_z \overline{S}_y}{I_y b(z)}, \tag{3.12}$$

kde je V_z posouvající síla v daném průřezu, $\overline{S}_y$ statický moment "oddělené" části průřezu (zašrafované na obr. 3.10b), I_y moment setrvačnosti (celého) průřezu k ose y, $b(z)$ šířka v uvažovaném místě.

Vztah (3.12) označujeme často jako **Grashofův vzorec**. Vypočteme-li složku τ_{xz}, získáme výsledné smykové napětí z druhého Grashofova předpokladu. Statický momenty $\bar{S}_y$ můžeme počítat pro plochu pod přímkou z = konst. nebo nad ní - v absolutní hodnotě jsou obě hodnoty shodné.



Obr. 3.11 *Smyková napětí u obdélníkového průřezu*

Pro **obdélníkový průřez** platí:

$$\bar{S}_y = b\left(\frac{h}{2}-z\right)\left(\frac{h}{2}+z\right)\frac{1}{2} = \frac{b}{8}\left(h^2-4z^2\right), \quad \text{(j)}$$

$$b(z) = b = \text{konst.},$$

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3.$$

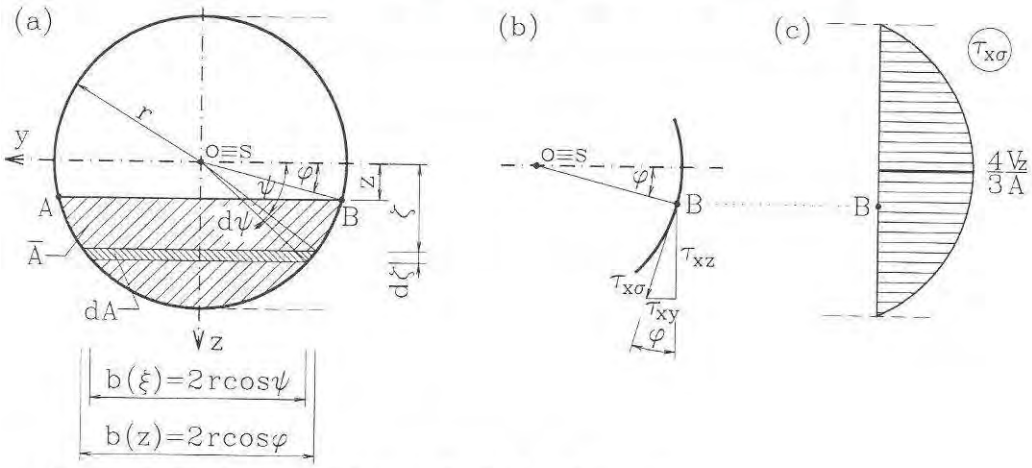
Dosazením do (3.12)

$$\tau_{xz} = \frac{V_z \dfrac{b}{8}\left(h^2-4z^2\right)}{\dfrac{1}{12}bh^3 \cdot b} = \frac{3}{2}\frac{V_z}{bh}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right). \tag{3.13}$$

Smykové napětí tedy probíhá po výšce podle kvadratické paraboly. Na horním i spodním okraji ($z = \pm h/2$) je nulové, maximální hodnotu má na ose y:

$$\tau_{xz,\max} = \frac{3}{2}\frac{V_z}{bh} = \frac{3}{2}\frac{V_z}{A}. \tag{3.14}$$

Maximální smykové napětí tedy převyšuje průměrnou hodnotu o 50%.



Obr. 3.12 *Smyková napětí v nosníku kruhového průřezu*

Při odvození smykových napětí v nosníku **kruhového průřezu** je vhodné využít polárních souřadnic. Zavedeme-li pomocnou souřadnici ζ, platí zřejmě geometrické vztahy - viz obr. 3.12a:

$$\zeta = r\sin\psi,\quad b(\zeta) = 2r\cos\psi,\quad \mathrm{d}\zeta = r\cos\psi\,\mathrm{d}\psi,\quad \mathrm{d}A = b(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 2r^2\cos^2\psi\,\mathrm{d}\psi.$$

Statický moment části plochy $\bar{A}$ omezené přímkou z = konst. je pak

$$\bar{S}_y = \int_{\bar{A}} \zeta \mathrm{d}A = \int_{\varphi}^{\pi/2} r\sin\psi \cdot 2r^2\cos^2\psi \mathrm{d}\psi = 2r^3\left[\frac{1}{3}\cos^3\psi\right]_{\varphi}^{\pi/2} = \frac{2}{3}r^3\cos^3\varphi.$$

Moment setrvačnosti kruhu k centrální ose $I_y = \pi r^4/4$, takže dosazením do Grashofova vzorce (3.12) je svislá složka smykového napětí

$$\tau_{xz} = \frac{V_z\bar{S}_y}{I_y b(z)} = \frac{V_z \cdot \frac{2}{3}r^3\cos^3\varphi}{\frac{1}{4}\pi r^4 \cdot 2r\cos\varphi} = \frac{4}{3}\frac{V_z}{\pi r^2}\cos^2\varphi = \frac{4}{3}\frac{V_z}{A}\cos^2\varphi. \qquad (3.15)$$

Na okraji průřezu má výsledné smykové napětí směr tečny k obrysu (obr. 3.12b) a je tedy rovno

$$\tau_{xo} = \frac{\tau_{xz}}{\cos\varphi} = \frac{4}{3}\frac{V_z}{A}\cos\varphi. \qquad (316)$$

Jeho průběh po výšce je vyznačen na obr. 3.12c. Maximální hodnota smykových napětí je na ose y (neutrální ose), kde $\tau_{xz} = \tau_{xo}$ a převyšuje průměrné napětí o jednu třetinu, tj. o 33,3%.

Příklad 3.7

Vypočtěte maximální smykové napětí v dřevěném trámu obdélníkového průřezu podle obr. 3.6 (příklad 3.3) a posuďte jeho spolehlivost.

Řešení:

Maximální hodnota posouvající síly je

$$V_z = \frac{1}{2}q_d l = \frac{1}{2}7{,}5 \cdot 4{,}0 = 15{,}0\,\mathrm{kN} = 0{,}015\,\mathrm{MN}.$$

Dosazením do vzorce (3.14) je

$$\tau_{xz,\max} = \frac{3}{2}\frac{V_z}{A} = \frac{3}{2}\frac{0{,}015}{0{,}14 \cdot 0{,}22} \cong 0{,}73\,\mathrm{MPa}.$$

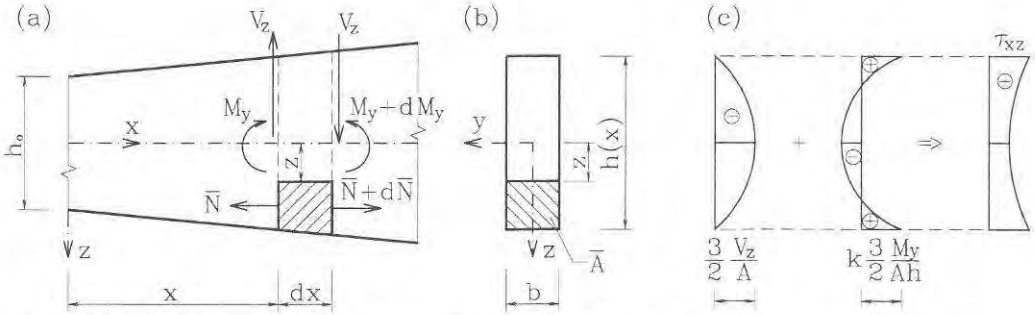
Uvažujeme-li charakteristickou pevnost dřeva ve smyku $f_{v,k} = 2{,}4$ MPa, modifikační součinitel $k_{\mathrm{mod}} = 0{,}8$ (střednědobé zatížení, běžná vlhkost) a součinitel materiálu $\gamma_M = 1{,}3$, je výpočtová pevnost ve smyku

$$f_{v,d} = k_{\mathrm{mod}} \frac{f_{v,k}}{\gamma_M} = 0{,}8 \frac{2{,}4}{1{,}3} \cong 1{,}48 \text{ MPa}.$$

Je tedy $\tau_{\max} = 0{,}73$ MPa $< f_{v,d} = 1{,}48$ MPa, takže nosník vyhoví.

● Nosník proměnného průřezu

U nosníku proměnného průřezu je rozložení smykových napětí odlišné než u prismatického prutu. Vzhledem ke složitosti úlohy se omezíme na prut **obdélníkového průřezu** s lineárně proměnou výškou - obr. 3.13.



Obr. 3.13 *Smyková napětí v nosníku lineárně proměnné výšky*

Výšku průřezu $h(x)$, statický moment oddělené části $\bar{S}_y$ dle rov. (j) a moment setrvačnosti I_y můžeme vyjádřit

$$h(x) = h_o + kx, \quad \bar{S}_y(x) = \frac{b}{8}\left(h^2(x) - 4z^2\right), \quad I_y(x) = \frac{1}{12} b h^3(x), \tag{k}$$

kde h_o je výška v počátku souřadnic a k konstanta úměrnosti.

Oddělíme-li řezem $z =$ konst. spodní část elementu prutu o délce $\mathrm{d}x$ (obr. 3.13a), je dílčí výslednice normálových napětí na čelní ploše $\bar{N}$ opět dána vztahem (f), avšak nyní - na rozdíl od prutu stálého průřezu - jsou i geometrické veličiny $\bar{S}_y$ a I_y funkcí x. Použijeme-li pravidel o derivování zlomku a součinu, můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\bar{N}}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{M_y \bar{S}_y}{I_y}\right) = \frac{1}{I_y^2}\left[I_y \frac{\mathrm{d}\left(M_y \bar{S}_y\right)}{\mathrm{d}x} - M_y \bar{S}_y \frac{\mathrm{d}I_y}{\mathrm{d}x}\right] = \\ &= \frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x}\frac{\bar{S}_y}{I_y} + \frac{M_y}{I_y}\frac{\mathrm{d}\bar{S}_y}{\mathrm{d}x} - \frac{M_y \bar{S}_y}{I_y^2}\frac{\mathrm{d}I_y}{\mathrm{d}x}. \end{aligned} \tag{l}$$

Derivace ohybového momentu je podle Schwedlerovy věty posouvající síla V_z a derivace geometrických veličin odvodíme ze vztahů (k):

$$\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x} = k, \qquad \frac{\mathrm{d}\bar{S}_y}{\mathrm{d}x} = \frac{b}{8} 2h(x) \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{4} kbh,$$

$$\frac{\mathrm{d}I_y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{12} b \cdot 3h(x)^2 \cdot \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{4} kbh^2.$$

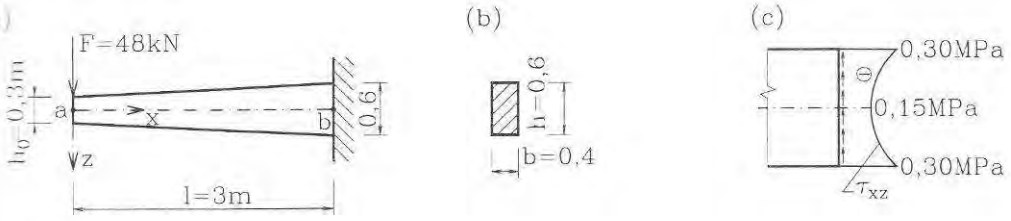
Dosazením do (l) a vyjádřením smykového napětí ze vztahu (i) vyjde po úpravě

$$\tau_{xz} = \frac{1}{b} \frac{\mathrm{d}\bar{N}}{\mathrm{d}x} = \frac{3}{2} \frac{V_z}{bh} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) - \frac{3}{2} \frac{kM_y}{bh^2} \left(1 - 12 \frac{z^2}{h^2} \right). \tag{3.17}$$

První člen odpovídá řešení platnému pro nosník stálého průřezu - srov. rov. (3.13), druhý představuje korekci vyvozenou průřezovou změnou. Na obr. 3.13c je naznačena superpozice obou složek napětí a výsledný průběh τ_{xz}. Je zřejmé, že rozložení smykových napětí po výšce průřezu se může podstatně lišit od průběhu v nosníku konstantního průřezu. Na horním a spodním okraji průřezu již není smykové napětí rovno nule, což není v rozporu s větou o vzájemnosti smykových napětí - rov. (1.4), neboť nezatížený např. spodní povrch nosníku není k příčnému řezu kolmý. Na neutrální ose ($z = 0$) se smykové napětí (v absolutní hodnotě) zmenšuje tehdy, když výška průřezu a ohybový moment (rovněž uvažovaný v absolutní hodnotě) podél osy nosníku rostou nebo klesají současně.

Příklad 3.8

Určete průběh smykových napětí ve vetknutí na konzole obdélníkového průřezu proměnné výšky podle obr. 3.14 od zatížení silou $F = 48$ kN přiloženou na volném konci.



Obr. 3.14

Řešení:

Z první rovnice (k) určíme konstantu úměrnosti k:

$$h(3,0) = h_0 + kx = 0,3 + k\,3,0 = 0,60 \quad \Rightarrow \quad k = 0,10.$$

V průřezu ve vetknutí je posouvající síla V_z = -48 kN = -0,048 MN, ohybový moment M_y = -48·3 = -144 kNm = -0,144 MNm. Konstanty v rov. (3.17) tedy jsou

$$\frac{3}{2}\frac{V_z}{bh} = \frac{3}{2}\frac{-0{,}048}{0{,}4\cdot 0{,}6} = -0{,}30\ \text{MPa}, \quad \frac{3}{2}\frac{kM_y}{bh^3} = \frac{3}{2}\frac{0{,}10\cdot(-0{,}144)}{0{,}4\cdot 0{,}6^2} = -0{,}15\ \text{MPa}.$$

Rovnice (3.17) je pak

$$\tau_{xz} = -0{,}30\left(1-4\frac{z^2}{0{,}6^2}\right)+0{,}15\left(1-12\frac{z^2}{0{,}6^2}\right) = -015-1{,}667z^2.$$

Dosazením z = 0 určíme τ_{xz} = -0,15 MPa, pro z = ±0,3 vyjde τ_{xz} = -0,30 MPa. Průběh napětí je vyznačen na obr. 3.14c; napětí na neutrální ose se v absolutní hodnotě zmenšilo na polovinu ve srovnání s prismatickým prutem.

3.4 Smyková napětí v tenkostěnných nosnících. Střed smyku

Tenkostěnnými nazýváme nosníky (pruty) tehdy, je-li tloušťka t jejich jednotlivých částí - např. stojiny t_w nebo pásnice t_f - značně menší než rozměry průřezu jako celku (obr. 3.15)

$$t,\ t_w,\ t_f << b,\ h. \tag{3.18}$$

Často se uvádí poměr 1:10, přijatelné výsledky však získáme i při méně výrazných poměrech. Rozeznáváme tenkostěnné pruty **otevřeného průřezu**, jejichž střednice (čára půlící tloušťku) netvoří uzavřenou křivku - např. tvaru I, U, T, C apod., a uzavřeného průřezu - O, □ apod. V dalším výkladu se zaměříme především na nosníky s otevřeným průřezem.

Budeme vycházet ze dvou základních přepokladů:

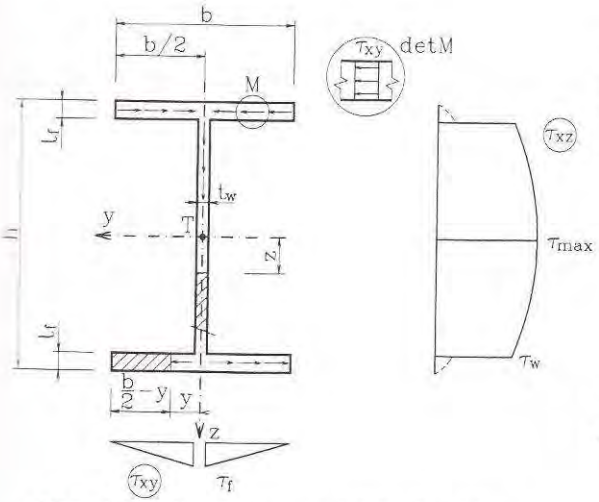
a) smyková napětí jsou konstantní v řezu kolmo k dílčí stěně (det. M na obr. 3.15)

b) jsou rovnoběžná s obrysem průřezu.

Základní vzorec (3.12) přepíšeme takto:

$$\tau_x = \frac{V_z \bar{S}_y}{I_y t}, \tag{3.19}$$

kde t je tloušťka ve vyšetřovaném místě a $\bar{S}_y$ statický moment plochy oddělené řezem kolmo k obrysu průřezu. Označení τ_x napovídá, že jde o výsledné napětí v rovině kolmé k ose x (na svislých částech je to τ_{xz}, na vodorovných τ_{xy}).



Obr. 3.15 *Smyk v symetrickém I-průřezu*

Pro dvojose symetrický **I průřez** podle obr. 3.15 jsou statické momenty oddělené plochy na pásnici (zašrafována na levé spodní odstávající části)

$$\bar{S}_y(y) = \left(\frac{b}{2} - y\right) t_f \cdot \frac{1}{2}\left(h - t_f\right) = \\ = \frac{1}{4} t_f (b - 2y)\left(h - t_f\right),$$

takže smyková napětí podle (3.19) jsou

$$\tau_{xy} = \frac{V_z \bar{S}_y}{I_y t} = \frac{V_z}{4I_y}(h - t_f)(b - 2y) \tag{3.20}$$

tj. probíhají podle přímky. Statický moment plochy oddělené řezem napříč stojinou ve vzdálenosti z je

$$\bar{S}_y(z) = \frac{1}{2} t_f (b - t_w)\left(h - t_f\right) + t_w\left(\frac{h}{2} - z\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + z\right).$$

Dosazením do rovnice (3.19) po úpravě je na stojině

$$\tau_{xz} = \frac{V_z}{8 I_y t_w}\left[4 t_f (b - t_w)\left(h - t_f\right) + t_w\left(h^2 - 4z^2\right)\right]. \tag{3.21}$$

Průběh smykových napětí po výšce stojiny je tedy parabolický s maximální hodnotou ve středu výšky

$$\tau_{max} = \frac{V_z}{8 I_y t_w}\left[4 t_f (b - t_w)\left(h - t_f\right) + t_w h^2\right]. \tag{3.22}$$

Další charakteristické hodnoty (τ_f, τ_w - obr. 3.15) se zjistí z rovnic (3.20) a (3.21) dosazením příslušných souřadnic.

Příklad 3.9

Určete etrémní smykové napětí v nosníku profilu I 220 vyvozené zatížením podle obr. 3.7 (příklad 3.5).

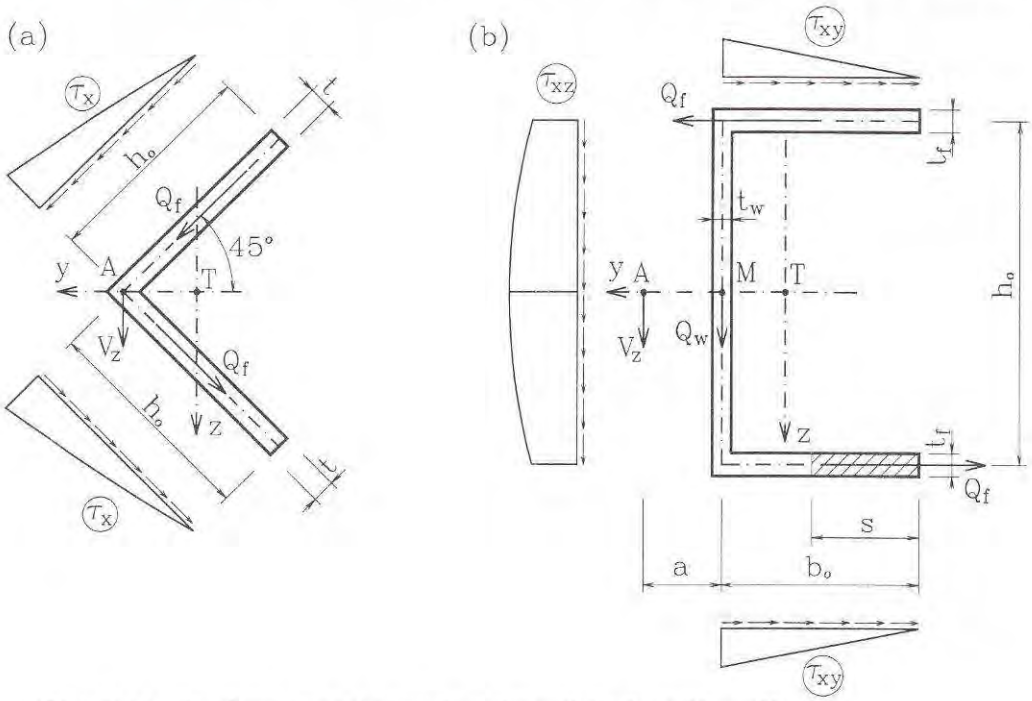
Řešení:

Extrémní posouvající síla na nosníku je v absolutní hodnotě 63,38 kN = 63380 N. Z tabulek vyhledáme pro I 220: h = 220 mm, b = 98 mm, t_w = 8,1 mm, t_f = 12,2 mm, $I_y = 30.5 \cdot 10^6$ mm^4. Z rovnice (3.22)

$$\tau_{max} = \frac{63380}{8 \cdot 30{,}5 \cdot 10^6 \cdot 8{,}1}\left[4 \cdot 12{,}2(98 - 8{,}1)(220 - 12{,}2) + 8{,}1 \cdot 220^2\right] =$$
$$= 41{,}8\ \text{N/mm}^2 = 41{,}8\ \text{MPa}.$$

● Střed smyku

Z předpokladů, které jsme uvedli výše a z rovnice (3.19) plynou u prutů otevřeného průřezu jednoznačně smyková napětí od posouvající síly v libovolné místě. Jejich integrací



Obr. 3.16 *Smyková napětí a střed smyku u úhelníku a U-profilu*

podél jednotlivých stěn můžeme odvodit výsledné smykové síly Q, jež jsou staticky ekvivalentní posouvající síle V_z. Má-li průřez dvě osy symetrie, prochází výsledná síla těžištěm T. Jinak tomu však je u **nesymetrických průřezů**, pokud rovina zatížení (budeme ji uvažovat svislou) není rovinou symetrie prutu.

Tak např. u rovnoramenného úhelníku při orientaci podle obr. 3.16a není průřez symetrický vůči ose z. Výslednice smykových sil na obou přírubách Q_f jsou shodné (a rovné $V_z/\sqrt{2}$) a protínají se v průsečíku os, tj. v bodu A, takže výsledná posouvající síla **neprochází těžištěm**, ale tzv. **středem smyku**, jímž musí proto též procházet rovina zatížení, pokud nemá být prut kroucen.

Odvození polohy středu smyku (též: středu ohybu) u obecného průřezu je součástí teorie kroucení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu; v našem výkladu se omezíme jen na jednodušší průřezy s jednou osou symetrie. Délky jednotlivých stěn budeme zjednodušeně zavádět jako délky jejich střednic, což vzhledem k relaci (3.18) nevede k závažným nepřesnostem.

Uvažujme jednoose symetrický **U-profil** podle obr. 3.16b. Zavedeme-li pomocnou souřednici s jako vzdálenost od volného konce příruby, je statický moment oddělené části $\bar{S}_y$ a smykové napětí pak podle rov. (3.19)

$$\bar{S}_y = t_f s \frac{h_o}{2} = \frac{1}{2} t_f h_o s, \qquad \tau_{xy} = \frac{V_z \bar{S}_y}{I_y t_f} = \frac{V_z h_o}{2 I_y} s.$$

Průběh napětí je lineární - obr. 3.16b. Výsledné smykové síly na přírubách získáme integrací

$$Q_f = \int_0^{b_o} \tau_{xy} t_f \mathrm{d}s = \frac{V_z h_o}{2 I_y} t_f \int_0^{b_o} s \mathrm{d}s = \frac{V_z h_o}{2 I_y} t_f \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^{b_o} = \frac{V_z t_f b_o^2 h_o}{4 I_y}. \qquad \text{(m)}$$

Průběh smykových napětí na stojině odvodíme analogicky jako u I-průřezu. Při zavedeném označení vyjde

$$\tau_{xz} = \frac{V_z}{8 I_y t_w} \left[4 t_f b_o h_o^2 + t_w \left(h_o - 4 z^2 \right) \right].$$

Jeho výslednici nemusíme odvozovat integrací, neboť jako jediná svislá složka musí být shodná s posouvající silou: $Q_w = V_z$.

Smykové síly na přírubách tvoří dvojici sil, jejíž momentový účinek je $Q_f h_o$. Složíme-li ji se silou $Q_w = V_z$ procházející osou stojiny (bodem M na obr. 3.16b), obdržíme výslednou sílu V_z odsunutou od osy stojiny o vzdálenost

$$a = \frac{Q_f h_o}{V_z} = \frac{t_f b_o^2 h_o^2}{4 I_y}. \qquad (3.23)$$

Touto vzdáleností je definována poloha středu smyku A; leží na opačné straně od stojiny než těžiště. Pokud nemá být prut kroucen, musí tedy výslednice vnějších sil procházet tímto středem smyku.

Pro válcované ocelové nosníky průřezu U, UE, UPE jsou polohy středu smyku uvedeny ve Statických tabulkách [3]. Vzhledem k tomu, že jejich dílčí stěny nemají tvar obdélníků (zaoblení koutů, příp. sklon hran); liší se poněkud od hodnot daných vzorcem (3.23).

Příklad 3.10

Odvoďte polohu středu smyku u tenkostěnného průřezu stálé tloušťky t, jehož střednici tvoří půlkružnice - obr. 3.17.

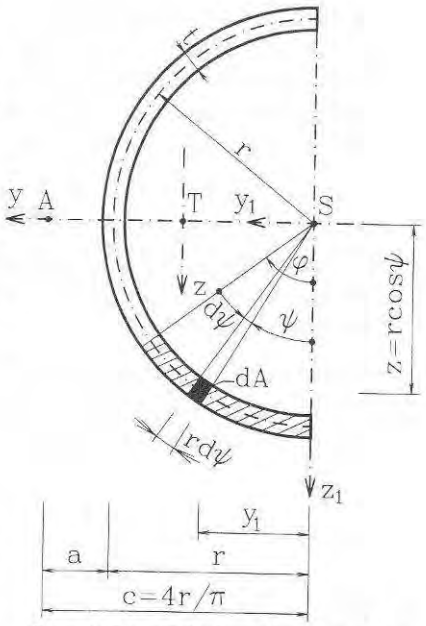
Řešení:

Zavedeme polární soustavu s úhlovou souřadnicí φ; pomocnou úhlovou proměnnou ψ a osovou y_1, kótovanou od středu mezikružného segmentu S - viz obr. 3.17. Pak element plochy dA je

$$\mathrm{d}A = tr\mathrm{d}\psi,$$

celková plocha průřezu a moment setrvačnosti k ose y, jež je osou symetrie

$$A = \int_A \mathrm{d}A = \int_0^{\pi} tr\mathrm{d}\psi = \pi tr, \qquad \text{(n)}$$



Obr. 3.17 *Střed smyku C-průřezu*

$$I_y = \int_A z^2\mathrm{d}A = \int_0^{\pi} (r\cos\psi)^2 tr\mathrm{d}\psi = tr^3\left[\frac{1}{2}\sin\psi + \frac{1}{4}\sin 2\psi\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi tr^3 .$$

Statický moment $\bar{S}_y$ plochy oddělené průvodičem svírajícím úhel φ s osou z_1:

$$\bar{S}_y = \int_A z\mathrm{d}A = \int_0^{\varphi} r\cos\psi \cdot tr\mathrm{d}\psi = tr^2\left[\sin\psi\right]_0^{\varphi} = tr^2\sin\varphi .$$

Dosazením do základní rovnice pro smyková napětí (3.19)

$$\tau_x = \frac{V_z\bar{S}_y}{I_y t} = \frac{V_z tr^2\sin\varphi}{\frac{1}{2}\pi tr^3\cdot t} = \frac{2V_z}{\pi tr}\sin\varphi . \qquad \text{(o)}$$

Moment ke středu S je

$$M_s = \int_0^{\pi} \tau_x tr\mathrm{d}\varphi = \frac{2V_z}{\pi tr} tr\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}V_z r .$$

Rameno posouvající síly c ke středu S a vzdálenost a od střednice průřezu tedy jsou

$$c = \frac{M_s}{V_s} = \frac{4}{\pi}r \cong 1{,}273r, \qquad a = c - r = \left(\frac{4}{\pi} - 1\right)r \cong 0{,}273r . \qquad \text{(p)}$$

Maximální smykové napětí je na neutrální ose ($\varphi = \pi/2$) a z rovnice (o) vyjde

$$\tau_{max} = \tau_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2V_z}{\pi t r} = 2\frac{V_z}{A}, \tag{3.24}$$

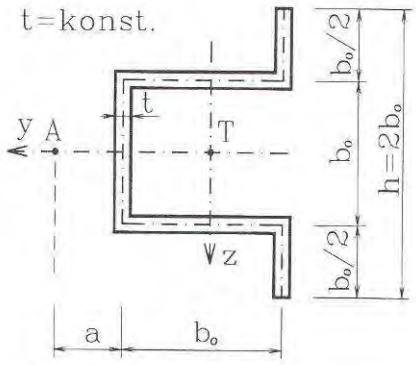
je tedy dvojnásobkem průměrného smykového napětí.

Příklad 3.11

Určete polohu středu smyku průřezu stálé tloušťky t znázorněného na obr. 3.18.

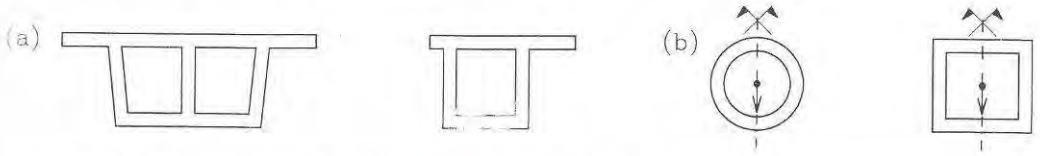
Výsledek:

$$a = \frac{5}{14} b_o \cong 0{,}357 b_o .$$



Obr. 3.18

U tenkostěnných nosníků **uzavřeného průřezu** (obr. 3.19) představuje určení smykových napětí staticky neurčitou úlohu, k jejímuž řešení je zapotřebí formulovat též deformační podmínky - viz. např. [6].

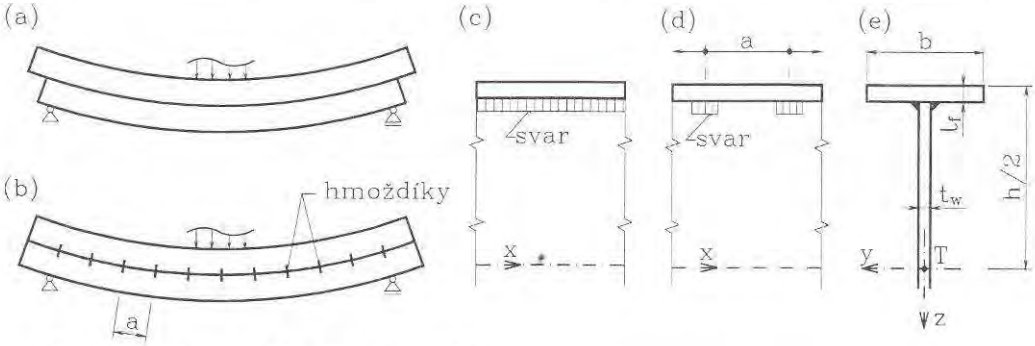


Obr. 3.19 *Tenkostěnné nosníky uzavřeného průřezu*

Výjimku představují jednokomůrkové nosníky s rovinou symetrie, zatížené v této rovině. Pak smyková napětí na rovině symetrie jsou rovna nule a jejich průběh po výšce průřezu je týž jako u průřezu otevřeného, vzniklého rozdělením uzavřeného průřezu na dvě poloviny (u mezikruhového je tedy $\tau_{max} = 2V_z/A$ apod.). Střed smyku ovšem leží na ose symetrie průřezu.

3.5 Složené nosníky

Složíme-li ohýbaný nosník, u něhož nejsou posouvající síly rovny nule (nejde o prostý ohyb), z několika podélných částí, musíme zabezpečit jejich vzájemné spojení, neboť jinak by se ve styčné spáře vzájemně posouvaly a působily by jako samostatné nosníky (zanedbáme-li tření ve spáře). Jestliže vzájemnému posunu zabráníme spojovacími pros-



Obr. 3.20 *Smyk u složených nosníků*

tředky (hmoždinky, svary, šrouby apod.), působí takto vzniklý **složený nosník** do určité míry jako celistvý. Za předpokladu, že spojení je dokonale nepoddajné, musí zajistit přenesení shodných sil, jaké v plném nosníku zachycují smyková napětí v odpovídající spáře. Na jednotku délky je to tedy u nosníku stálého průřezu

$$Q_x^* = b\tau_{zx} = b(z)\cdot\frac{V_z\bar{S}_y}{I_y b(z)} = \frac{V_z\bar{S}_y}{I_y}, \tag{3.25}$$

kde mají jednotlivé veličiny shodný význam jako ve vzorci (3.12), z něhož vycházíme. Velikost Q_x^* udáváme v [kN/m] apod.

Přisoudíme-li jednomu spojovacímu prostředku účinek na délce a (vzájemné vzdálenosti v podélném směru - obr. 3.20), působí na něj síla

$$Q_x = Q_x^* a = \frac{V_z\bar{S}_y}{I_y}a. \tag{3.26}$$

Statický moment $\bar{S}_y$ se vztahuje k ploše připojované části.

Příklad 3.12

Ocelový svařovaný nosník symetrického I-průřezu podle obr. 3.20c má celkovou výšku h = 700 mm, tloušťku stěny t_w = 10 mm a rozměry pásnice b = 270 mm, t_f = 16 mm. Posouvající síla V_z = 300 kN. Určete smykovou sílu působící na krční svary, jsou-li a) průběžné, b) přerušované se vzájemnou vzdáleností a = 300 mm.

Řešení:

Plocha pásnice je $A_f = bt_f = 4320$ mm^2. Moment setrvačnosti celého průřezu a statický moment připojované pásnice k ose y jsou

$$I_y \approx \frac{1}{12} t_w (h - 2t_f)^3 + 2A_f \left(\frac{h - t_f}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{12} 10(700 - 2 \cdot 16)^3 + 2 \cdot 4320 \cdot (342)^2 = 1259 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

$$\bar{S}_y = A_f \left(\frac{h - t_f}{2} \right) = 4320 \cdot 342 = 1{,}477 \cdot 10^6 \text{ mm}^3.$$

Z rovnice (3.25) pro alternativu a) vypočteme

$$Q_x^* = \frac{V_z \bar{S}_y}{I_y} = \frac{300 \cdot 1{,}477 \cdot 10^6}{1259 \cdot 10^6} = 0{,}3251 \text{ kN/mm} = 325{,}1 \text{ kN/m}$$

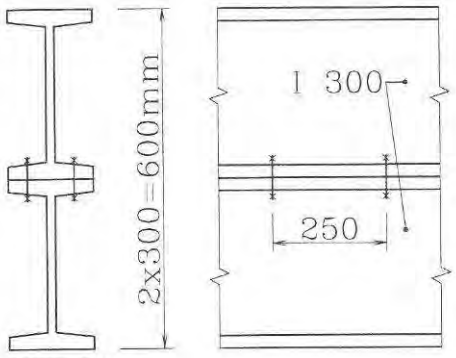
(je to síla na dvojici průběžných krčních svarů na m').

Pro úlohu b) je

$$Q_x = Q_x^* a = 325{,}1 \cdot 0{,}3 = 95{,}7 \text{ kN}.$$

Příklad 3.13

Dva ocelové válcované nosníky I 300 jsou vzájemně spojeny šrouby po vzdálenostech a = 250 mm (obr. 3.21). Určete smykové zatížení jednoho šroubu od posouvající síly V_z = 240 kN. Řešte samostatně.



Obr. 3.21

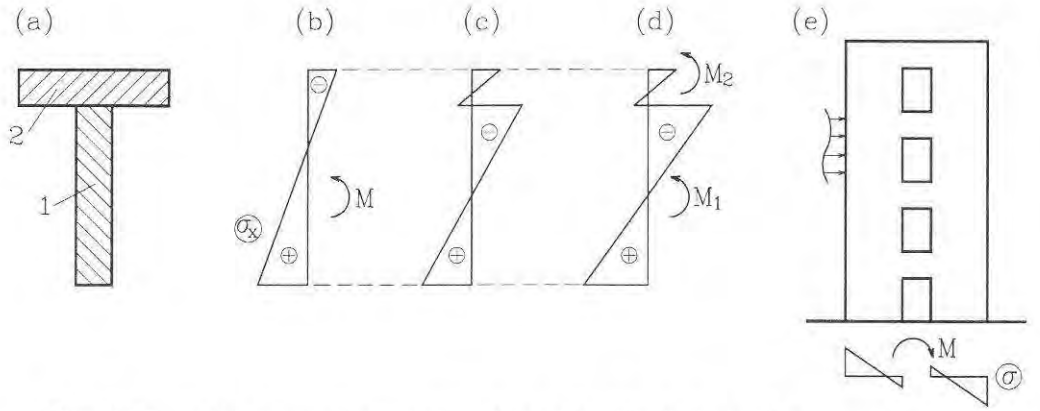
Výsledky:

$I_y \cong 507{,}0 \cdot 10^6$ mm^4,

$\bar{S}_y = 1{,}037 \cdot 10^6$ mm^3,

$Q_x = 61{,}3$ kN (na jeden šroub).

Spoje v ocelových nosnících jsou obvykle dostatečně tuhé, takže složené pruty je možné posuzovat jako celistvé. U dřevěných konstrukcí jsou spojovací prvky vždy poddajné, což má jednak důsledky na namáhání jednotlivých prvků, např. hmoždíků (určité vyrovnání hodnot), jednak na rozdělení napětí. Na obr. 3.22b je vykreslen průběh normálových napětí pro T-průřez působící jako celistvý nosník, na obr. 3.22d pak pro obě části při zcela samostatném působení. Skutečné rozdělení (obr. 3.22c) pak je mezilehlým případem. Nosník pak působí podobně jako tzv. **členěný nosník**, u něhož jsou jednotlivé

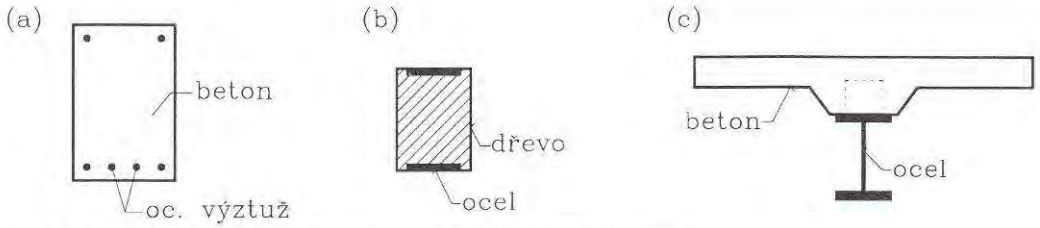


Obr. 3.22 *Složené nosníky s poddajnými prvky, členěné nosníky*

podélné části spojeny neprůběžnými poddajnými spojovacími prvky. Příkladem může být výztužná železobetonová stěna s otvory (obr. 3.22e) a jiné typy betonových i ocelových konstrukcí.

3.6 Ohyb nehomogenních (spřažených) nosníků v pružném oboru

Ve stavební praxi se často užívá nosníků, které sestávají z různých materiálů: železový beton, ocelobeton, kombinace dřeva s ocelí aj. - obr. 3.23. Můžeme je rovněž pokládat za složené nosníky, ale je třeba respektovat rozdílné vlastnosti jednotlivých materiálů - jde o **nehomogenní** nosníky. Často se též hovoří o **spřažených nosnících**, zejména u ocelobetonu (obr. 3.23c), a předpokládá se dokonalé spojení v místech kontaktu - ať již

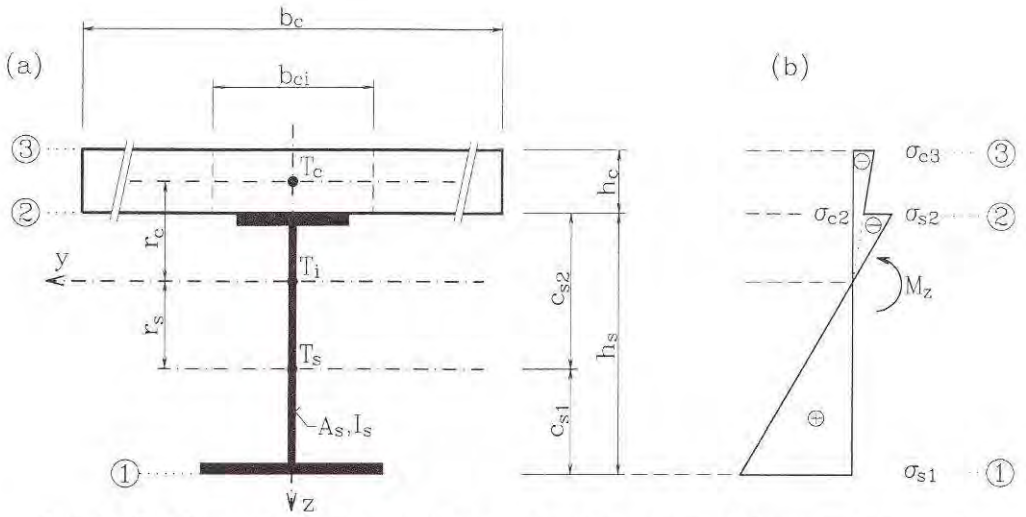


Obr. 3.23 *Průřezy nehomogenních ohýbaných nosníků*

soudržností (železový beton) nebo spojovacími prvky (kotvami či zarážkami u ocelobetonu) podobně jako u homogenních složených nosníků.

Zkoušky ukazují, že lze i v těchto případech předpokládat zachování **rovinnosti průřezů** (Bernoulliovy hypotézy), tj. platí lineární rozložení podélných deformací ε_x podle rovnice (a). V dalším se omezíme na **pružné** působení, tj. i nadále budeme vycházet z Hookova zákona a bude tedy platit i nadále rovnice (3.3), ovšem s tím, že modul pružnosti E je u každého materiálu rozdílný, takže napětí bude při shodném protažení rozdílné. Tuto

rozdílnost můžeme jednoduše respektovat tím, že využijeme tzv. pracovního součinitele n, jak jsme jej zavedli u tahu a tlaku rovnicí (2.23) a pomocí něho upravíme skutečný průřez - zavedeme tzv. **ideální průřez**, který již má povahu homogenního průřezu.



Obr. 3.24 *Tvar průřezu a průběh napětí ve spřaženém ocelobetonovém nosníku*

Pro konkrétnost uvažujeme ocelobetonový spřažený nosník sestávající z ocelového nosníku s průřezem tvaru I a betonové desky obdélníkového průřezu - obr. 3.24 (index s se vztahuje k ocelové části, c k betonové). Průřez je symetrický k rovině zatížení xz (svislé).

Zavedeme ideální ocelový průřez tím, že plochu betonové části redukujeme dělením součinitelem $n = E_s/E_c$. Tuto redukci uplatníme na rozměry rovnoběžné s neutrální osou, aby poloha těžiště a vzdálenosti jednotlivých vláken zůstaly nedotčeny. Ideální šířka a plocha betonové části průřezu tedy jsou

$$b_{ci} = \frac{b_c}{n}, \qquad A_{ci} = b_{ci} h_c, \tag{q}$$

srov. obr. 3.24. Takto redukovanou plochu můžeme nyní považovat za součást homogenního průřezu ocelového nosníku a běžným způsobem určit veškeré geometrické veličiny: plochu A_i, polohu těžiště (r_s, r_c) a moment setrvačnosti I_i. Má-li samotný ocelový nosník plochu A_s, moment setrvačnosti I_s a těžiště ve vzdálenostech c_{s1} a c_{s2} od okrajů (obr. 3.24), pak pro ideální průřez zřejmě platí:

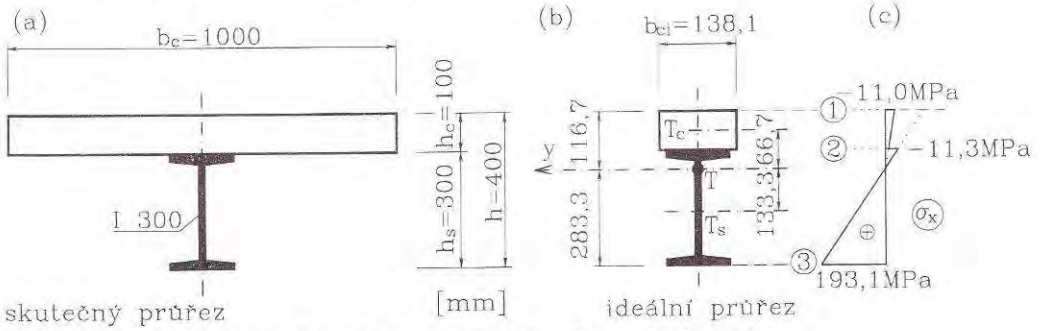
$$\left.\begin{aligned} A_i &= A_s + A_{ci}, \\ r_s &= \frac{A_{ci}}{A_i}\left(c_{s2} + \frac{h_c}{2}\right), \qquad r_c = c_{s2} + \frac{h_c}{2} - r_s, \\ I_{iy} &= I_{sy} + A_s r_s^2 + \frac{1}{12} b_{ci} h_c^3 + A_{ci} r_c^2. \end{aligned}\right\} \tag{r}$$

Napětí v ocelové části průřezu pak již můžeme určit ze základního vzorce (3.5), v betonové navíc dělíme pracovním součinitelem n, tedy

$$\sigma_s = \sigma_{xs} = \frac{M_y}{I_{iy}} z, \quad \sigma_c = \sigma_{xc} = \frac{1}{n}\frac{M_y}{I_{iy}} z. \tag{s}$$

Příklad 3.14

Určete napětí v charakteristických bodech průřezu spřaženého ocelobetonového nosníku sestávajícího z ocelového válcovaného nosníku I 300 a betonové desky 1,0 x 0,1 m - obr. 3.25. V průřezu působí ohybový moment $M_y = 200$ kNm. Moduly pružnosti uvažujte hodnotami $E_s = 210000$ MPa, $E_c = 29000$ MPa.



Obr. 3.25 *Průřez spřaženého nosníku řešeného v příkl. 3.14*

Řešení:

Pracovní součinitel

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{210000}{29000} = 7{,}24\,.$$

Redukovaná šířka a plocha betonové části

$$b_{ci} = \frac{b_c}{n} = \frac{1000}{7{,}24} = 138{,}1 \text{ mm}, \quad A_{ci} = b_{ci} h_c = 138{,}1 \cdot 100 = 13810 \text{ mm}^2.$$

Geometrické charakteristiky válcovaného nosníku I 300 jsou A_s = 6900 mm^2, $I_{sy} = 97{,}9 \cdot 10^6$ mm^4, $c_{s1} = c_{s2} = 150$ mm. Pak z rovnic (r) určíme pro ideální průřez

$$A_i = 6900 + 13810 = 20710 \text{ mm}^2,$$

$$r_s = \frac{13810}{20710}\left(150 + \frac{100}{2}\right) = 133{,}4 \text{ mm},$$

$$r_c = 150 + \frac{100}{2} - 133{,}4 = 66{,}6 \text{ mm},$$

$$I_{iy} = 97{,}9 \cdot 10^6 + 6900 \cdot 133{,}4^2 + \frac{1}{12} 138{,}1 \cdot 100^3 + 13810 \cdot 66{,}6^2 = 293{,}5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

Napětí v krajních vláknech ocelového nosníku a betonové desky jsou pak

$$\sigma_{s1} = \frac{M_y}{I_{iy}} z_1 = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{293{,}5 \cdot 10^{-6}} 283{,}4 \cdot 10^{-3} = 193{,}1 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{s2} = \frac{M_y}{I_{iy}} z_2 = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{293{,}5 \cdot 10^{-6}} \cdot \left(-16{,}6 \cdot 10^{-3}\right) = -11{,}3 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{c2} = \frac{1}{n} \frac{M_y}{I_{iy}} z_2 = \frac{1}{n} \sigma_{s2} = \frac{1}{7{,}24} \cdot (-11{,}3) = -1{,}6 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{c3} = \frac{1}{n} \frac{M_y}{I_{iy}} z_3 = \frac{1}{7{,}24} \frac{200 \cdot 10^{-3}}{293{,}5 \cdot 10^{-6}} \cdot \left(-116{,}7 \cdot 10^{-3}\right) = -11{,}0 \text{ MPa}.$$

Průběh napětí je znázorněn na obr. 3.25c.

U nehomogenních prvků se mohou výrazně projevit také rozdíly v reologických vlastnostech materiálů (odst. 1.4). U betonové části musíme v průběhu času očekávat výrazné **dotvarování** i jiné objemové změny, které jsou u ocelové části obvykle zanedbatelné. Tím dojde k určitému přerozdělení napětí, které můžeme vystihnout nahrazením modulu pružnosti betonu E_c modulem přetvárnosti E_c', který je výrazně nižší.

Příklad 3.15

Řešte předchozí úlohu za předpokladu, že vlivem dotvarování klesne tuhost betonové části na třetinu své původní hodnoty ($E_c' = E_c/3$), tedy že pracovní součinitel je trojnásobný: $n = 21{,}72$. Předpokládá se, že celý působící ohybový moment $M = 200$ kNm je vyvozen dlouhodobými účinky. Úlohu řešte samostatně.

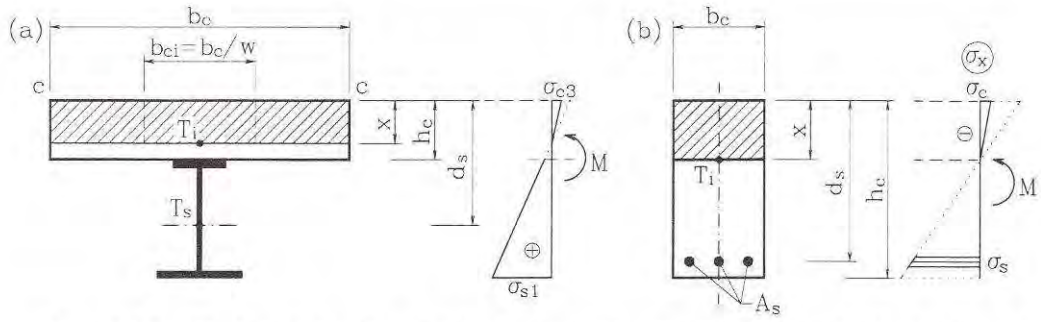
Výsledky:

$I_{iy} = 212{,}2 \cdot 10^6$ mm^4, $\sigma_{s1} = 216{,}8$ MPa, $\sigma_{c3} = -7{,}4$ MPa.

● Ohyb při vyloučení tahových napětí v betonu

Pokud padne neutrální osa do ocelové části průřezu spřaženého nosníku, jak jsme to dosud uvažovali, je celá betonová část tlačena. Prochází-li však neutrální osa betonovou částí, vznikají v betonu i tahová napětí. Vzhledem k malé pevnosti betonu v tahu dojde však již při poměrně malém namáhání ke vzniku trhlin v betonu a příspěvek tahových napětí je pak velmi malý, takže ho zpravidla zcela zanedbáváme.

Neznámou polohu neutrální osy určíme z první podmínky (3.1), tj. že normálová síla je nulová $N = 0$. Předpokládáme-li i nadále platnost Hookova zákona pro beton v tlaku, musí procházet neutrální osa těžištěm spolupůsobící části ideálního průřezu, tedy při označení podle obr. 3.26 plyne např. z momentové podmínky k horní hraně průřezu *C-C*:



Obr. 3.26 *Ohyb spřaženého a železobetonového nosníku při vyloučení tahových napětí v betonu*

$$x = \frac{S_{ic}}{A_i} = \frac{A_s d_s + \frac{1}{2} b_{ci} x^2}{A_s + x b_{ci}}.$$

Odtud úpravou a využitím první rovnice (q) vyjde kvadratická rovnice

$$\frac{b_c}{2n} x^2 + A_s x - A_s d_s = 0,$$

jejímž řešením je

$$x = \frac{n A_s}{b_c} \left(\sqrt{1 + \frac{2 b_c d_s}{n A_s}} - 1 \right) \tag{3.27}$$

kde d_s je vzdálenost těžiště ocelové části průřezu od horní hrany průřezu.

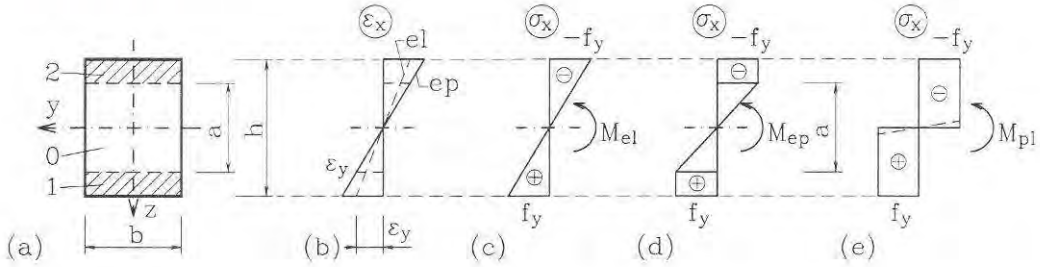
Určením polohy neutrální osy je definována působící část ideálního průřezu, na niž pak můžeme opět nahlížet jako na homogenní průřez a postupovat v dalším řešení obvyklým způsobem. Podrobnosti jsou předmětem výkladu teorie betonových konstrukcí.

3.7 Ohyb nosníků v pružnoplastickém oboru

● Postupné zplastizování průřezu ohýbaného nosníku

Ohýbaný nosník (prut), jehož materiál má schopnost přetvářet se tvárným (plastickým) způsobem, může být namáhán i za hranicemi platnosti lineární pružnosti. Při analýze působení v pružnoplastické oblasti se opět omezíme na základní model tzv. **ideálního pružnoplastického materiálu**, jak byl definován v odst. 1.4 a jehož pracovní diagram znázorňuje obr. 1.12.

Postupné zplastizování při ohybu ukážeme nejprve na prutu obdélníkového průřezu namáhaného prostým ohybem (v rovině *xz*) - obr. 3.27.



Obr. 3.27 *Postupné zplastizování prutu obdélníkového průřezu*

Pro přehlednost zápisu vypustíme index osy ohybu; znamená tedy $M = M_y$, $W = W_y$.

Prut působí v daném průřezu pružně do okamžiku, kdy napětí σ_x v krajních vláknech dostoupí své mezní hodnoty - meze kluzu f_y (vzhledem k symetrii k ose *y* současně v tažené i tlačené oblasti), poměrné protažení krajních vláken je přitom ε_y. Ohybový moment je

$$M_{el} = \frac{2I_y}{h} f_y = W_y f_y = W_{el} f_y = \frac{1}{6} bh^2 f_y. \tag{3.28}$$

M_{el} je ohybovým momentem na **mezi pružnosti** (elasticity), jako W_{el} jsme zde označili průřezový modul $W = W_y$ definovaný vztahy (3.7), abychom zvýraznili jeho platnost pro výpočet v pružném stavu.

Zvětšuje-li se ohybový moment dále, přechází prut do pružnoplastického stavu. Zkoušky potvrzují, že zákon zachování **rovinnosti průřezů** (Bernoulliova hypotéza) platí i nadále, takže průběh podélných deformací ε_x po výšce průřezu je stále lineární - obr. 3.27b. Při okrajích průřezu vzniknou **plastické oblasti** (v tahu - plocha 1, v tlaku - 2) a vnitřní oblast (na obr. 3.27a označena *O*) o výšce *a* zůstává nadále pružná. Na rozhraní mezi oblastmi je poměrné protažení rovno $\varepsilon_y = f_y/E$ - srov. obr. 1.12. Na obr. 3.27d je znázorněn průběh normálových napětí σ_x v obecném pružnoplastickém stavu.

Vzhledem k symetrii průřezu k ose y je podmínka nulové normálové síly $N = 0$ splněna při zachování polohy neutrální osy ($n \equiv y$). Ohybový moment v pružnoplastické fázi působení je

$$M_{ep} = \int_A \sigma_x z \mathrm{d}A = \int_{A_1} f_y z \mathrm{d}A + \int_{A_0} \frac{2f_y z}{a} z \mathrm{d}A + \int_{A_2} (-f_y) z \mathrm{d}A =$$

$$= f_y b \int_{a/2}^{h/2} z \mathrm{d}z + \frac{2f_y b}{a} \int_{-a/2}^{a/2} z^2 \mathrm{d}z - f_y b \int_{-h/2}^{a/2} z \mathrm{d}z = \tag{3.29}$$

$$= \frac{1}{8} f_y b\left(h^2 - a^2\right) + \frac{1}{6} f_y b a^2 - \frac{1}{8} f_y b\left(a^2 - h^2\right) = \frac{1}{4} b h^2 f_y \left(1 - \frac{a^2}{3h^2}\right)$$

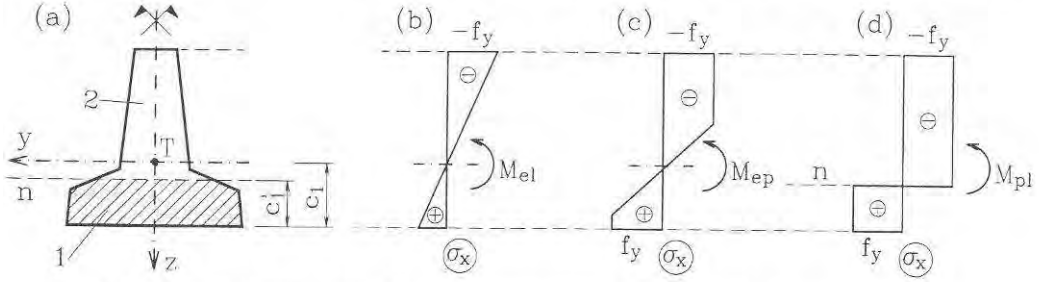
Na mezi pružnosti, kdy $a = h$, je ovšem $M_{ep} = M_{el}$. S rostoucí hodnotou ohybového momentu se rozšiřují plastické oblasti a pružná oblast se zmenšuje. Pro limitní případ $a \to 0$, kdy je celý **průřez zplastizován**, je tzv. mezní plastický moment

$$M_{pl} = \frac{1}{4} b h^2 f_y, \tag{3.30}$$

je tedy o polovinu větší než moment na mezi pružnosti. Dosažení tohoto momentu by ovšem předpokládalo, že poměrná protažení okrajů průřezu (a také křivost střednice prutu) rostou nade všechny meze, což není reálné. Ve skutečnosti vždy zůstává v blízkosti neutrální osy malá pružná oblast (odpovídající průběh napětí σ_x je na obr. 3.27e vyznačen čárkovaně), avšak její vliv na velikost výsledného ohybového momentu je nepatrný a je dostatečně kompenzován zavedením idealizovaného pracovního diagramu, u něhož se pomíjejí účinky zpevnění. Proto můžeme vycházet z představy plně zplastizovaného průřezu (obr. 3.27e).

● Mezní plastická únosnost jednoose symetrického průřezu

Uvažujme nyní průřez s jednou osou symetrie, jíž prochází rovina ohybu (xz) - obr. 3.28. Mezního pružného momentu M_{el} je dosaženo tehdy, když normálové napětí na okraji vzdálenějším od neutrální osy y nabude v absolutní hodnotě meze kluzu f_y. Na tomto okraji vznikne první plastická oblast, později zplastizuje i část průřezu u protilehlého okraje průřezu a v mezním plastickém stavu se obě oblasti spojí. Neutrální osa n v tomto mezním stavu není obecně shodná s neutrální osou v pružném stavu, tj. neprochází těžištěm.



Obr. 3.28 *Pružnoplastický ohyb jednoose symetrického průřezu*

Podmínkou pro určení její polohy je požadavek, aby normálová síla N byla rovna nule - rov. (3.1), tedy

$$N = \int_A \sigma_x \mathrm{d}A = f_y \int_{A_1} \mathrm{d}A + (-f_y) \int_{A_2} \mathrm{d}A = f_y (A_1 - A_2) = 0,$$

kde A_1 a A_2 jsou plochy jednotlivých plastických oblastí v mezním stavu - obr. 3.28a. Jejich součet je roven celkové ploše průřezu A, takže z předešlé rovnice vyplývá

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2}. \tag{3.31}$$

V mezním stavu při ohybu tedy neutrální osa **půlí plochu průřezu**.

Velikost mezního plastického momentu $M_{pl} = M_{y,pl}$ vyplyne integrací dle rov, (1.6)

$$M_{pl} = M_{y,pl} = \int_A \sigma_x z \mathrm{d}A = f_y \int_{A_1} z \mathrm{d}A + (-f_y) \int_{A_2} z \mathrm{d}A = f_y (S_{1y} - S_{2y}), \tag{t}$$

kde S_{1y} a S_{2y} jsou statické momenty části průřezu 1 a 2, oddělených neutrální osou, k ose y (uvažované algebraicky, tedy s ohledem na znaménko). Protože jde o statické momenty k těžištní ose, k níž je statický moment celé plochy roven nule, platí

$$S_{1y} + S_{2y} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{2y} = - S_{1y} \tag{u}$$

a rovnici (t) pak můžeme upravit na tvar

$$M_{pl} = 2 S_{1y} f_y. \tag{3.32}$$

Analogicky k pojmu průřezového modulu $W = W_{el}$, který používáme při výpočtu v pružné fázi působení, zavádíme tzv. **plastický modul průřezu** W_{pl} [m^3, mm^3], pomocí něhož je mezní plastický moment vyjádřen vztahem

$$M_{pl} = W_{pl} f_y \tag{3.33}$$

Srovnáním s rovnicí (3.32) plyne, že průřezový modul je roven

$$W_{pl} = 2 S_{1y}, \tag{3.34}$$

tedy že se určí jako dvojnásobek statického momentu poloviny průřezu k **těžištní** ose y. Vzhledem k platnosti vztahu (u) lze ovšem užít dvojnásobku absolutní hodnoty statického momentu horní poloviny průřezu, tj. $2|S_{2y}|$.

V případě ohybu tvoří vnitřní síly v průřezu dvojicí sil, jejíž moment je shodný k libovolné ose rovnoběžné s y, tedy též k neutrální ose n, takže alternativně k (3.34) je možné určit plastický modul průřezu též ze vztahu

$$W_{pl} = S_{1n} + |S_{2n}|, \tag{3.35}$$

tedy jako součet (kladně uvažovaných) statických momentů spodní a horní poloviny průřezu k **neutrální** ose.

Připoměňme, že jsme uvažovali ohyb ve svislé rovině xz, tedy účinkem ohybu k ose y, takže $W_{pl} = W_{pl,y}$, analogicky se určí $W_{pl,z}$.

Příklad 3.16

Určete plastický průřezový modul obdélníkového průřezu (k ose y) a srovnejte jej s průřezovým modulem při pružném působení.

Řešení:

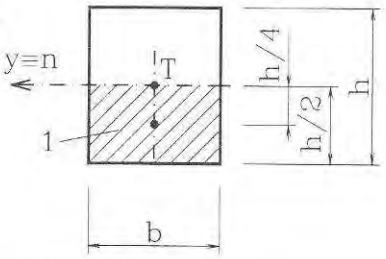
Osa y je osou symetrie a dělí průřez na dvě shodné části, je tedy současně neutrální osou. Statický moment spodní poloviny průřezu

$$S_{1y} = \frac{bh}{2}\frac{h}{4} = \frac{1}{8}bh^2,$$

takže

$$W_{pl} = 2S_{1y} = \frac{1}{4}bh^2,$$

(v)



Obr. 3.29

což je ve shodě s rovnicí 3.30. Poměr

$$\frac{W_{pl}}{W_{el}} = \frac{\frac{1}{4}bh^2}{\frac{1}{6}bh^2} = 1{,}50.$$

Plastická rezerva průřezu je tedy 50 %.

Příklad 3.17

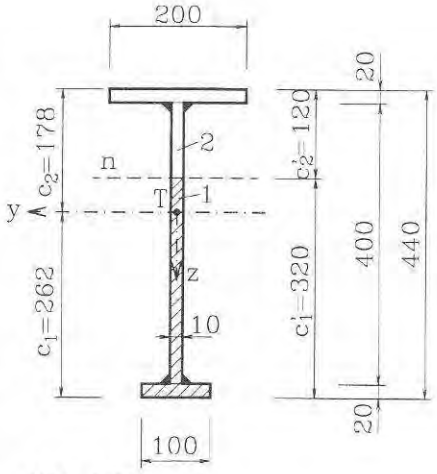
Určete plastický průřezový modul jednoose symetrického I průřezu ocelového svařovaného nosníku podle obr. 3.30.

Řešení:

Plocha průřezu je

$A = 100 \cdot 20 + 400 \cdot 10 + 200 \cdot 20 = 10000 \text{ mm}^2$.

Neutrální osa odděluje podle rovnice (3.31) polovinu plochy, tedy 5000 mm^2. Spodní pásnice má plochu 2000 mm^2, takže ze stojiny náleží ke spodní polovině ještě část o ploše 3000 mm^2, tedy při tloušťce $t_w = 10$ mm úsek 300 mm. Tomu odpovídá poloha neutrální osy n v poloze podle obr. 3.30 (od spodního okraje $c_1' = 320$ mm). Pak podle rovnice (3.34) je



Obr. 3.30

$$W_{pl} = 2S_{1y} = 2\left[100 \cdot 20 \cdot 252 + 10 \cdot 300 \cdot \left(242 - \frac{300}{2}\right)\right] = 1560 \cdot 10^3 \text{ mm}^3,$$

nebo podle rovnice (3.35)

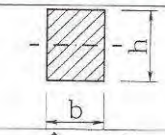
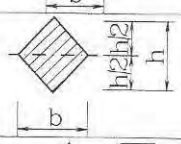
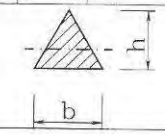
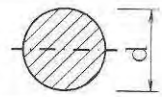
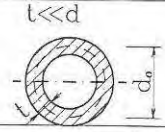
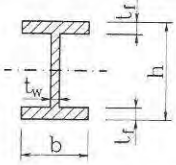
$$W_{pl} = S_{1n} + |S_{2n}| =$$
$$= (100 \cdot 20 \cdot 310 + 10 \cdot 300 \cdot 150) + (10 \cdot 100 \cdot 50 + 200 \cdot 20 \cdot 110) =$$
$$= 1560 \cdot 10^3 \text{ mm}^3.$$

Průřezový modul při pružném výpočtu je $W_{el} = W_{y1} = 1147 \cdot 10^3$ mm^3 (ověřte samostatným výpočtem; poloha těžiště je vyznačena na obr. 3.30, moment setrvačnosti $I_y = 300{,}5 \cdot 10^6$ mm^4), takže vzájemný poměr

$$\frac{W_{pl}}{W_{el}} = \frac{1560 \cdot 10^3}{1147 \cdot 10^3} \approx 1{,}36 \quad , \tag{3.35}$$

průřez má tedy plastickou rezervu 36%.

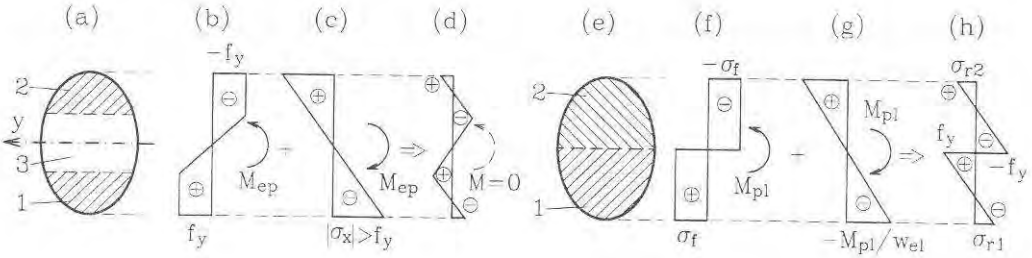
Tabulka 3.2 *Pružné a plastické průřezové moduly jednoduchých obrazců*

Tvar průřezu	$W_{el} = W_y$	$W_{pl} = W_{pl,y}$	W_{pl}/W_{el}
	$\frac{1}{6}bh^2$	$\frac{1}{4}bh^2$	1,50
	$\frac{1}{24}bh^2$	$\frac{1}{12}bh^2$	2,00
	$\frac{1}{24}bh^2$	$\frac{1}{6}\left(2-\sqrt{2}\right)bh^2 \cong$ $\cong 0{,}0976bh^2$	2,34
	$\frac{\pi}{32}d^3$	$\frac{1}{6}d^3$	1,70
	$\frac{\pi}{4}td_0^2 \quad (t<<d)$	$td_0^2 (t<<d)$	1,27
	$\frac{1}{6h}\left[bh^3 - (b-t_w)(h-2t_f)^3\right]$	$bt_f(h-t_f) + \frac{t_w}{4}(h-2t_f)^2$	Pro válcované nosníky cca 1,13 ÷ 1,20

Výsledky pro některé jednoduché obrazce jsou uvedeny v tabulce 3.2 (čtenáři se doporučuje ověřit odvozením vztahy např. pro trojúhelník aj.). Pro průřezy válcovaných nosníků jsou některé průřezové moduly W_{pl} uvedeny ve Statických tabulkách [3].

● Odlehčení zplastizovaného průřezu

Jak bylo uvedeno v odst. 1.4, probíhá odlehčení v jistých mezích pružně a řídí se Hookovým zákonem - obr. 1.12. Uvažujeme nejprve **částečně zplastizovaný průřez**



Obr. 3.31 *Odlehčení částečně zplastizovaného (a-e) a plně zplastizovaného průřezu (e-h)*

ohýbaného nosníku. Omezíme se přitom na případ, kdy osa ohybu y je osou symetrie - obr. 3.31a (srov. též obr. 3.27). Průběh napětí je vyznačen na obr. 3.31b. Úplné odlehčení průřezu je rovnocenné přidání ohybového momentu opačného smyslu, tj. $(-M_{ep})$; napětí se přitom rozdělují způsobem odpovídajícím pružnému působení, tj. lineárně podle rovnice (3.5) - obr. 3.31c. Superpozicí obou stavů obdržíme zbytková - **reziduální napětí** podle obr. 3.31d.

Pro **plně zplastizovaný průřez** jsou průběhy napětí v jednotlivých fázích zobrazeny na obr. 3.31f, g, h. Po úplném odlehčení zůstávají v blízkosti neutrální osy napětí blízká mezi kluzu a na okraji jsou reziduální napětí

$$\sigma_{r1} = -\sigma_{r2} = f_y - \frac{M_{pl}}{W_{el}} = f_y - \frac{W_{pl} f_y}{W_{el}} = \left(1 - \frac{W_{pl}}{W_{el}}\right) f_y . \qquad (3.36)$$

Jsou tedy (v absolutní hodnotě) úměrná plastické rezervě průřezu - např. u obdélníka by činila 50% z meze kluzu, u válcovaných nosníků 13÷20% atp. Je zřejmé, že u průřezů s větší plastickou rezervou než 100% (tj. s $W_{pl} > 2\ W_{el}$) již toto řešení neplatí, neboť již při odlehčení průřezu by krajní oblasti zplastizovaly v opačném smyslu. Uvedené řešení není též použitelné u průřezů nesymetrických vůči ose ohybu, jestliže plastická oblast překročí těžištní osu, neboť v této oblasti by poměrná přetvoření ε_x při odlehčení vzrůstala.

● Vztah mezi křivostí a pružnoplastickým momentem

Vznik plastických deformací vede k **nelineární závislosti** mezi silovými a deformačními veličinami (fyzikální nelinearita). U ohybu se to projevuje ve vztahu mezi ohybovým momentem a křivostí střednice, pro který platí v pružném oboru dříve odvozená lineární závislost (3.4).

Při odvození křivosti v pružnoplastické fázi se pro jednoduchost omezíme na **obdélníkový průřez**, jehož postupné zplastizování jsme analyzovali dříve. Uvažujme obecný pružnoplastický stav při působení M_{ep} (obr. 3.27a, d). Ve vnitřní pružné oblasti platí Hookův zákon až k hranici s plastickou oblastí, tj. až do pořadnice $z = a/2$; přitom napětí je v těchto vláknech rovno mezi kluzu f_y. Z rovnice (3.3) můžeme proto vyjádřit křivost takto:

$$\frac{1}{r} = \frac{\sigma_x}{Ez} = \frac{f_y}{E\frac{a}{2}} = \frac{2}{Ea}\frac{M_{el}}{I_y}\frac{h}{2} = \frac{3}{2}\frac{M_{pl}}{EI_y}\frac{h}{a}, \tag{w}$$

kde jsme využili rovnice (3.28) a poměru mezi mezním pružným a mezním plastickým momentem u obdélníkového průřezu $M_{el} = 2M_{pl}/3$. Přepíšeme-li dále rovnici (3.29) dosazením z (3.30), je zřejmě

$$M_{ep} = M_{pl}\left(1 - \frac{a^2}{3h^2}\right). \tag{x}$$

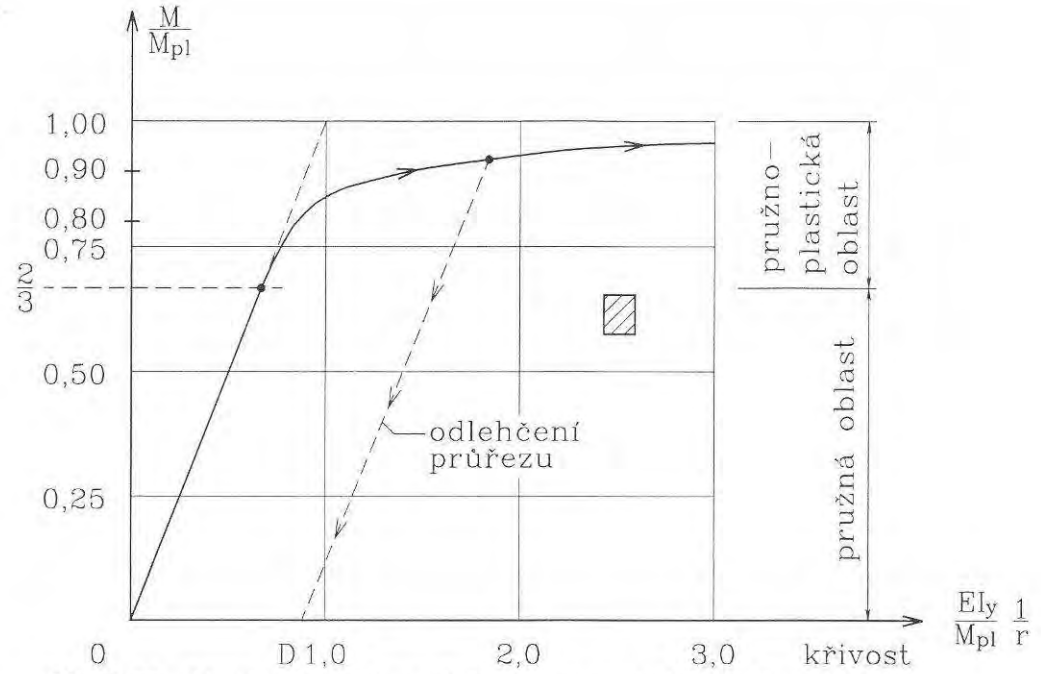
Z takto upraveného vztahu již můžeme určit poměr

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{\sqrt{3\left(1 - \frac{M_{ep}}{M_{pl}}\right)}} \tag{y}$$

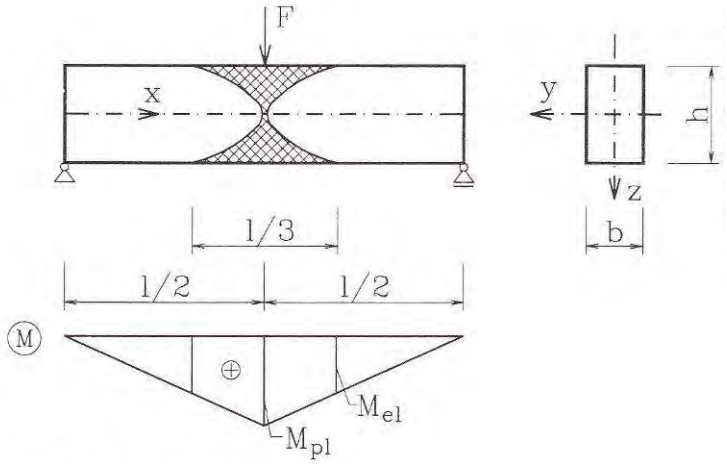
a jeho dosazením do rovnice (w) plyne hledaná závislost křivosti $1/r$ na ohybovém momentu M_{ep} (tj. momentu v pružnoplastické fázi, splňujícím relaci $M_{el} \le M_{ep} \le M_{pe}$):

$$\frac{1}{r} = \frac{2M_{pl}}{3EI_y}\frac{1}{\sqrt{3\left(1 - \frac{M_{ep}}{M_{pl}}\right)}}. \tag{3.37}$$

Graficky je tato závislost v bezrozměrném tvaru vynesena na obr. 3.32. Až do hodnoty mezního pružného momentu M_{el} je závislost lineární dle rov. (3.4) - bod *Y*. Po vzniku plastických deformací dochází k výraznému růstu křivosti a limitně pro ohybový moment $M \to M_{pl}$ roste křivost neomezeně: $1/r \to \infty$, jak vyplývá z rovnice (3.37). Dosáhne-li tedy ohybový moment své mezní plastické hodnoty, může se nosník v tomto průřezu neomezeně pootáčet - vznikne tzv. **plastický kloub** - obě plastické oblasti se spojí (vymizí pružná oblast) - obr. 3.33. Od konstrukčního kloubu se plastický kloub liší tím, že v průřezu není ohybový moment roven nule, nýbrž M_{pl} a svou hodnotu již nemění. Na grafu na obr. 3.32



Obr. 3.32 *Závislost křivosti na ohybovém momentu (obdélníkový průřez)*



je též vyznačeno odlehčení průřezu po dosažení obecné hodnoty $M_{ep} > M_{el}$ (úsečka $\overline{AD}$). Odlehčení probíhá pružně a nosník zůstane zakřiven i v nezatíženém stavu (úsek $\overline{OD}$).

Obr. 3.33 *Plastický kloub*

● Návrh a posouzení ohýbaných nosníků podle teorie plasticity

Uplatnění teorie plasticity při návrhu a posouzení homogenních prutů podle teorie plasticity přichází v úvahu u kovových, zejména **ocelových konstrukcí**. Předpokládá to statické zatížení, tj. trvalé nebo málo proměnlivé zatížení, které nezpůsobuje rázy ani kmitání. Aby bylo možné uvažovat vznik plastického kloubu, nesmějí být jednotlivé části průřezu příliš štíhlé (např. u běžné konstrukční oceli St235 by přečnívající části pásnice u svařovaného nosníku neměly přesáhnout 9-násobek její tloušťky apod.) a musí být splněny další požadavky, jež jsou předmětem výkladu v ocelovém stavitelství. Zde budeme předpokládat, že jsou všechny splněny.

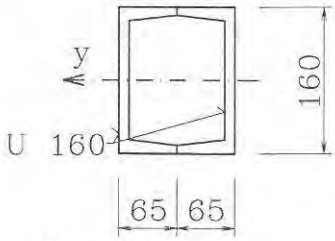
V předchozím odvození jsme uvažovali jen vliv ohybových momentů a nebrali jsme zřetel na **posouvající síly**. Podrobněji rozbor vzájemného ovlivnění (interakce) obou těchto složek vnitřních sil přesahuje rámec tohoto výkladu; je uveden např. v pracích [8], [12] aj. Jak ukázaly studie i výsledky zkoušek, je možné vliv posouvajících sil v určitém rozmezí zcela zanedbat.

Za těchto předpokladů je **výpočtový moment únosnosti** v ohybu k ose y namísto vzorce (3.10), platného pro výpočet v pružném stavu, dán vztahem

$$M_{Rd} = W_{pl,y} f_d = W_{pl,y} \frac{f_y}{\gamma_M}, \tag{3.38}$$

kde jsme již za charakteristickou pevnost f_k dosadili mez kluzu f_y. Místo $W_y = W_{el,y}$ tedy užijeme plastického průřezového modelu. Podmínka spolehlivosti (3.11) zůstává v platnosti.

Příklad 3.18



Obr. 3.34

Posuďte, zda ocelový nosník svařený ze dvou válcovaných tyčí U 160 (obr. 3.34) vyhoví při zatížení a uložení dle obr. 3.7 (příklad 3.5) výpočtem podle teorie plasticity, je-li $f_y = 235$ MPa a $\gamma_M = 1{,}1$.

Řešení:

Ve statických tabulkách vyhledáme plastický průřezový modul jednoho profilu U160 k ose y - je roven $137 \cdot 10^3$ mm^3. Mezní moment navrženého průřezu je tedy

$$M_{Rd} = W_{pl,y} \frac{f_y}{\gamma_M} = \left(2 \cdot 137 \cdot 10^{-6}\right) \frac{235}{1{,}1} = 58{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ MNm} = 58{,}5 \text{ kNm}$$

V příkladu 3.5 byl jako extrémní vypočten ohybový moment $M_{Sd} = 56{,}3$ kNm < $M_{Rd} = 58{,}5$ kNm, takže podmínka spolehlivosti (3.11) je splněna.

Příklad 3.19

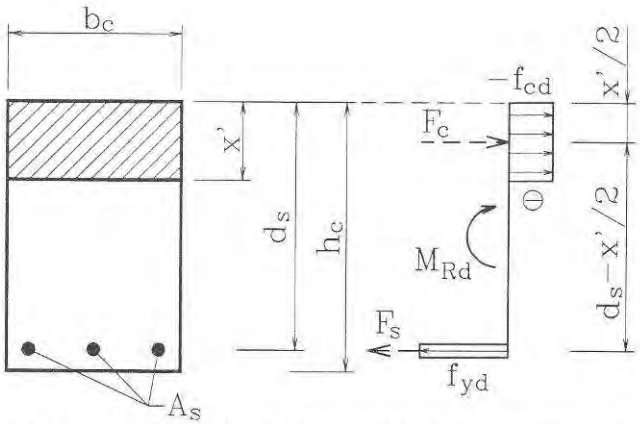
Nosník, jehož průřez je znázorněn na obr. 3.30 (příklad 3.17), je prostě podepřen a zatížen plným rovnoměrným výpočtovým zatížením (vč. vlastní tíhy) q_d = 50 kN/m. Posuďte jej při f_y = 235 MPa, γ_M = 1,1. Úlohu řešte samostatně.

Výsledek:

nosník vyhoví - M_{Sd} = 324 kNm < M_{Rd} = 333,3 kNm.

● Mezní plastická únosnost nehomogenního nosníku

V odst. 3.6 jsme se zabývali ohybem nehomogenního nosníku v pružném stavu s případným vyloučením tahových napětí v jedné ze složek průřezu (např. v betonu). Při stanovení mezní únosnosti v ohybu se však u železobetonových nosníků obvykle předpokládá využití plastických vlastností oceli i betonu. V nejjednodušším pojetí se zavádí úplné vyrovnání tlakových napětí v betonu (obdélníkový diagram) na hodnotu výpočtové pevnosti betonu v tlaku f_{cd}, ve výztuži působí výpočtová mez kluzu f_{yd} - obr. 3.35.



Obr. 3.35 *Ohybová únosnost nehomogenního průřezu v plastickém stavu*

Rozsah tlačené oblasti betonu se pak určí z podmínky, že normálová síla je nulová. Tak pro jednostranně vyztužený průřez obdélníkového tvaru při označení podle obr. 3.35 platí

$$N = F_s - F_c = A_s f_{yd} - bx' f_{cd} = 0,$$

kde F_s a F_c jsou výslednice v tažené výztuži a v tlačené oblasti betonu. Odtud

$$x' = \frac{A_s f_{yd}}{b f_{cd}} \qquad \text{(z)}$$

a moment na mezi únosnosti dvojice sil F_s a F_c je

$$M_{Rd} = F_s\left(d_s - \frac{x'}{2}\right) = A_s f_{yd}\left(d_s - \frac{A_s f_{yd}}{2 b f_{cd}}\right) \qquad (3.39)$$

Přesnějšího určení únosnosti v ohybu se dosáhne užitím výstižnějšího pracovního diagramu tlačeného betonu.

Příklad 3.20

Určete výpočtovou únosnost v ohybu obdélníkového průřezu 300x400 mm vyztuženého jednostranně čtyřmi vložkami výztuže kruhového profilu ∅ 20 mm (d = 20 mm), jejichž těžiště leží 35 mm od spodního okraje průřezu. Charakteristická pevnost betonu v tlaku f_{ck} = 20 MPa, mez kluzu oceli f_y = 410 MPa. Dílčí součinitele spolehlivosti materiálu jsou: γ_{Mc} = 1,5 (beton), γ_{Ms} = 1,15 (výztužná ocel).

Řešení:

Výpočtové pevnosti betonu a oceli jsou

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_{Mc}} = \frac{20}{1{,}5} = 13{,}33\ \text{MPa}, \qquad f_{yd} = \frac{f_y}{\gamma_{Ms}} = \frac{410}{1{,}15} = 356{,}52\ \text{MPa}.$$

Plocha výztuže

$$A_s = 4 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 4 \cdot \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = 1256{,}6\ \text{mm}^2 \cong 1{,}257 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2.$$

Z rovnice (3.39) je

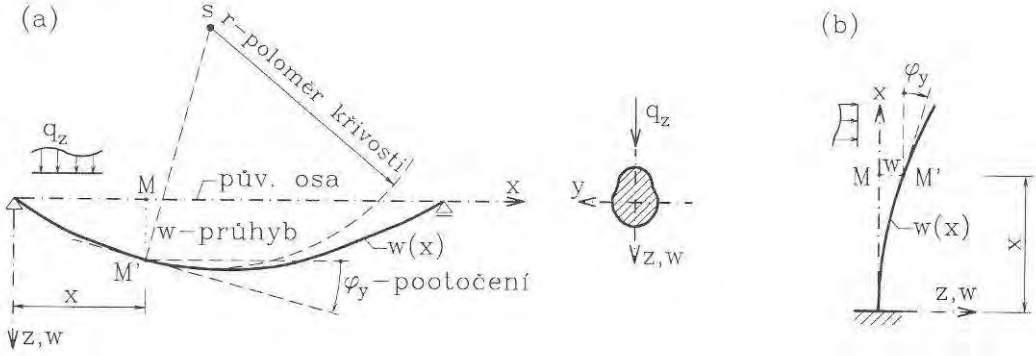
$$M_{Rd} = 1{,}257 \cdot 10^{-3} \cdot 356{,}52 \left(0{,}365 - \frac{1{,}257 \cdot 10^{-3} \cdot 356{,}52}{2 \cdot 0{,}3 \cdot 13{,}33} \right) = 0{,}1384\ \text{MNm} = 138{,}4\ \text{kNm}.$$

4 Přetvoření ohýbaných nosníků

4.1 Diferenciální rovnice ohybové čáry

Přetvoření (deformace) ohýbaných nosníků je třeba zjišťovat z důvodů, o nichž jsme se zmínili v kap. 1. Jde jednak o ověření, zda deformace - především průhyby - jsou v přijatelných mezích (posouzení podle **mezního stavu použitelnosti**), a dále je též stanovení deformací nezbytné k řešení **staticky neurčitých** prutových konstrukcí.

Je-li nosník (prut) dostatečně štíhlý, je jeho deformační stav určen tvarem **ohybové čáry**, tj. křivky, v níž přejde původně přímá osa nosníku vlivem zatížení. V dalším se omezíme na rovinný případ, kdy zatížení i podepření je symetrické ke svislé rovině xz, přičemž osa z je hlavní osou setrvačnosti průřezu. Na obr. 4.1a je vyznačena ohybová čára $w(x)$, jejíž jednotlivé pořadnice označujeme jako **průhyb** nosníku v daném místě; kladný je průhyb, směřuje-li dolů. Pro průhyb svislého prutu zavedeme obdobně smysl veličin podle obr. 4.1b.



Obr. 4.1 *Ohybová čára nosníku*

Pootočení $\varphi = \varphi_y$, tj. úhel (v rad.), který svírá tečna k ohybové čáře s osou x, budeme pokládat za kladné po smyslu chodu hodinových ručiček. V teorii malých deformací je $\varphi << 1$, takže platí

$$\varphi \approx \mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = w', \tag{4.1}$$

(čárkami označujeme derivaci podle x). U stavebních konstrukcí je ohybová čára velmi plochá ($\varphi < 0{,}02$), takže zavedený vztah je velmi dobře splněn.

Z matematiky (viz např. [8]) je znám výraz pro křivost rovinné čáry

$$\frac{1}{r} = -\frac{w''}{\left(1+w'^2\right)^{3/2}}, \tag{4.2}$$

kde r je poloměr křivosti v rovině xz (obr. 4.1a) a záporné znaménko odpovídá této znaménkové konvenci: při kladné křivosti leží střed křivosti "nad" nosníkem (má zápornou

souřadnici z), jsou tedy tažena spodní vlákna nosníku. Vzhledem ke zmíněnému předpokladu malých deformací můžeme opět využít toho, že $w' = \varphi << 1$, takže čtverec w'^2 můžeme zanedbat proti jedničce a jmenovatel ve zlomku na pravé straně rovnice (4.2) je roven jedné, takže pak

$$\frac{1}{r} = -w'' . \tag{4.3}$$

Zanedbáme-li vliv smyku na tvar ohybové čáry (bude rozebrán v odst. 4.7), tedy přisoudíme-li deformační účinky jen ohybovým momentům, pak dosazením rovnice (3.4) do vztahu (4.3) vyjde po úpravě

$$w'' = -\frac{M_y}{EI_y}, \tag{4.4}$$

- **diferenciální rovnice ohybové čáry** 2. řádu. Druhá derivace ohybové čáry je tedy přímo úměrná ohybovému momentu $M_y(x)$ v daném místě a nepřímo úměrná ohybové tuhosti EI_y (E - modul pružnosti, I_y - moment setrvačnosti k ose y).

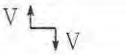
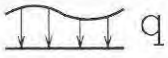
Je-li ohybová tuhost nosníku **konstantní** (EI_y = konst.), pak dvojím derivováním (4.4) a využitím druhé a třetí rovnice (1.5), tj. Schwedlerových vztahů; obdržíme

$$w^{IV} = \frac{q_z}{EI_y}, \tag{4.5}$$

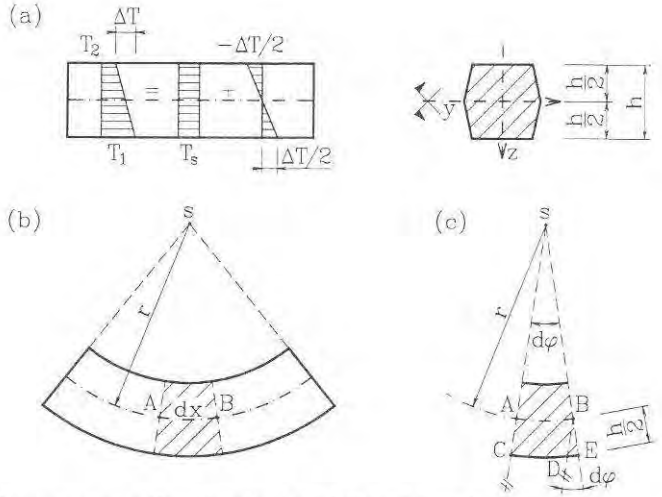
což představuje diferenciální rovnici 4. řádu: čtvrtá derivace průhybu je tedy úměrná příčnému spojitému zatížení.

Veškeré diferenciální vztahy jsou souhrnně uvedeny v tabulce 4.1. Vzhledem k tomu, že jsme se omezili na rovinný případ, jsou pro přehlednost vypuštěny indexy ($\varphi_y = \varphi$, $M_y = M$, $V_z = V$, $q_z = q$ a $I_y = I$).

Tabulka 4.1 *Přehled diferenciálních závislostí*

Označení a kladný smysl	Veličina	Diferenciální závislost	
		obecný případ	pro EI = konst..
	průhyb	w	
	pootočení	$\varphi = w'$	
	ohybový moment	$M = -EIw''$	
	posouv. síla	$V = -(EIw'')'$	$V = -EIw'''$
	příčné zatížení	$q = (EIw'')''$	$q = EIw^{IV}$

Diferenciální vztahy v úpravě podle tab. 4.1 zvýrazňují tu okolnost, že z rovnice ohybové čáry $w = w(x)$ plynou **derivováním** všechny ostatní veličiny, tedy že je zcela **definován stav prutu** (deformačně i silově). Obvykle ovšem řešíme opačnou úlohu: z průběhu ohybových momentů $M(x)$ nebo zatížení $q(x)$ **integrací** odvozujeme rovnici ohybové čáry $w(x)$. Postup integrace a formulace okrajových podmínek, pomocí nichž se stanoví integrační konstanty, budou objasněny v dalším.



Obr. 4.2 *Vliv nerovnoměrné teploty na křivost střednice*

Kromě příčného zatížení ovlivňuje křivost střednice prutu též **nerovnoměrné rozdělení teploty** po výšce nosníku. Omezíme-li se na případ nosníku s průřezem symetrickým k ose y (obr. 4.2a) s lineárním průběhem teploty (T_1 na spodním okraji, T_2 na horním), pak k ohybu přispívá jen rozdíl teplot $\Delta T = T_1 - T_2$. Vytneme-li element nosníku o délce dx, pak jeho spodní vlákna se podle rov. (1.13) prodlouží o přírůstek $\overline{DE} = \alpha_T dx \Delta T/2$, horní se o tutéž délku zkrátí. Z geometrie přetvoření (obr. 4.2c) plyne

$$d\varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{dx}{r}, \qquad d\varphi = \frac{\overline{DE}}{\overline{DB}} = \frac{\alpha_T dx \Delta T/2}{h/2} = \alpha_T \Delta T dx/h.$$

Vyloučením $d\varphi$ a úpravou s užitím rovnice (4.3) je

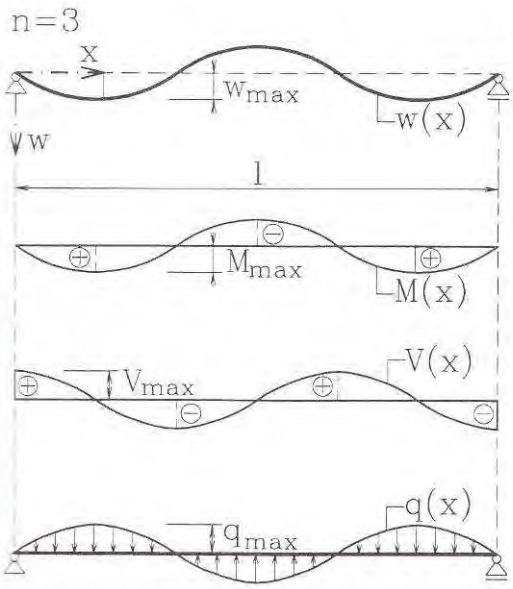
$$w'' = -\frac{1}{r} = -\frac{\alpha_T \Delta T}{h}, \tag{4.6}$$

kde α_T je součinitel tepelné roztažnosti. O tuto hodnotu je třeba doplnit rovnici (4.4), je-li nosník vystaven teplotnímu gradientu.

Příklad 4.1

Určete jaké zatížení je třeba přiložit k prostě podepřenému nosníku stálého průřezu (EI = konst.), aby se prohnul do tvaru sinusovky, která má n půlvln (na obr. 4.3 znázorněno pro $n = 3$). Určete též průběh vnitřních sil.

Řešení:



Obr. 4.3 *Periodicky namáhaný prostý nosník*

Jde o inverzní úlohu, kdy k danému tvaru ohybové čáry určujeme zatížení. Označíme-li amplitudu průhybu $w_{\max}$, je rovnice ohybové čáry

$$w(x) = w_{\max} \sin n\pi x/l.$$

Derivováním podle tabulky 4.1 postupně

$$w' = \varphi = n\frac{\pi}{l} w_{\max} \cos n\pi x/l,$$

$$M = -EIw'' = n^2 EI \frac{\pi^2}{l^2} w_{\max} \sin n\pi x/l,$$

$$V = -EIw''' = n^3 EI \frac{\pi^3}{l^3} w_{\max} \cos n\pi x/l,$$

$$q = EIw^{IV} = n^4 EI \frac{\pi^4}{l^4} w_{\max} \sin \pi x/l.$$

Příčné zatížení tedy musí rovněž sledovat sinusovku a to s amplitudou

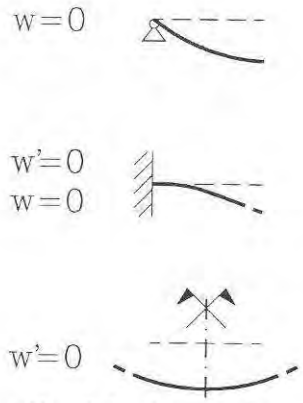
$$q_{\max} = n^4 \pi^4 EIw_{\max}/l^4 \tag{4.7}$$

4.2 Integrace diferenciální rovnice ohybové čáry - staticky určité případy

U **staticky určitých** nosníků dovedeme předem určit průběh ohybových momentů $M(x)$ a můžeme proto vycházet z rovnice (4.4), kterou dvakrát integrujeme. Budeme zatím uvažovat **nosníky stálého průřezu** (EI = konst.); pak lze rovnici vynásobit ohybovou tuhostí EI a postupným integrováním plyne:

$$\begin{aligned} EIw'' &= -M, \\ EIw' &= -\int M\mathrm{d}x + C_1, \\ EIw &= -\int\left[\int M\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x + C_1 x + C_2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Integrační konstanty určíme z okrajových podmínek nebo podmínek spojitosti. Jde o podmínky **kinematické** (deformační), neboť veškeré statické podmínky byly již respektovány při odvození ohybových momentů $M(x)$. U jednoduchých případů zatížení a podepření, kdy je možné průběh ohybových momentů na celém nosníku vyjádřit jedním výrazem, se uplatní pouze **okrajové podmínky**:



Obr. 4.4 *Okrajové kinematické podmínky*

prostě podepřený okraj

$$w = 0, \tag{4.9}$$

vetknutý okraj

$$\varphi = w' = 0, \qquad w = 0 \tag{4.10}$$

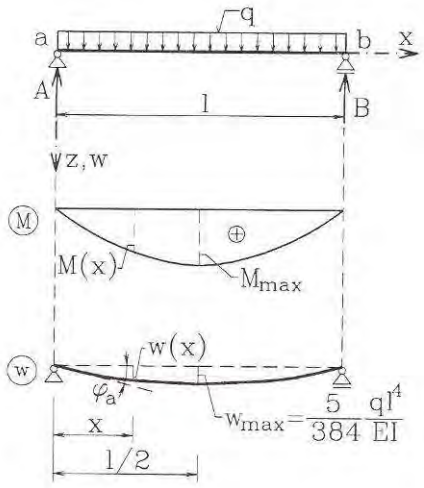
(ve vetknutí je zabráněno pootočením koncového průřezu a tedy v souladu s Bernoulliovou hypotézou také pootočení osy nosníku).

U případů symetrických k určité ose je často výhodné využít podmínky nulového pootočení ($w' = 0$) na ose symetrie (obr. 4.4). Aplikaci postupu objasníme na následujících příkladech.

Příklad 4.2

Odvoďte rovnici ohybové čáry prostého nosníku stálého průřezu, zatíženého plným rovnoměrným zatížením - obr. 4.5. Číselně určete maximální průhyb pro válcovaný nosník I 240 při $l = 6{,}0$ m a $q = 12$ kN/m. Modul pružnosti oceli $E = 210000$ MPa.

Řešení:



Obr. 4.5

Ohybový moment v obecném průřezu je

$$M = M(x) = Ax - \frac{1}{2}qx^2 = \frac{q}{2}\left(2x - x^2\right).$$

Dosazením do (4.8) a postupnou integrací

$$EIw'' = -M = -\frac{q}{2}\left(lx - x^2\right),$$

$$EIw' = -\frac{q}{2}\left(l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C_1,$$

$$EIw = -\frac{q}{2}\left(l\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + C_1x + C_2.$$

Integrační konstanty získáme z okrajových podmínek - na obou koncích je průhyb nulový:

$$w(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = 0,$$

$$w(l) = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{q}{2}\left(l\frac{l^3}{6} - \frac{l^4}{12}\right) + C_1l + C_2 = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = \frac{1}{24}ql^3.$$

Dosazením konstant do rovnice (a) a úpravou je rovnice ohybové čáry

$$w = \frac{q}{24EI} x\left(l^3 - 2lx^2 + x^3\right) \tag{4.11}$$

a dosazením $x = l/2$ (vzhledem k symetrii úlohy je maximální průhyb zřejmě uprostřed)

$$w_{\max} = w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{24EI}\frac{l}{2}\left(l^3 - 2l\frac{l^2}{4} + \frac{l^3}{8}\right) = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI} \tag{4.12}$$

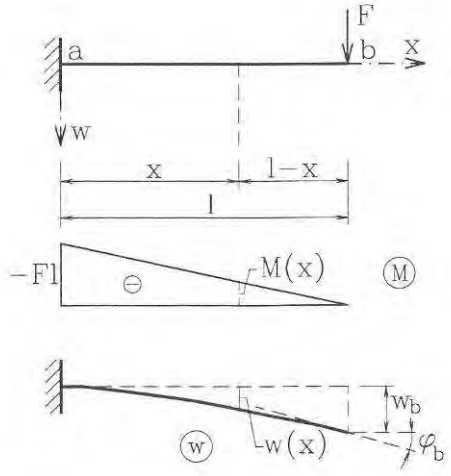
Přenechává se čtenáři, aby si odvodil velikost pootočení v podporách ($\varphi_a = ql^3/(24EI)$. Pro číselně zadané údaje: q = 12 kN/m = $12\cdot10^{-3}$ MN/m, l = 6 m, pro I 240 z tabulek $I = I_y = 42{,}5\cdot10^6$ mm^4 = $42{,}5\cdot10^{-6}$ m^4, je maximální průhyb dle (4.12)

$$w_{\max} = \frac{5}{384}\frac{12\cdot10^{-3}\cdot6{,}0^4}{210000\cdot42{,}5\cdot10^{-6}} = 0{,}0227\text{m} = 22{,}7\text{mm}.$$

Příklad 4.3

Určete přetvoření konzoly stálého průřezu zatížené na volném konci břemenem F - obr. 4.6.

Řešení:



Obr. 4.6

Ohybový moment má rovnici

$$M = M(x) = -F(l - x).$$

Postupem podle vztahů (4.8) odvodíme:

$$EIw'' = -M = F(l - x),$$

$$EIw' = F\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1, \tag{b}$$

$$EIw = F\left(l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_1x + C_2. \tag{c}$$

Ve vetknutí, tj. na levém okraji $x = 0$ jsou průhyb i pootočení nulové - rov. (4.10), takže

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0, \qquad w'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Obě konstanty jsou rovny nule, což má své opodstatnění, neboť C_1 a C_2 jsou EI - násobkem pootočení a průhybu v počátku souřadnic, jak lze vyčíst z rovnic (4.8). Dosazením a úpravou je

$$w(x) = \frac{F}{6EI}x^2(3l - x), \qquad \varphi(x) = w' = \frac{F}{2EI}x(2l - x). \tag{4.13}$$

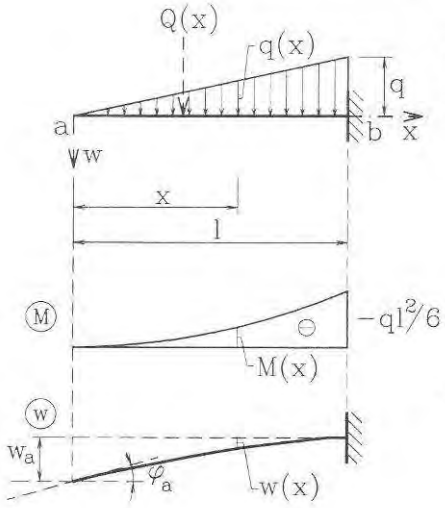
Dosazením $x = l$ získáme hodnoty na volném konci, které jdou exrémní:

$$w_{\max} = w_b = \frac{Fl^3}{3EI}, \qquad \varphi_{\max} = \varphi_b = \frac{Fl^2}{2EI}. \tag{4.14}$$

Příklad 4.4

Odvoďte rovnici ohybové čáry a velikost průhybu a pootočení volného konce konzoly stálého průřezu zatížené trojúhelníkovým zatížením podle obr. 4.7.

Řešení:



Obr. 4.7

Intenzita příčného zatížení ve vzdálenosti x od volného konce je $q(x) = qx/l$ (q - max. hodnota na pravém konci), takže dílčí výslednice zatížení nalevo od průřezu x a ohybový moment jsou

$$Q(x) = \frac{1}{2} x q(x) = \frac{q}{2l} x^2,$$

$$M(x) = -Q(x)\frac{x}{3} = -\frac{q}{6l} x^3.$$

Dosazením do diferenciální rovnice ohybové čáry a integrací obdržíme:

$$EIw'' = -M = \frac{q}{6l} x^3,$$

$$EIw' = \frac{q}{24l} x^4 + C_1, \tag{d}$$

$$EIw = \frac{q}{120l} x^5 + C_1 x + C_2. \tag{e}$$

Okrajové podmínky se nyní vztahují k pravému konci $x = l$, kde je nosník vetknut. Platí tedy

$$w'(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{24l} l^4 + C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{ql^4}{24},$$

$$w(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{120l} l^5 + \left(-\frac{ql^4}{24}\right) \cdot l + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{ql^4}{30}.$$

Dosazením do rov. (e) po úpravě je rovnice ohybové čáry

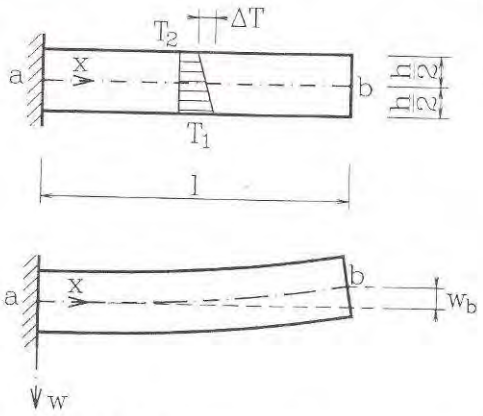
$$w = \frac{q}{120EIl}\left(4l^5 - 5l^4 x + x^5\right). \tag{4.15}$$

Extrémní hodnoty průhybu a pootočení jsou na volném konci ($x = 0$) a jsou rovny:

$$w_{\max} = w_a = \frac{ql^4}{30EI}, \qquad \varphi_a = -\frac{ql^3}{24EI}. \tag{4.16}$$

Příklad 4.5

Konzola stálého průřezu (dvojose symetrického) je nerovnoměrně po výšce oteplena dle obr. 4.8. Určete průhyb konzoly.



Obr. 4.8 *Průhyb vlivem nerovnoměrné teploty*

Řešení:

Vyjdeme z diferenciální rovnice (4.6) a dvakrát ji integrujeme:

$$w'' = -\frac{\alpha_T \Delta T}{h},$$

$$w' = -\frac{\alpha_T \Delta T}{h} x + C_1,$$

$$w = -\frac{\alpha_T \Delta T}{h} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Okrajové podmínky ve vetknutí, tj. v $x = 0$ podle vztahů (4.10):

$$w'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0,$$
$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

Konzola se tedy ohýbá vzhůru, je-li teplota při spodním povrchu vyšší.

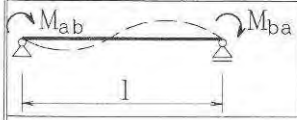
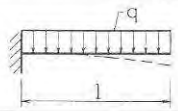
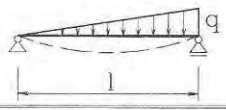
Číselně např. pro ocelový nosník ($\alpha_T = 0{,}000012/°C$) I 220 dlouhý 3,00 m při rozdílu teplot mezi spodním a horním okrajem 10°C:

$$w_b = -\frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 3{,}0^2}{2 \cdot 0{,}2} = -0{,}0027\text{m} = -2{,}7\text{ mm}.$$

Příklad 4.6

Samostatně odvoďte rovnice ohybové čáry pro nosníky stálého průřezu (EI = konst.) podepřené a zatížené dle tab. 4.2. Řešení je uvedeno v tabulce.

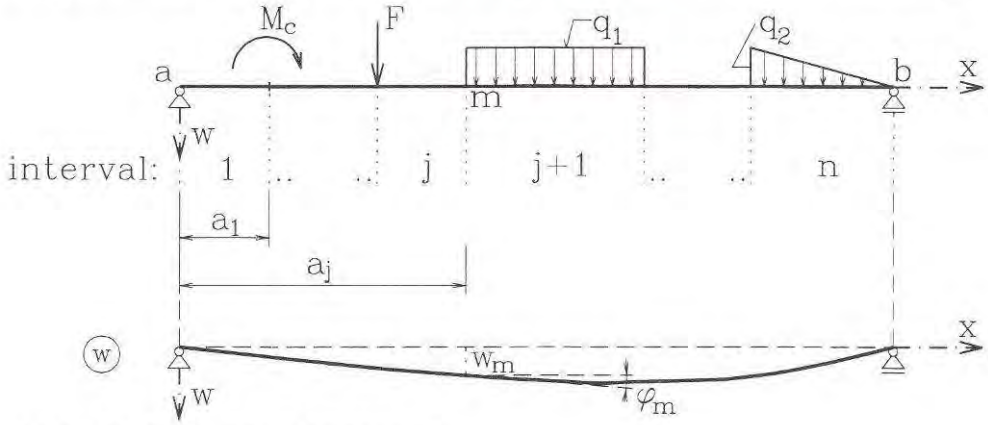
Tabulka 4.2 *Ohybová čára pro vybrané případy zatížení*

Zatížení a podepření	Rovnice ohybové čáry (EI = konst.)
	$w = \frac{M_{ab}}{6EIl} x\left(2l^2 - 3lx + x^2\right) - \frac{M_{ba}}{6EIl} x\left(l^2 - x^2\right)$
	$w = \frac{q}{24EI} x^2\left(6l^2 - 4lx + x^2\right)$
	$w = \frac{q}{360EIl} x\left(7l^4 - 10l^2x^2 + 3x^4\right)$

Odvozených vztahů využijte k určení charakteristických hodnot průhybů a pootočení.

4.3 Složitější případy zatížení - Clebschova metoda

Při složitějším (nespojitém) zatížení nebo při podepření nosníku mimo jeho konce apod. nelze průběh ohybových momentů vyjádřit jediným výrazem. Pak je třeba rozdělit celý vyšetřovaný obor na jednotlivé intervaly (obr. 4.9) a v každém z nich integrovat



Obr. 4.9 *Nespojité zatížení nosníku*

diferenciální rovnici zvlášť. Je-li n počet intervalů, vyvstane při integraci celkem $2n$ konstant C_{1j}, C_{2j} ($j = 1, ..., n$). Pro jejich určení sestavíme kromě dvou podmínek v místech

podepření nosníku dalších $2(n-1)$ **podmínek spojitosti** vyjadřujících shodu průhybu i pootočení (společná tečna) na každém rozhraní dvou intervalů, tedy

$$w_j(a_j) = w_{j+1}(a_j), \quad w'_j(a_j) = w'_{j+1}(a_j), \quad j = 1,\ldots,n-1 \tag{4.18}$$

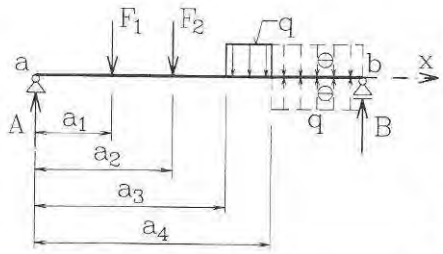
-srov. obr. 4.9. Tím se doplní soustava rovnic na potřebný počet $2n$ a všechny konstanty lze vypočítat. Při tomto postupu je možné **respektovat rozdílnou tuhost** (EI) v jednotlivých intervalech.

Naznačený postup je použitelný za pomoci výpočetní techniky, kde řešení rozsáhlejší soustavy rovnic nevyvolává nesnáze. Pro "ruční" výpočet lze u nosníku stálého průřezu (EI = konst.) s výhodou použít např. **Clebschovy metody**, spočívající v takové **úpravě integračního postupu, při níž vystupují vždy jen dvě integrační konstanty**. Alternativně lze užít též metody počátečních parametrů, která má analogickou povahu a vychází z teorie diferenciálních rovnic - viz [2], [10].

Dosáhneme toho, dodržíme-li tyto zásady:

a) při sestavování rovnice pro ohybový moment $M(x)$ v určitém intervalu převezmeme beze změny výraz z předchozího intervalu a doplníme jej o účinek nově přistoupivšího zatížení,

b) při integrování neodstraňujeme závorky u dvojčlenů $(x - a_j)$ a nakládáme s nimi jako s nezávislou proměnnou.



Obr. 4.10 *Clebschova metoda*

Pro úspornost zápisu přitom obvykle vyjadřujeme každou veličinu jedinou rovnicí, v níž určitým způsobem rozlišíme platnost jednotlivých členů v integračních intervalech.

V dalším výkladu se omezíme na účinek osamělých břemen a rovnoměrného zatížení; vztahy pro další typy zatížení viz např. [2], [10]. Pro nosník dle obr. 4.10 můžeme tedy ohybový moment v obecném místě zapsat takto:

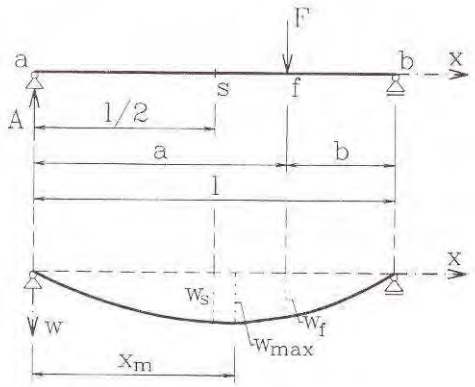
$$M = Ax - \underset{x>a_1}{|F_1(x-a_1)} - \underset{x>a_2}{|F_2(x-a_2)} - \underset{x>a_3}{\left|\frac{1}{2}q(x-a_3)^2\right.} + \underset{x>a_4}{\left|\frac{1}{2}q(x-a_4)^2\right.}. \tag{4.19}$$

V tomto zápisu platí každý člen jen pro souřadnice splňující podmínku $x > a_j$ předznamenanou pod příslušnou svislicí: v prvním intervalu platí tedy jen první člen, ve druhém první dva atp., v posledním pak celá rovnice (4.19). Alternativně lze užít i jiné symboliky (Heavisideovy funkce - viz [2], atp.). V posledním (krajním pravém) úseku, kde nepůsobí žádné zatížení, ponecháváme rovnoměrné zatížení q, současně však je zrušíme shodným zatížením opačného smyslu - tak dodržíme podmínku a) uvedenou výše.

Integrací (4.19) podle pravidla b) obdržíme výrazy, které **identicky** splňují **podmínky spojitosti** (4.18), takže neurčeny zůstanou pouze dvě integrační konstanty společné pro všechny intervaly; ty určíme z podmínek v podepření - rov. (4.9) nebo (4.10).

Příklad 4.7

Odvoďte rovnici ohybové čáry prostého nosníku stálého průřezu (EI = konst.) zatíženého silou F v obecné poloze - obr. 4.11.



Obr. 4.11

Řešení:

Reakce v levé podpoře je $A = Pb/l$, takže ohybový moment je

$$M = Ax - \underset{x>a}{|}F(x-a) = F\frac{b}{l}x - \underset{x>a}{|}F(x-a)$$

a dosazením do diferenciální rovnice vyjde

$$EIw'' = -M = -F\frac{b}{l}x + \underset{x>a}{|}F(x-a)$$

Tuto rovnici nyní postupně dvakrát integrujeme, přičemž dodržujeme pravidlo b):

$$EIw' = -F\frac{b}{l}\frac{x^2}{2} + \underset{x>a}{|}F\frac{(x-a)^2}{2} + C_1, \tag{f}$$

$$EIw = -F\frac{b}{l}\frac{x^3}{6} + \underset{x>a}{|}F\frac{(x-a)^3}{6} + C_1x + C_2\,. \tag{g}$$

Připomeňme, že první člen i výrazy obsahující integrační konstanty platí v obou intervalech, druhý pak jen vpravo od působiště síly. Z okrajových podmínek vypočteme integrační konstanty:

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0,$$

$$w(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad -F\frac{b}{l}\frac{l^3}{6} + F\frac{(l-a)^3}{6} + C_1 l = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{b}{6l}\left(l^2 - b^2\right).$$

Dosazením do rovnic (g) a (f) obdržíme po úpravě výsledné rovnice:

$$w = \frac{F}{6EIl}\left[bx\left(l^2 - b^2 - x^2\right) + \underset{x>a}{|}l\,(x-a)^3\right], \tag{4.20}$$

$$\varphi = w' = \frac{F}{6EIl}\left[b\left(l^2 - b^2 - 3x^2\right) + \underset{x>a}{|}3l(x-a)^2\right]. \tag{4.21}$$

Průhyb v místě působiště síly ($x = a$) je

$$w_f = \frac{F}{6EIl}\left[ba\left(l^2 - b^2 - a^2\right)\right] = \frac{Fa^2b^2}{3EIl}. \tag{4.22}$$

Je-li břemeno v pravé polovině nosníku ($a > b$), vznikne maximální průhyb v levém intervalu. Jeho polohu určíme z podmínky, že tečna k ohybové čáře je vodorovná

$$w'(x_m) = \frac{F}{6EIl}\left[b\left(l^2 - b^2 - 3x_m^2\right)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad x_m = \sqrt{\frac{a}{3}(l+b)} \tag{4.23}$$

a maximální průhyb

$$w_{\max} = \frac{Fab}{27EIl}(l+b)\sqrt{3a(l+b)}. \tag{4.24}$$

Je-li $a < b$, zamění se ve vztazích (4.23) a (4.24) navzájem délky a a b. Průhyb ve středu rozpětí $x = l/2$ je

$$w_s = \frac{Fb}{48EI}\left(3l^2 - 4b^2\right). \tag{4.25}$$

Rozdíl mezi průhybem ve středu nosníku a maximálním průhybem není významný - např. při síle působící ve čtvrtině rozpětí od pravé podpory ($a = 0{,}75l$, $b = 0{,}25l$) činí rozdíl jen 1,6%. Často se proto spokojíme s určením **průhybu ve středu rozpětí**, podobně jako u většiny běžných případů zatížení prostého nosníku (odpadá tak hledání polohy extrému).

Pootočení v obou podporách plyne z rovnice (4.21):

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \varphi(0) = \frac{F}{6EIl}\left[b\left(l^2 - b^2\right)\right] = \frac{Fab(l+b)}{6EIl}, \\ \varphi_b &= \varphi(l) = -\frac{Fab(l+a)}{6EIl}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Příklad 4.8

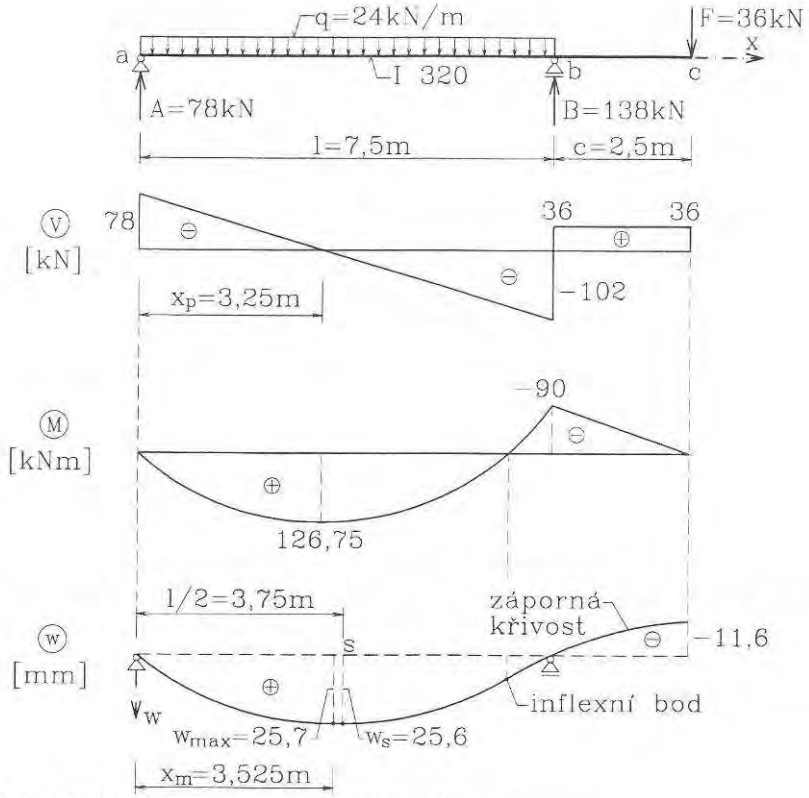
Ocelový válcovaný nosník I 320 je podepřen a zatížen podle obr. 4.12. Určete tvar ohybové čáry.

Řešení:

Z podmínek rovnováhy plynou hodnoty podporových reakcí $A = 78$ kN, $B = 138$ kN. Průběh ohybových momentů (v kNm) je

$$\begin{aligned} M = M(x) &= Ax - \frac{1}{2}qx^2 + \Big|_{x>l} B(x-l) + \Big|\frac{1}{2}q(x-l)^2 = \\ &= 78x - \frac{1}{2}24x^2 + \Big|_{x>7{,}5} 138(x-7{,}5) + \Big|\frac{1}{2}\,24(x-7{,}5)^2 \end{aligned} \tag{h}$$

Dodrželi jsme pravidlo a), tj. rovnoměrné zatížení jsme nechali působit i na převislém konci a zrušili jsme je shodným zatížením opačného smyslu - poslední člen rovnice (h).



Obr. 4.12 *Deformace nosníku s převislým koncem*

Lineární průběh ohybových momentů je tedy vyjádřen pomocí rozdílu dvou polynomů 2. stupně, jejichž kvadratické členy se však vzájemně ruší.

Dosazením (*h*) do diferenciální rovnice a postupnou integrací podle (4.3) je

$$EIw'' = -M = -78x + 12x^2 - \underset{x>7,5}{|}138(x-7,5) - \underset{x>7,5}{|}12(x-7,5)^2,$$

$$EIw' = -39x^2 + 4x^3 - \underset{x>7,5}{|}69(x-7,5)^2 - \underset{x>7,5}{|}4(x-7,5)^3 + C_1,$$

$$EIw = -13x^3 + x^4 - \underset{x>7,5}{|}23(x-7,5)^3 - \underset{x>7,5}{|}(x-7,5)^4 + C_1x + C_2. \qquad \text{(i)}$$

Podmínky nulového průhybu v místě obou podpor:

$$w_a = w(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0,$$

$$w_b = w(7,5) = 0 \quad \Rightarrow \quad -13\cdot 7,5^3 + 7,5^4 + C_1 \cdot 7,5 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 309,375\ \text{kNm}^2.$$

Ohybovou tuhost *EI* vyjádříme číselně v kNm^2, neboť jsme ohybové momenty uvažovali v kNm: modul pružnosti oceli $E = 210\cdot 10^6$ kPa, moment setrvačnosti válcovaného

profilu I 320 je $I = I_y = 125{,}1\cdot10^{6}\ \mathrm{mm}^4 = 125{,}1\cdot10^{-6}\ \mathrm{m}^4$, takže ohybová tuhost a její reciproká hodnota jsou

$$EI = 210\cdot10^{6}\cdot125{,}1\cdot10^{-6} = 25271\ \mathrm{kNm}^2, \quad \frac{1}{EI} = 38{,}06\cdot10^{-6}\ \mathrm{kN}^{-1}\mathrm{m}^{-2}.$$

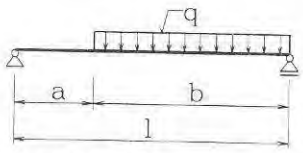
Dosazením integračních konstant a ohybové tuhosti do rovnice (i) dostáváme rovnici ohybové čáry (vyjádřenou v **m**):

$$w = 38{,}06\cdot10^{-6}\left[-13x^3 + x^4 - \underset{x>7{,}5}{|}23(x-7{,}5)^3 - \underset{x>7{,}5}{|}(x-7{,}5)^4 + 309{,}375x\right] \quad (4.27)$$

Tvar ohybové čáry je vykreslen na obr. 4.12.

Příklad 4.9

Ověřte, že rovnice ohybové čáry prostého nosníku stálého průřezu zatíženého částečně rovnoměrným zatížením dle obr.. 4.13, je



Obr. 4.13

$$w = \frac{q}{24EIl}\left[b^2x\left(2l^2 - b^2 - 2x^2\right) + \underset{x>a}{|}l\,(x-a)^4\right] \quad (4.28)$$

Obecného vztahu užijte k vyčíslení průhybů pro konkrétní zadání (dle vlastní volby).

Závěrem poznamenejme, že ke stanovení deformací využíváme často **principu superpozice** (skládání účinků), takže např. při zatížení prostého nosníku několika břemeny popř. částečně rovnoměrnými zatíženími využijeme obecných vztahů z příkladu 4.7 a 4.9 apod.

4.4 Mohrova metoda

Mohrova metoda (analogie) umožňuje určit průhyby nebo pootočení staticky určitých nosníků bez přímého využití diferenciálního a integrálního počtu převedením úlohy na statické řešení nosníků. Zdůvodnění metody lze opřít o matematickou analogii mezi diferenciálními rovnicemi (1.5) a (4.4). Omezíme-li se opět na rovinný případ v rovině xz ($M_y = M$, $V_z = V$, $q_z = q$, $I_y = I$), jde o analogii mezi vztahy

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2} = M'' = -q, \qquad \frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} = w'' = -\frac{M}{EI}.$$

Určení průhybů $w(x)$ ze známého průběhu ohybových momentů $M(x)$ je tedy matematicky analogické úloze určení ohybových momentů $M(x)$, je-li dáno příčné zatížení $q(x)$.

(Pozn.: určování ohybových momentů vyvozených příčným zatížením z přímé definice odpovídá transformaci dvojnásobného integrálu v jednonásobný pomocí Cauchyova vzorce.) Zavedeme-li tedy myšlené (fiktivní) zatížení

$$\tilde{q} = \frac{M}{EI} \tag{4.29}$$

a určíme-li k němu příslušné ohybové momenty $\tilde{M}$, platí zřejmě

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{M}}{\mathrm{d}x^2} = -\tilde{q} = -\frac{M}{EI} = \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}.$$

Definujeme nyní **fiktivní nosník** přidružený ke skutečnému nosníku jako nosník podepřený takovým způsobem, že splňuje vůči ohybovému momentu $\tilde{M}$ a posouvající síle $\tilde{V}$ tytéž okrajové podmínky, případně podmínky spojitosti, jaké plní skutečný nosník vůči průhybu w a pootočení. Touto volbou zajišťujeme vzájemnou korespondenci mezi $\tilde{M}$ a w a mezi $\tilde{V}$ a φ i ve funkčních hodnotách a v prvých derivacích, takže platí

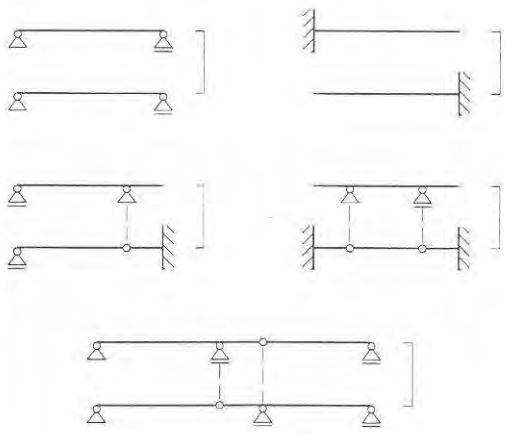
$$w = \tilde{M}, \qquad \varphi = w' = \tilde{V}. \tag{4.30}$$

Průhyb w v určitém místě nosníku určíme jako ohybový moment $\tilde{M}$ na fiktivním nosníku, zatíženém momentovou plochou, dělenou ohybovou tuhostí EI. Pootočení φ pak určíme jako posouvající sílu $\tilde{V}$ na takto zatíženém nosníku. (Mohrovy věty).

Přehled vzájemně si odpovídajících vazeb je uveden v tabulce 4.3, příklady fiktivních nosníků jsou znázorněny na obr. 4.14. Povšimneme si, že u jednotlivých vzájemně přiřazených nosníků je lhostejno, který z obou pokládáme za skutečný - korespondence je vzájemná.

Tabulka 4.3 *Vazby fiktivního nosníku*

Skutečný nosník		Fiktivní nosník	
$w = 0$ $\varphi \neq 0$		$\tilde{M} = 0$ $\tilde{V} \neq 0$	
$w \neq 0$ $\varphi \neq 0$		$\tilde{M} \neq 0$ $\tilde{V} \neq 0$	
$w = 0$ $\varphi = 0$		$\tilde{M} = 0$ $\tilde{V} = 0$	
$w = 0$ $\varphi \neq 0$		$\tilde{M} = 0$ $\tilde{V} = 0$	
$w \neq 0$ $\varphi \neq 0$		$\tilde{M} \neq 0$ $\tilde{V} \neq 0$	



Obr. 4.14 *Skutečné a fiktivní nosníky*

Pro číselné řešení není zavedení fiktivního zatížení podle (4.29) výhodné, neboť vede k příliš malým hodnotám a výpočet je méně přehledný. Upravíme proto všechny vztahy takto:

$$\bar{q} = M\frac{I_o}{I} \qquad w = \frac{\bar{M}}{EI_o} \qquad \varphi = w' = \frac{\bar{V}}{EI_o} \tag{4.31}$$

kde I_o je libovolně zvolená hodnota o rozměru [m^4]. U nosníku **stálého průřezu** zvolíme ovšem $I_o = I$, takže fiktivní nosník zatěžujemme přímo **momentovou plochou** a získané hodnoty $\bar{M}$ a $\bar{V}$ dělíme ohybovou tuhostí až v závěru výpočtu. Postup u nosníku proměného průřezu uvedeme v odst. 4.5.

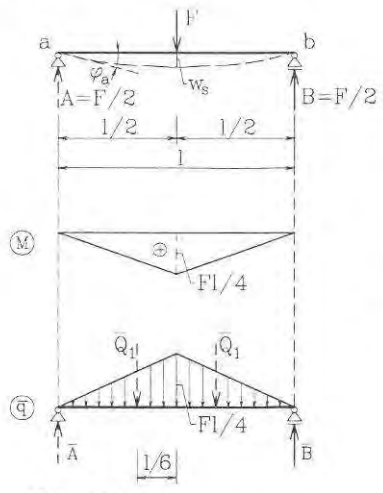
Postup při stanovení průhybů a pootočení Mohrovou metodou můžeme tedy shrnout takto:

1) staticky vyřešíme daný nosník - určíme **obrazec ohybových momentů** M,
2) sestrojíme fiktivní nosník přidružený k danému nosníku, **zatížíme jej momentovou plochou** (event. redukovanou dle první rov. 4.31); kladné momenty přitom zavádíme jako kladné zatížení $\bar{q}$ - působící dolů,
3) vypočteme hodnoty **ohybových momentů** $\bar{M}$ tam, kde hledáme hodnotu průhybu w a **posouvajících sil** $\bar{V}$ v místě hledaných pootočení φ,
4) skutečné hodnoty deformací získáme **dělením** EI_o podle (4.31).

Jsou-li ohybové momenty skutečného (daného) nosníku vyjádřeny v kNm, pak při postupu podle rovnic (4.31) mají fiktivní statické veličiny tyto rozměry: $\bar{q}$ - kNm, $\bar{V}$ - kNm^2, $\bar{M}$ - kNm^3. Dělením ohybovou tuhostí EI, která má rozměr kNm^2, vyjdou průhyby w v m, φ je bezrozměrné a vyjádřeno v radiánech.

Postup ukážeme na příkladech; v tomto odstavci půjde vždy o nosníky stálého průřezu (EI = konst.), takže $I_o = I$, $\bar{q} = M$.

Příklad 4.10



Obr. 4.15

Prostý nosník stálého průřezu je ve středu rozpětí zatížen silou F. Určete průhyb pod břemenem a pootočení v levé podpoře.

Řešení:

Ohybový moment pod břemenem je roven $Fl/4$, momentový obrazec je znázorněn na obr. 4.15. Zavedeme je j jako zatížení (kladné, tj. směrem shora dolů) na fiktivní nosník, jímž je opět prostě podepřený nosník. Výslednice zatížení n a polovině nosníku je

$$\bar{Q}_1 = \frac{1}{2}\frac{l}{2}\cdot\frac{Fl}{4} = \frac{Fl^2}{16}.$$

Ze silové podmínky ve svislém směru s ohledem na symetrii úlohy plynou podporové reakce fiktivního nosníku

$$\overline{A} = \overline{B} = \overline{Q}_1 = \frac{Fl^2}{16},$$

takže ohybový moment ve středu rozpětí a posouvající síla na levém konci jsou

$$\overline{M}_s = \overline{A} \cdot \frac{l}{2} - \overline{Q}_1 \cdot \frac{l}{6} = \frac{Fl^2}{16} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Fl^2}{16} \cdot \frac{l}{6} = \frac{Fl^3}{48}, \qquad \overline{V}_a = \overline{A} = \frac{Fl^2}{16}.$$

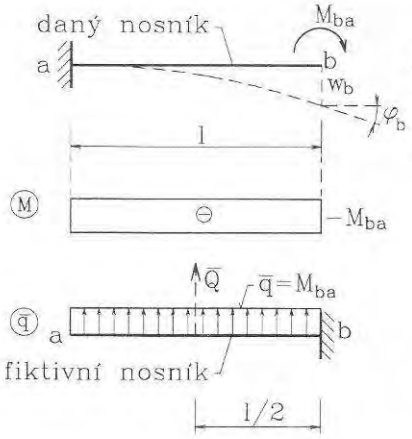
Dělením ohybovou tuhostí EI jsou hledané hodnoty deformací:

$$w_s = \frac{\overline{M}_s}{EI} = \frac{Fl^3}{48EI}, \qquad \varphi_a = \frac{\overline{V}}{EI} = \frac{Fl^2}{16EI}. \tag{4.32}$$

Příklad 4.11

Určete průhyb a pootočení volného konce konzoly stálého průřezu zatížené momentem na konci - obr. 4.16.

Řešení:



Obr. 4.16

Ohybový moment je konstantní a záporný (tažena jsou horní vlákna), zavedeme jej tedy jako zatížení působící zdola nahoru na fiktivní nosník, jímž je konzola vetknutá na protilehlém, tedy pravém konci. Je tedy

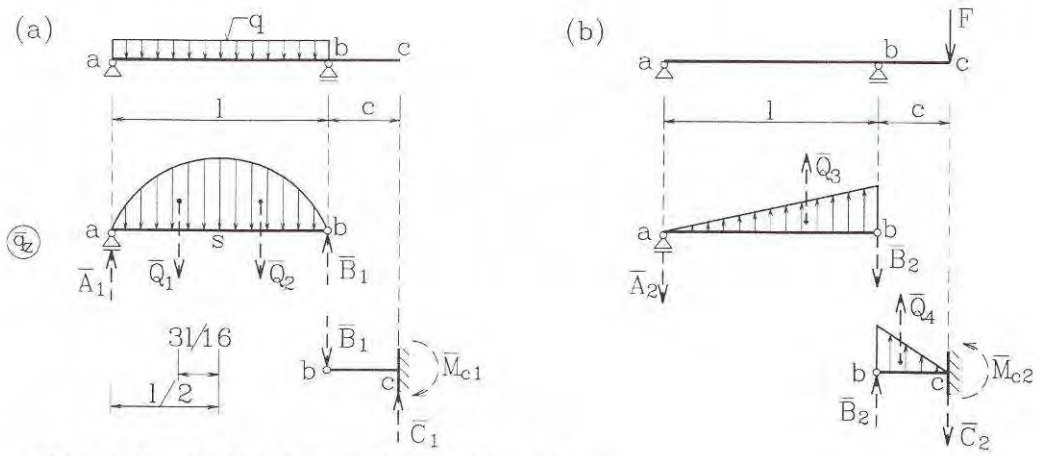
$$\overline{Q} = M_{ba} l, \qquad \overline{M}_b = \overline{Q} \cdot \frac{l}{2} = M_{ba} l \cdot \frac{l}{2}.$$

Hledané hodnoty jsou

$$w_b = \frac{M_{ba} l^2}{2EI}, \qquad \varphi_b = \frac{M_{ba} l}{EI} \tag{4.33}$$

Příklad 4.12

Mohrovou metodou určete průhyb nosníku ve středu rozpětí a na volném konci nosníku s převislým koncem podle obr. 4.12, který byl metodou integrace diferenciální rovnice řešen v příkladu 4.8. Úlohu řešte samostatně.



Obr. 4.17 *Rozklad zatížení (k příkladu 4.12)*

Návod k řešení:

Zatížení je vhodné rozložit na dva zatěžovací stavy pro snadnější určení výslednic parabolického zatížení ($\bar{Q}_1=\bar{Q}_2=421{,}875$ kNm^2). Výsledky jsou zřejmé z řešení příkladu 4.8.

4.5 Nosníky proměnného průřezu

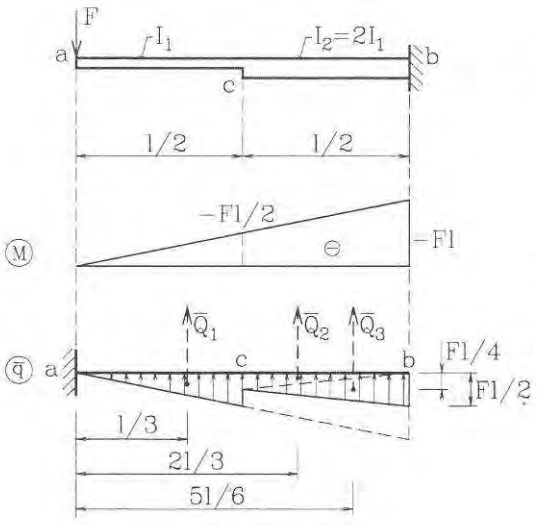
Určení přetvoření nosníků s **proměnným průřezem** je složitější úlohou, neboť moment setrvačnosti je pak funkcí souřadnice x: $I_y = I = I(x)$, takže integrace diferenciální rovnice (4.4), kde figuruje $I(x)$ ve jmenovateli, je nesnadnější. Některé technicky významné případy, jako jsou nosníky s přímkovými či parabolickými **náběhy**, byly vyřešeny a potřebné veličiny tabelovány - viz např. [3].

Nosníky s náhlou průřezovou změnou, tj. s průřezem **po úsecích konstantním** je možné řešit způsobem naznačeným v odst. 4.3 (obr. 4.9): rozdělit délku prutu na řadu intervalů s konstantním průřezem a na rozhraních užít podmínky spojitosti (4.18). Při využití výpočetní techniky není překážkou velký počet rovnic, které je při tomto postupu třeba řešit a programové vybavení to v současné době běžně umožňuje. Přibližným způsobem lze tak řešit i nosníky se **spojitou změnou průřezu**, kterou aproximujeme náhradním stupňovitým průběhem. V této souvislosti připomeňme **metodu konečných prvků**, což je velice účinná metoda řešení veškerých konstrukčních prvků (nejen prutů, ale též desek, stěn atd.); čtenář se s ní seznámí ve vyšším kurzu teorie pružnosti [13].

V dalším se zaměříme na použití **Mohrovy metody**. Vyjdeme ze vztahů (4.31): zvolíme určitou hodnotu I_0 (obvykle velikost momentu setrvačnosti některého průřezu nosníku) a poměrem $I_0/I(x)$ vynásobíme pořadnice momentového obrazce, čímž získáme zatížení fiktivního nosníku $\bar{q}$ - **"zkreslený" momentový obrazec**. Po jeho vyřešení plynou hodnoty průhybu a pootočení z hodnot $\bar{M}$ a $\bar{V}$ dělením (EI_0) - rov. (4.31).

Příklad 4.13

Určete průhyb volného konce konzoly zatížené na konci silou F, je-li moment setrvačnosti v pravé polovině nosníku dvojnásobný oproti levému úseku - obr. 4.18.



Obr. 4.18

Řešení:

Zvolíme např. $I_0 = I_1$, pak v levé polovině zůstává momentový obrazec beze změny ($\bar{q} = M$). V pravé polovině je poměr

$$\frac{I_0}{I} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2},$$

takže momentové pořadnice dělíme dvěma a získáme tak zatížení $\bar{q}$ - viz obr. 4.18.

Dílčí výslednice fiktivního zatížení jsou

$$\bar{Q}_1 = \bar{Q}_3 = \frac{1}{2}\frac{l}{2}\cdot\frac{Fl}{2} = \frac{Fl^2}{8},$$

$$\bar{Q}_2 = \frac{1}{2}\frac{l}{2}\frac{Fl}{4} = \frac{Fl^2}{16}.$$

Fiktivním nosníkem je konzola vetknutá na levém konci. Ohybový moment ve vetknutí je

$$\overline{M}_a = \overline{Q}_1 \frac{l}{3} + \overline{Q}_2 \frac{2l}{3} + Q_3 \frac{5l}{6} = \frac{Fl^2}{8} \cdot \frac{l}{3} + \frac{Fl^2}{16} \cdot \frac{2l}{3} + \frac{Fl^2}{8} \cdot \frac{5l}{6} = \frac{3}{16} Fl^3.$$

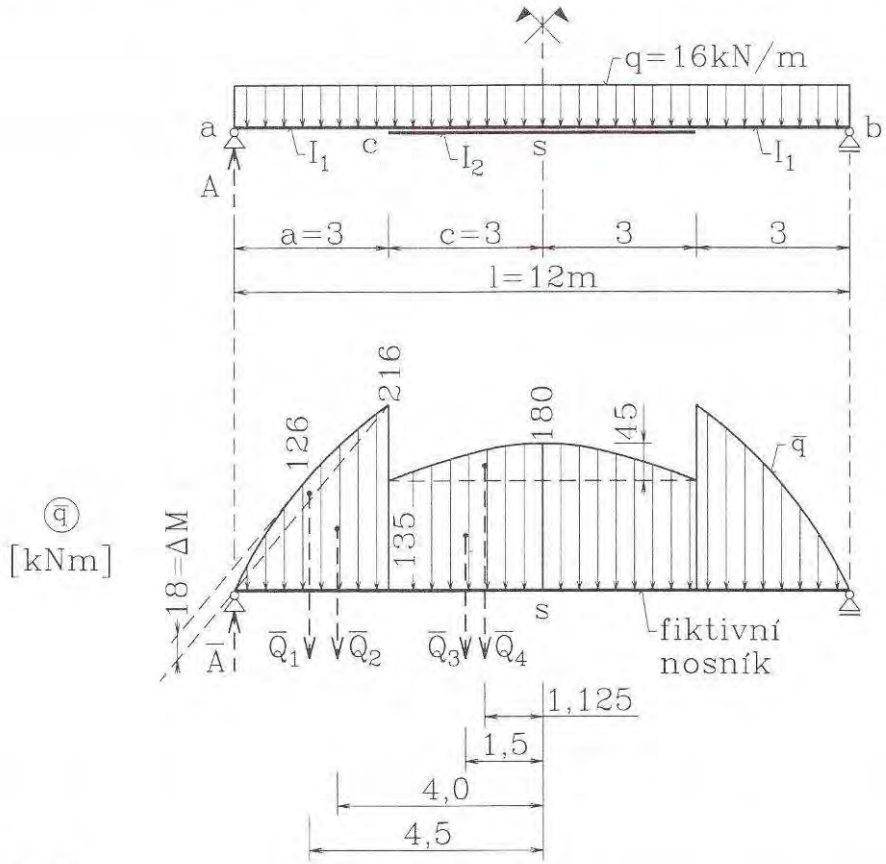
Průhyb volného konce

$$w_a = \frac{\overline{M}_a}{EI_0} = \frac{3}{16} \frac{Fl^3}{EI_1} = \frac{3}{8} \frac{Fl^3}{EI_2}.$$

Průhyb je o 12,5% větší než u konzoly stálého průřezu s momentem setrvačnosti I_2 - srov. rovnici (4.14) v příkladu 4.3.

Příklad 4.14

Ocelový nosník o rozpětí 12,0 m, zatížený plně rovnoměrným zatížením $q = 16$ kN/m, má v krajních čtvrtinách délky moment setrvačnosti průřezu $I_1 = 0{,}3 \cdot 10^{-3}$ m^4 ($300 \cdot 10^6$ mm^4), ve střední části $I_2 = 0{,}48 \cdot 10^{-3}$ m^4. Určete průhyb středu nosníku - obr. 4.19.



Obr. 4.19

Řešení:

Úloha je symetrická, budeme tedy vyšetřovat levou polovinu nosníku. Podporová reakce A a ohybové momenty v řezech c a s jsou:

$$A = \frac{1}{2}ql = \frac{1}{2}16 \cdot 12 = 96\,\text{kN},$$

$$M_c = Aa - \frac{1}{2}qa^2 = 96 \cdot 3 - \frac{1}{2}16 \cdot 3^2 = 216\,\text{kNm},$$

$$M_s = A \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2}q\left(\frac{l}{2}\right)^2 = 96 \cdot 6 - \frac{1}{2}16 \cdot 6^2 = 288\,\text{kNm}\left(= \frac{1}{8}ql^2\right).$$

Zvolíme $I_0 = I_1$, takže v krajních čtvrtinách délky $\bar{q} = M$. Ve střední části násobíme poměrem

$$\frac{I_0}{I} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{0{,}30 \cdot 10^{-3}}{0{,}48 \cdot 10^{-3}} = 0{,}625,$$

takže

$$M_c' = 0{,}625 \cdot 216 = 135\,\text{kNm}, \qquad M_s' = 0{,}625 \cdot 288 = 180\,\text{kNm}.$$

Zkreslený momentový obrazec, zavedený již jako zatížení fiktivního nosníku, je vykreslen na obr. 4.19. Vzepětí momentové paraboly (měřené svisle) v krajní čtvrtině délky je

$$\Delta M = \frac{1}{8}qa^2 = \frac{1}{8}16 \cdot 3^2 = 18\,\text{kNm}.$$

Dílčí náhradní břemena jsou

$$\bar{Q}_1 = \frac{2}{3}a\Delta M = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 18 = 36\,\text{kNm}^2, \qquad \bar{Q}_2 = \frac{1}{2}aM_c = \frac{1}{2}3 \cdot 216 = 324\,\text{kNm}^2,$$

$$\bar{Q}_3 = cM_c' = 3 \cdot 135 = 405\,\text{kNm}^2, \quad \bar{Q}_4 = \frac{2}{3}c\left(M_s' - M_c'\right) = \frac{2}{3}3(180 - 135) = 90\,\text{kNm}^2.$$

Reakce fiktivního nosníku je vzhledem k symetrii rovna součtu náhradních břemen na polovině nosníku

$$\bar{A} = \sum_1^4 \bar{Q}_i = 36 + 324 + 405 + 90 = 855\,\text{kNm}^2.$$

Ramena sil ke středu nosníku jsou uvedena na obr. 4.19 ($3c/8$ = 1,125 m), takže ohybový moment je

$$\bar{M}_s = \bar{A} \cdot \frac{l}{2} - \sum_1^4 \bar{Q}_i r_i = 855 \cdot 6 - 36 \cdot 4{,}5 - 324 \cdot 4 - 405 \cdot 1{,}5 - 90 \cdot 1{,}125 = 2963{,}25\,\text{kNm}^3.$$

Průhyb pak je

$$w_s = \frac{\overline{M}_s}{EI_0} = \frac{2963{,}25}{210 \cdot 10^6 \cdot 0{,}30 \cdot 10^{-3}} = 0{,}0470 \text{ m} = 47{,}0 \text{ mm}.$$

4.6 Staticky neurčité případy ohybu

Studiem staticky neurčitých nosníků a prutových soustav (nosníky o jednom poli, spojité nosníky, rámy aj.) se zabývá **statika stavebních konstrukcí**. Zde si jen všimneme základních rysů postupu, především v souvislosti s využitím znalosti deformací k řešení staticky neurčitých úloh. Budeme přitom sledovat dva možné postupy řešení:

a) integrací diferenciální rovnice ohybové čáry (4. řádu),

b) silovou metodou.

Existují ovšem i jiné možnosti - např. metody založené na **energetických principech** apod., těmi se v tomto textu nebudeme zabývat.

● Integrace diferenciální rovnice 4. řádu

Pro nosník stálého průřezu byla v odst. 4.1 odvozena rovnice (4.5), kterou můžeme přepsat ($I = I_y$) takto:

$$EIw^{\mathrm{IV}} = q(x), \tag{k}$$

což je lineární diferenciální rovnice 4. řádu se separovanými proměnnými. Její postupnou čtyřnásobnou integrací vyvstanou čtyři integrační konstanty, pro něž je třeba formulovat příslušné rovnice. Omezíme-li se na **okrajové podmínky**, pak pro nezatížené okraje platí:

Volný okraj: $V = 0 \Rightarrow w''' = 0, M = 0 \Rightarrow w'' = 0.$ (4.34)

Prostě podepřený okraj: $M = 0 \Rightarrow w'' = 0, w = 0.$ (4.35)

Vetknutý okraj: $\varphi = w' = 0, w = 0.$ (4.36)



V=0 ⇒ w'''=0	M=0 ⇒ w''=0	φ= w' =0
M=0 ⇒ w''=0	w=0	w=0

Obr. 4.20 *Statické a deformační okrajové podmínky*

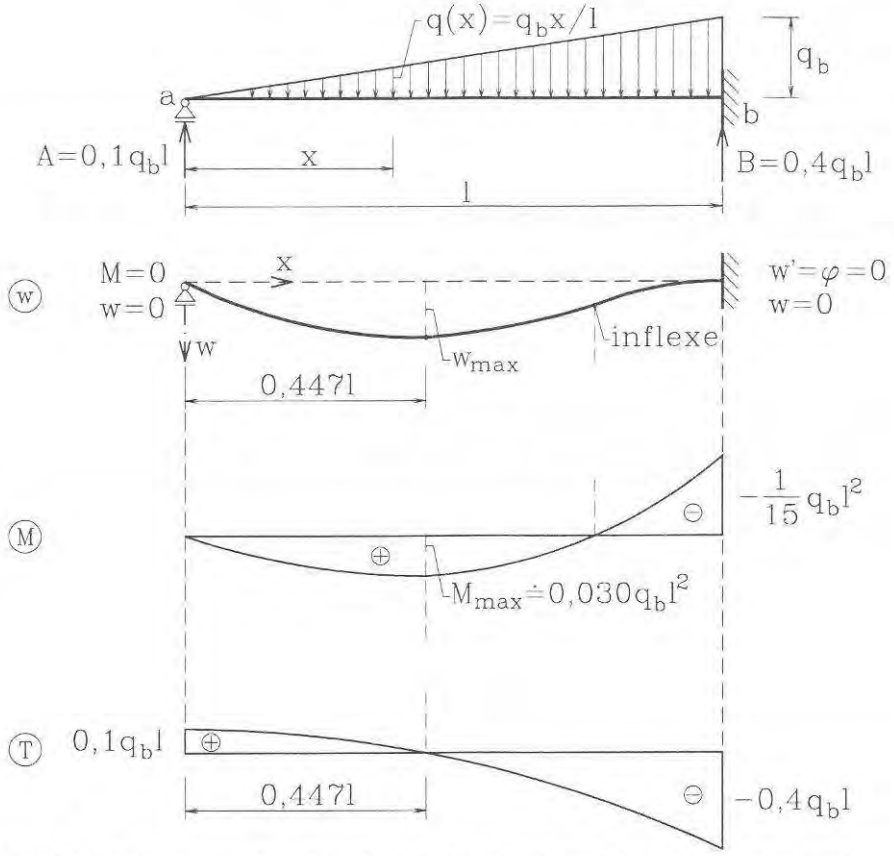
Při formulování těchto podmínek jsme využili diferenciálních závislostí přehledně uvedených v tab. 4.1. V rovnicích (4.35) a (4.36) jsou ovšem zahrnuty i dříve formulované

kinematické podmínky (4.9) a (4.10). V případě, že na volném okraji působí břemeno n. vnější moment, nebo na prostě podepřeném okraji vnější moment, uzpůsobí se tomu statické okrajové podmínky (pro V, M).

Řešení úlohy tedy spočívá v tom, že čtyřikrát postupně integrujeme rovnici (k), z okrajových podmínek určíme integrační konstanty a z rovnice ohybové čáry pak derivováním podle vztahů dle tab. 4.1 určíme všechny další veličiny (φ, M, V). Postup vysvětlíme na příkladu.

Příklad 4.17

Jednostranně vetknutý nosník stálého průřezu je zatížen trojúhelníkovým zatížením - obr. 4.21. Integrací diferenciální rovnice ohybové čáry (4.řádu) určete všechny deformační a statické veličiny nosníku.



Obr. 4.21 *Jednostranně vetknutý nosník zatížený trojúhelníkovým zatížením*

Řešení:

Do rovnice (k) dosadíme vztah pro $q(x)$ a postupně integrujeme

$$
\left.
\begin{aligned}
EIw^{IV} &= q(x) = \frac{q_b}{l}x,\\
EIw''' &= \frac{q_b}{l}\frac{x^2}{2} + C_1,\\
EIw'' &= \frac{q_b}{l}\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2,\\
EIw' &= \frac{q_b}{l}\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,\\
EIw &= \frac{q_b}{l}\frac{x^5}{120} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.
\end{aligned}
\right\} \qquad (l)
$$

Integrační konstanty určíme z okrajových podmínek v souladu s rovnicemi (4.35) a (4.36):

$$
\begin{aligned}
M(0) = 0 \;&\Rightarrow\; w''(0) = C_2 = 0,\\
w(0) = 0 \;&\Rightarrow\; C_4 = 0,\\
\varphi(l) = w'(l) \;&\Rightarrow\; \frac{q_b}{l}\frac{l^4}{24} + C_1\frac{l^2}{2} + C_2 l + C_3 = 0,\\
w(l) = 0 \;&\Rightarrow\; \frac{q_b}{l}\frac{l^5}{120} + C_1\frac{l^3}{6} + C_2\frac{l^2}{2} + C_3 l + C_4 = 0.
\end{aligned}
$$

Řešením těchto rovnic vyjdou integrační konstaty:

$$
C_1 = \frac{1}{10}q_b l, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{1}{120}q_b l, \quad C_4 = 0.
$$

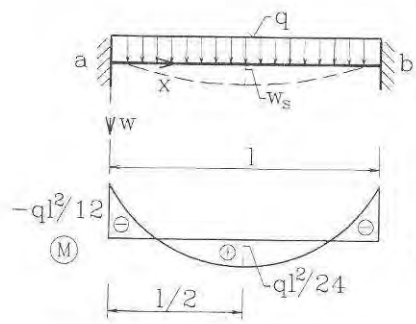
Jejich dosazením do vztahů (l) obdržíme po úpravě:

$$
\left.
\begin{aligned}
w &= \frac{q_b}{120EIl}x\left(l^2 - x^2\right)^2,\\
M &= -EIw'' = \frac{q_b}{30l}x\left(3l^2 - 5x^2\right),\\
V &= M' = -EIw''' = \frac{q_b}{10l}\left(l^2 - 5x^2\right).
\end{aligned}
\right\} \qquad (4.37)
$$

Průběhy těchto veličin jsou spolu s jejich extrémními hodnotami znázorněny na obr. 4.21.

Příklad 4.18

Integrací diferenciální rovnice ohybové čáry určete charakteristické deformační a silové veličiny oboustranně vetknutého nosníku stálého průřezu, zatíženého rovnoměrně po celé délce (obr. 4.22). Úlohu řešte samostatně.



Obr. 4.22

Výsledky:

Rovnice ohybové čáry a maximální průhyb (ve středu rozpětí) jsou:

$$w = \frac{q}{24EI}x^2(l-x)^2, \quad w_{\max} = w_s = \frac{ql^4}{384EI},$$

ohybový moment v podporách a ve středu rozpětí:

$$M_a = M_b = -\frac{1}{12}ql^2, \quad M_s = \frac{1}{24}ql^2.$$

Integrace rovnice (4.5), resp. (k) představuje **deformační** variantu postupu, neboť nejprve odvozujeme deformace (v tomto případě rovnici ohybové čáry) a z nich pak zpětně určujeme silové veličiny (M, V). Tento přístup v současné době ve stavební mechanice převažuje (např. při řešení desek, v metodě konečných prvků atp.) především proto, že jednoznačný popis přetvoření konstrukce (obecně: tělesa) je jednodušší. Z neho pak, jsou-li známy fyzikální vztahy, lze všechny silové veličiny, resp. stav napjatosti, jednoznačně odvodit.

● Řešení silovou metodou - superpozicí

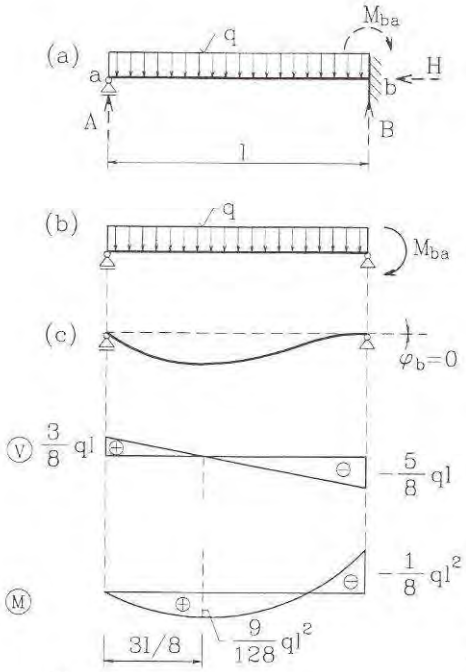
Při řešení staticky neurčitých nosníků **silovou** metodou postupujeme tak, že odebereme tolik vnějších nebo vnitřních vazeb, kolik činí stupeň statické neurčitosti soustavy. Na takto vzniklou staticky určitou tzv. základní soustavu přikládáme pak - kromě daného vnějšího zatížení - síly, resp. momenty, nahrazující působení uvolněných vazeb. Jejich velikosti představují neznámé, které zjistíme z **deformačních podmínek** předepisujících přetvoření v souladu s odebranými vazbami. Při tomto postupu jsou statické rovnice (podmínky rovnováhy) plněny již tím, že při odvození všech dílčích stavů, jež pak superponujeme, respektujeme statickou rovnováhu. Roli **fyzikálních** rovnic zde přebírají vztahy mezi vnějšími silovými účinky a deformacemi, jak byly v předešlém odvozeny pro jednotlivé typy nosníků a zatížení.

Příklad 4.19

Určete průběh ohybových momentů a posouvajících sil na jednostranně vetknutém nosníku stálého průřezu, zatíženém plně rovnoměrně - obr. 4.23.

Řešení:

Pro čtyři neznámé složky reakcí (A, B, H, M_{ba}) máme k dispozici jen tři podmínky rovnováhy, úloha je tedy 1x staticky neurčitá. Základní staticky určitou soustavu vytvoříme např. tak, že odebereme vazbu proti pootočení v pravé podpoře a moment M_{ba} zavedeme jako vnější zatížení. Dostáváme tak prostý nosník, zatížený rovnoměrným zatížením a koncovým momentem, jehož velikost získáme z deformační podmínky, že v pravé podpoře je pootočení nulové:



Obr. 4.23

$$\varphi_b = 0. \qquad \text{(m)}$$

Pootočení získáme superpozicí hodnot vyvozených dílčími účinky (q, M_{ba}) - převezeme je z příkladů 4.2 a 4.5:

$$\varphi_b = (\varphi_b)_q + (\varphi_b)_M =$$

$$= -\frac{ql^3}{24EI} + \frac{M_{ba}l}{3EI} = 0.$$

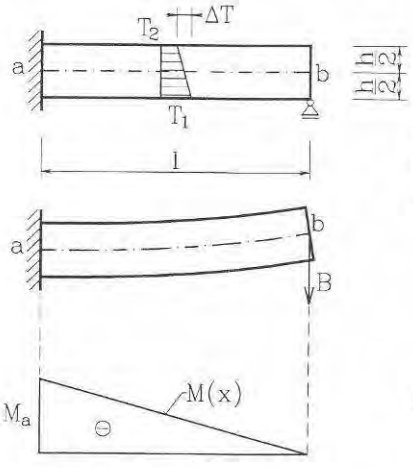
Odtud je koncový moment

$$M_{ba} = \frac{1}{8}ql^2.$$

Známe-li tuto hodnotu, můžeme z podmínek rovnováhy běžným způsobem určit zbývající složky reakcí ($A = 3ql/8$, $B = 5ql/8$, $H = 0$) a zkonstruovat obrazce vnitřních sil - viz obr. 4.23.

Příklad 4.20

Určete ohybové momenty v jednostranně vetknutém nosníku dvojose souměrného stálého průřezu vlivem nerovnoměrné změny teploty - spodní povrch má teplotu vyšší o hodnotu ΔT než horní povrch - obr. 4.24.



Obr. 4.24

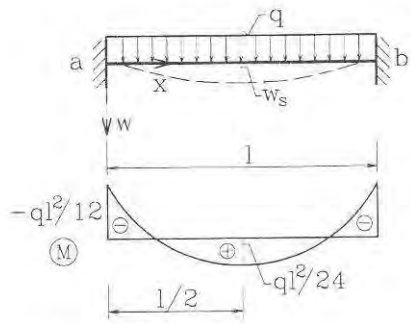
Řešení:

Odebereme-li vazbu v pravé podpoře, získáme jako základní staticky určitý nosník konzolu. Působení podpory nahradíme reakcí B, jejíž velikost určíme z deformační podmínky nulového průhybu na pravém konci. Průhyb od teploty je dán druhou rovnicí (4.17), od účinku síly první rovnicí (4.14), takže superpozicí

$$w_b = (w_b)_{\Delta T} + (w_b)_B = -\frac{\alpha_T \Delta T l^2}{2h} + \frac{Bl^3}{3EI} = 0,$$

odkud reakce B a ohybový moment ve vetknutí jsou

$$B = \frac{3\alpha_T \Delta TEI}{2hl}, \qquad M_b = -Bl = \frac{3\alpha_T \Delta TEI}{2h}.$$



Obr. 4.22

Výsledky:

Rovnice ohybové čáry a maximální průhyb (ve středu rozpětí) jsou:

$$w = \frac{q}{24EI}x^2(l-x)^2, \quad w_{\max} = w_s = \frac{ql^4}{384EI},$$

ohybový moment v podporách a ve středu rozpětí:

$$M_a = M_b = -\frac{1}{12}ql^2, \quad M_s = \frac{1}{24}ql^2.$$

Integrace rovnice (4.5), resp. (k) představuje **deformační** variantu postupu, neboť nejprve odvozujeme deformace (v tomto případě rovnici ohybové čáry) a z nich pak zpětně určujeme silové veličiny (M, V). Tento přístup v současné době ve stavební mechanice převažuje (např. při řešení desek, v metodě konečných prvků atp.) především proto, že jednoznačný popis přetvoření konstrukce (obecně: tělesa) je jednodušší. Z neho pak, jsou-li známy fyzikální vztahy, lze všechny silové veličiny, resp. stav napjatosti, jednoznačně odvodit.

● Řešení silovou metodou - superpozicí

Při řešení staticky neurčitých nosníků **silovou** metodou postupujeme tak, že odebereme tolik vnějších nebo vnitřních vazeb, kolik činí stupeň statické neurčitosti soustavy. Na takto vzniklou staticky určitou tzv. základní soustavu přikládáme pak - kromě daného vnějšího zatížení - síly, resp. momenty, nahrazující působení uvolněných vazeb. Jejich velikosti představují neznámé, které zjistíme z **deformačních podmínek** předepisujících přetvoření v souladu s odebranými vazbami. Při tomto postupu jsou statické rovnice (podmínky rovnováhy) plněny již tím, že při odvození všech dílčích stavů, jež pak superponujeme, respektujeme statickou rovnováhu. Roli **fyzikálních** rovnic zde přebírají vztahy mezi vnějšími silovými účinky a deformacemi, jak byly v předešlém odvozeny pro jednotlivé typy nosníků a zatížení.

Příklad 4.19

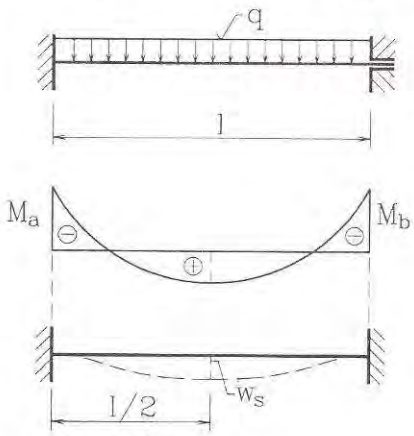
Určete průběh ohybových momentů a posouvajících sil na jednostranně vetknutém nosníku stálého průřezu, zatíženém plně rovnoměrně - obr. 4.23.

Řešení:

Pro čtyři neznámé složky reakcí (A, B, H, M_{ba}) máme k dispozici jen tři podmínky rovnováhy, úloha je tedy 1x staticky neurčitá. Základní staticky určitou soustavu vytvoříme např. tak, že odebereme vazbu proti pootočení v pravé podpoře a moment M_{ba} zavedeme jako vnější zatížení. Dostáváme tak prostý nosník, zatížený rovnoměrným zatížením a koncovým momentem, jehož velikost získáme z deformační podmínky, že v pravé podpoře je pootočení nulové:

Příklad 4.21

Určete ohybové momenty a průhyb ve středu rozpětí oboustranně vetknutého nosníku stálého průřezu zatíženého plným rovnoměrným zatížením. Úlohu řešte samostatně.



Obr. 4.25

Návod:

Za základní staticky určitý nosník volte prostě podepřený nosník a užijte výsledků z příkladu 4.2 a 4.6.

Výsledky:

$$M_a = M_b = -\frac{1}{12}ql^2,$$

$$w_s = \frac{ql^4}{384EI},$$

srov. příklad 4.18.

4.7 Vliv smyku na přetvoření nosníků

Při určování přetvoření nosníků jsme dosud nebrali zřetel na **vliv smyku**, tj. posouvajících sil. Abychom získali určitou představu o chybě, jíž se tím dopouštíme, odvodíme vztahy pro průhyb vyvolaný smykem pro některé typické případy nosníků (stálého průřezu). Omezíme se přitom na staticky určité podepření.

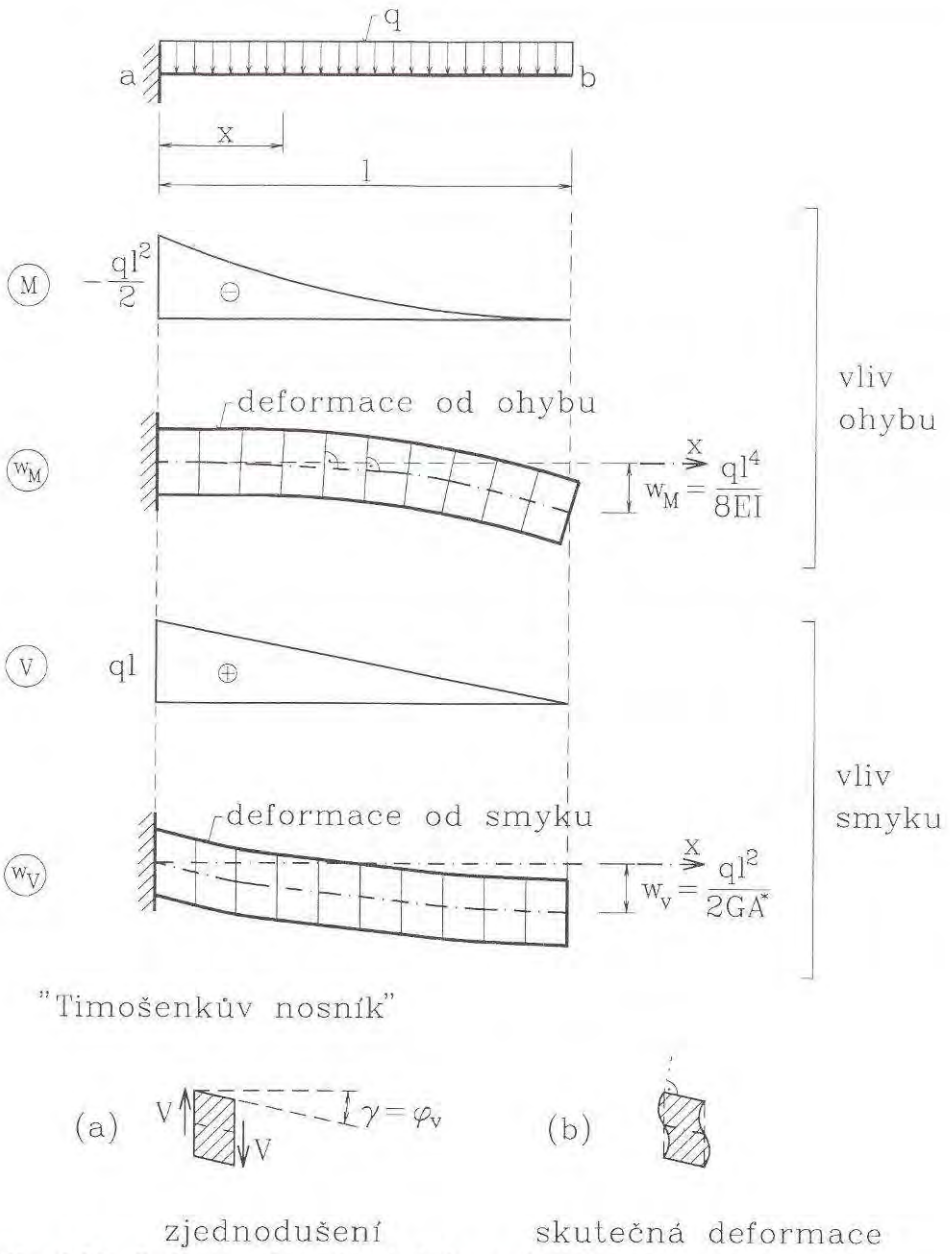
Rozebereme případ **konzoly**, zatížené plně rovnoměrně - obr. 4.26. Deformace vyvozené ohybovými momenty (pro rozlišení označené indexem M: w_M, φ_M) jsou dány dříve odvozenými vztahy - viz příklad 4.6; průhyb volného konce např. je tedy $w_M = ql^4/(8EI)$.

Pro deformace vyvolané **posouvajícími silami** (w_V, φ_V) přijmeme přibližný předpoklad, že jednotlivé průřezy zůstanou rovinné a přetvoří se rovnoměrným smykem - srov. obrazec w_V na obr. 4.26. Takový model je někdy označován jako Timošenkův nosník; neplatí u něj Bernoulliův předpoklad o kolmosti průřezu k deformované ose.

Předpoklad o rovnoměrném rozložení smykového napětí po průřezu ohýbaného nosníku není ovšem korektní - je v rozporu s Grashofovým vzorcem (3.12). Ve skutečnosti dojde ke zborcení (deplanaci) průřezu, jak je naznačeno na obr. 4.26b. Tento nesoulad lze eliminovat tím, že místo skutečné plochy průřezu zavedeme redukovanou plochu A^*, jejíž velikost se odvozuje z energetických úvah (viz např. [5]). Pro obdélníkový průřez $A^* = 0{,}833A$, u I průřezu $A^* \approx A_w$ (plocha stojiny), u kruhu $A^* = 0{,}844A$ a u mezikruží $A^* = 0{,}5A$.

S touto korekcí můžeme vyjádřit pootočení vyvozené smykem φ_V jako poměrné posunutí γ ($= \gamma_{xz}$) z Hookova zákona ve smyku (1.11):

$$\varphi_V = \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{V_z}{GA^*}.$$



Obr. 4.26 *Deformace konzoly od ohybu a od smyku*

Protože i nadále platí rovnice (4.1), můžeme diferenciální rovnici pro průhyby vyvolané smykem zapsat ve tvaru

$$w_v' = \frac{V_z}{GA^*}. \tag{4.38}$$

Je to lineární diferenciální rovnice 1. řádu, při jejíž integraci vyvstane jedna integrační konstanta; tu určíme z podmínky nulového průhybu v místě podepření.

Pro uvažovaný případ rovnoměrně zatížené konzoly je:

$$V = V_z = q(l-x),$$
$$w_V' = \frac{\mathrm{d}w_v}{\mathrm{d}x} = \frac{V_z}{GA^*} = \frac{q}{GA^*}(l-x), \qquad \text{(n)}$$
$$w_V = \frac{q}{GA^*}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1^*.$$

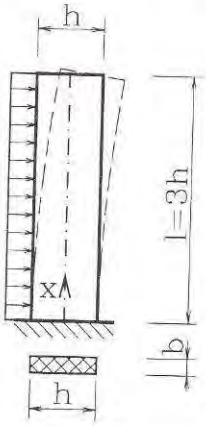
Okrajová podmínka nulového průhybu ve vetknutí:

$$w_V(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1^* = 0.$$

V rovnici (n) tedy konstanta C^* odpadá. Superpozicí průhybů vyvozených ohybovými momenty (viz příklad 4.6) a smykem tedy dostáváme rovnici ohybové čáry a maximální průhyb na volném konci

$$w(x) = w_M(x) + w_V(x) = \frac{q}{24EI}x^2(6l^2 - 4lx + x^2) + \frac{q}{2GA^*}x(2l-x),$$
$$w_b = w_{Mb} + w_{Vb} = \frac{ql^4}{8EI} + \frac{ql^2}{2GA^*}. \qquad (4.39)$$

Příklad 4.22



Obr. 4.27

Železobetonová zavětrovací stěna zatížená rovnoměrně má poměr své délky (výšky objektu) k výšce průřezu $l : h = 3$. Určete poměrný příspěvek smyku k průhybu volného konce - obr. 4.27.

Řešení:

Poměr mezi oběma složkami

$$\eta = \frac{w_{Vb}}{w_{Mb}} = 4\frac{E}{G}\frac{I}{A^* l^2}.$$

Uvažujeme-li pro beton Poissonův součinitel $\upsilon = 0{,}2$, je podle rovnice (1.12) poměr $E/G = 2{,}4$. Pak

$$\eta = 4 \cdot 2{,}4 \frac{\frac{1}{12}bh^3}{0{,},833bhl^2} = 0{,}96\left(\frac{h}{l}\right)^2 =$$
$$= 0{,}96\left(\frac{h}{3h}\right)^2 = 0{,}107,$$

vlivem započtení smyku se tedy zvětší vypočtený průhyb cca o 10,7%. U výztužné stěny s otvory nebo tvaru I je vliv smyku na deformace ještě výraznější.

Podobným způsobem jako pro konzolu zatíženou rovnoměrně se odvodí další případy - viz tab. 4.4. Pro přibližný odhad vlivu smyku uvažujeme plně **rovnoměrně** zatížený **prostý nosník**, jehož průřez má tvar I s geometrickými parametry splňujícími relaci $I = I_y = 0{,}4\, A_w h^2 = 0{,}4\, A^* h^2$. Pak

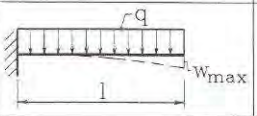
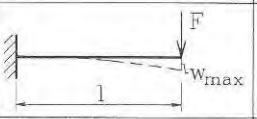
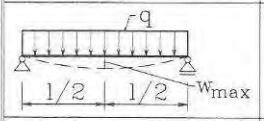
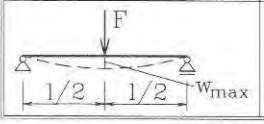
$$\eta = \frac{w_V}{w_M} = 9{,}6 \frac{E}{G} \frac{I}{A^* l^2} = 9{,}6 \frac{E}{G} \frac{0{,}4 A^* h^2}{A^* l^2} = 3{,}84 \frac{E}{G} \left(\frac{h}{l} \right)^2 . \qquad (4.40)$$

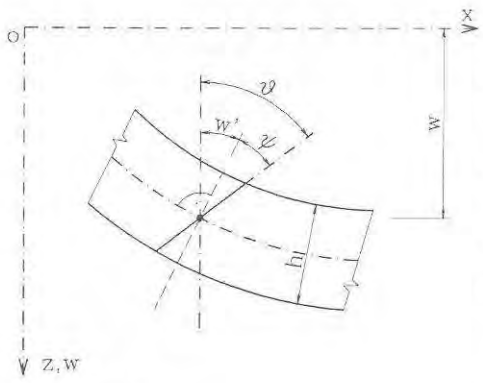
Pro **ocel** $E/G \cong 2{,}6$, takže $\eta \approx 10\ (h/l)^2$, tj. např.. pro $l = 10h$ činí přírůstek 10%, při $l = 20h$ je 2,5% atd. Čím je nosník štíhlejší, tím je vliv smyku menší a pří $l > 20h$ jej (u plnostěnných nosníků) můžeme prakticky zanedbat. U **dřeva**, které není izotropním materiálem, se poměr E/G neřídí vztahem (1.12) a vliv smyku je výraznější. Zavedeme-li $E_x = 10000$ MPa a $G_x = 600$ MPa, pak pro zmíněný tvar I-průřezu je z rovnice (4.39)

$$\eta = 3{,}84 \frac{10000}{600} \left(\frac{h}{l} \right)^2 = 64 \left(\frac{h}{l} \right)^2$$

tedy 6,4x vyšší hodnota. Vliv smyku na průhyb záleží ovšem na tvaru průřezu (u obdélníkového průřezu je 4x menší než u zvoleného typu I profilu). U dřevěných konstrukcí s ním však zpravidla počítáme.

Tabulka 4.4 *Průhyby od ohybu a od smyku*

Podepření a zatížení nosníku	Max. průhyb w_{max}		Poměr $\eta = \frac{w_V}{w_M}$
	od ohybu - w_M	od smyku - w_V	
	$\frac{ql^4}{8EI}$	$\frac{ql^2}{2GA^*}$	$4 \frac{E}{G} \frac{I}{A^* l^2}$
	$\frac{Fl^3}{3EI}$	$\frac{Fl}{GA^*}$	$3 \frac{E}{G} \frac{I}{A^* l^2}$
	$\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$	$\frac{ql^2}{8GA^*}$	$9{,}6 \frac{E}{G} \frac{I}{A^* l^2}$
	$\frac{Fl^3}{48EI}$	$\frac{Fl}{4EI^*}$	$12 \frac{E}{G} \frac{I}{A^* l^2}$



Obr. 4.28

Alternativně k vyloženému postupu je možné jako dvě nezávislé veličiny zavést: průhyb w a pootočení **průřezu** (nikoli ohybové čáry) ϑ - obr. 4.28. Odpovídá to postupu, užívaného u tzv. Mindlinovy teorie desek, jež je analogií Timošenkova postupu u prutů.

Srovnáním s předešlými odvozením shledáme vzájemné souvislosti nově užitých veličin s předchozími:

$$\vartheta = w'_M = \varphi_M, \quad \psi = -\gamma = -w'_V. \tag{4.11}$$

S využitím dříve odvozených diferenciálních rovnic pro w_M (tab. 4.1) a pro w_V - rovnice (4.38) můžeme formulovat základní diferenciální rovnice

$$EI_y \vartheta''' = q_z, \tag{4.42}$$
$$GA^*(w' - \vartheta) + EI_y \vartheta'' = 0.$$

První rovnice je totožná s rovnicí (4.5), druhá vyjadřuje shodu posouvajících sil vyjádřených jednak z rovnice (4.38) a z derivace rovnice (4.4). Při formulování okrajových podmínek platí, že ve vetknutí je $\vartheta = 0$ (avšak ne w'). Ze zjištěných funkcí w, ϑ plynou vnitřní síly:

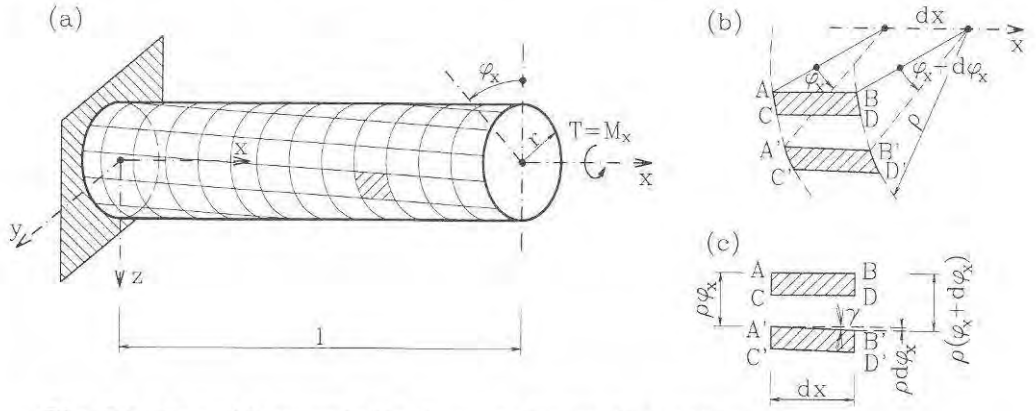
$$M_y = -EI_y \vartheta', \quad V_z = GA^*(w' - \vartheta). \tag{4.43}$$

5 Kroucení

5.1 Kroucení prutů kruhového a mezikruhového průřezu

Budeme uvažovat přímý prut namáhaný **prostým kroucením**, při němž jedinou nenulovou složkou výslednice vnitřních sil je **krouticí** (torzní) **moment** $T = M_x$.

Jednoduché řešení této úlohy lze získat u prutů rotačně symetrického průřezu, tj. průřezu kruhového a mezikruhového.



Obr. 5,1 *Prosté kroucení přímého prutu kruhového průřezu*

Vyjdeme z těchto předpokladů:

a) osa prutu zůstane i po deformaci přímá,

b) průřezy zůstanou rovinnými i po deformaci a vzájemně se nevzdálí,

c) jednotlivé průřezy se otáčejí jako tuhé celky (průvodiče se nezkřiví).

Za uvedených předpokladů nevznikají osové deformace ani normálová napětí: $\sigma_x = 0$. Využijeme nyní posledního předpokladu a budeme sledovat posuvy úsečky $\overline{AB}$ o délce dx ležící na podélném vláknu v obecném místě ve vzdálenosti ρ od osy (tedy uvnitř prutu, nikoli na jeho povrchu) - obr. 5.1b. Pootočí-li se průřez x o úhel φ_x (bod A se po kružnici posune do polohy A'), a průřez $(x + dx)$ obecně o úhel $\varphi_x + d\varphi_x$ (posun bodu B do polohy B'), dojde ke zkosení původně pravoúhlého prvku $ABDC$, jak je to patrné na obr. 5.1c v pohledu na rozvinutý plášť válcové plochy o poloměru ρ. Velikost zkosení je

$$\gamma = \frac{\rho d\varphi_x}{dx} = \rho\theta\,, \tag{a}$$

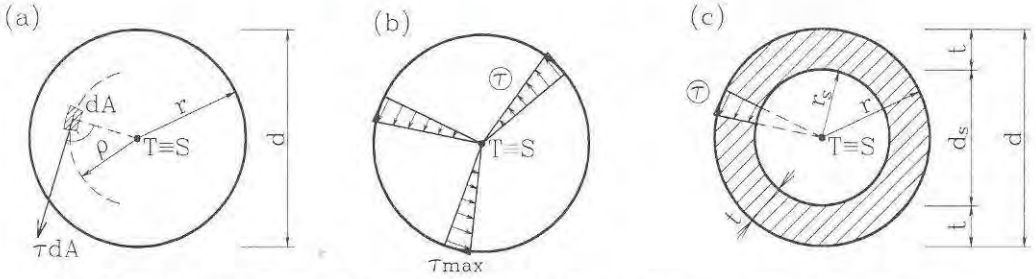
kde

$$\theta = \frac{d\varphi_x}{dx} \tag{5.1}$$

je tzv. poměrný úhel zkroucení [m^{-1}]. Uplatníme-li Hookův zákon ve smyku, je smykové napětí

$$\tau = G\gamma = G\theta\rho. \tag{b}$$

Směr tohoto napětí odpovídá rovině zkosení, tj. je kolmý k průvodiči.



Obr. 5.2 *Smyková napětí při kroucení v kruhovém a mezikruhovém průřezu*

Ke stanovení poměrného úhlu zkroucení využijeme podmínku statické ekvivalence a vztah (b):

$$T = M_x = \int_A \rho\tau dA = \int_A \rho(G\theta\rho)dA = G\theta\int_A \rho^2 dA = G\theta I_p, \tag{c}$$

kde I_p je polární moment setrvačnosti ke středu kruhu. Z rovnice (c) lze pomocí něho vyjádřit poměrný úhel zkroucení θ; pro větší obecnost jej formulujeme pomocí tzv. **momentu tuhosti v kroucení** I_t [m^4]:

$$\theta = \frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{T}{GI_t}. \tag{5.2}$$

U kruhového průřezu je tedy tento moment tuhosti shodný s polárním momentem

$$I_t = I_p = \frac{\pi}{2}r^4 = \frac{\pi}{32}d^4. \tag{5.3}$$

Dosazením rovnice (5.2) s přihlédnutím k (5.3) do vztahu (b) je smykové napětí v obecném místě

$$\tau = \frac{T}{I_p}\rho. \tag{5.4}$$

Smykové napětí je tedy úměrné vzdálenosti od středu kruhu (těžiště průřezu) a jeho maximální hodnota na okraji je

$$\tau_{max} = \frac{T}{I_p}r \tag{5.5}$$

- srov. obr. 5.2b.

Odvozené vztahy platí rovněž pro prut **mezikruhového průřezu** s tím, že jeho polární moment setrvačnosti a tedy i moment tuhosti v kroucení je

$$I_t = I_p = \frac{\pi}{32}\left(d^4 - d_s^4\right). \tag{5.6}$$

Deformace krouceného prutu, tj. pootočení φ_x průřezu v obecném místě prutu získáme integrací rovnice (5.2), která je **diferenciální rovnicí** (1.řádu) **kroucení** přímého prutu:

$$\varphi_x(x) = \int \frac{T}{GI_t}\,\mathrm{d}x + C. \tag{5.7}$$

Integrační konstantu určíme z podmínky, že v místě uložení je pootočení rovno nule. Pokud je prut uložen v počátku soustavy souřadnic $x = 0$, je tato konstanta rovna nule ($C = 0$). Pro základní případ prutu stálého průřezu (I_t = konst.) zatíženého koncovým zkrucujícím momentem T (obr. 5.1a) je pak

$$\varphi_x(x) = \int \frac{T}{GI_t}\,\mathrm{d}x = \frac{T}{GI_t}\int x\,\mathrm{d}x = \frac{T}{GI_t}x. \tag{5.8}$$

Průběh pootočení průřezů po délce prutu je tedy v tomto případě lineární: původně přímá podélná vlákna se deformují do tvaru šroubovice (na rozvinutém plášti jsou to skloněné přímky) - obr. 5.1a.

Vzájemné pootočení koncových průřezů (úhel zkoucení) získáme dosazením $x = l$:

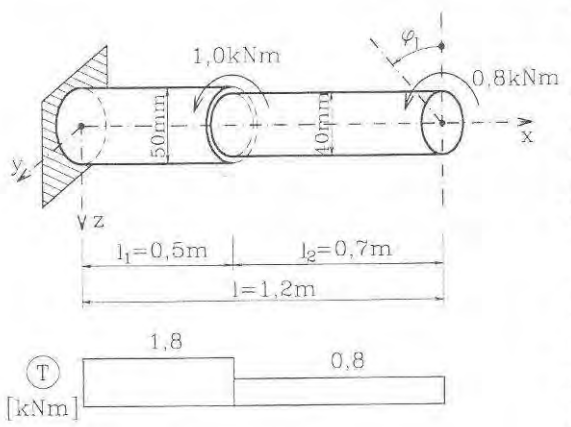
$$\varphi_l = \frac{Tl}{GI_t}. \tag{5.9}$$

Tento vztah můžeme pokládat za formulaci Hookova zákona pro základní případ kroucení prutu. Sestává-li prut z několika úseků (i = 1, 2, ..., n), ve kterých je konstantní krouticí moment T_i, torzní moment tuhosti I_{ti} i modul pružnosti G_i, pak vzájemné pootočení konců prutu je

$$\varphi_l = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i l_i}{G_i I_{ti}}, \tag{5.10}$$

kde l_i je délka příslušného úseku. Pokud má prut plynulou změnu průřezu $I_t(x)$ nebo krouticí momenty $T(x)$ nejsou po úsecích konstantní, vyjdeme při určení deformací z obecného vztahu (5.7).

Příklad 5.1



Obr. 5.3

Ocelový prut kruhového průřezu po úsecích konstantního (d_1 = 50 mm, d_2 = 40 mm) je zatížen a podepřen podle obr. 5.3. Určete maximální smykové napětí v jednotlivých úsecích a celkový úhel zkroucení (G = 81 000 MPa).

Řešení:

Krouticí momenty v jednotlivých úsecích jsou T_1 = 1,8 kNm, T_2 = 0,8 kNm. Polární momenty setrvačnosti, které jsou současně momenty tuhosti, vypočteme podle (5.3)

$$I_{t1} = I_{p1} = \frac{\pi}{32} \cdot d_1^4 = \frac{\pi}{32} \cdot 50^4 = 613{,}6 \cdot 10^3\,\text{mm}^4 = 613{,}6 \cdot 10^{-9}\,\text{m}^4,$$

$$I_{t2} = I_{p2} = \frac{\pi}{32} \cdot 40^4 = 251{,}3 \cdot 10^3\,\text{mm}^4 = 251{,}3 \cdot 10^{-9}\,\text{m}^4.$$

Maximální smyková napětí v levém a pravém úseku jsou

$$\tau_{\max,1} = \frac{T_1}{I_{p1}} \cdot r_1 = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-3}}{613{,}5 \cdot 10^{-9}} \cdot 0{,}025 = 73{,}3\text{MPa},$$

$$\tau_{\max,2} = \frac{T_2}{I_{p2}} \cdot r_2 = \frac{0{,}8 \cdot 10^{-3}}{251{,}3 \cdot 10^{-9}} \cdot 0{,}020 = 63{,}7\text{MPa}.$$

Úhel zkroucení podle rovnice (5.10)

$$\varphi_l = \frac{T_1 l_1}{G I_{t1}} + \frac{T_2 l_2}{G I_{t2}} = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}5}{81000 \cdot 613{,}6 \cdot 10^{-9}} + \frac{0{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}7}{81\,000 \cdot 251{,}3 \cdot 10^{-9}} =$$

$$= 0{,}0181 + 0{,}0275 = 0{,}0456\ \text{rad}.$$

Příklad 5.2

Vypočtěte tytéž veličiny jako v předešlém příkladu za předpokladu, že levý úsek tvoří trouba TR ∅57x8 mm (d = 57 mm, t = 8 mm). Úlohu řešte samostatně.

Výsledky:

$$\tau_{\max,1} = 67{,}6\ \text{MPa}, \quad \varphi_l = 0{,}0421\ \text{rad}.$$

5.2 Kroucení prutů obecného průřezu

Řešení odvozené pro kroucení prutu kruhového (a mezikruhového) průřezu neplatí u prutů s obecným průřezem. Neplatí předpoklad o zachování rovinnosti průřezů - dochází k jejich **deplanaci** (porušení rovinnosti, prohnutí). Pokud není deplanaci nijak bráněno (např. vnějšími vazbami apod.) a může volně proběhnout, jde o tzv. **volné kroucení**, při němž nevznikají normálová napětí v průřezu ($\sigma_x = 0$). V opačném případě hovoříme o **vázaném kroucení**, které je doprovázeno vznikem normálových napětí. V dalším výkladu budeme předpokládat volné kroucení.

U prutů s průřezem obecného tvaru vyvozuje vnější zatížení krouticí účinky k ose, jež je spojnicí **středů smyku** (viz odst. 3.4), které nemusí být shodné s těžištěm průřezu. U masivních prutů obvykle není tento rozdíl významný a proto jej zanedbáváme, ale u tenkostěnných prutů, zejména otevřeného průřezu, jej musí respektovat.

Obecné řešení volného kroucení přímého prutu stálého průřezu vychází ze dvou základních předpokladů:

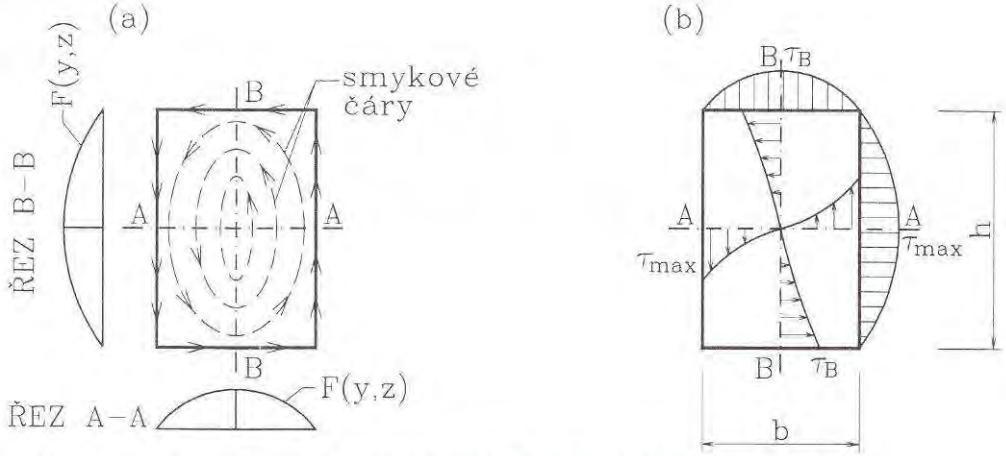
a) příčný tvar průřezů se nemění, každý průřez se pootáčí kolem osy prutu jako tuhý celek,

b) normálová napětí v průřezu jsou nulová ($\sigma_x = 0$), vzniká však deplanace, jež je shodná ve všech průřezech.

Matematické odvození všech potřebných vztahů vychází z rovnic pro prostorovou napjatost tělesa a je uvedeno v kap. 9. Vede ke stanovení funkce napětí $F(y,z)$, tzv. Prandtlovy, která má na okraji průřezu nulovou hodnotu, a z níž plynou složky napětí podle vztahů

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z}, \qquad \tau_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y}. \tag{5.11}$$

Funkce napětí tedy představuje určitou plochu, která se klene nad průřezem (Prandtlův vrchlík), svým sklonem v určitém místě udává velikost smykových napětí v kolmém směru



Obr. 5.4 *Smyková napětí v prutu obdélníkového průřezu při kroucení*

a její vrstavnice jsou tzv. **smykové čáry**, podél nichž (ve směru jejich tečen) smyková napětí působí, jak plyne z rovnic (5.11). Lze dokázat, že výsledná smyková síla na jednotku délky (tzv. smykový tok) mezi dvěma smykovými čarami je konstantní. Obrys průřezu představuje rovněž smykovou čáru. Na obr. 5.4a jsou znázorněny smykové čáry u obdélníkového průřezu.

Tvar plochy zobrazující funkci napětí je možné získat též experimentálně na základě tzv. **membránové analogie**, krerá spočívá ve shodě diferenciálních rovnic volného kroucení a průhybu tenké blány (membrány), upevněné podél okraje geometricky shodného s obrysem průřezu krouceného prutu a zatížené rovnoměrným přetlakem. Tato analogie poskytuje názornou představu o tvaru funkce napětí $F(y, z)$, avšak v současné době se k řešení úlohy o kroucení prutu s obecným průřezem používá převážně **numerických metod** řešení parciálních diferenciálních rovnic - např. metody sítí, nebo metody konečných prvků (MKP).

Výsledky podrobnější analýzy pak obvykle vedou ke stanovení momentu tuhosti v kroucení I_t a tzv. průřezového modulu v kroucení W_t. Moment tuhosti I_t se získá z funkce napětí $F(x, z)$ pomocí vztahu (viz. kap. 9)

$$I_t = \frac{2}{G\theta}\int_A F(y,z)\mathrm{d}A \quad , \tag{5,12}$$

kde integrujeme po ploše průřezu (I_t je tedy úměrný objemu Prandtlova vrchlíku). Podrobněji je o tom pojednáno v odst. 9.6.

Pomocí **průřezového modulu v kroucení** W_t [m^3, mm^3] určujeme extrémní (v absolutní hodnotě maximální) smykové napětí v průřezu:

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_t} \tag{5.13}$$

Je to obdoba průřezového modulu v ohybu.

Tak pro **obdélníkový průřez** o stranách b, h (přitom $b < h$) platí

$$I_t = \alpha b^3 h, \tag{5.14}$$

$$W_t = \beta b^2 h, \tag{5.15}$$

kde α a β jsou bezrozměrné součinitele, které byly odvozeny řešením obecné úlohy (odst. 9.6) pro obdélník - srov. [2], [5]. Číselně jsou pro některé poměry h/b uvedeny v tab. 5.1.

Tabulka 5.1 *Součinitele pro výpočet kroucení prutů obdélníkového průřezu*

h/b	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
α	0,1406	0,154	0,166	0,177	0,187	0,196	0,204	0,211
β	0,208	0,214	0,219	0,223	0,227	0,231	0,234	0,237

h/b	1,8	1,9	2,0	2,5	3	5	10	∞
α	0,217	0,223	0,229	0,249	0,263	0,291	0,312	0,333
β	0,240	0,243	0,246	0,258	0,267	0,292	0,312	0,333

Maximální smyková napětí vznikají ve středech delších stran obdélníku (body *A* na obr. 5.4b), v jeho vrcholech jsou rovna nule. Moment tuhosti I_t obdélníkového průřezu lze aproximovat vzorcem

$$I_t \approx \frac{1}{3}\left[1-0{,}63\frac{b}{h}\left(1-\frac{b^4}{12h^4}\right)\right]b^3h. \tag{5.16}$$

Při $h > 1{,}5b$ se nedopustíme významné chyby, uvažujeme-li vnitřní závorku rovnu 1.

Pro různé geometrické tvary průřezů jsou souhrnně uvedeny vzorce pro I_t a W_t v tab. 5.3.

Příklad 5.3

Určete moment tuhosti v kroucení I_t, průřezový modul v kroucení W_t a maximální smykové napětí τ_{max} v železobetonovém průvlaku obdélníkového průřezu 400x600 mm, v němž působí krouticí moment $T = 40$ kNm.

Řešení:

Poměr $h/b = 0{,}6/0{,}4 = 1{,}5$; z tabulky 5.1 $\alpha = 0{,}196$, $\beta = 0{,}231$. Je tedy

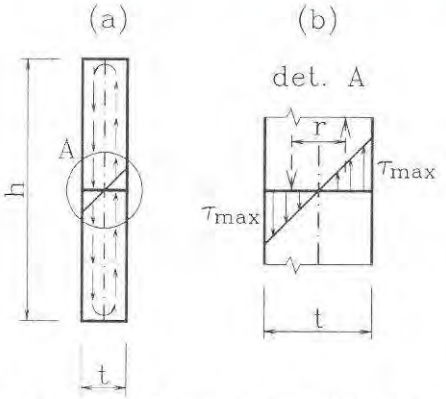
$$I_t = \alpha b^3 h = 0{,}196 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6 = 7{,}53 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^4,$$

$$W_t = \beta b^2 h = 0{,}231 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 22{,}18 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3,$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_t} = \frac{40 \cdot 10^{-3}}{22{,}18 \cdot 10^{-3}} = 1{,}80\ \mathrm{MPa}.$$

5.3 Kroucení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu

Tenkostěnné pruty, jak byly definovány v odst. 3.4, sestávají z dílčích stěn, obvykle obdélníkového průřezu, u nichž tloušťka je podstatně menší než jejich šířka (výška): $t << h$.



Obr. 5.5 *Kroucená protáhlá stěna*

U prutů otevřeného průřezu vycházíme z představy, že příčný řez sestává z velmi protáhlých obdélníkových částí, pro které platí podle tab. 5.1 při označení podle obr. 5.5 ($b/h = t/h = \infty$)

$$I_t = \frac{1}{3} t^3 h, \qquad W_t = \frac{1}{3} t^2 h = \frac{I_t}{t}. \tag{5.17}$$

Platí to i v případu zakřivené střednice - obr. 5.6c, výškou h pak rozumíme délku rozvinuté střednice.

Moment **tuhosti v kroucení** průřezu složeného z více úzkých obdélníku můžeme vyjádřit jako součet

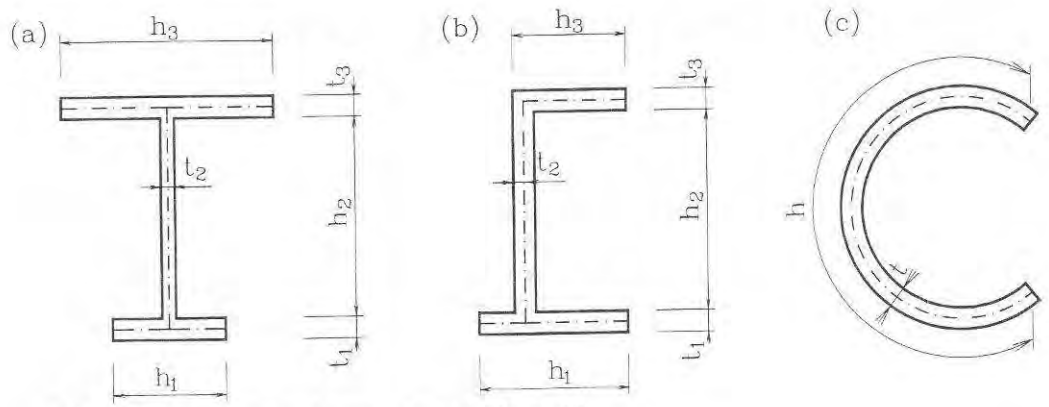
$$I_t = \eta \sum_1^n I_{ti} = \frac{\eta}{3} \sum_1^n t_i^3 h_i \tag{5.18}$$

kde n je počet dílčích obdélníků - obr. 5.6. Součinitel η představuje určitou **korekci**, která u ocelových nosníků vyjadřuje vliv skutečného poměru t/h, zaoblení průřezu v místě styku stojiny a pásnice u válcovaných nosníků atp. Určuje se podle výsledků zkoušek a podle Ruteckého, jak je citován v práci [7] má hodnoty dle tab. 5.2

Tabulka 5.2 *Koeficienty η podle Ruteckého*

Průřez ocelového nosníku	η
Úhelník	1,00
Válcovaný I profil	1,20
Válcovaný U profil	1,12
Svařovaný I - průřez s výstuhami přivařenými k pásům a stěně	1,50
Svařovaný T - průřez s trojúhelníkovými výztuhami	1,40
Nýtovaný I - průřez, pásy z přírub úhelníků a z pásnic	0,50

Jiné hodnoty zjistil dříve Föppl pro válcované nosníky. Pro jednotlivé řady ocelových válcovaných nosníků (I, IE, IPE, U, UE atp.) jsou hodnoty I_t uvedeny ve Statických tabulkách [3], odkud jejich hodnoty přebíráme. Povahu tenkostěnných prutů mají ovšem



Obr. 5.6 *Tenkostěnné pruty otevřeného průřezu*

i železobetonové svislé prvky (pilíře) panelových nebo monolitických objektů, ztužující stěny apod., kde součinitel η klademe roven 1, popř. užijeme rovnice (5.16) pro dílčí stěny.

Největší smykové napětí vznikne v části s největší tloušťkou, takže průřezový modul v kroucení (minimální) je

$$W_t = W_{t,\min} = \frac{I_t}{t_{\max}}. \tag{5.19}$$

Maximální smykové napětí, zjištěné podle rovnice (5.13) pomocí takto definovaného průřezového modulu, neplatí v místech vzájemného styku stěn, kde vznikají koncentrace napětí závislé na detailním uspořádání styku (zaoblením vnitřních koutů se koncentrace snižuje).

Příklad 5.4

Válcovaný nosník profilu I 260 dlouhý 2,0 m, je na volném konci zkrucován dvojicí sil o momentu $T = 0{,}6$ kNm. Určete maximální smykové napětí a pootočení volného konce.

Řešení:

Ve statických tabulkách vyhledáme pro daný průřez moment tuhosti v kroucení $I_t = 336 \cdot 10^3$ mm^4 a tloušťku pásnice $t_f = t_{\max} = 14{,}1$ mm. Podle (5.19) je průřezový modul v kroucení

$$W_t = \frac{I_t}{t_{\max}} = \frac{336 \cdot 10^3}{14{,}1} = 23{,}8 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 23{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 .$$

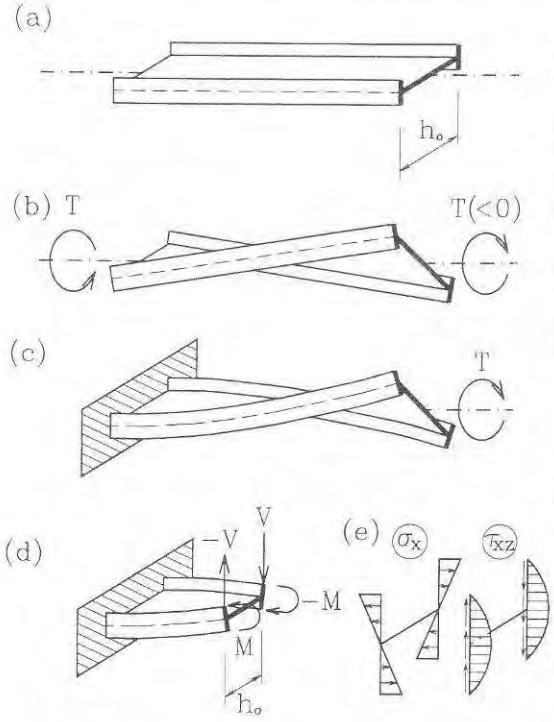
Maximální smykové napětí

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{0{,}6 \cdot 10^{-3}}{23{,}8 \cdot 10^{-6}} = 25{,}2 \text{ MPa},$$

úhel zkroucení je (modul pružnosti oceli ve smyku $G = 81000$ MPa)

$$\varphi_l = \frac{Tl}{GI_t} = \frac{0{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}00}{81000 \cdot 336 \cdot 10^{-9}} = 0{,}0441 \text{ rad}.$$

Uvedený příklad svědčí o **malé tuhosti** tenkostěnných prutů otevřeného průřezu při kroucení: při poměrně nízké hodnotě maximálního smykového napětí dochází k velkému úhlu zkroucení (horní a spodní okraj by se vychýlily o $v = 0{,}0441 \cdot 130 = 5{,}7$ mm). Tento jev má obecnou povahu a rozebereme jej blíže při srovnání s uzavřenými průřezy.



Obr. 5.7 *Volné a vázané kroucení*

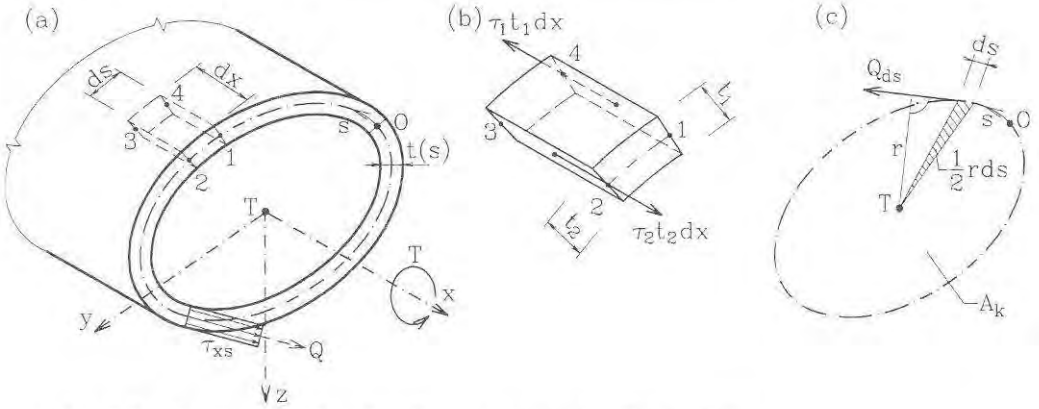
V této souvislosti je třeba uvést, že právě u tenkostěnných prutů otevřeného průřezu nelze často zanedbat **vázané kroucení**, které jsme dosud vyloučili z našich úvah. Na obr. 5.7b jsou znázorněny deformace prutu s průřezem tvaru I při volném kroucení, kdy deplanace může volně proběhnout (pásnice nejsou vzájemně rovnoběžné). Jesliže však zabráníme deplanaci v některém průřezu - např. dokonalým vetknutím jeho levého konce (obr. 5.7c), ohýbají se pásnice a vznikají v nich též normálová napětí σ_x. V průřezech vznikají dílčí ohybové momenty, které tvoří rovnovážnou soustavu, charakterizovanou tzv. **bimomentem** B [kNm^2], který v uvedeném příkladu (obr. 5.7d) sestává ze dvou stejně velkých momentů opačného smyslu, otáčejících kolem téže osy, avšak ve dvou různých vzájemně rovnoběžných rovinách (zde pak je $B = Mh_o$). V pásnicích též ovšem vznikají dílčí posouvající síly V vzájemně opačného smyslu. Pokud by podíl volného kroucení na přenesení krouticího momentu byl zanedbatelný, byl by moment této dvojice sil roven krouticímu momentu, tedy $V = T/h_o$; ve skutečnosti se však oba systémy působení (volné a vázané kroucení) podílejí na přenesení účinku kroucení společně. Od dílčích posouvajících sil vznikají v pásnicích smyková napětí jako v ohýbaném prutu obdélníkového průřezu - rov. (3.13), srov. obr. 3.11. Ta se pak superponují se smykovými napětími od volného kroucení.

Systematický výklad teorie kroucení tenkostěnných prutů není předmětem tohoto učebního textu (viz např. [2], [7] aj.).

5.4 Kroucení tenkostěnných prutů uzavřeného průřezu

V kroucených tenkostěnných prutech uzavřeného průřezu vzniká zcela odlišné rozložení smykových napětí než u průřezů otevřených. Je to patrné již z řešení mezikruhového průřezu (obr. 5.2c), který představuje nejjednodušší případ uzavřeného průřezu.

Je-li tloušťka t relativně velmi malá, můžeme přibližně předpokládat, že smyková napětí jsou konstantní podél celé tloušťky. Jejich směr musí být tečný vůči obrysu, tedy přibližně ve směru tečny ke střednici průřezu (čáře půlící tloušťku).



Obr. 5.8 *Kroucení tenkostěnného prutu uzavřeného průřezu*

Z podmínky rovnováhy lze dokázat, že výslednice Q [kN/m] smykových napětí v libovolném řezu napříč tloušťkou průřezu - tzv. **smykový tok** je konstantní podél celé uzavřené střednicové křivky průřezu. Na střednici zvolíme počátek O, od něhož odečítáme pořadnice s podél střednice. Z prutu vyjmeme element o rozměrech ds (mezi body 1 a 2 na obr. 5.8a,b) a dx. Vzhledem ke vzájemnosti smykových napětí působí na bočních (podélných) ploškách tatáž smyková napětí jako v průřezu prutu $\tau_{sx} = \tau_{xs}$. Pak ze silové podmínky ve směru osy prutu x plyne

$$\tau_2 t_2 \mathrm{d}x - \tau_1 t_1 \mathrm{d}x = 0, \tag{d}$$

neboť na čelních ploškách nepůsobí - v případě volného kroucení - žádná normálová napětí σ_x. Odtud vyplývá konstantní hodnota smykového toku

$$Q = \tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 = \tau_{xs}(s) \cdot t(s) = \text{konst.} \tag{5.20}$$

Vztah mezi krouticím momentem T a smykovým tokem Q získáme integrací momentových účinků po uzavřené střednicové čáře (obr. 5.8c):

$$T = M_x = \oint_s \mathrm{d}M_x = \oint_s Q r \mathrm{d}s = Q \int_s r \mathrm{d}s = Q \cdot 2A_k, \tag{e}$$

kde r je délka kolmice spuštěné z těžiště průřezu k tečně ke střednici a A_k je **plocha ohraničená střednicí průřezu**. Plocha elementárního trojúhelníku o základně ds a výšce

r (na obr. 5.8c zašrafována) je rovna $dA_k = r ds/2$, proto v rovnici (e) figuruje dvojnásobek plochy A_k. Spojením rovnic (e) a (5.20) získáme pro smykové napětí vztah

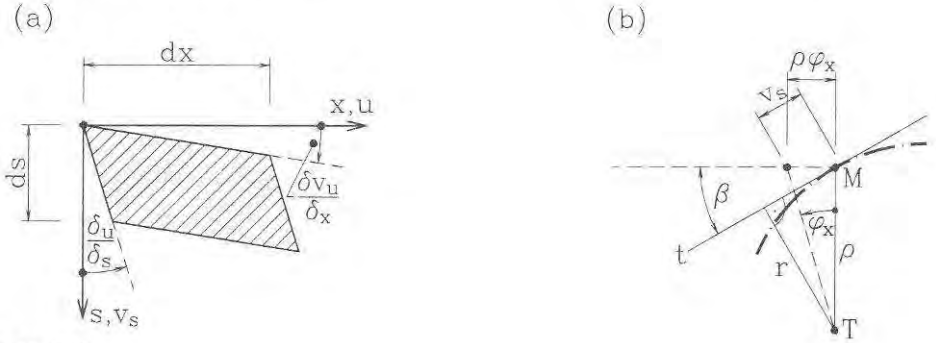
$$\tau_{xs} = \tau_{xs}(s) = \frac{Q}{t(s)} = \frac{T}{2A_k t(s)}. \tag{5.21}$$

Maximální smykové napětí je v **nejužším** místě průřezu, kde $t(s) = t_{\min}$; při vyjádření pomocí vzorce (5.13) je tedy **průřezový modul** v kroucení uzavřeného průřezu

$$W_t = 2A_k t_{\min}. \tag{5.22}$$

Tento vztah bývá označován jako první Bredtův vzorec.

K odvození **tuhosti** prutu uzavřeného průřezu vyjdeme z rozboru posuvů bodů ležících na střednici průřezu. Ve směru osy prutu x je to posuv u (deplanace), ve směru tečny ke střednici průřezu je to posuv v_s, který je vyvolán rotací průřezu jako celku φ_x (připomeňme, že u volného kroucení průřez nezůstává rovinným, ale jeho příčný tvar je zachován - otáčí se kolem osy x jako tuhý celek).



Obr. 5.9

Zkosení pravoúhlého elementu střednicové plochy o rozměrech dx, ds (obr. 5.9) je

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial x} \tag{5.23}$$

jak plyne z rozboru geometrie přetvoření (podrobněji to bude rozvedeno v kap. 9 při odvození geometrických rovnic 9.16). Dosazením z Hookova zákona ve smyku a dosazením za τ_{xs} z odvozeného vztahu (5.21) je

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial x} = \frac{\tau_{xs}}{G} = \frac{T}{2GA_k t}. \tag{f}$$

Posuv v_s a jeho derivaci podle x můžeme vyjádřit prostřednictvím pootočení průřezu φ_x a jeho derivace, tj. poměrného úhlu zkroucení θ (srov. obr. 5.9b)

$$v_s = \rho\varphi_x \cos\beta = r\varphi_x, \qquad \frac{\partial v_s}{\partial x} = r\frac{\mathrm{d}\varphi_x}{\mathrm{d}x} = r\theta \tag{g}$$

kde ρ je délka průvodiče z těžiště k obecnému bodu M na střednici průřezu, svírajícího úhel β s kolmicí k tečně t ke střednici v bodě M (délka kolmice je r, jak jsme ji definovali dříve).

Vyjádříme-li z rovnice (f) $\partial u/\partial s$ s využitím vztahu (g) a integrujeme-li podél obvodu s, obdržíme postupně

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{T}{2GA_k t} - \frac{\partial v_s}{\partial x} = \frac{T}{2GA_k t} - r\theta,$$
$$u(s) = u_0 + \int_0^s \frac{T}{2GA_k t}\,\mathrm{d}s - \int_0^s r\theta\,\mathrm{d}s = u_0 + \frac{T}{2GA_k}\int_0^s \frac{\mathrm{d}s}{t} - \theta 2A_k. \tag{h}$$

Integrací po uzavřeném okruhu musíme dospět k téže hodnotě deplanace v počátku $u(s_0) = u_0$ vzhledem k jednoznačnosti a spojitosti posunů (s_0 je celková délka střednice), takže

$$\frac{T}{2GA_k}\oint_s \frac{\mathrm{d}s}{t} - \theta 2A_k = 0$$

a moment tuhosti I_t, jak byl definován vztahem (5.2), je odtud

$$I_t = \frac{T}{G\theta} = \frac{4A_k^2}{\oint_s \frac{\mathrm{d}s}{t(s)}}. \tag{5.24}$$

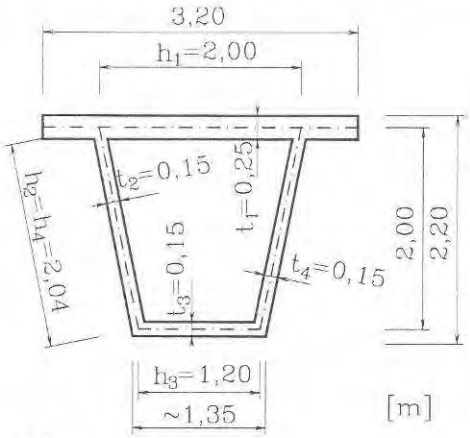
Tento vztah se označuje jako druhý Bredtův vzorec a jím definovaná veličina I_t jako **Bredtova tuhost v kroucení** uzavřeného průřezu. Připomeňme, že A_k je plocha ohraničená střednicí průřezu (nikoli tedy plocha průřezu A) a křivkový integrál se vztahuje na celou (uzavřenou) křivku střednice průřezu. Ve stavební praxi se často setkáváme s profily, u nichž je tloušťka $t(s)$ po úsecích konstantní; pak můžeme integrál v rovnici (5.24) nahradit součtem:

$$I_t = \frac{4A_k^2}{\sum_1^n \frac{h_i}{t_i}} \tag{5.25}$$

kde h_i jsou délky jednotlivých úseků (výšky dílčích obdélníků) a t_i jejich tloušťky. Použití bude ukázáno na příkladu.

Příklad 5.5

Stanovte průřezový modul v kroucení W_t a moment tuhosti I_t průřezu podle obr. 5.10.



Obr. 5.10

Řešení:

Průřez budeme vyšetřovat bez přihlédnutí k přečnívajícím koncům horní desky, neboť ty přispívají jen nepatrně k tuhosti a únosnosti průřezu. Délky os šikmých úseků

$$h_2 = h_4 = \sqrt{2{,}0^2 + 0{,}4^2} = 2{,}04 \text{ m}.$$

Plocha A_k omezená střednicí průřezu je

$$A_k = \frac{1}{2}(1{,}2 + 2{,}0) \cdot 2{,}0 = 3{,}20 \text{ m}^2,$$

průřezový modul v kroucení

$$W_k = 2A_k t_{\min} = 2 \cdot 3{,}2 \cdot 0{,}15 = 0{,}96 \text{ m}^3$$

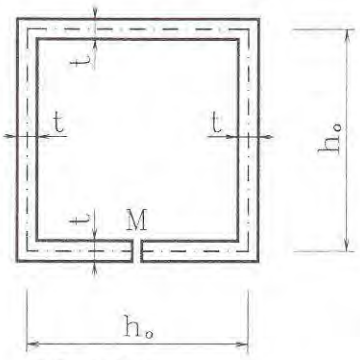
Pro výpočet momentu tuhosti I_t určíme nejprve

$$\oint_s \frac{ds}{t(s)} = \sum_1^4 \frac{h_i}{t_i} = \frac{2{,}0}{0{,}25} + \frac{2{,}04}{0{,}15} + \frac{1{,}2}{0{,}15} + \frac{2{,}04}{0{,}15} = 43{,}2.$$

Moment tuhosti

$$I_t = \frac{4A_k^2}{\sum \frac{h_i}{t_i}} = \frac{4 \cdot 3{,}2^2}{43{,}2} = 0{,}948 \text{ m}^4.$$

Závěrem se vraťme k porovnání statického působení tenkostěnných prutů **otevřeného a uzavřeného průřezu**. Srovnáme tuhost v kroucení I_t uzavřeného průřezu se střednicí ve tvaru čtverce, konstantní tloušťky stěn, s otevřeným průřezem shodného tvaru v kterémkoli místě (např. M) přerušeným řezem - obr. 5.11.



Obr. 5.11

Moment tuhosti I_t uzavřeného průřezu

$$I_{tu} = \frac{4A_k^2}{\sum \frac{h_i}{t_i}} = \frac{4\left(h_0^2\right)^2}{4\frac{h_0}{t}} = th_0^3$$

otevřeného pak (při $\eta = 1$)

$$I_{to} = \frac{1}{3}\sum t_i^3 h_i = \frac{4}{3}t^3 h_0$$

Vzájemný poměr

$$\frac{I_{tu}}{I_{to}} = \frac{th_0^3}{\frac{4}{3}t^3 h_0} = \frac{3}{4}\left(\frac{h_0}{t}\right)^2 \qquad \text{(i)}$$

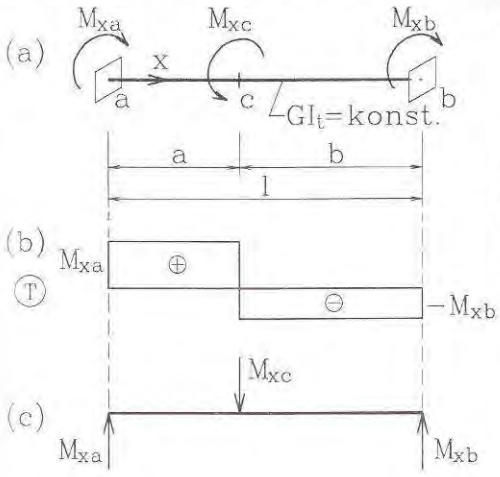
Již při poměru $h_0/t = 10$ je tedy tuhost uzavřeného průřezu 75x větší než otevřeného. Rozdíl mezi tuhostí (i únosností) obou typů tenkostěnných prutů je způsoben zásadně odlišným rozložením napětí: u otevřeného průřezu se vnitřní síly na úseku stěny skládají ve dvojici, jejíž rameno je úměrné **tloušťce** (je to $2t/3$ - obr. 5.5), u uzavřeného průřezu se složí v silovou výslednici, jejíž rameno r k ose prutu (obr. 5.8c) je úměrné **rozměrům průřezu jako celku** (b, h, d apod.).

U prutů uzavřeného průřezu jsme se omezili na případ volného kroucení prutů s jednosvazným průřezem (jednokomůrkové pruty). U **vícesvazných průřezů**, tj. vícekomůrkových prutů, představuje rozdělení smykového toku do jednotlivých větví staticky neurčitou úlohu; blíže se o tom čtenář dozví např. v práci [6].

5.5 Staticky neurčité podepření v kroucení

Staticky neurčité podepření prutu v kroucení vznikne tehdy, je-li zabráněno natočení prutu kolem jeho osy ve více než jednom průřezu, neboť pro výpočet podporových momentů máme k dispozici jen jednu statickou rovnici - momentovou podmínku rovnováhy k ose prutu x. Tu pak musíme doplnit odpovídajícím počtem deformačních podmínek, vyjadřujících zamezení rotace v podporách

Uvažujme prut stálého průřezu, upevněný na obou koncích proti kroucení, zatížený zkrucujícím momentem M_{xc} podle obr. 5.12. V podporách působí momenty M_{xa}, M_{xb}, pro něž můžeme psát momentovou podmínku k ose x



Obr. 5.12

$$-M_{xa} - M_{xb} + M_{xc} = 0. \qquad \text{(j)}$$

Deformační podmínku můžeme sestavit tak, že vzájemné potočení obou koncových průřezů podle rov, (5.11) je rovno nule. Průběh kroutících momentů T je znázorněn na obr. 5.12b. Je tedy

$$\varphi_l = \sum_{i=1}^{2} \frac{T_i l_i}{G_i I_{ti}} = \frac{M_{xa} a}{GI_t} - \frac{M_{xc} b}{GI_t} = 0. \qquad \text{(k)}$$

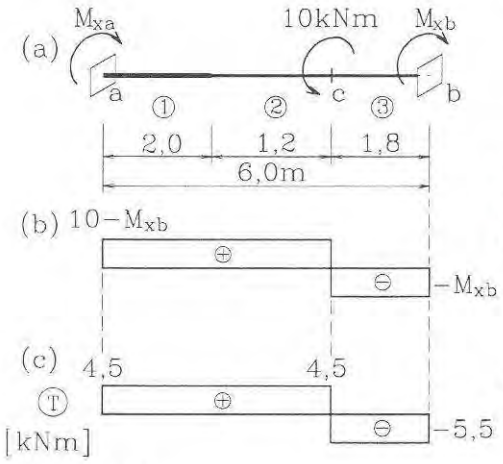
Řešením rovnic (k) a (l) vyjde

$$M_{xa} = M_{xc}\frac{b}{l}, \qquad M_{xb} = M_{xc}\frac{a}{l}. \qquad (5.26)$$

Rovnice (5.26) jsou zcela **analogické** vztahům pro výpočet podporových **reakcí prostého nosníku** zatíženého osamělým břemenem o velikosti M_{xc} - obr. 5.12c. Průběh krouticích momentů je shodný s průběhem posouvajících sil na prostém nosníku. Tato analogie však platí jen pro kroucený prut stálého průřezu.

Příklad 5.6

Prut na obou koncích upevněný proti kroucení má v levé třetině délky dvojnásobný moment tuhosti než ve zbylé části. Určete podporové momenty a průběh krouticích momentů, je-li zatížen podle obr. 5.13a.



Obr. 5.13

Řešení:

Ze statické podmínky je

$$M_{xa} = 10{,}0 - M_{xb}. \qquad (1)$$

Využijeme-li tohoto vztahu, lze průběh krouticích momentů vyjádřit jen v závislosti na M_{xb} - obr. 5.13b. Nosník rozdělíme na tři úseky, podle zadání je

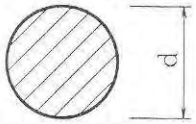
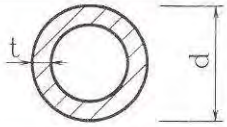
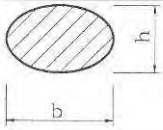
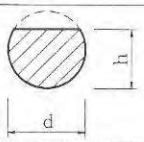
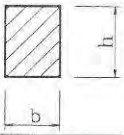
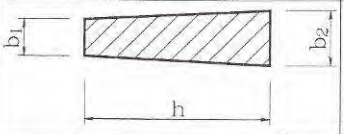
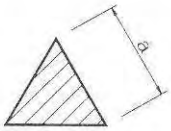
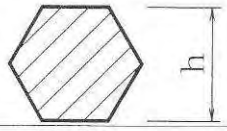
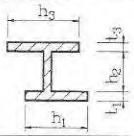
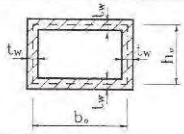
$$I_{t1} = 2I_{t2}, \quad I_{t3} = I_{t2}.$$

Dosazením do rovnice (5.11) a vyjádřením deformační podmínky $\varphi_x(l) = \varphi_l = 0$ dostáváme

$$\varphi_l = \frac{T_1 l_1}{GI_{t1}} + \frac{T_2 l_2}{GI_{t2}} + \frac{T_3 l_3}{GI_{t3}} = \frac{(10{,}0 - M_{xb}) \cdot 2{,}0}{G \cdot 2I_{t2}} + \frac{(10{,}0 - M_{xb}) \cdot 1{,}2}{GI_{t2}} - \frac{M_{xb} \cdot 1{,}8}{GI_{t2}} = 0$$

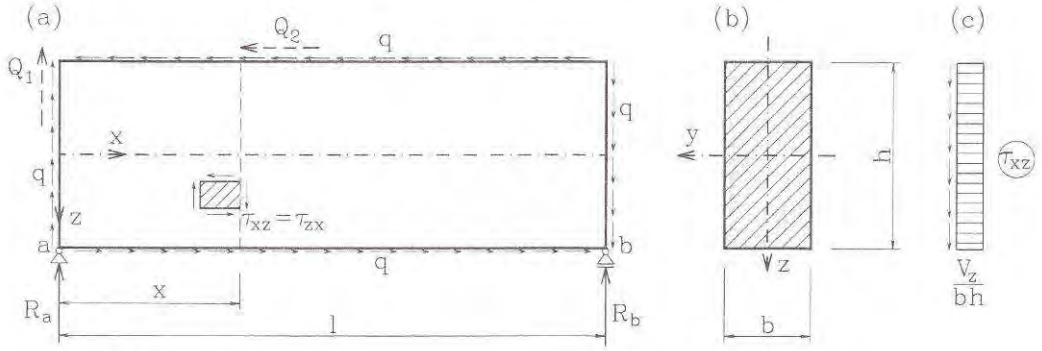
Řešením vyjde M_{xb} = 5,5 kNm, pak M_{xa} = 4,5 kNm, průběh krouticích momentů viz obr. 5.13c.

Tab. 5.3 *Průřezové charakteristiky v kroucení vybraných obrazců*

Tvar průřezu	I_t	W_t
	$I_t = I_p = \frac{\pi}{32} d^4$	$W_t = \frac{\pi}{16} d^3$
	$I_t = I_p = \frac{\pi}{32}\left[d^4 - (d-2t)^4\right]$	$W_t = \frac{2I_t}{d}$
	$I_t = \frac{\pi b^3 h^3}{16(b^2+h^2)}$	$W_t = \frac{\pi b h^2}{16}$ $b > h$
	$I_t \approx \frac{d^4}{16}\left(2{,}6\frac{h}{d} - 1\right)$	$W_t \approx \frac{d^3(2{,}6h-d)}{8(0{,}3h+0{,}7d)}$
	$I_t = \alpha b^3 h$ α - viz tab. 3.1	$W_t = \beta b^2 h$ β - tab. 3.1
	$I_t \approx \frac{1}{12} h(b_1 - b_2)(b_1^2 + b_2^2) -$ $-0{,}105(b_1^4 + b_2^4)$	$W_t \approx \frac{I_t}{b_1}$
	$I_t = \frac{\sqrt{3}}{80} a^4$ (rovnostranný trojúhelník)	$W_t = \frac{a^3}{20}$
	$I_t \approx 0{,}115 h^4$ (pravidelný šestiúhelník)	$W_t \approx 0{,}188 h^3$
	$I_t \approx \frac{1}{3}\sum_1^3 t_i^3 h_i$	$W_t = \frac{I_t}{t_{max}}$
	$I_t = \frac{2t_w t_f b_0^2 h_0^2}{t_f b_0 + t_w h_0}$	$W_t = 2 b_0 h_0 t_{min}$

6 Prostý smyk

O **prostém** neboli **čistém smyku** v určitém **bodu** tělesa hovoříme tehdy, je-li možné tímto bodem proložit tři vzájemně kolmé roviny tak, že v nich nepůsobí žádná složka normálových napětí, nýbrž jen napětí smyková. Obvykle ještě zužujeme tento pojem na rovinný případ, kdy je nenulová jen jedna z párových dvojic vzájemně si rovných smykových napětí dle rov. (1.4), tedy např. jen τ_{xy} a τ_{yx}, resp τ_{xz} a τ_{zx} atd. Při čistém smyku nevznikají podélné deformace (ve výše zmíněných třech rovinách), ale pouze úhlová změna - zkosení, řídící se Hookovým zákonem ve smyku - rov. (1.11).



Obr. 6.1

Prostý smyk **prutu**, charakterizovaný tím, že v libovolném průřezu působí pouze posouvající síla (a nikoli ohybový moment a další složky), je případem zcela vyjímečným a k jeho realizaci je zapotřebí zatížit nosník tečným zatížením na všech okrajích např. způsobem podle obr. 6.1a, kde q [kN/m] je zavedeno ve vyznačeném smyslu. Z momentové podmínky k podporovému bodu b je

$$-R_a l - Q_1 l + Q_2 h = -R_a l - qhl - qlh = 0 \Rightarrow R_a = 0. \qquad \text{(a)}$$

Pak i $R_b = 0$, posouvající síla a ohybový moment v průřezu x odtud vyjdou

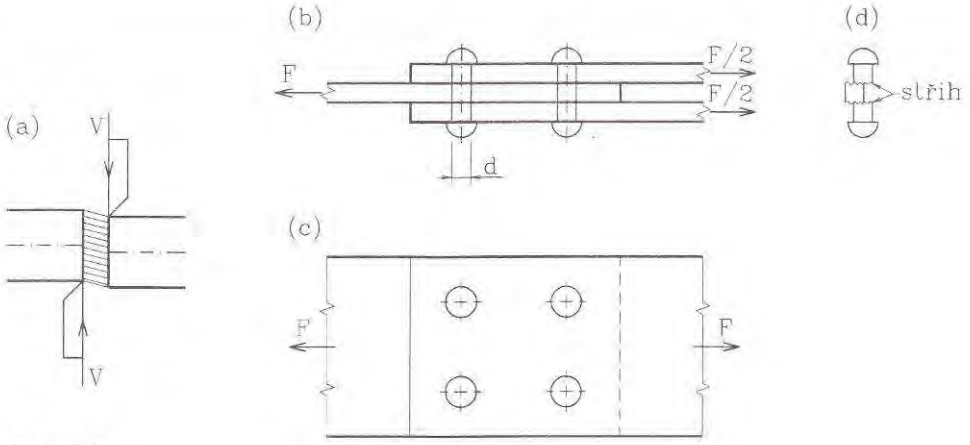
$$V_z = V_z(x) = Q_1 = qh,$$

$$M_y = M_y(x) = qhx - qx\frac{h}{2} - qx\frac{h}{2} = 0.$$

V tomto případě nevznikají v příčných řezech normálová napětí a lze dokázat, že ve všech bodech nosníku existuje shodný stav čistého smyku, takže smyková napětí v průřezu jsou kostantní (obr. 6.1c) a jsou rovna

$$\tau_{xz} = \frac{V_z}{A}, \qquad (6.1)$$

kde $A = bh$ je plocha průřezu.



Obr. 6.2

S takovým zatížením, které je staticky rovnocenné konstantnímu spojitému momentovému zatížení, se však u ohýbaných nosníků prakticky nesetkáme - může vznikat u smykových výplní např. zavětrovacích stěn apod. V běžných případech jde téměř vždy o **smyk za ohybu**, u kterého se průběh smykového napětí (při nosníku stálého průřezu) řídí Grashofovým vzorcem (3.12).

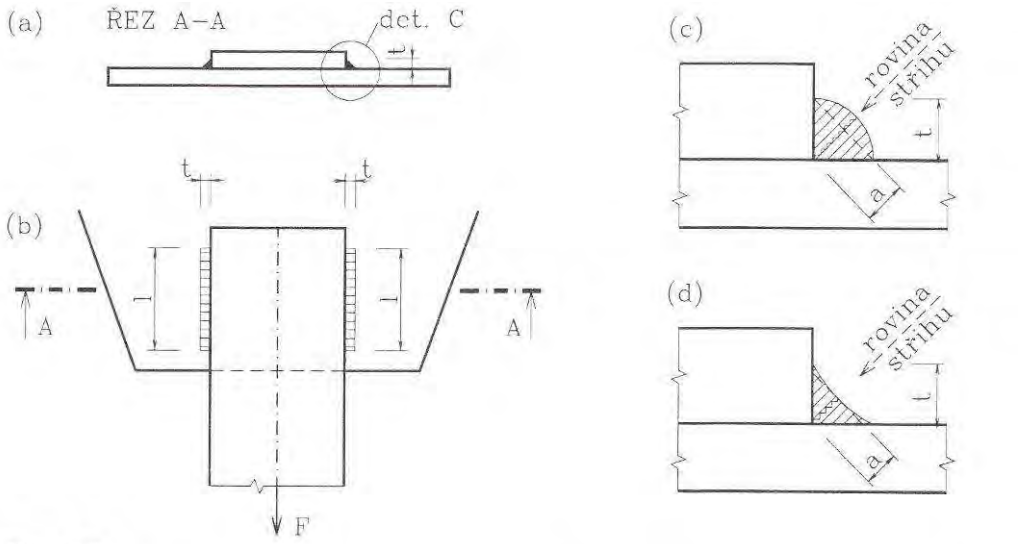
V některých případech namáhání konstrukčních prvků však hraje podstatnou roli smyková síla a k porušení dojde **usmyknutím** podél určité plochy (přesněji: tenké vrstvy) - obr. 6.2a. Pak hovoříme o namáhání na **střih** a při jeho posouzení vycházíme z předpokladu o rovnoměrném rozložení smykových napětí, tedy za vzorce (6.1). Skutečný stav napjatosti v pružném stavu takového prvku namáhaného na střih je ovšem daleko složitější (vznikají přitom i normálová napětí), avšak mezní stav porušení v plastickém oboru má smykovou povahu. Podstatnou roli přitom hraje ta okolnost, že **výpočtové pevnosti** materiálů pro každý typ namáhání jsou odvozeny ze zkoušek shodným způsobem jako při posuzování spolehlivosti prvku.

Jde především o návrh a posouzení **spojů**. U ocelových konstrukcí jsou na střih namáhány např. spoje **nýtové a šroubové**. Podle počtu ploch, které by se u jednoho nýtu (šroubu) musely porušit v mezním stavu, rozlišujeme nýty (šrouby) jednostřižné, dvojstřižné i vícestřižné. Únosnost pro jednu střihovou rovinu je

$$F_{Rd} = f_{dr} A_s, \tag{6.2}$$

kde f_{dr} je výpočtová pevnost nýtu či šroubu pro danou pevnostní třídu a konkrétní konstrukční uspořádání, $A_s = \pi d^2/4$ je odporující plocha. Na obr. 6.2b,c jsou znázorněny čtyři dvojstřižné nýty, takže výpočtová únosnost celého spoje je 8-násobkem síly F_{Rd}. Spoj je ovšem nutno posoudit nejen na střih, ale též na další účinky - otlačení (roztlačení plechu na kontaktu s nýtem či šroubem), někdy i na tah šroubu apod.

Podobně u **koutových svarů** namáhaných na střih (obr. 6.3) se předpokládá rovnoměrné rozdělení smykových napětí podél odporující plochy, za níž se pokládá šikmá plocha o rozměru a trojúhelníka vepsaného do řezu svarem: při tvaru podle obr. 6.3c je $a = 0{,}707t$, kde t je tloušťka svaru, v případu dle obr. 6.3d je to méně. Při uspořádání spoje podle obr. 6.3b (oba svary namáhané shodně) je výpočtová únosnost přípoje



Obr. 6.3

$$F_{Rd} = f_{wd} A_s = f_{wd} \cdot 2al \approx f_{wd} \cdot 2 \cdot 0{,}707tl, \tag{6.3}$$

kde f_{wd} je výpočtová pevnost svaru ve smyku (např. pro ocel St235 je f_{wd} = 173,2 MPa).

Podobně jako u ocelových konstrukcí vyskytují se prvky namáhané na usmyknutí i u **dřevěných** konstrukcí (zhlaví trámů, hmoždíky aj.) i **betonových a zděných** konstrukcí. Podrobnosti jsou předmětem výkladu v odborných předmětech.

Příklad 6.1

Určete únosnost ve střihu nýtového spoje dle obr. 6.2b,c, je-li d = 25 mm (průměr otvoru zaplněného zataženým nýtem) a $f_{dr} \approx$ 128,3 MPa.

Řešení:

Plocha $A_s = \pi 25^2/4$ = 490,9 mm^2, takže při čtyřech dvojstřižných nýtech je celková únosnost

$$F_{Rd} = n \cdot 2 f_{dr} A_s = 4 \cdot 2 \cdot 128{,}3 \cdot 490{,}9 = 503{,}9 \cdot 10^3 \text{ N} = 503{,}9 \text{ kN}.$$

Příklad 6.2

Vypočtěte smykovou únosnost připojení dvěma koutovými svary podle obr. 6.3, jsou-li účinné délky svarů l = 200 m m, jejich tloušťky t = 8 mm a tvar svaru podle obr. 6.3c (převýšený). Výpočtovou pevnost uvažujte hodnotou f_{wd} = 173,2 MPa.

Řešení:

$$F_{Rd} = f_{wd} \cdot 2 \cdot 0{,}707tl = 173{,}2 \cdot 2 \cdot 0{,}707 \cdot 8 \cdot 200 = 391{,}8 \cdot 10^3 \text{ N} = 391{,}8 \text{ kN}.$$

7 Složené případy namáhání prutu

Prostý (osový) tah a tlak, rovinný ohyb a prosté kroucení prutu představují základní případy namáhání přímého prutu. Setkáváme se však též s jejich vzájemnými **kombinacemi**, z nichž se ve stavební praxi uplatní především

- prostorový (obecný) ohyb,
- excentrický tah a tlak (kombinace ohybu s tahem n. tlakem).

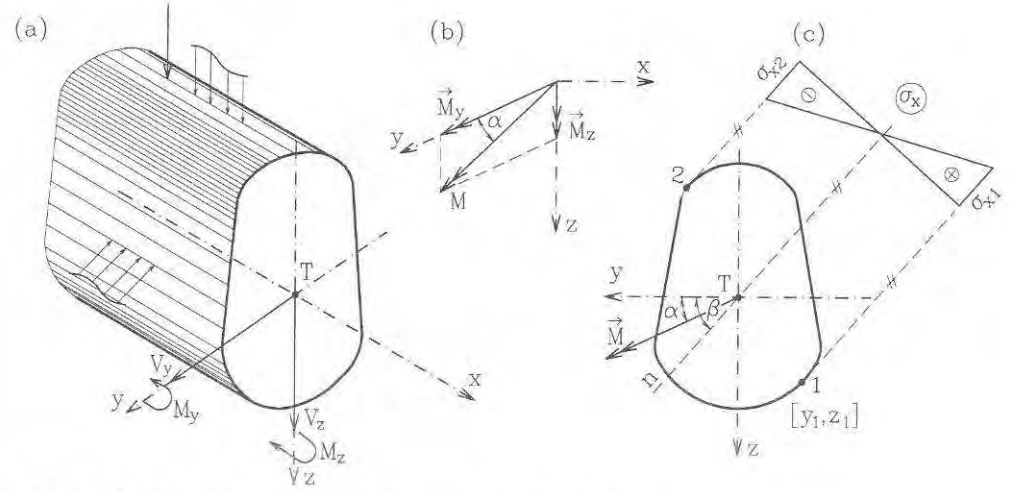
Mimoto též je někdy třeba ověřovat současné účinky kroucení s tahem nebo tlakem a s ohybem.

V lineárně pružném oboru platí **princip superpozice**, pomocí něhož můžeme řešit složené případy rozkladem na dílčí základní stavy a jejich účinky pak složit (podle jejich povahy skalárně nebo vektorově). V pružnoplastickém stavu a také u úloh vyžadujících řešení podle teorie II. řádu princip superpozice již nelze obecně uplatnit - jde o fyzikálně nebo geometricky nelineární odezvu konstrukce.

7.1 Prostorový ohyb

Jak bylo vysvětleno v odst. 4.3 musí rovina zatížení procházet spojnicí středů smyku, pokud nemá být prut kroucen. Pro zjednodušení výkladu se zatím omezíme na průřezy, u nichž je střed smyku totožný s těžištěm (nebo je rozdíl v jejich poloze zanedbatelný). **Prostorový** (obecný) **ohyb** pak vzniká tehdy, když vnější síly procházejí osou prutu, avšak neleží v jedné společné hlavní rovině prutu, dané osou prutu a některou z hlavních setrvačných os průřezu. Vnější síly též nevyvozují žádné osové složky, takže i normálové síly jsou rovny nule.

V jednotlivých průřezech prutu tedy obecně vznikají posouvající síly V_y, V_z a ohybové momenty M_y, M_z - obr. 7.1a (srov. též obr. 1.5). Jejich průběh po délce prutu určíme známými postupy statiky.



Obr. 7.1 *Normálová napětí při prostorovém ohybu*

Při pružném působení prutu vyvozují ohybové momenty M_y a M_z ve sledovaném průřezu lineárně rozložená **normálová napětí** σ_x daná rovnicemi (3.5) a (3.6). Protože jde o složky napětí ve shodném směru x, můžeme je sečítat (skládat skalárně), takže platí

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y \tag{7.1}$$

(připomeňme, že záporné znaménko souvisí se znaménkovou konvencí: kladný moment M_z vyvolává v bodech s kladnou pořadnicí y záporná normálová napětí).

Polohu **neutrální osy** získáme z podmínky $\sigma_x = 0$.

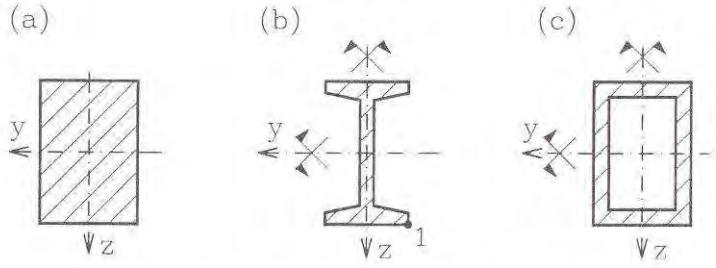
$$\frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = 0. \tag{7.2}$$

Při $y = z = 0$ je rovnice splněna, neutrální osa tedy **prochází těžištěm**. Její sklon - srov. obr. 7.1c z rovnice (7.2)

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{z}{y} = \frac{M_z}{M_y} \cdot \frac{I_y}{I_z} = \operatorname{tg}\alpha \frac{I_y}{I_z}, \tag{7.3}$$

kde jsme označili jako α úhel výsledného vektoru ohybového momentu. Na rozdíl od rovinného ohybu není tedy neutrální osa shodná s momentovou osou. Na obr. 7.1c je neutrální osa označena n a je vyznačen průběh normálových napětí v řezu kolmém k této ose, jak plyne z rov. (7.1).

V bodech ležících na rovnoběžkách s neutrální osou jsou normálová napětí shodná. **Extrémní napětí** jsou v bodech nejvzdálenějších od neutrální osy, tj. tam, kde se rovnoběžky s touto osou dotýkají obrysu průřezu - na obr. 7.1c jsou označeny 1 a 2; dosazením jejich souřadnic do rovnice (7.1) získáme velikost hledaných napětí.



Obr. 7.2 *Příklady průřezů pro užití rov. (7.4)*

Jednodušeji lze určit extrémní normálová napětí u dvojose symetrických průřezů, které obsahují i vrcholy obdélníku opsaného (rovnoběžně s hlavními osami) danému průřezu - obr. 7.2. Pak vzniknou extrémní napětí ve dvou protilehlých vrcholech, jejichž vzdálenosti od os y, z jsou současně vzdálenostmi krajních vláken, a můžeme využít průřezových modulů v ohybu (viz odst. 3.2). Maximální normálové napětí je

$$\sigma_{x,\max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \tag{7.4}$$

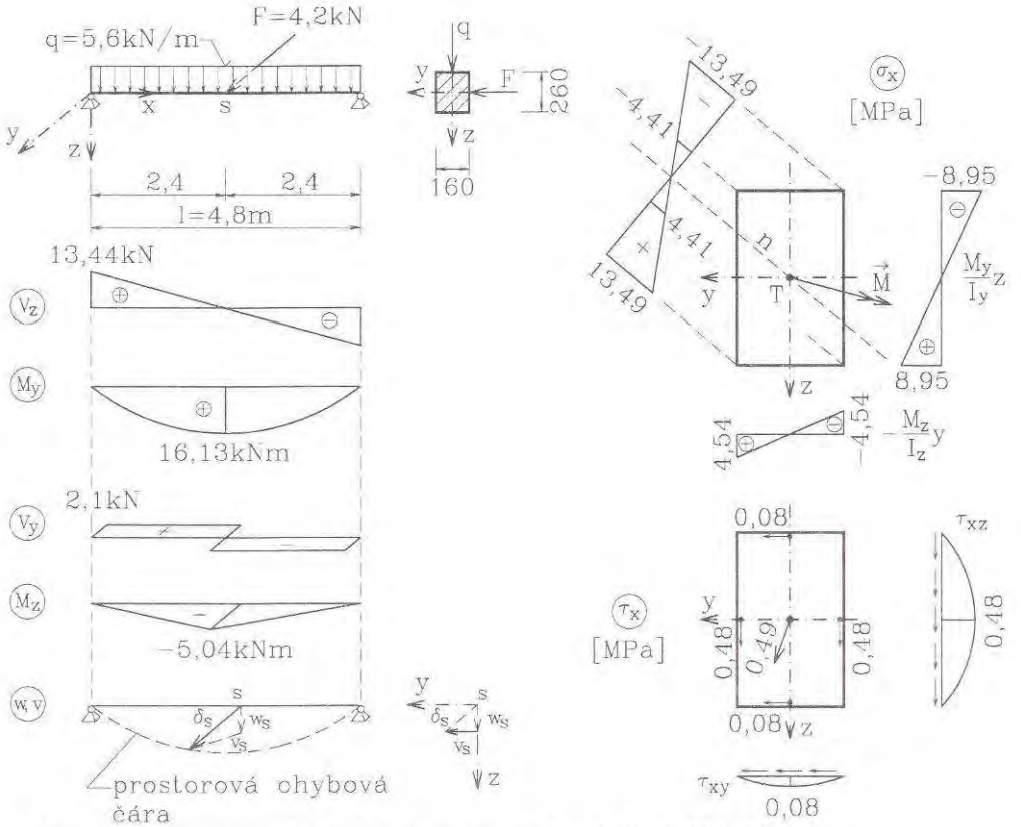
a minimální je v absolutní hodnotě shodné, má však záporné znaménko.

Smyková napětí určíme rovněž zvlášť pro ohyb v obou hlavních rovinách (odst. 3.3 a 3.4) a v obecném případě je složíme vektorově. Na obrysu průřezu nebo u tenkostěnných prutů mají ovšem smyková napětí shodný směr (tečný k obrysu), takže se sečítají algebraicky.

Vektorově rovněž skládáme složky **průhybu** w (ve směru osy z) a v (od ohybu v rovině y). Postup ukážeme na příkladu.

Příklad 7.1

Dřevěný trám obdélníkového průřezu 160x260 mm, prostě podepřený na obou koncích, je zatížen svislým plným rovnoměrným zatížením $q = q_z = 5{,}6$ kN/m a vodorovnou silou $F = F_y = 4{,}2$ kN uprostřed rozpětí - obr. 7.3. Určete maximální normálové a smykové napětí v nosníku a jeho výsledný průhyb ve středu rozpětí, je-li modul pružnosti $E = 10000$ MPa.



Obr. 7.3 *Superpozice účinků při prostorovém ohybu (příklad 7.1)*

Řešení:

Průběhy vnitřních sil odvodíme běžným způsobem - viz obr. 7.3. Jejich extrémní hodnoty jsou:

$$V_z = \frac{1}{2}ql = \frac{1}{2}5{,}6 \cdot 4{,}8 = 13{,}44\ \text{kN},\quad M_y = \frac{1}{8}ql^2 = \frac{1}{8}5{,}6 \cdot 4{,}8^2 = 16{,}13\ \text{kNm},$$
$$V_y = \frac{F}{2} = \frac{4{,}2}{2} = 2{,}1\ \text{kN},\qquad M_z = -\frac{1}{4}Fl = -\frac{1}{4}4{,}2 \cdot 4{,}8 = 5{,}04\ \text{kNm}.$$

Průřezové charakteristiky obdélníkového průřezu

$$A = bh = 160 \cdot 260 = 41{,}6 \cdot 10^3\ \text{mm}^2,$$
$$W_y = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}160 \cdot 260^2 = 1{,}803 \cdot 10^6\ \text{mm}^3,$$
$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}160 \cdot 260^3 = 234 \cdot 10^6\ \text{mm}^4,$$
$$W_z = \frac{1}{6}hb^2 = \frac{1}{6}260 \cdot 160^2 = 1{,}109 \cdot 10^6\ \text{mm}^3,$$
$$I_z = \frac{1}{12}hb^3 = \frac{1}{12}260 \cdot 160^3 = 88{,}7 \cdot 10^6\ \text{mm}^4.$$

V obou rovinách vznikají extrémní ohybové momenty ve středu nosníku, takže v tomto průřezu bude i maximální normálové napětí. Dosazením do rovnice (7.4)

$$\sigma_{x,\max} = \frac{16{,}13 \cdot 10^{-3}}{1{,}803 \cdot 10^{-3}} + \frac{5{,}04 \cdot 10^{-3}}{1{,}109 \cdot 10^{-3}} = 8{,}95 + 4{,}54 = 13{,}49\ \text{MPa}.$$

Maximální smyková napětí jsou v absolutní hodnotě shodná v obou podporách. Podle rovnice (3.14) jsou jednotlivé složky

$$\tau_{xz,\max} = \frac{3}{2}\frac{V_z}{A} = \frac{3}{2}\frac{13{,}44 \cdot 10^{-3}}{41{,}6 \cdot 10^{-3}} = 0{,}48\ \text{MPa},$$
$$\tau_{xy,\max} = \frac{3}{2}\frac{V_y}{A} = \frac{3}{2}\frac{2{,}1 \cdot 10^{-3}}{41{,}6 \cdot 10^{-3}} = 0{,}08\ \text{MPa}.$$

Výsledná napětí

$$\tau_{x,\max} = \sqrt{0{,}48^2 + 0{,}08^2} \approx 0{,}49\ \text{MPa}.$$

K výpočtu složek průhybu středu nosníku s využijeme rovnic (4.12) a (4.32):

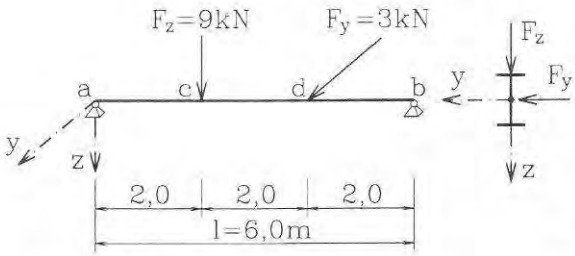
$$w_s = w_{\max} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI_y} = \frac{5}{384}\frac{5{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 4{,}8^4}{10000 \cdot 234 \cdot 10^{-6}} = 0{,}0165\ \text{m} = 16{,}5\ \text{mm},$$
$$v_s = v_{\max} = \frac{1}{48}\frac{Fl^3}{EI_z} = \frac{1}{48}\frac{4{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 4{,}8^3}{10000 \cdot 88{,}7 \cdot 10^{-6}} = 0{,}0109\ \text{m} = 10{,}9\ \text{mm}.$$

Výsledný vektor posunu

$$\delta_s = \sqrt{16{,}5^2 + 10{,}9^2} = 19{,}8\ \text{mm}.$$

Veškeré výsledky jsou znázorněny na obr. 7.3. Pro jednoduchost jsme zde nerozlišovali mezi výpočtovým a charakteristickým zatížením, ani jsme nesledovali vliv smyku na průhyb.

Příklad 7.2

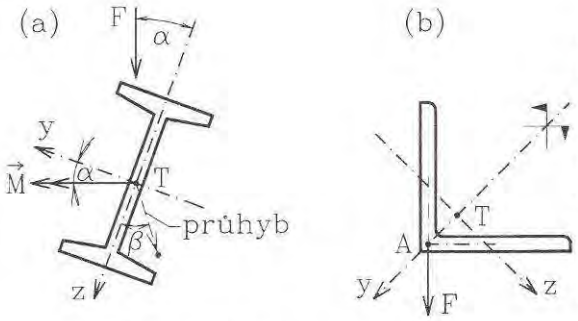


Obr. 7.4

Ocelový válcovaný nosník I 200 je uložen a zatížen podle obr. 7.4. Určete maximální normálová napětí v průřezech *c* a *d* (moduly průřezu I 200 jsou $W_y = 213{\cdot}10^3$ mm^3, $W_z = 26{,}0{\cdot}10^3$ mm^3). Úlohu řešte samostatně.

Výsledky:

$$\sigma_{xc} = 133{,}0\ \text{MPa},$$
$$\sigma_{xd} = 181{,}9\ \text{MPa}.$$



Obr. 7.5 *Šikmý ohyb*

Zvláštním případem prostorového ohybu je **šikmý ohyb**, při němž zatížení leží v jedné společné rovině, ta však není jednou z hlavních rovin, ale svírá s osou *z* úhel α - obr. 7.5a. Pak je možné řešení zjednodušit tak, že určíme hodnoty výsledných ohybových momentů *M*, resp. posouvajících sil *V*, a ty pak rozložíme do směru hlavních os. Složky ohybových momentů jsou

$$M_y = M\cos\alpha, \quad M_y = M\sin\alpha, \qquad (7.5)$$

a podobně se rozloží posouvající síly. Další postup je pak shodný jako v obecném případu ohybu. Ohybová čára je v tomto případě rovinnou křivkou, neleží však v rovině zatížení, nýbrž v rovině kolmé k neutrální ose. Připomeňme, že jsme osy *y* a *z* zavedli jako hlavní osy setrvačnosti průřezu, takže např. rovnoramenný úhelník zatížený (ve středu smyku *A*) svislým zatížením, je namáhán šikmým ohybem, neboť hlavní osy jsou odkloněny od svislice o 45° - obr. 7.5b.

Pro **návrh a posouzení** prutu namáhaného prostorovým ohybem v pružném stavu na mezní stav únosnosti rozhodují obvykle velikosti normálových napětí, jež nesmějí překročit výpočtovou pevnost

$$|\sigma_x|_{\max} \le f_d \qquad (7.6)$$

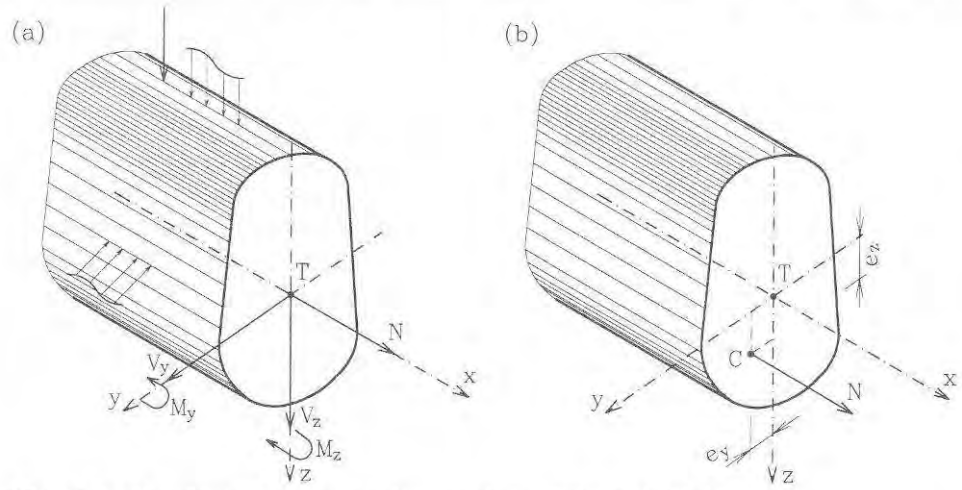
U průřezů, kde lze užít vzorce (7.4), můžeme dosazením do podmínky (7.6) a dělením výpočtovou pevností f_d vyjádřit podmínku spolehlivosti takto

$$\frac{M_{Sy}}{f_d W_y} + \frac{M_{Sz}}{f_d W_z} = \frac{M_{Sy}}{M_{Ry}} + \frac{M_{Sz}}{M_{Rz}} \leq 1, \tag{7.7}$$

kde M_{Sy} a M_{Sz} jsou absolutní hodnoty výpočtových ohybových momentů získaných řešením nosníku pro dané zatížení, M_{Ry} a M_{Rz} momentové únosnosti průřezu - srov. rov. (3.10). Index d a znak absolutní hodnoty byly pro přehlednost zápisu vypuštěny.

7.2 Mimostředný tah a tlak

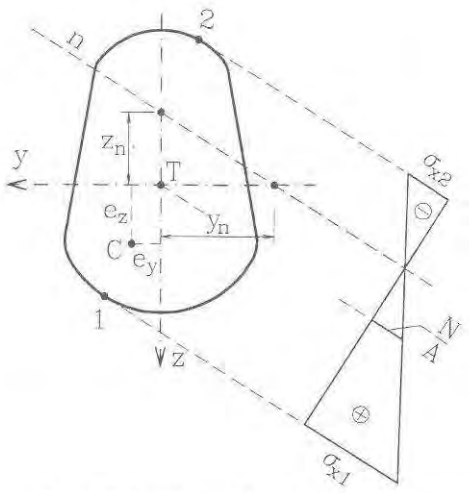
Mimostředný (excentrický) tah nebo tlak je **kombinací** osového (dostředného) **tahu či tlaku s ohybem**, vzniká tedy v případě současného působení **normálové síly** N a alespoň jedné složky **ohybového momentu** (M_y, M_z). V této podobě vzniká mimostředným přiložením podélné síly, oslabením průřezu apod. Může též však být vyvolán



Obr. 7.6 *Kombinace ohybu s tahem - mimostředný tah (tlak)*

kombinací ohybu vyvozeného příčným zatížením a podélně působících sil: pak ovšem vznikají i posouvající síly a jedinou nulovou složkou vnitřních sil je krouticí moment T - obr. 7.6a. Jedná se pak o kombinaci prostorového ohybu s tahem nebo tlakem a veškeré veličiny plynou ze superpozice vztahů z odst. 7.1 a osového tahu (tlaku) - kap. 2. Protože však osové namáhání nevyvozuje žádná smyková napětí ani průhyby prutu, omezíme se na rozbor **normálových napětí** v průřezu σ_x. Superpozicí napětí od tahu - rov. (2.5) a od prostorového ohybu - rov. (7.1) je v pružném prutu

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y. \tag{7.8}$$



Obr. 7.7 *Normálová napětí při mimostředném tahu*

Tento vztah je opět lineární - pořadnice σ_x leží ve společné skloněné rovině, statické podmínky ekvivalence vnitřních sil v průřezu - rovnice (1.5) jsou splněny, neboť je plní dílčí složky.

Je-li působení vnitřních sil v průřezu vyjádřeno normálovou silou N působící mimostředně (excentricky) podle obr. 7.6b, jsou ohybové momenty

$$\left.\begin{aligned} M_y &= Ne_z, \\ M_z &= -Ne_y, \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

kde e_y a e_z jsou složky excentricity; jako kladné je uvažujeme podle smyslu os souřadnic. Využijeme-li známých vztahů pro poloměry setrvačnosti i_y a i_z

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A}, \qquad i_z^2 = \frac{I_z}{A}, \tag{7.10}$$

pak dosazením (7.9) do (7.8) a úpravou dostáváme

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{Ne_z}{Ai_y^2}z - \frac{\left(-Ne_y\right)}{Ai_z^2}y = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_z z}{i_y^2} + \frac{e_y y}{i_z^2}\right). \tag{7.11}$$

Rovnici neutrální osy získáme, položíme-li normálové napětí rovno nule: $\sigma_x = 0$; z rovnice (7.11) vyjde po malé úpravě

$$\frac{e_y y}{i_z^2} + \frac{e_z z}{i_y^2} + 1 = 0. \tag{7.12}$$

Úseky, jež neutrální osa vytíná na osách y a z, označené na obr. 7.6 jako y_n a z_n, vyjdou dosazením $z = 0$, resp. $y = 0$ do (7.12) a jsou rovny

$$y_n = -\frac{i_z^2}{e_y}, \qquad z_n = -\frac{i_y^2}{e_z}. \tag{7.13}$$

Záporná znaménka ukazují, že neutrální osa neprochází kvadrantem, v němž leží působiště tahové nebo tlakové výslednice.

Extrémní normálová napětí σ_{x1} a σ_{x2} vznikají opět v bodech nejvíce odlehlých od neutrální osy (obr. 7.7 - body 1, 2) a jejich hodnoty získáme dosazením souřadnic těchto bodů do rovnice (7.8) nebo (7.11). V těžišti, kde $y = z = 0$, je napětí vždy rovno hodnotě platné pro osové (dostředné) namáhání, tedy N/A.

U dvojose symetrických průřezu zahrnujících i vrcholy opsaného obdélníku (obr. 7.2) jsou extrémní napětí

$$\sigma_{\substack{\max \\ x,\min}} = \frac{N}{A} \pm \left(\frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \right). \tag{7.14}$$

Znaménko prvního členu je závislé na tom, zda normálová síla je tahová (kladná) či tlaková (záporná), použitím souhlasných kladných nebo záporných znamének u následujících členů získáme $\sigma_{x,\max}$ nebo $\sigma_{x,\min}$.

Příklad 7.3

Pilíř se symetrickým průřezem tvaru T podle obr. 7.8 je zatížen tlakovou silou F = 1500kN v bodu C. Určete extrémní napětí a polohu neutrální osy.

Řešení:

Nejprve určíme geometrické charakteristiky průřezu:

$$A_1 = b_1 h_1 = 1{,}8 \cdot 0{,}6 = 1{,}08\ \mathrm{m}^2, \quad A_2 = b_2 h_2 = 0{,}6 \cdot 0{,}9 = 0{,}54\ \mathrm{m}^2, \quad A = A_1 + A_2 = 1{,}62\ \mathrm{m}^2,$$

$$c_1 = \frac{1}{A} S_{y1} = \frac{1}{A}\left[A_1 \frac{h_1}{2} + A_2 \left(h_1 + \frac{h_2}{2} \right) \right] = \frac{1}{1{,}62}\left[1{,}08 \cdot 0{,}3 + 0{,}54 \cdot 1{,}05 \right] = 0{,}550\ \mathrm{m},$$

$$\mathrm{I}_y = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 + A_1 \left(c_1 - \frac{h}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A_2 \left(h_1 + \frac{h_2}{2} - c_1 \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{12} 1{,}8 \cdot 0{,}6^3 + 1{,}08 \cdot 0{,}25^2 + \frac{1}{12} 0{,}6 \cdot 0{,}9^3 + 0{,}54 \cdot 0{,}50^2 = 0{,}2714\ \mathrm{m}^4,$$

$$I_z = \frac{1}{12} h_1 b_1^3 + \frac{1}{12} h_2 b_2^3 = \frac{1}{12} 0{,}6 \cdot 1{,}8^3 + \frac{1}{12} 0{,}9 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}3078\ \mathrm{m}^4,$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{0{,}2714}{1{,}62} = 0{,}1675\ \mathrm{m}^2, \qquad i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{0{,}3078}{1{,}62} = 0{,}1900\ \mathrm{m}^2.$$

Známe-li polohu těžiště, můžeme stanovit složky excentricity:

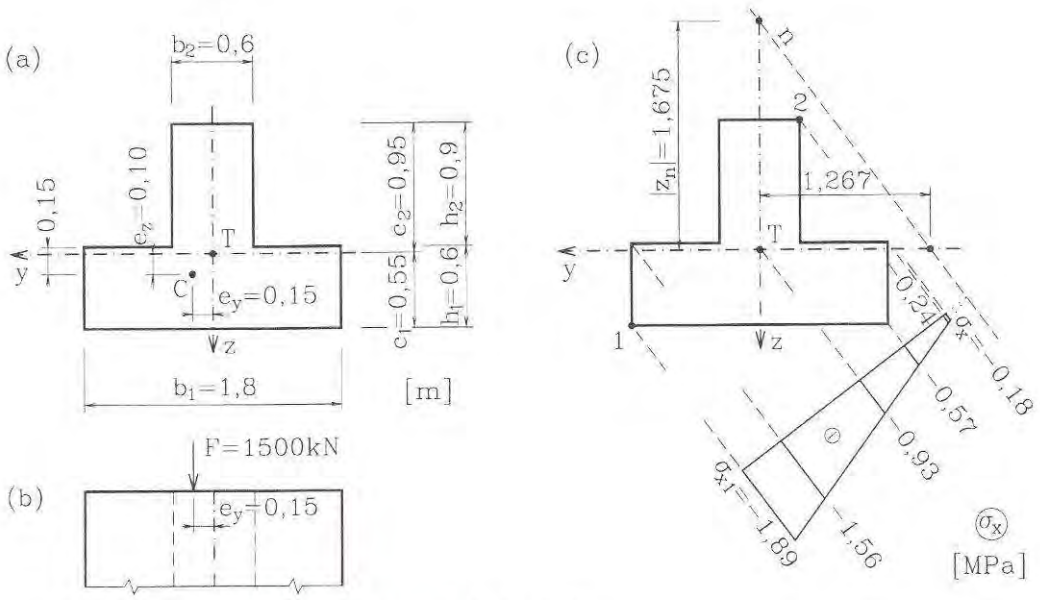
$$e_y = 0{,}15\ \mathrm{m}, \quad e_z = 0{,}15 - 0{,}05 = 0{,}10\ \mathrm{m}.$$

Normálová síla je záporná (tlak): N = - 1500 kN = - 1,5 MN. Dosazením do rovnice (7.11)

$$\sigma_x = -\frac{1{,}5}{1{,}62}\left(1 + \frac{0{,}1z}{0{,}1675} + \frac{0{,}15y}{0{,}1900} \right) \approx -0{,}926 - 0{,}553z - 0{,}731y. \tag{a}$$

Úseky, které na osách y a z vytíná neutrální osa, jsou podle (7.13)

$$y_n = -\frac{0{,}1900}{0{,}15} = -1{,}267\ \mathrm{m}, \quad z_n = -\frac{0{,}1675}{0{,}10} = -1{,}675\ \mathrm{m}$$



Obr. 7.8 *Pilíř namáhaný mimostředným tlakem*

- viz obr. 7.8c. Extrémní napětí v bodu 1 získáme dosazením jeho souřadnic $y_1 = 0{,}90$ m a $z_1 = 0{,}55$ m do rovnice (a)

$$\sigma_{x1} = -0{,}926 - 0{,}553 \cdot 0{,}55 - 0{,}731 \cdot 0{,}9 \approx -1{,}89 \text{ MPa (tlak).}$$

Podobně získáme další hodnoty jak jsou uvedeny v obrazci σ_x na obr. 7.8c.

Příklad 7.4

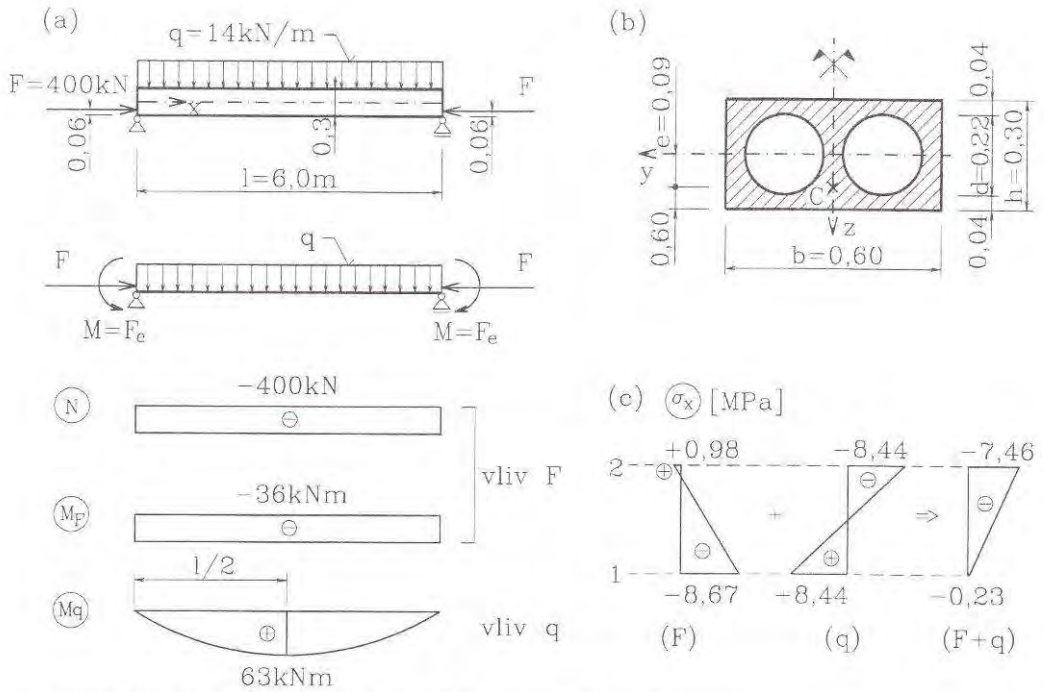
Určete extrémní normálová napětí pro případ, kdy v průřezu podle obr. 7.8a je výška horní obdélníkové části $h_2 = 1{,}2$ m. Ostatní rozměry i zatížení jsou shodné jako v příkladu 7.3. Řešte samostatně.

Výsledky:

$\sigma_{x1} = -1{,}92$ MPa (tlak), $\sigma_{x2} = 0{,}15$ MPa (tah).

Příklad 7.5

Betonový panel obdélníkového průřezu 600x300 mm s dvěma kruhovými otvory o průměru $d = 220$ mm je předepjat tlakovou silou $F = 400$ kN působící 60 mm od spodního okraje (na ose symetrie z) a zatížen plně rovnoměrně zatížením $q = 14$ kN/m (vč. vlastní tíhy) při rozpětí $l = 6{,}0$ m - obr. 7.9. Určete okrajová normálová napětí v průřezu uprostřed rozpětí a) jen od síly F, b) od současného působení síly i příčného zatížení.



Obr. 7.9 *Ohyb s mimostředným tlakem u předpjatého prvku*

Řešení:

Určíme potřebné geometrické charakteristiky:

$$A = bh - 2\frac{\pi d^2}{4} = 0{,}6 \cdot 0{,}3 - 2\frac{\pi \cdot 0{,}22^2}{64} = 0{,}1040\ \mathrm{m}^2,$$

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 - 2\frac{\pi d^4}{64} = \frac{1}{12}0{,}6 \cdot 0{,}3^3 - 2\frac{\pi \cdot 0{,}22^4}{64} = 1{,}120 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^4,$$

$$W_y = \frac{I_y}{c} = \frac{I_y}{\frac{h}{2}} = \frac{1{,}120 \cdot 10^{-3}}{0{,}15} = 7{,}467 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3.$$

Oba zatěžovací stavy přestavují mimostředný tlak. Od samotné síly F jsou ve všech průřezech vnitřní síly

$N = -F = -400\ \mathrm{kN} = -0{,}4\ \mathrm{MN}$, $M_y = -Fe_y = -400 \cdot 0{,}09 = -36\ \mathrm{kNm} = -0{,}036\ \mathrm{MN}$.

Normálová napětí ve spodních a horních vláknech jsou

$$\sigma_{x1,2} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{W_y} = \frac{-0{,}40}{0{,}1040} \pm \frac{-0{,}036}{7{,}467 \cdot 10^{-3}} = -3{,}85 \mp 4{,}82 = \begin{cases} -8{,}67\ \mathrm{MPa} = \sigma_{x1} \\ +0{,}98\ \mathrm{MPa} = \sigma_{x2} \end{cases}$$

Od samotné síly F je tedy v horních vláknech tahové napětí.

Od účinku rovnoměrného zatížení je ohybový moment ve středu rozpětí

$$M_y = \frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{8} 14{,}0 \cdot 6{,}0^2 = 63{,}0 \text{ kNm} = 0{,}063 \text{ MNm}.$$

V tomto stadiu současného působení je tedy ohybový moment uprostřed rozpětí roven součtu (37 kNm). Využijeme-li toho, že již známe napětí od síly F, můžeme určit napětí od příčného zatížení ve sledovaném řezu:

$$\sigma_{x1,2} = \pm \frac{M_y}{W_y} = \pm \frac{0{,}063}{7{,}467 \cdot 10^{-3}} = \pm 8{,}44 \text{ MPa}.$$

Superpozicí

$$\sigma_{x1} = -8{,}67 + 8{,}44 = -0{,}23 \text{ MPa}, \quad \sigma_{x1} = +0{,}98 - 8{,}44 = -7{,}46 \text{ MPa},$$

viz obr. 7.9c. Při současném působení všech účinků je celý průřez tlačen.

Příklad 7.6

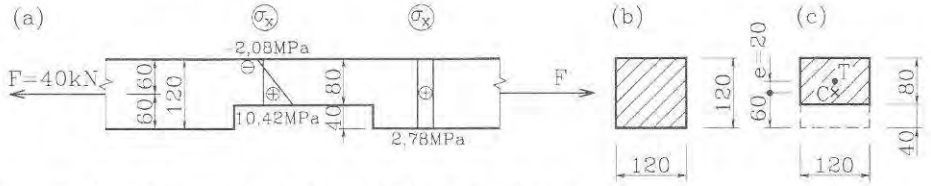
Určete maximální velikost intenzity rovnoměrného zatížení q, při níž nevzniknou v nosníku tahová napětí, poklesne-li síla F o 10%, tedy na hodnotu F = 360 kN. Řešte samostatně.

Odpověď:

$q \leq 12{,}95$ kN//m.

Příklad 7.7

Vypočtěte normálová napětí v plné a v oslabené části dřevěného hranolu 120x120 mm, taženého silou N = 40 kN podle obr. 7.10.



Obr. 7.10 *Mimostředný tah v místě oslabení prutu*

Řešení:

V plné části vzniká prostý (dostředný) tah, takže normálové napětí je v celém průřezu shodné a je rovno

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{0{,}040}{0{,}12^2} = 2{,}78 \text{ MPa}.$$

V oslabené části prutu jde o mimostředný tah, neboť paprsek síly působí mimo těžiště oslabeného průřezu 120x80 mm. Excentricita činí $e_z = 20$ mm, takže ohybový moment je

$$M_y = Ne_z = 40 \cdot 0{,}02 = 0{,}80 \text{ kNm} = 0{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ MNm}.$$

Geometrické charakteristiky oslabeného průřezu

$$A = 120 \cdot 80 = 9600 \text{ mm}^2 = 9.6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2,$$

$$W_y = \frac{1}{6} 120 \cdot 80^2 = 128{,}0 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 128{,}0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Extrémní normálová napětí

$$\sigma_{x1,2} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{W_y} = \frac{0{,}040}{9{,}6 \cdot 10^{-3}} \pm \frac{0{,}8 \cdot 10^{-3}}{128{,}0 \cdot 10^{-6}} = 4{,}17 \pm 6{,}25 = \begin{cases} 10{,}42 \text{ MPa} = \sigma_{x1} \\ -2{,}08 \text{ MPa} = \sigma_{x2} \end{cases}$$

Posouzení mimostředně taženého nebo tlačeného prutu působícího pružně můžeme u průřezu obecného tvaru provést tak, že vyhledáme extrémní normálová napětí a ověříme, že nepřekračují odpovídající výpočtové pevnosti. U průřezů, pro něž lze uplatnit rovnici (7.14), můžeme též podmínku spolehlivosti vyjádřit rozšířením relace (7.7) o člen vztahující se k normálové síle, tedy

$$\frac{N_S}{N_R} + \frac{M_{Sy}}{M_{Ry}} + \frac{M_{Sz}}{M_{Rz}} \le 1 \qquad (7.15)$$

kde $N_S = N_{Sd}$ výpočtová normálová síla (v absolutní hodnotě), $N_R = N_{Rd}$ je osová únosnost průřezu podle rov. (2.19), tedy $N_R = Af_d$, a význam ostatních veličin je shodný jako v relaci (7.7).

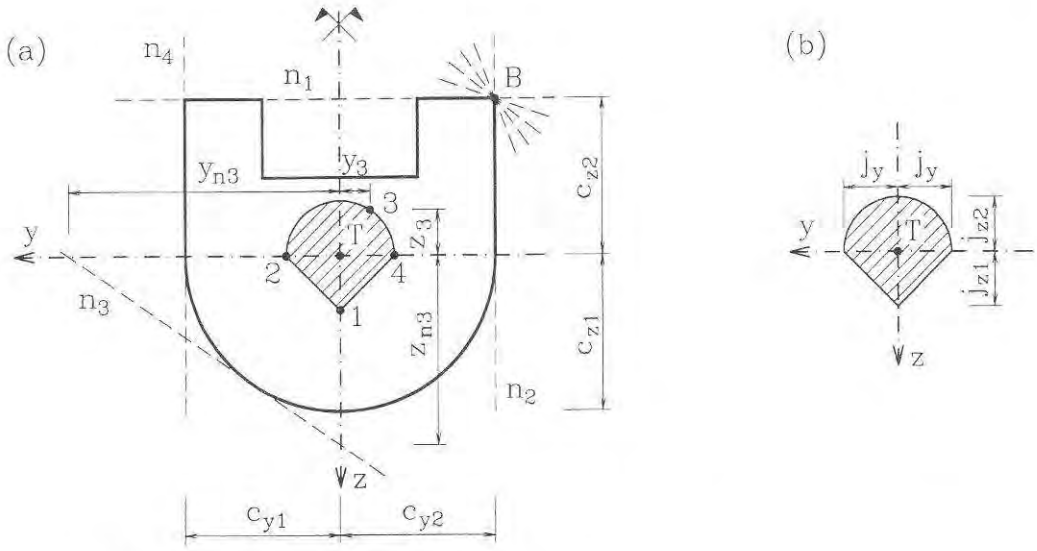
Návrh průřezu provádíme obvykle zkusmo a po jeho posouzení jeho rozměry upřesňujeme.

U mimostředného tlaku štíhlých prutů však vždy ověřujeme **vzpěrnou únosnost**, případně prostorovou stabilitu - viz kapitolu 8.

7.3 Jádro průřezu

Některé stavební materiály (zdivo, beton apod.) mají pevnost v tahu podstatně nižší než v tlaku. Proto je u nich účelné, aby v průřezu prutu (např. pilíře) namáhaném mimostředným tlakem nevznikala **žádná tahová napětí**. Při lineárně pružném působení bude tento požadavek splněn tehdy, když neutrální osa neprotne průřez, nýbrž bude probíhat mimo něj, nebo se ho bude v krajním případě dotýkat. Tomu odpovídající možné polohy působiště výslednice vnitřních sil (tlakového centra C) zaplňují tzv. jádro průřezu.

Jádro průřezu je tedy určitá oblast v okolí těžiště průřezu, v níž musí působit výslednice vnitřních sil, aby v celém průřezu vznikla normálná napětí téhož znaménka



Obr. 7.11 *Jádro průřezu, hlavní jádrové úsečky*

(je-li síla tlaková, nevzniknou tedy tahová napětí). Jádro průřezu je určeno svým obrysem - tzv. **jádrovou čarou**, což je geometrické místo působišť mimostředné síly pro případ, kdy se neutrální osa dotýká průřezu.

Jádrovou čáru tedy získáme tak, že klademe neutrální osu postupně do všech tečných poloh k obrysu průřezu, při nichž jej neprotíná ("kotálíme" ji kolem průřezu). V rovnicích (7.13) představují úseky, jež vytíná neutrální osa na souřadnicových osách (tedy y_n a z_n) veličiny známé, dané volbou polohy neutrální osy. Odpovídající souřadnice jádrové čáry y, z jsou excentricitami myšlené síly pohybující se po jádrové čáře. Pro jednotlivé polohy (1,..., j, ..) je tedy

$$y_j = e_{yj} = -\frac{i_z^2}{y_{nj}}, \quad z_j = e_{zj} = -\frac{i_y^2}{z_{nj}}. \tag{7.16}$$

Postupně tedy volíme polohy neutrální osy, ke každé určíme úseky y_{nj}, z_{nj} jež vytíná na osách souřadnic a z rovnic (7.16) stanovíme polohu odpovídajícího bodu na jádrové čáře. Při otáčení neutrální osy kolem pevného bodu (např. bod B na obr. 7.10a) leží odpovídající body na přímce, takže stačí určit koncové body z krajních poloh neutrální osy (tečny n_1, n_2 a tomu odpovídající body 1 a 2 na jádrové čáře - obr. 7.11a).

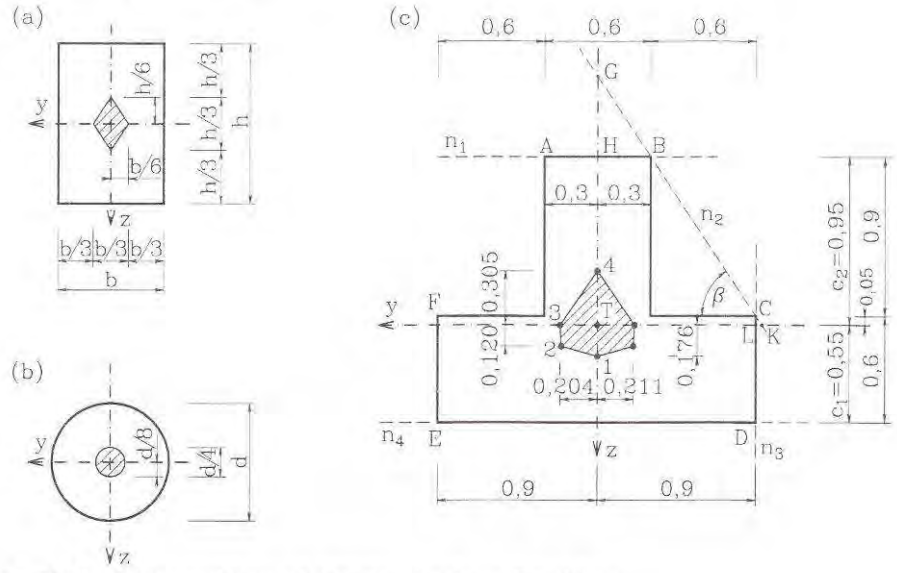
Významné jsou tzv. **hlavní jádrové úsečky**, což jsou délky (uvažované kladně) jež vytíná jádrová čára na hlavních osách setrvačnosti průřezu y a z - obr. 7.11b. Tak např. **spodní** jádrová úsečka na ose z odpovídá **horní** poloze neutrální osy a je rovna

$$j_{z1} = |z_1| = -\frac{i_y^2}{-c_{z2}} = \frac{I_y}{Ac_{z2}} = \frac{W_{y2}}{A},$$

kde W_{y2} je modul průřezu k ose y pro horní okraj - srov. rovnice (3.7). Analogicky lze odvodit ostatní hlavní jádrové úsečky; souhrně jsou

$$j_{y1} = \frac{W_{z2}}{A}, \quad j_{y2} = \frac{W_{z1}}{A}, \quad j_{z1} = \frac{W_{y2}}{A}, \quad j_{z2} = \frac{W_{y1}}{A} \tag{7.17}$$

Spodní jádrová úsečka se počítá z modulu průřezu k horním vláknům, neboť působí-li výslednice sil pod osou y (např. ve spodním vrcholu jádra 1), leží naopak neutrální osa nad ní (v poloze tečny n_1 -obr. 7.11).



Obr. 7.12 *Jádro průřezu obdélníku, kruhu a T průřezu*

U průřezu tvaru **obdélníku** (obr. 7.12a), který má dvě osy symetrie, můžeme hlavní jádrové úsečky zjistit přímo z rovnic (7.17):

$$j_y = \frac{W_z}{A} = \frac{\frac{1}{6}hb^2}{bh} = \frac{b}{6}, \qquad j_z = \frac{W_y}{A} = \frac{\frac{1}{6}bh^2}{bh} = \frac{h}{6}. \tag{7.18}$$

Mezi vrcholy tvoří jádrovou čáru úsečky - jádro průřezu tedy má tvar kosočtverce - obr. 7.12a. Působí-li výslednice vnitřních sil na některé z hlavních os, pak se musí nalézat ve vnitřní třetině, pokud nemají vzniknout napětí obou znamének.

U **kruhového** průřezu tvoří - vzhledem k rotační symetrii - jádro průřezu opět kruh. Jeho poloměrem je jádrová úsečka (shodná ke všem osám)

$$j = \frac{W}{A} = \frac{\frac{\pi}{32}d^3}{\frac{\pi}{4}d^2} = \frac{d}{8}, \tag{7.19}$$

(W viz tabulku 3.1) jak je znázorněno na obr. 7.12b.

Příklad 7.8

Určete jádro průřezu vyznačeného na obr. 7,12c (obrácený T-profil) - viz též příklad 7.3, obr. 7.8.

Řešení:

Využijeme výsledků řešení v příkladu 7.3: vzdálenost těžiště od spodní základny je $c_1 = 0{,}55$ m a dále dosadíme čtverce poloměrů setrvačnosti do rovnic (7.16), které pak jsou číselně

$$y_j = -\frac{0{,}1900}{y_{nj}}, \qquad z_j = -\frac{0{,}1675}{z_{nj}}. \tag{a}$$

Neutrální osu v poloze n_1 vedeme horní hranou průřezu $\overline{AB}$. Úseky na osách jsou: $y_{n1} = \infty$ (n_1 je rovnoběžná s osou y) $z_n = -c_2 = -0{,}95$ m. Jádrový bod leží ovšem na ose z, z druhé rovnice (a) je

$$z_1 = -\frac{0{,}1675}{(-0{,}95)} = 0{,}176 \text{ m}.$$

Jako polohu n_2 volíme spojnici bodů B a C. Z geometrie (obr. 7.12c) vyplývá:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{0{,}90}{0{,}60} = 1{,}5, \qquad \begin{aligned} \overline{HG} &= \overline{HB}\cdot\operatorname{tg}\beta = 0{,}3\cdot 1{,}5 = 0{,}45 \text{ m}, \\ \overline{\mathrm{LK}} &= \overline{CL}/\operatorname{tg}\beta = 0{,}05/1{,}5 = 0{,}033 \text{ m}. \end{aligned}$$

Souřadnice průsečíků neutrální osy s y, z (orientované úseky)

$$y_{n2} = -0.900 - 0{,}033 = -0{,}933 \text{ m}, \quad z_{n2} = -0{,}950 - 0{,}450 = -1{,}400 \text{ m}.$$

Z rovnic (a)

$$y_2 = -\frac{0{,}1900}{(-0{,}933)} = 0{,}204 \text{ m}, \qquad z_2 = -\frac{0{,}1675}{(-1{,}400)} = 0{,}120 \text{ m},$$

což jsou souřadnice vrcholu 2. Stejným postupem pro neutrální osu v poloze n_3 (spojnice $\overline{LB}$) je $y_{n3} = -0{,}90$ m, $z_{n3} = \infty$; odtud $y_3 = 0{,}211$ m, $z_3 = 0$. Konečně pak pro polohu n_4 spodní hranou průřezu $\overline{ED}$ je $y_{n4} = \infty$, $z_{n4} = 0{,}55$ m, a dosazením do druhé rovnice (a) vyjde $z_4 = -0{,}305$ m; y_4 je ovšem rovno nule. Vzhledem k symetrii průřezů k ose y je i jádro průřezu symetrické - viz obr. 7.12c.

Příklad 7.9

Jako samostatné cvičení určete souřadnice jádra průřezu pro tvar průřezu podle příkladu 7.4, tj. dle obr. 7.8a, kde se upraví výška h_2 na hodnotu $h_2 = 1{,}20$ m.

Výsledky:

$$y_1 = 0,\ z_1 = 0{,}228 \text{ m};\ y_2 = 0{,}200 \text{ m},\ z_2 = 0{,}150 \text{ m};$$

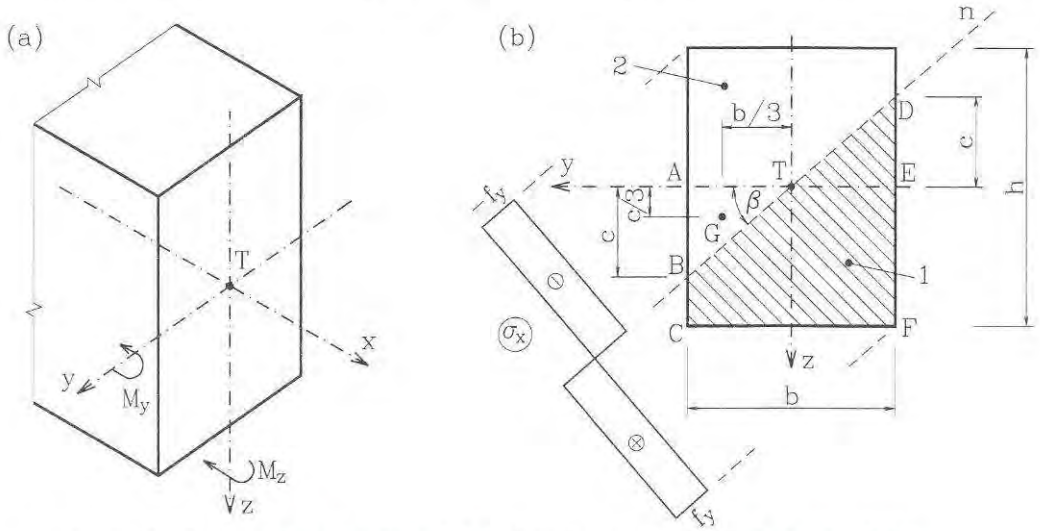
$$y_3 = 0{,}193 \text{ m},\ z_3 = 0;\ y_4 = 0,\ z_4 = -0{,}395 \text{ m}.$$

Pozn.: ověřte u obou alternativ průřezu (příklady 7.8 a 7.9), zda působiště síly F leží v jádru průřezu a srovnejte to s průběhy napětí určenými v příkladech 7.3 a 7.4.

7.4 Mezní plastická únosnost při prostorovém ohybu

V odst. 7.1 jsme se při odvození všech vztahů omezili na pružné působení obecně (prostorově) ohýbaného prutu. Pokud však má materiál prutu schopnost plasticky se deformovat, není jeho únosnost vyčerpána dosažením meze kluzu v krajních vláknech - např. podle relace (7.7). Podobně jako u rovinného ohybu (odst. 3.7) nastupuje **pružnoplastická fáze působení**, při níž se v obecném případě může posouvat i pootáčet neutrální osa tak, aby byly stále zachovány statické podmínky ekvivalence (1.6). V **mezním stavu plastické únosnosti** je již zplastizován celý průřez a další růst vnitřních sil je vyloučen.

Zaměříme se pouze na tuto mezní únosnost a pro jednoduchost se omezíme na prut **obdélníkového průřezu** zatížený obecným ohybovým momentem, jehož složky jsou M_y a M_z. V mezním stavu rozděluje šikmá neutrální osa průřez na část taženou (v obr. 7.13b



Obr. 7.13 *Mezní plastický stav obdélníkového průřezu při obecném ohybu*

je zašrafována - oblast 1) a tlačenou. Obě oblasti mají shodnou plochu, takže je splněna podmínka nulové normálové síly $N = 0$, srov. rovnici (3.31). Z posledních dvou podmínek statické ekvivalence (1.6), vyjadřujících výsledné ohybové momenty v závislosti na velikosti normálových napětí, je

$$\begin{aligned} M_y &= \int_A \sigma_x z \mathrm{d}A = f_y \int_{A_1} z \mathrm{d}A - f_y \int_{A_2} z \mathrm{d}A = f_y \left(S_{1y} - S_{2y} \right) = 2 S_{1y} f_y, \\ M_z &= -\int_A \sigma_x y \mathrm{d}A = -f_y \int_{A_1} y \mathrm{d}A + f_y \int_{A_2} y \mathrm{d}A = -f_y \left(S_{1z} - S_{2z} \right) = 2 \left| S_{1z} \right| f_y. \end{aligned} \tag{b}$$

Využili jsme opět toho, že celkový statický moment plochy k těžištním osám je roven nule, takže např. $S_{1y} + S_{2y} = 0$. Statické momenty plochy 1 k oběma osám budeme uvažovat kladně.

Plochu lichoběžníku *BCFD* (obr. 7.13b) rozložíme na obdélník *ACFE*, záporně uvažovaný (odečítaný) trojúhelník ΔABT a přičítaný ΔTED. Pak je

$$\begin{aligned} S_{1y} &= \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} - \frac{bc}{4} \cdot \frac{c}{3} + \frac{bc}{4} \cdot \left(-\frac{c}{3} \right) = \frac{1}{8} bh^2 \left(1 - \frac{4}{3} \frac{c^2}{h^2} \right), \\ \left| S_{1z} \right| &= -\frac{bc}{4} \cdot \left(-\frac{b}{3} \right) + \frac{bc}{4} \cdot \frac{b}{3} = \frac{1}{6} b^2 h \cdot \frac{c}{h}. \end{aligned} \tag{c}$$

Dosazením (c) do (b) vyjdou ohybové momenty po malé úpravě

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{1}{4} bh^2 f_y \left(1 - \frac{4}{3} \frac{c^2}{h^2} \right) = M_{pl,y} \cdot \left(1 - \frac{4}{3} \frac{c^2}{h^2} \right) \\ M_z &= \frac{1}{4} hb^2 f_y \cdot \frac{4}{3} \frac{c}{h} = M_{pl,z} \frac{4}{3} \frac{c}{h} \end{aligned} \tag{d}$$

kde

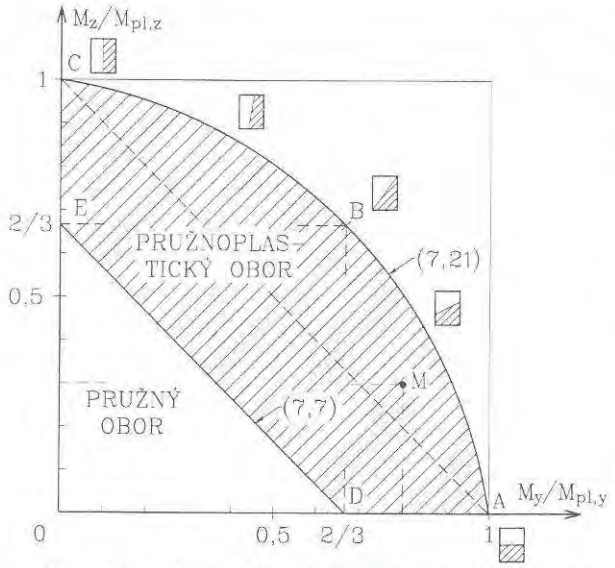
$$M_{pl,y} = \frac{1}{4} bh^2 f_y, \qquad M_{pl,z} = \frac{1}{4} hb^2 f_y \tag{7.20}$$

jsou mezní plastické momenty při ohybu kolem jedné osy - rov. (3.30). Vyloučením poměru c/h z druhé rovnice (d) a dosazením do první rovnice je po úpravě

$$\frac{M_y}{M_{pl,y}} + \frac{3}{4} \left(\frac{M_z}{M_{pl,z}} \right)^2 = 1 \tag{7.21}$$

Tato rovnice představuje **interakční podmínku** pro mezní plastickou únosnost obdélníkového průřezu při současném působení M_y a M_z. Platí pro $c \le h/2$, tj. pro neutrální osu protínající svislou stranu obdélníka; pro $c \ge h/2$ se získá řešení záměnou indexů os.

Na obr. 7.14 je vztah (7.21) znázorněn větví $\overline{AB}$, část $\overline{BC}$ je symetrická podle diagonály. Bod *A* odpovídá rovinnému ohybu kolem osy *y*, bod *C* kolem osy *z*. Bod *B* na symetrále platí pro případ, kdy neutrální osa je uhlopříčkou průřezu. Mezilehlé případy jsou



Obr. 7.14 *Interakční diagram pro obecný ohyb obdélníkového průřezu v plastickém stavu*

schematicky vyznačeny se zašrafovanou taženou oblastí průřezu. Význam interakčního diagramu spočívá v tom, že při kombinaci momentů M_y a M_z, jejichž zobrazení (v bezrozměrném tvaru) padne právě na křivku ABC, nastane mezní plastický stav únosnosti. Stav zobrazený mimo vymezenou oblast (napravo od mezní křivky) není možný - tyto hodnoty momentů není průřez schopen přenést. Pokud zobrazující bod padne dovnitř trojúhelníku ODE, je průřez v pružném stavu ($M_{el} = 2 M_{pl}/3$). Zašrafovaná oblast tedy představuje plastickou rezervu.

Pro jiné průřezy, používané v ocelovém stavitelství (I, U aj.) jsou interakční grafy uvedeny např. v práci [8]. U těchto typů průřezu je plastická rezerva menší než u obdélníka, avšak křivky jsou vždy konvexní, takže náhrada přímkou

$$\frac{M_y}{M_{pl,y}} + \frac{M_z}{M_{pl,z}} \le 1 \tag{7.22}$$

(na obr. 7.14 čárkovaně vyznačená spojnice $\overline{AC}$) je vždy na **bezpečné** straně. Odpovídá relaci (7.7) s tím, že momentové únosnosti se počítají podle teorie plasticity.

Příklad 7.10

Posuďte, zda obdélníkový průřez 40x60 mm přenese v plastickém oboru momenty $M_y = 5{,}76$ kNm a $M_z = 1{,}44$ kNm, je-li mez kluzu uvažována hodnotou $f_y = 200$ MPa.

Řešení:

Mezní momenty k hlavním osám jsou podle (7.20)

$$M_{pl,y} = \frac{1}{4} b h^2 f_y = \frac{1}{4} 0{,}04 \cdot 0{,}06^2 \cdot 200 = 7{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ MNm} = 7{,}2 \text{ kNm},$$

$$M_{pl,z} = \frac{1}{4} h b^2 f_y = \frac{1}{4} 0{,}06 \cdot 0{,}04^2 \cdot 200 = 4{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ MNm} = 4{,}8 \text{ kNm}.$$

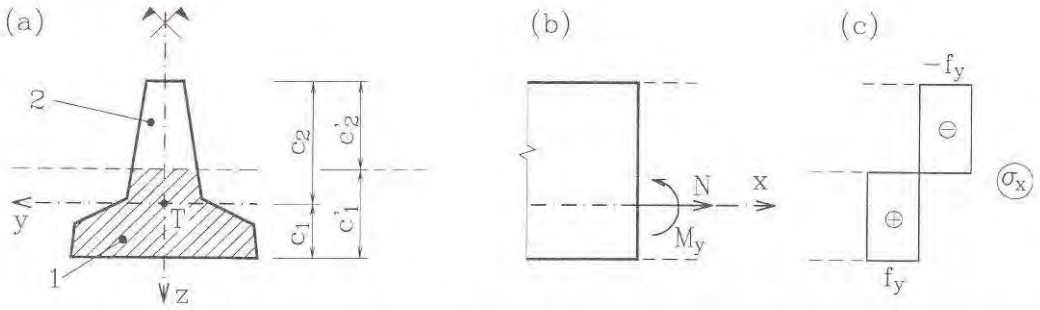
Dosazením do levé strany rovnice (7.21)

$$\frac{5{,}76}{7{,}20}+\frac{3}{4}\left(\frac{1{,}44}{4{,}80}\right)^2=0{,}80+\frac{3}{4}0{,}30^2=0{,}868<1.$$

Průřez tyto momenty v pružnoplastickém oblasti přenese. Zobrazující bod M (obr. 7.10), je uvnitř oblasti ohraničené mezní křivkou.

7.5 Mezní plastická únosnost při mimostředném tahu a tlaku

Uvažujme jednoose symetrický průřez, namáhaný v rovině symetrie xz mimostředným tahem nebo tlakem, tj. kombinací ohybového momentu $M = M_y$ a normálové síly N. Předpokládáme ideální pružnoplastický materiál (bez zpevnění) a hledáme podmínky pro velikost vnitřních sil ve stavu mezní plastické únosnosti, kdy jsou vyčerpány veškeré plastické rezervy v průřezu,



Obr. 7.15 *Mezní plastický stav jednoose symetrického průřezu při mimostředném tahu (kombinaci ohybu s tahem)*

V mezním stavu opět rozděluje neutrální osa n průřez na dvě části, z nichž spodní (označená 1 a zašrafovaná na obr. 7.15a) je při kladných hodnotách N a M_y tažena napětím na mezi kluzu f_y, horní pak tlačena - obr. 7.15c.

Využijeme opět statické podmínky ekvivalence (1.6) a vyjádříme normálovou sílu N a ohybový moment M_y:

$$N=\int_A \sigma_x \mathrm{d}A=f_y\int_{A_1}\mathrm{d}A+\left(-f_y\right)\int_{A_2}\mathrm{d}A=\left(A_1-A_2\right)f_y, \tag{7.23}$$

$$M_y=\int_A \sigma_x z\mathrm{d}A=f_y\int_{A_1} z\mathrm{d}A+\left(-f_y\right)\int_{A_2} z\mathrm{d}A=f_y\left(S_{1y}-S_{2y}\right)=2S_{1y}f_y. \tag{7.24}$$

Poslední rovnice je formálně shodná s rovnicí (3.32), odvozenou pro případ ohybu, tentokrát však plochy A_1 a A_2 nejsou rovny polovině plochy celého průřezu, tj. neplatí

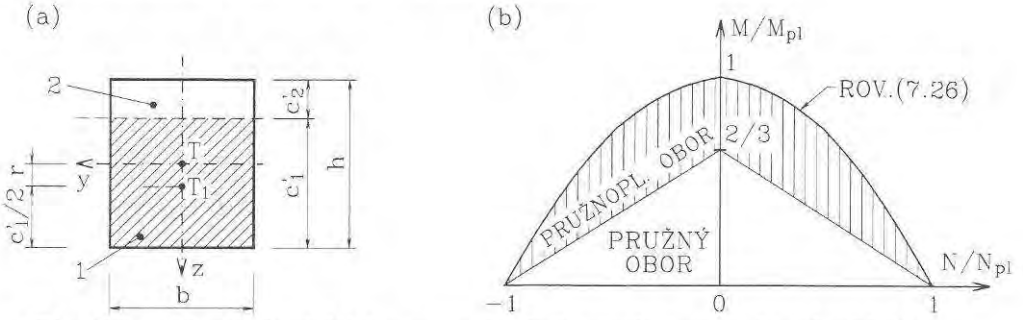
rovnice (3.31). Budeme-li vycházet z určité hodnoty normálové síly N, pak z rovnice (7.23) a z podmínky, že součet ploch A_1 a A_2 je celková plocha průřezu A, vyplývá

$$\frac{N}{f_y} = A_1 - A_2 = A_1 - (A - A_1) = 2A_1 - A,$$

takže

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(A + \frac{N}{f_y}\right), \qquad A_2 = \frac{1}{2}\left(A - \frac{N}{f_y}\right). \tag{7.25}$$

Interakční úlohu vyhledání dvojic hodnot N, M_y jež vyvolají v průřezu stav mezní plastické únosnosti, můžeme tedy formulovat takto: ke zvolené hodnotě normálové síly N určíme z rovnic (7.25) velikost ploch A_1 a A_2, a z nich odvodíme polohu neutrální osy. Z rovnice (7.24) pak určíme ohybový moment M.



Obr. 7.16 *Mezní plastická únosnost obdélníka v mimostředném tahu (tlaku)*

Tak pro obdélníkový průřez podle obr. 7.16a, je-li neutrální osa vzdálena c_1' od spodního okraje průřezu, je podle (7.23) a (7.24)

$$N = (A_1 - A_2)f_y = (bc_1' - bc_2')f_y = b\left[c_1' - (h - c_1')\right]f_y = b(2c_1' - h)f_y, \tag{e}$$

$$M = 2S_{1y}f_y = 2rA_1f_y = 2\left(\frac{h}{2} - \frac{c_1'}{2}\right)\cdot bc_1'f_y = bc_1'(h - c_1')f_y. \tag{f}$$

Z rovnice (e) vyjádříme c_1':

$$c_1' = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{bf_y} + h\right), \tag{g}$$

což je shodné s první rovnicí (7.25) po vydělení šířkou b. Dosazením do výrazu pro ohybové momenty (f), je

$$M = b\frac{1}{2}\left(\frac{N}{bf_y} + h\right)\left[h - \frac{1}{2}\left(\frac{N}{bf_y} + h\right)\right]f_y = \frac{1}{4}bh^2f_y\left[1 - \left(\frac{N}{bhf_y}\right)^2\right]. \tag{h}$$

Použijeme-li opět označení pro mezní plastický moment $M_{pl} = bh^2 f_y/4$ a pro mezní tahovou sílu $N_{pl} = N_R = bhf_y$, můžeme upravit rovnici (h) na tvar

$$\frac{M}{M_{pl}} + \left(\frac{N}{N_{pl}}\right)^2 = 1 \tag{7.26}$$

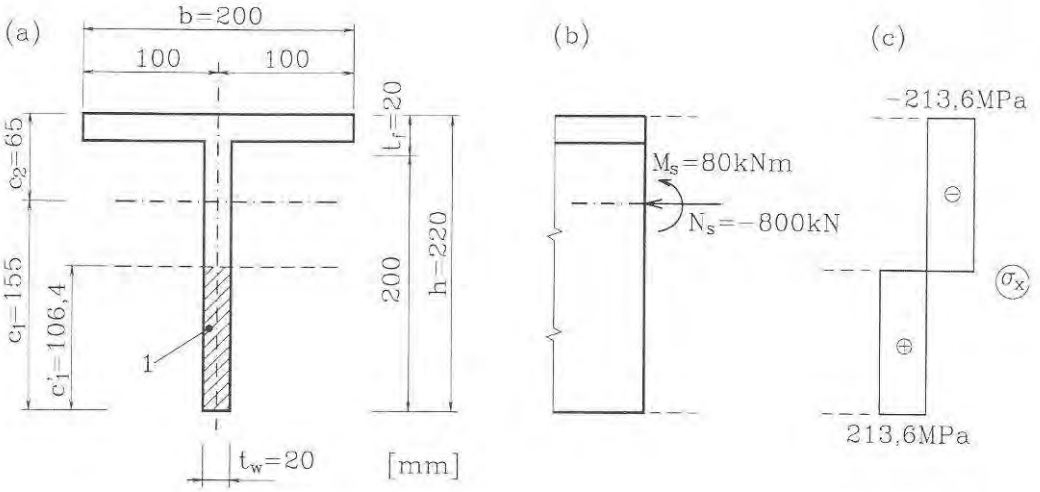
Interakční křivkou pro mimostředný tah (tlak) obdélníkového průřezu v mezním plastickém stavu je tedy kvadratická parabola, jak je znázorněna na obr. 7.16b. Dvěma přímkami je vymezen pružný obor - rov. (7.15) při ohybu jen v jedné rovině. Oblast mezi oběma mezními obálkami, na obr. 7.16 zašrafovaná, představuje pružnoplastický obor působení a tedy i plastickou rezervu. Podmínku spolehlivosti pak můžeme formulovat

$$\frac{M_S}{M_{pl,R}} + \left(\frac{N_S}{N_{pl,R}}\right)^2 \leq 1 \tag{7.27}$$

Platí-li relační znak nerovnosti, je zobrazující bod uvnitř oblasti omezené parabolami, při znaku rovnosti (plní rovnici 7.27). je na hraniční křivce - je dosaženo mezní únosnosti.

Příklad 7.11

Ocelový svařovaný T-průřez podle obr. 7.17 je namáhán tlakovou silou N_S = - 800 kN a ohybovým momentem M_S = 80 kNm. Posuďte, zda vyhoví při mezi kluzu f_{yd} = 213,6 MPa.



Obr. 7.17 *Symetrický T-průřez při mimostředném tlaku (mezní plastický stav)*

Řešení:

Určíme plochu průřezu a polohu těžiště

$$A = 2 \cdot 20 \cdot 200 = 2 \cdot 4000 = 8000 \text{ mm}^2,$$

$$c_1 = \frac{1}{A}\sum A_i r_i = \frac{1}{8000}\left(4000 \cdot 100 + 4000 \cdot 210\right) = 155 \text{ mm},$$

$$c_2 = h - c_1 = 220 - 155 = 65 \text{ mm}.$$

Podle první rovnice (7.25) určíme polohu tažené (spodní) oblasti při $N_{pl,R} = N_S$

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(A + \frac{N_S}{f_{yd}}\right) = \frac{1}{2}\left(8{,}0 \cdot 10^3 - \frac{800 \cdot 10^3}{213{,}6}\right) = 2127 \text{ mm}^2,$$

odkud vzdálenost neutrální osy od spodního okraje

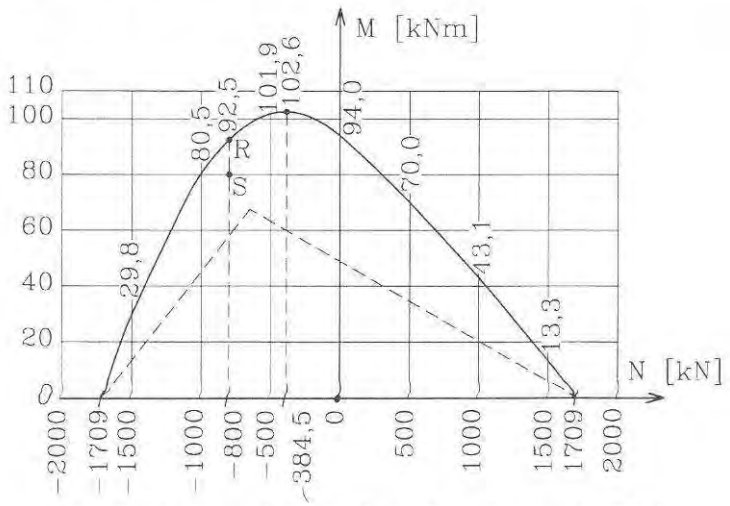
$$c_1' = \frac{A_1}{t_w} = \frac{2127}{20} = 106{,}4 \text{ mm}.$$

Ohybový moment, který průřez v mezním stavu přenese v interakci s danou normálovou silou získáme z rovnice (7.24)

$$M = M_R = 2S_{1y}f_{yd} = 2t_w c_1'\left(c_1 - \frac{c_1'}{2}\right)f_{yd} = 2 \cdot 20 \cdot 106{,}4\left(155 - \frac{106{,}6}{2}\right)213{,}6 =$$

$$= 92{,}5 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 92{,}5 \text{ MNm}.$$

Při dané normálové síle je tedy momentová únosnost větší než je působící moment ($M_R > M_S$), takže průřez spolehlivě danou kombinaci přenese - viz též grafické znázornění na obr. 7.18 - body S, R.



Obr. 7.18 *Interakční graf pro T-průřez na obr. 7.16*

Jako samostatné cvičení ověřte další kombinace N, M jak jsou uvedeny na interakčním grafu na obr. 7.18. Určete ohraničení pružné oblasti (na obrázku čárkovaně).

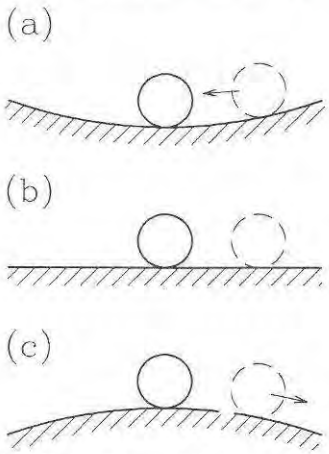
8 Stabilita a vzpěrná pevnost prutů

8.1 Eulerovo řešení stability přímého pružného prutu

Štíhlé pruty, namáhané tlakem, při svém selhání prakticky vždy vybočí ze svého původně přímého tvaru (ohnou se) - jde o tzv. **vzpěrný tlak**, nikoli o tlak prostý. Odolnost proti porušení pak označujeme jako vzpěrnou pevnost.

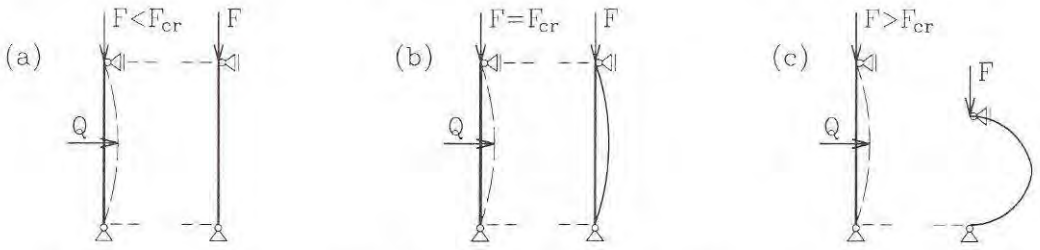
Vzpěrný tlak je velmi složitý jev a u skutečných prutů ve stavebních konstrukcích je ovlivněn řadou faktorů materiálových, geometrických, silových i jiných (počáteční napjatost atd.). Nejjednodušším modelem, na němž budeme nejprve otázku vzpěru analyzovat, je **ideální pružný přímý prut** dokonale centricky (osově) zatížený. V tomto případě půjde o problém **ztráty stability** prutu při dosažení určité kritické hodnoty tlakové síly.

Připomeňme si nejprve pojem stability na jednoduchém příkladu z mechaniky tuhých těles: kulička v prohlubni se po vychýlení (ma obr. 8.1a čárkovaně) vrátí do původní polohy, je tedy ve stabilním stavu rovnováhy. Naopak při vrcholové poloze (obr. 8.1c) po sebemenším impulsu pokračuje v pohybu dále (do nové stabilní polohy), její původní rovnovážný stav byl labilní, tedy nestabilní. Mezilehlý případ (obr. 8.1b) představuje indiferentní stav, při němž je rovnováha možná jak v původním, tak i v soumezném vychýleném stavu (výchylky si představujeme velmi malé). Stabilitu můžeme tedy charakterizovat jako **schopnost** soustavy vychýlené nepatrně z počátečního tvaru **vracet se do původního stavu**, jakmile pomine příčina, jež vychýlení vyvolala. Je-li soustava nestabilní (labilní) pokračuje i po odstranění zdroje vychýlení pohyb samovolně dále.



Obr. 8.1 *K vysvětlení pojmu stability*

Otázku stability tlačeného ideálního prutu můžeme formulovat takto: k prutu osově tlačenému silou F přiložíme např. příčnou sílu Q, jíž prut vychýlíme, a pak tuto sílu odejmeme. Pokud se prut po pominutí dočasného impulsu vrátí do původního stavu, tj. znovu se napřímí



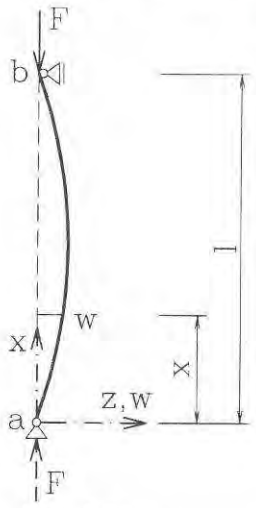
Obr. 8.2 *Stabilní, indiferentní a nestabilní stav tlačeného ideálního prutu*

(obr. 8.2a), je jeho stav **stabilní**. Naopak samovolný další růst deformací prutu (jeho vybočení - obr. 8.2c) znamená **nestabilní** stav. Mezilehlý případ, kdy (teoreticky) zůstane prut ohnut, ale jeho průhyby nadále nerostou, je rozhraním mezi oběma předešlými případy a tomu odpovídající síla se označuje jako **kritická síla** F_{cr}.

Její vyšetření je možné různými postupy (též pomocí energetických metod); přidržíme se postupu, který použil Euler již v r.1744, a který vychází z diferenciální rovnice ohybové čáry. Použijeme přitom **teorie II. řádu**, tj. statické účinky budeme vyšetřovat na deformovaném prutu, neboť jedině tak můžeme do úvahy zahrnout ohybové momenty vyvolané tlakovou silou na rameni závislém na velikosti průhybu, jež jsou pro řešení podstatné. I nadále však budeme pokládat deformace za malé, takže pro křivost prutu zůstává v platnosti zjednodušená rovnice (4.3) a z ní odvozené diferenciální rovnice (4.4) a (4.5). Použití teorie 2. řádu však vede ke geometrické nelinearitě úlohy a omezuje užití principu superpozice, jak bude ukázáno později.

● Prut oboustranně kloubově podepřený

Vyšetříme nejprve oboustranně kloubově podepřený pružný prut stálého průřezu zatížený tlakovou silou F (na obr. 8.3 je již znázorněn ve vybočeném tvaru). Z momentových podmínek plyne, že vodorovné podporové reakce jsou rovny nule, takže ohybový moment v obecném průřezu, počítaný podle teorie II. řádu, tedy na deformovaném prutu, je



Obr. 8.3

$$M = M(x) = Fw. \tag{a}$$

Dosazením do diferenciální rovnice ohybové čáry druhého řádu (4.4) je

$$w'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{F}{EI}w \tag{b}$$

(pro přehlednost zapisujeme bez indexů: $M = M_y$, $I = I_y$). Zavedeme označení

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI} \tag{8.1}$$

a rovnice (b) pak bude po úpravě

$$w'' + \alpha^2 w = 0. \tag{8.2}$$

Její obecné řešení je

$$w = C_1 \sin\alpha x + C_2 \cos\alpha x, \tag{c}$$

jak lze ověřit dosazením do rovnice (8.2). Okrajové podmínky požadují, aby průhyb na obou koncích, tj. v $x = 0$ a $x = l$ byl nulový, odkud

$$C_2 = 0, \qquad C_1 \sin\alpha l = 0. \tag{8.3}$$

Pokud by bylo $C_1 = 0$, znamenalo by to, že prut je přímý, $w(x) = 0$; jde o tzv. triviální řešení rovnice (8.2). Aby byly průhyby nenulové, musí tedy být

$$\sin \alpha l = 0, \tag{8.4}$$

což je splněno při

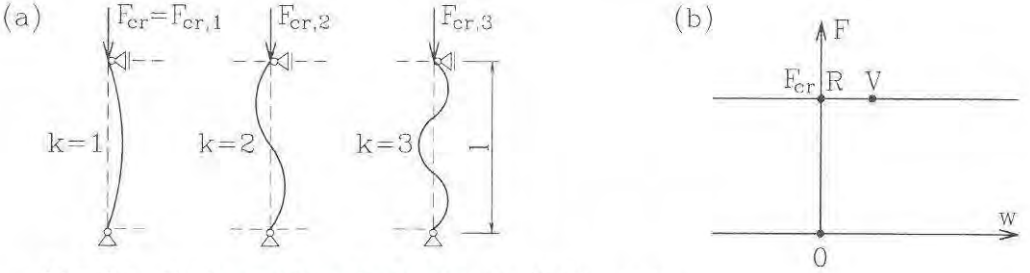
$$\alpha l = k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{8.5}$$

Dosazením do rovnice (c) je tvar ohybové čáry

$$w = C_1 \sin \frac{k\pi x}{l} \tag{8.6}$$

a dosazením z (8.5) do rovnice (8.1) po úpravě

$$F_{cr,k} = F_k = k^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2}. \tag{8.7}$$



Obr. 8.4 *Ztráta stability kloubově podepřeného prutu*

Z řešení úlohy tedy vyplývá, že prut může vybočit ve tvaru sinusovky o k půlvlnách při dosažení příslušné k-té kritické síly (obr. 8.4a). Praktický význam má nejnižší hodnota (pro $k = 1$), kterou označujeme jako **Eulerovu kritickou sílu**

$$F_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}, \tag{8.8}$$

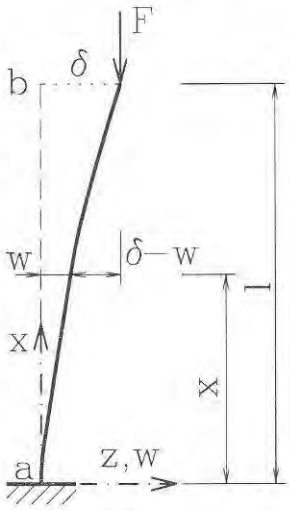
při níž vybočí prut ve tvaru jedné sinusové půlvlny. Konstanta C_1 zůstává neurčena, což odpovídá indiferentnímu stavu. Na obr. 8.4b je vynesena závislost mezi průhybem w a tlakovou silou F: pokud $F < F_{cr}$, je prut stabilní a zůstává přímý, po dosažení kritické síly $F = F_{cr}$ může (teoreticky) zůstat prut přímý - bod R, nebo se může prohnout (bod V) a to o libovolnou hodnotu.

Pokud prut vybočí v rovině xz, jak jsme při odvození předpokládali, pak v rovnici (8.8) znamená $I = I_y$; shodné řešení však platí (při stejném uložení) i v rovině xy - pak $I = I_z$. Je-li prut v obou hlavních rovinách uložen shodně, pak se uplatní vždy menší z obou momentů setrvačnosti a prut vybočí v rovině kolmé k ose minimální tuhosti.

Úloha stanovit kritickou sílu jistým způsobem podepřeného prutu představuje z matematického hlediska problém vlastních hodnot (čísel): pro homogenní diferenciální rovnici (8.2) určit její koeficient α^2 tak, aby existovalo netriviální, tj. nenulové řešení. Vede to na

podmínku, že determinant soustavy okrajových podmínek je roven nule; v předchozí úloze se tato podmínka redukovala na rovnici (8.4).

● Konzolový prut



Obr. 8.5

Přepokládáme opět prut stálého průřezu EI = konst. Průhyb volného konce označime δ; pak ohybový moment v obecném řezu je

$$M = -F\,(\delta - w) \tag{d}$$

a dosazením do diferenciální rovnice (4.4)

$$w'' = -\frac{M}{EI} = \frac{F}{EI}(\delta - w) \tag{e}$$

Po úpravě a zavedením α^2 podle (8.1) je

$$w'' = +\alpha^2 w = \alpha^2 \delta. \tag{f}$$

Obecné řešení homogenní rovnice je shodné s předešlou úlohou - rov. (c), partikulární integrál nehomogenní rovnice (f) je roven δ, neboť $w = \delta$ je řešení úplné rovnice (f), jak se lze přesvědčit dosazením. Je tedy

$$w = C_1 \sin\alpha x + C_2 \cos\alpha x + \delta. \tag{g}$$

Pro tři neznámé veličiny C_1, C_2 a δ máme k dispozici tři podmínky na okrajích:

$$\begin{aligned} w(0) = 0: &\quad C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 + \delta = C_2 + \delta = 0, \\ w'(0) = 0: &\quad \alpha C_1 \cos 0 - \alpha C_2 \sin 0 = \alpha C_1 = 0, \\ w(l) = \delta: &\quad C_1 \sin\alpha l + C_2 \cos\alpha l + \delta = \delta. \end{aligned}$$

Řešíme-li tyto tři rovnice postupně (nebo položíme-li determinant této soustavy roven nule), obdržíme stabilitní podmínku ve tvaru

$$\cos\alpha l = 0. \tag{h}$$

Nejnižší kořen je $\alpha l = \pi/2$ a jeho dosazením do rovnice (8.2) po úpravě je Eulerova kritická síla pro konzolu

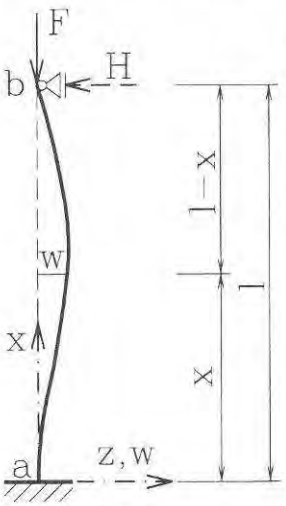
$$F_{cr} = \frac{\pi^2}{4}\frac{EI}{l^2}, \tag{8.9}$$

je tedy čtvrtinou kritické síly kloubově podepřeného prutu. Průhyb tvoří kosinová křivka

$$w = C_2\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2l}\right), \tag{8.10}$$

kde C_2 (= δ) je opět neurčená veličina.

● Prut jednostranně vetknutý



Obr. 8.6

Jednostranně vetknutý prut (obr. 8.6) je jedenkrát staticky neurčitý. V kloubové podpoře zavedeme staticky neurčitou vodorovnou podporovou reakci H, takže ohybový moment je

$$M = Fw + H(l - x), \tag{i}$$

a pak z rov. (4.4) plyne

$$w'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{F}{EI}w - \frac{H}{EI}(l - x).$$

Užitím rovnice (8.1) a úpravou má diferenciální rovnice tvar

$$w'' + \alpha^2 w = -\alpha^2 \frac{H}{F}(l - x). \tag{j}$$

Její obecné řešení a první derivace jsou

$$\begin{aligned} w &= C_1 \sin\alpha x + C_2 \cos\alpha x - \frac{H}{F}(l - x), \\ w' &= \alpha C_1 \cos\alpha x - \alpha C_2 \sin\alpha x + \frac{H}{F}. \end{aligned} \tag{k}$$

Poslední člen vyjadřuje partikulární řešení úplné rovnice (j). Okrajové podmínky ve vetknutí $x = 0$ a v kloubové podpoře $x = l$ jsou:

$$\begin{aligned} w(0) = 0: &\quad C_2 - \frac{H}{F}l = 0, \\ w'(0) = 0: &\quad \alpha C_1 + \frac{H}{F} = 0, \\ w(l) = 0: &\quad C_1 \sin\alpha l + C_2 \cos\alpha l = 0. \end{aligned}$$

Dosazením z prvních dvou rovnic do třetí vyjde po malé úpravě

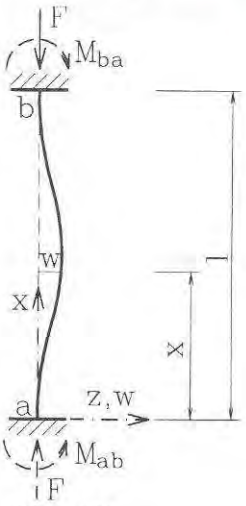
$$\alpha l \cos\alpha l = \sin\alpha l \quad \Rightarrow \quad \alpha l = \mathrm{tg}\,\alpha l. \tag{l}$$

Řešení této trancendentní stabilitní rovnice se provede numericky nebo graficky; vyjde $\alpha l = 4{,}493$. Z rovnice (8.1) je pak

$$F_{cr} = \alpha^2 EI = \frac{4{,}493^2}{l^2} EI = 20{,}19\frac{EI}{l^2}. \tag{8.11}$$

● Oboustranně vetknutý prut

Oboustranně vetknutý prut je obecně 2x staticky neurčitý. Vzhledem k symetrii vůči rovině $x = l/2$ jsou však vodorovné síly v podporách rovny nule a jedinou staticky neurčitou neznámou je moment v obou vetknutích $M_{ba} = M_{ab}$. Ohybový moment je



Obr. 8.7

$$M = Fw - M_{ba}, \tag{m}$$

a shodným postupem jako v předešlém odvodíme diferenciální rovnici

$$w'' + \alpha^2 w = \alpha^2 \frac{M_{ba}}{F}. \tag{n}$$

Řešení je

$$w = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + \frac{M_{ba}}{F},$$
$$w' = \alpha C_1 \cos \alpha x - \alpha C_2 \sin \alpha x$$

Pro tři neznámé veličiny (C_1, C_2 a M_{ba}) napíšeme deformační okrajové podmínky

$$w(0) = 0: \qquad C_2 + \frac{M_{ba}}{F} = 0,$$
$$w'(0) = 0: \qquad \alpha C_1 = 0,$$
$$w(l) = 0: \qquad C_1 \sin \alpha l + C_2 \cos \alpha l + \frac{M_{ba}}{F}.$$

Jejich řešením vyjde

$$\frac{M_{ba}}{F} = -C_2, \quad C_1 = 0, \quad C_2 \cos \alpha l - C_2 = 0 \Rightarrow \cos \alpha l = 1 \ . \tag{o}$$

Stabilitní rovnice je splněna při $\alpha l = 2\pi$, odkud z rovnice (8.1) je Eulerova kritická síla pro oboustranně vetknutý prut

$$F_{cr} = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2}, \tag{8.12}$$

je tedy čtyřnásobná ve srovnání s kloubově podepřeným prutem - rov. (8.8).

● Shrnutí základních Eulerových případů. Vzpěrná délka

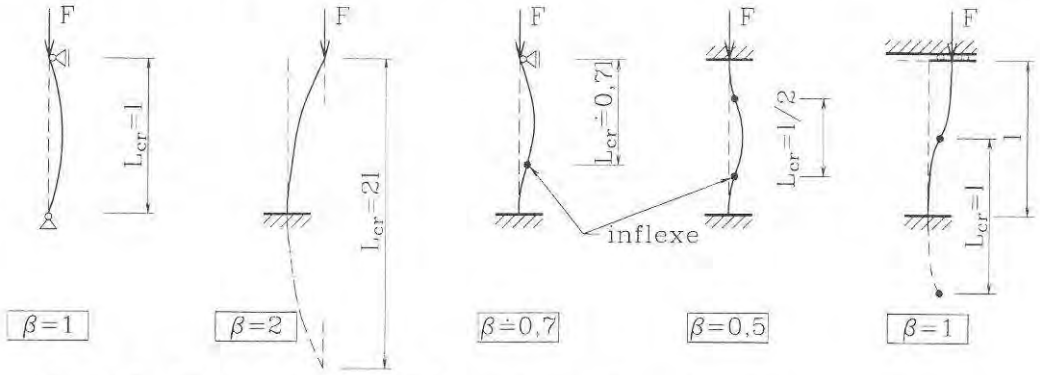
Odvozené základní Eulerovy případy (a také jiné další) můžeme formálně sjednotit tak, že kritickou sílu pružného prutu stálého průřezu vyjádříme souhrnně ve tvaru

$$F_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L_{cr}^2}, \tag{8.13}$$

kde

$$L_{cr} = \beta l \tag{8.14}$$

je tzv. **vzpěrná délka** (též: volná, efektivní, kritická apod.), pomocí níž převádíme pruty rozličně uložené na základní případ, jímž je prut kloubově uložený - rov. (8.8). Vzpěrnou



Obr. 8.8 *Přehled základních Eulerových případů, vzpěrné délky*

délku prutu můžeme tedy definovat jako délku **kloubově uloženého prutu** shodné ohybové tuhosti EI, který ztratí stabilitu (vybočí) při **stejné kritické síle** F_{cr}. Tak např. pro jednostranně vetknutý prut srovnáním (8.13) a (8.11) vyjde

$$\pi^2 \frac{EI}{L_{cr}^2} = 20{,}19 \frac{EI}{l^2} \quad \Rightarrow \quad L_{cr} = \frac{\pi l}{\sqrt{20{,}19}} = 0{,}699l \approx 0{,}7l,$$

takže součinitel v rovnici (8.14) je pro tento způsob uložení $\beta \approx 0{,}7$.

Vzpěrná délka L_{cr} je současně délkou sinusové půlvlny ohybové čáry po vybočení, tedy je to **vzdálenost inflexních bodů**, jak je vyznačeno na obr. 8.8 spolu s hodnotami součinitele vzpěrné délky β.

Z velikosti kritické síly můžeme určit **kritické napětí** σ_{cr} (Eulerovo, tedy při pružné odezvě prutu), čímž rozumíme hodnotu tlakového napětí (v absolutní hodnotě) v okamžiku dosažení kritické síly, avšak před vybočením, tj. při dostředném tlaku:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \pi^2 \frac{EI}{AL_{cr}^2} = \pi^2 E \frac{i^2}{L_{cr}^2} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} \tag{8.15}$$

kde jsme označili

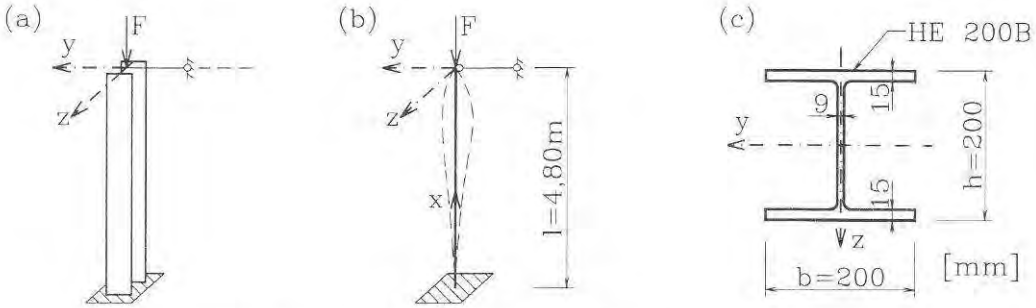
$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i} \tag{8.16}$$

- je to tzv. **štíhlost** (štíhlostní poměr) prutu. Přitom i je poloměr setrvačnosti k některé z hlavních centrálních os setrvačnosti průřezu, tedy i_y nebo i_z. Vyšetřujeme-li ztrátu stability vybočením v rovině xz, uplatní se i_y a naopak (poloměr setrvačnosti se vždy vztahuje k ose, jež je při vybočení ohybem rovnoběžná s neutrální osou a je tedy k rovině vybočení kolmá).

Štíhlostní poměr λ je bezrozměrné číslo, které souhrným způsobem charakterizuje geometrické parametry prutu a jeho podepření. Rovnice (8.15) pro kritické napětí v pružném stavu je rovnicí hyperboly (tzv. Eulerova hyperbola); později ji podrobíme bližší diskusi.

Příklad 8.1

Ocelový válcovaný nosník profilu HE 200B má délku 4,80m, je na spodním konci vetknut a na horním je volně posuvný ve směru osy z a kloubově podepřený v rovině xy - obr. 8.9. Pro obě hlavní roviny určete Eulerovu kritickou sílu, štíhlost a kritické napětí (E = 210000MPa).



Obr. 8.9 *Posouzení stability prutu v pružném oboru*

Řešení:

Ze Statických tabulek pro HE 200B vyhledáme: $A = 7{,}81 \cdot 10^3$ mm^2, $I_y = 57{,}0 \cdot 10^6$ mm^4, $i_y = 85{,}4$ mm; $I_z = 20{,}0 \cdot 10^6$ mm^4, $i_z = 50{,}7$ mm. Vzhledem k podepření působí prut v rovině xz jako konzola, v rovině xy jako jednostranně vetknutý prut, takže pro vybočení v rovině xz, tedy kolmo k ose y:

$$L_{cr,y} = 2l = 2 \cdot 4{,}80 = 9{,}60 \text{ m}, \quad \lambda_y = \frac{L_{cr,y}}{i_y} = \frac{9{,}60}{0{,}0854} = 112{,}4,$$

$$F_{cr} = \pi^2 \frac{EI_y}{L_{cr}^2} = \pi^2 \frac{210000 \cdot 57{,}0 \cdot 10^{-6}}{9{,}60^2} = 1{,}282 \text{ MN}, \quad \sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{1{,}282}{7{,}81 \cdot 10^{-3}} = 164{,}1 \text{ MPa}.$$

V rovině xy:

$$L_{cr,z} = 0{,}7l = 0{,}7 \cdot 4{,}80 = 3{,}36 \text{ m}, \quad \lambda_z = \frac{L_{cr,z}}{i_z} = \frac{3{,}36}{0{,}0507} = 66{,}3,$$

$$F_{cr} = \pi^2 \frac{EI_z}{L_{cr}^2} = \pi^2 \frac{210000 \cdot 20{,}0 \cdot 10^{-6}}{3{,}36^2} = 3{,}672 \text{ MN}, \quad \sigma_{cr} = \frac{3{,}672}{7{,}81 \cdot 10^{-3}} = 470{,}2 \text{ MPa}.$$

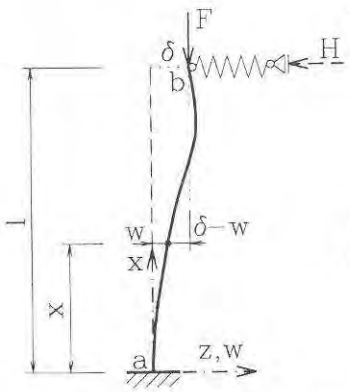
Prut ztratí stabilitu vybočením v rovině xz.

8.2 Obecnější případy zatížení a podepření prutu

Základní Eulerovy úlohy řeší jen malý zlomek všech možných případů ztráty stability pružných prutů. Při obecnějším podepření, zatížení nebo průřezové změně je stanovení kritického zatížení obtížnější a proto se často řeší přibližnými numerickými metodami, jak o tom bude zmíněno později. Pro ilustraci postupu uvedeme jen řešení některých jednodušších úloh.

● Pružně podepřený konzolový prut

Uvažujme prut stálého průřezu, který je na spodním konci vetknut a na horním pružně podepřen - obr. 8.10. Pérová konstanta (poddajnost) pružného podepření je c [m/N], tj. platí vztah mezi posunem a vodorovnou silou $\delta = cH$. Má se odvodit kritická síla F_{cr}, při níž prut ztratí stabilitu a vybočí ve sledované rovině.



Obr. 8.10 *Pružně podepřená konzola*

Ohybový moment v obecném průřezu je

$$M = -F(\delta - w) + H(l - x).$$

Dosazením do diferenciální rovnice ohybové čáry (4.4) je

$$w'' = -\frac{M}{EI} = \frac{F}{EI}(\delta - w) - \frac{H}{EI}(l - x) \qquad (p)$$

Použijeme-li opět označení (8.1) a zavedeme-li bezrozměrnou poměrnou poddajnost pružného podepření

$$\kappa = c\frac{EI}{l^3}, \qquad (q)$$

pak diferenciální rovnice (p) nabude tvar

$$w'' + \alpha^2 w = \alpha^2 \delta - \frac{\delta}{\kappa l^3}(l - x) \qquad (r)$$

a jejím řešení je

$$w = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + \delta - \frac{\delta}{\kappa l (\alpha l)^2}(l - x).$$

Okrajové podmínky ve vetknutí a na horním konci jsou

$$w(0) = 0: \quad C_2 + w_b - \frac{\delta}{\kappa (\alpha l)^2} = 0,$$

$$w'(0) = 0: \quad \alpha C_1 + \frac{\delta}{\kappa l (\alpha l)^2} = 0,$$

$$w(l) = w_b: \quad C_1 \sin \alpha l + C_2 \cos \alpha l + \delta = \delta.$$

Z podmínky, že determinant této soustavy se rovná nule, nebo vyjádřením konstant C_1 a C_2 z prvních dvou rovnic a dosazením do třetí rovnice, získáme stabilitní podmínku ve tvaru

$$\frac{\alpha l - \operatorname{tg} \alpha l}{(\alpha l)^3} = \kappa. \qquad (8.17)$$

Pro konkrétní hodnotu κ řešíme numericky tuto rovnici a z vypočtené hodnoty αl je *hledaná kritická síla*

$$F_{cr} = (\alpha l)^2 \frac{EI}{l^2}. \qquad (8.18)$$

Tak např. pro κ = 1/3, což odpovídá kloubovému spřažení dvou shodných konzol, z nichž jedna není svisle zatížena - srov. první rovnici (4.14) - vyjde αl = 2,204 a pak $F_{cr} = 4{,}858\ EI/l$.

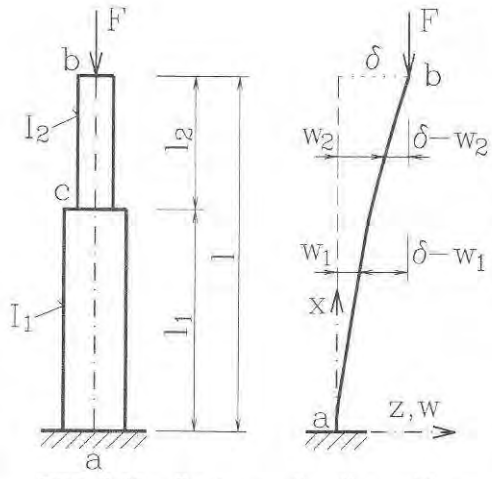
Bude-li poddajnost pružného podepření velká ($c \to \infty$), ztotožní se vyšetřovaný případ s konzolou na horním konci volnou, naopak při $c \to 0$ splyne s případem jednostranně vetknutého prutu.

● Konzola proměnného průřezu

Konzola o celkové délce l má ve spodní části moment setrvačnosti I_1, v horní I_2 - obr. 8.11. Má se určit kritická hodnota síly F působící na volném konci.

Řešení rozdělíme na dva intervaly: ve spodním úseku ($x \le l_1$) je označíme w_1, v horním ($x \ge l_1$) pak w_2. Dále zavedeme

$$\alpha_1^2 = \frac{F}{EI_1}, \qquad \alpha_2^2 = \frac{F}{EI_2}. \qquad (s)$$



Obr. 8.11 *Prut proměnného průřezu*

Pro spodní část prutu je diferenciální rovnice

$$w_1'' + \alpha_1^2 w_1 = \alpha_1^2 \delta \qquad (t)$$

- srov. rov. (f) při odvození kritického břemene pro konzolu stálého průřezu. Analogicky k rovnici (g) pak je řešení pro spodní úsek

$$w_1 = C_1 \sin\alpha_1 x + C_2 \cos\alpha_1 x + \delta,$$

$$w' = \alpha_1 C_1 \cos\alpha_1 x - \alpha_1 C_2 \sin\alpha_1 x.$$

Z okrajových podmínek v $x = 0$, tedy ve vetknutí, plyne

$$w_1(0) = 0: \; C_2 + \delta = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = -\delta,$$

$$w_1'(0) = 0: \; C_1 = 0.$$

Průhyb ve spodním úseku a jeho derivace tedy jsou

$$w_1 = \delta(1 - \cos\alpha_1 x), \quad w_1' = \delta\alpha_1 \sin\alpha_1 x \qquad (u)$$

Diferenciální rovnice pro horní úsek je analogická jako pro spodní úsek - rov. (t), z níž plyne záměnou indexů; její řešení je

$$w_2 = D_1 \sin\alpha_2 x + D_2 \cos\alpha_2 x + \delta, \; w_2' = \alpha_2 D_1 \cos\alpha_2 x - \alpha_2 D_2 \sin\alpha_2 x.$$

Nyní uplatníme podmínku, že na volném konci $w_2 = \delta$ a podmínku spojitosti průhybu na rozhraní intervalů $w_1(l_1) = w_2(l_1)$.

$$D_1 \sin\alpha_2 l + D_2 \cos\alpha_2 l + \delta = \delta,$$

$$D_1 \sin\alpha_2 l_1 + D_2 \cos\alpha_2 l_1 + \delta = \delta(1 - \cos\alpha_1 l_1).$$

Řešením těchto dvou rovnic vyjde po úpravě

$$D_2 = -D_1 \mathrm{tg}\alpha_2 l, \qquad D_1 = \delta \frac{\cos\alpha_1 l_1 \cos\alpha_2 l}{\sin\alpha_2 l_2}. \qquad (v)$$

Konečně pak použijeme podmínku spojitosti první derivace na hranici obou intervalů (společná tečna):

$$\delta\alpha_1 \sin\alpha_1 l_1 = \alpha_2 D_1 \cos\alpha_2 l_1 - \alpha_2 D_2 \sin\alpha_2 l_1.$$

Dosazením konstant D_1 a D_2 z rovnic (v) do tohoto vztahu vyjde po úpravě stabilitní podmínka ve tvaru

$$\mathrm{tg}\alpha_1 l_1 \cdot \mathrm{tg}\alpha_2 l_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \tag{8.19}$$

Pro konkrétní poměry I_2/I_1 a l_2/l_1 se pak řeší rovnice (8.19) postupnými aproximacemi. Tak např. je-li $I_2 = 0{,}2\ I_1$ a $l_2 = 0{,}5 l_1$ (tj. $l_1 = 2l/3$, $l_2 = l/3$), pak z rovnic (s) odvodíme

$$\mathrm{tg}\alpha_1 l_1 \ \mathrm{tg}\ 1{,}118\alpha_1 l_1 = 2{,}236,$$

jejímž řešením vyjde $\alpha_1 l_1 = 0{,}9255$ a kritická síla je pak

$$F_{cr} \approx 1{,}93\frac{EI_1}{l^2},$$

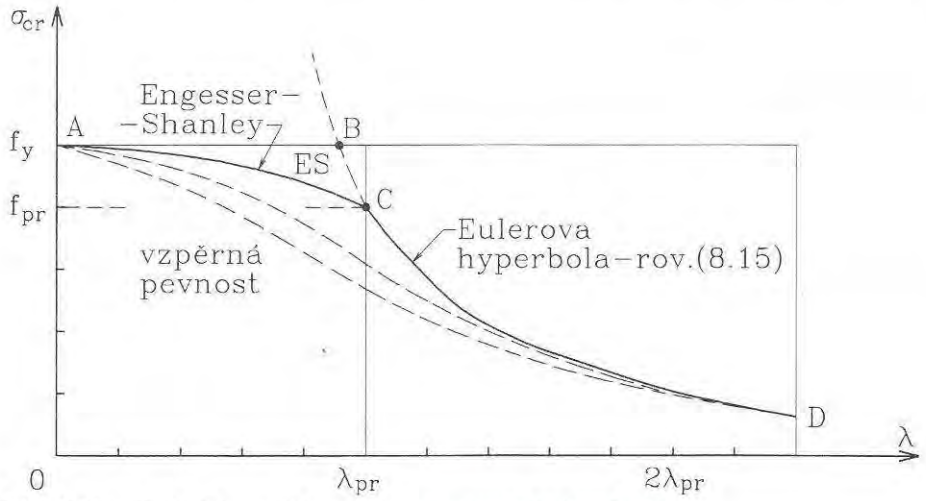
tedy asi o 22% menší než pro konzolu stálého průřezu při $I = I_1$.

Z uvedených řešení je zřejmé, že řešení stabilitních úloh v uzavřeném tvaru ("přesné") je obtížné a proto se vyvinuly přibližné metody, založené většinou na energetických principech. Výsledky řešení různých typů úloh jsou **tabelovány** v literatuře a přibližné vztahy jsou uváděny v normách pro navrhování konstrukcí.

V současné době umožňuje výpočetní technika využití přibližných metod (především metody konečných prvků) s takovou hustotou dělení, že výsledky řešení jsou prakticky přesné.

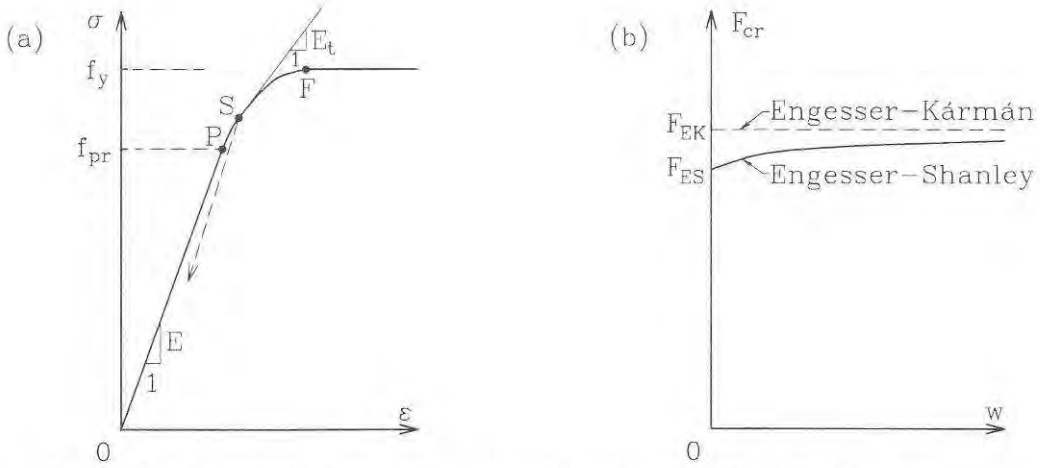
8.3 Ztráta stability v pružnoplastickém oboru

Eulerovo řešení stability přímého prutu předpokládá lineárně pružné působení, tj. platnost Hookova zákona. Při malých štíhlostech (u běžné oceli zhruba pro $\lambda < 93$) je však



Obr. 8.12 *Kritické napětí v pružném a nepružném oboru*

Eulerovo kritické napětí σ_{cr} dané rovnicí (8.15) vyšší než mez kluzu f_y, limitně pak při $\lambda \to 0$ roste nade všechny meze. Je to zřejmé též z grafického znázornění, kde se σ_{cr} odpovídající rovnici (8.15) zobrazí jako tzv. Eulerova hyperbola - obr. 8.12.



Obr. 8.13 *Pracovní diagram materiálu, kritická síla v nepružném oboru*

Kdybychom přijali předpoklad, že materiál je ideálně pružnoplastický, tj. řídí se diagramem podle obr. 1.12, pak by pružné řešení platilo až do hodnoty $\sigma_{cr} = f_y$. Tomu na obr. 8.12 odpovídá bod B; úsek $\overline{AB}$ bychom pak pokládali za prostý tlak, u něhož se vpěr neuplatní, křivku $\overline{BD}$ pak za vyjádření vzpěru.

Výsledky zkoušek však takové ostré rozmezí mezi oběma případy nepotvrzovaly a proto se zaváděly různé empirické interpolace (Tetmayerova přímka, Bleichova parabola) často používané dodnes. O řešení vycházející z reálného pracovního diagramu materiálu se pokusil Engesser tím, že modul pružnosti E nahradil v pružnoplastické oblasti tzv. tečným modulem E_t, což je sklon tečny ke křivce $\sigma(\varepsilon)$ v určitém místě - obr. 8.13a (bod S). Tento postup se proto též označuje jako **metoda tečného modulu**. Kritické napětí je tedy

$$\sigma_{cr} = \pi^2 \frac{E_t}{\lambda^2}. \tag{8.20}$$

Tato metoda byla podrobena kritice (Jasinski, Karmán) proto, že nebrala v úvahu tu okolnost, že při vybočení dochází na vnější straně průřezu k odlehčení, které probíhá pružně (čárkovaně na obr. 8,13a). Byla proto vypracována metoda redukovaného modulu (Engesser - Kármánova), která vede k vyšší únosnosti. Později Shanley prokázal, že metoda tečného modulu poskytuje sílu, při které vybočení začíná, kdežto metoda redukovaného modulu pak osovou tlakovou sílu, při níž se mohou deformace rozvíjet neomezeně - obr. 8.13b. Rozdíl mezi výsledky získanými oběma postupy není významný, Engesser - Shanleyova metoda je však na bezpečné straně a je jednodušší, proto z ní vyjdeme.

Předpokládejme, že pracovní diagram materiálu v úseku od meze úměrnosti f_{pr} (bod P na obr. 8.13a) a mezí kluzu f_y (bod F) má tvar kvadratické paraboly s vrcholem v bodu F a se společnou tečnou s pružným úsekem v bodu P. Tečný modul E_t je pak

$$E_t = E\frac{f_y - \sigma}{f_y - f_{pr}}. \tag{w}$$

Dosazením do (8.20) je

$$\sigma_{cr} = \pi^2 \frac{E_t}{\lambda^2} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}\frac{f_y - \sigma_{cr}}{f_y - f_p} \tag{x}$$

Z této rovnice lze vyjádřit σ_{cr} jako funkci štíhlosti λ. Vztahy je možné zjednodušit využitím štíhlosti λ_{pr}, při níž se stýká pružná a nepružná větev:

$$f_{pr} = \pi^2 \frac{E}{\lambda_{pr}^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{pr} = \pi\sqrt{\frac{E}{f_{pr}}} \tag{8.21}$$

S využitím této závislosti lze z rovnice (x) odvodit Engesser-Shanleyovo kritické napětí ve tvaru

$$\sigma_{cr} = \sigma_{ES} = \frac{f_y}{1 + \left(\frac{f_y}{f_{pr}} - 1\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda_{pr}}\right)^2}. \tag{8.22}$$

Graficky je tato závislost znázorněna na obr. 8.12 křivkou $\overline{AC}$.

Příklad 8.2

Ocelový prut má štíhlostní poměr λ = 80. Určete jeho kritické napětí v pružném a pružnoplastickém stavu, je-li modul pružnosti E = 210000 MPa, mez kluzu f_y = 240 MPa a mez úměrnosti f_{pr} = 192 MPa.

Řešení:

V pružném stavu

$$\sigma_{cr} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} = \pi^2 \frac{210000}{80^2} = 323{,}8 \text{ MPa} > f_y = 240 \text{ MPa},$$

Eulerovo kritické napětí se neuplatní.

$$\lambda_{pr} = \pi\sqrt{\frac{E}{f_{pr}}} = \pi\sqrt{\frac{210000}{192}} = 103{,}9.$$

Dosazením všech hodnot do rovnice (8.22)

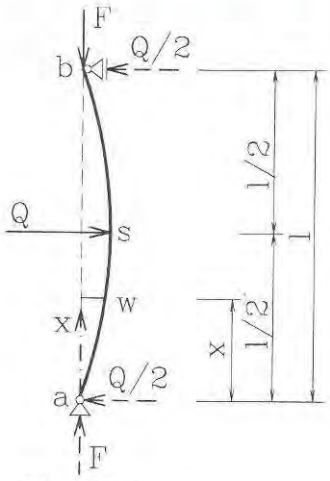
$$\sigma_{cr} = \sigma_{ES} = \frac{240}{1+\left(\frac{240}{192}-1\right)\left(\frac{80}{103{,}9}\right)^2} = 209{,}0 \text{ MPa}.$$

8.4 Kombinace vzpěrného tlaku s ohybem

Až dosud jsme vyšetřovali ideální přímý prut zatížený výhradně osově (centricky). Nyní se zaměříme na případy, kdy působí též příčné zatížení nebo kdy tlaková síla je mimostředná, prut není dokonale přímý apod. Na rozdíl od kap. 7, kde jsme se rovněž zabývali kombinací ohybu s tlakem, budeme nyní respektovat vzpěrné účinky tlakové síly, tj. budeme pruty vyšetřovat podle **teorie druhého řádu**.

● Kloubově podepřený prut zatížený příčnou silou

Prut stálého průřezu (EI = konst.) je zatížen podélnou tlakovou silou F a uprostřed rozpětí příčnou silou Q - obr. 8.14.



Obr. 8.14

Příčné podporové reakce jsou $Q/2$, takže ve spodní polovině prutu ($0 \le x \le l/2$) je ohybový moment v obecném místě

$$M = Fw + \frac{Q}{2}x.$$

Dosazením do diferenciální rovnice ohybové čáry (4.4)

$$w'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{F}{EI}w - \frac{Q}{2EI}x.$$

Použijeme opět označení (8.1) a po úpravě je

$$w'' + \alpha^2 w = -\frac{Q}{2F}\alpha^2 x. \qquad (y)$$

Řešení této nehomogenní diferenciální rovnice, platné pro spodní polovinu prutu, je

$$w = C_1 \sin\alpha x + C_2 \cos\alpha\alpha x - \frac{Q}{2F}x. \qquad (z)$$

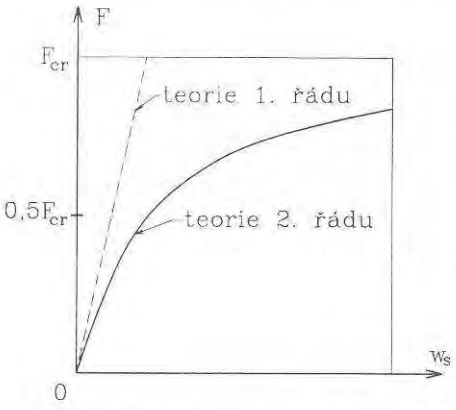
Uplatníme okrajovou podmínku na spodním konci (v podpoře) a na ose symetrie ve středu rozpětí (pro horní úsek rovnice (z) neplatí, takže podmínku nulového průhybu v horní podpoře nemůžeme uplatnit):

$$w(0)=0: \quad C_2=0,$$

$$w'\left(\frac{l}{2}\right)=0: \quad C_1\alpha\cos\frac{\alpha l}{2}-C_2\alpha\sin\frac{\alpha l}{2}-\frac{Q}{2F}=0 \Rightarrow C_1=\frac{Q}{2F\alpha\cos\alpha l/2}.$$

Dosazením konstant do rovnice (z) je rovnice ohybové čáry pro spodní polovinu prutu

$$w=\frac{Ql}{2F}\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha l\cos\alpha l/2}-\frac{x}{l}\right) \tag{8.23}$$



Obr. 8.15 *Závislost průhybu na zatížení*

Průhyb ve středu rozpětí

$$w_s=\frac{Ql}{4F}\left(\frac{2\mathrm{tg}\alpha l/2}{\alpha l}-1\right) \tag{8.24}$$

a maximální ohybový moment ve středu rozpětí

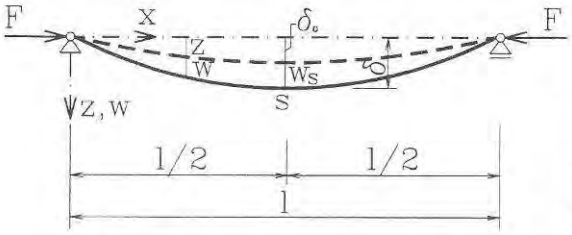
$$M_{\max}=\frac{Ql}{4}+Fw_s=\frac{Ql}{4}\cdot\frac{2\mathrm{tg}\alpha l/2}{\alpha l}. \tag{8.25}$$

Na obr.8.15 je znázorněna závislost mezi průhybem a osovou silou F pro případ, že obě síly (F, Q) rostou současně. Pro srovnání je též uveden lineární průběh podle teorie 1. řádu. Při $F=0,1F_{cr}$ je rozdíl asi 11 %, p ři $F=0,5F_{cr}$ pak téměř 100%. Při $F\to F_{cr}$ rostou všechny hodnoty nade všechny meze.

● Prut s počátečním zakřivením

Uvažujme prut, který je v nezatíženém stavu zakřiven ve tvaru jedné sinusové půlvlny s amplitudou δ_0, takže rovnice jeho střednice je

$$z=\delta_0\sin\frac{\pi x}{l}, \tag{a}$$



Obr. 8.16 *Počátečně zakřivený prut*

viz. obr. 8.16.

Prut je na svých koncích zatížen silou F. Vlivem tlakové síly se prut pružně ohne. Hledejme řešení opět ve tvaru sinusové půlvlny

$$w=w_s\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{b}$$

Ohybový moment je pak

$$M=F(z+w)=F(\delta_0+w_s)\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Derivujeme-li (b) dvakrát a dosadíme-li do diferenciální rovnice ohybové čáry, je

$$w'' = -w_s \frac{\pi^2}{l^2} \sin \pi x = -\frac{M}{EI} = -\frac{F}{EI}(\delta_0 + w_s) \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Tato rovnice bude identicky splněna, pokud bude platit

$$-w_s \frac{\pi^2}{l^2} = -\frac{F}{EI}(\delta_0 + w_s) \quad \Rightarrow \quad w_s = \frac{Fl^2}{\pi^2 EI}(\delta_0 + w_s) = \frac{F}{F_{cr}}(\delta_0 + w_s),$$

odkud

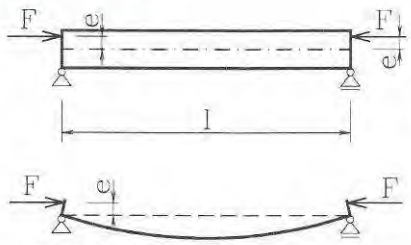
$$w_s = \delta_0 \frac{F}{F_{cr} - F}. \tag{8.26}$$

Celková výchylka od spojnice podporových bodů je

$$\delta = \delta_0 + w_s = \delta_0 + \delta_0 \frac{F}{F_{cr} - F} = \delta_0 \frac{1}{1 - F/F_{cr}} \tag{8.27}$$

Uvedený vzorec má širší platnost, neboť přibližně vystihuje i zvětšení průhybů jiného původu než od počátečního zakřivení: určíme-li např. průhyb od samotného příčného zatížení (tedy podle teorie 1. řádu) δ_0, pak zvýšenou hodnotu vlivem tlaku můžeme rovněž určit podle (8.27). Vztah je přitom přehledný, takže se z něho dají snadno vyvodit číselné závěry (např. je-li tlaková síla rovna 10% kritické síly, tj. $F = 0{,}1F_{cr}$, pak zvýšení průhybů činí 1/0.9 = 1,11, tedy 11% atp.).

Příklad 8.2



Obr. 8.17 *Excentrický vzpěr*

Odvoďte rovnici ohybové čáry a maximální hodnotu průhybu a ohybového momentu (ve středu rozpětí) excentricky tlačeného štíhlého prutu dle obr. 8.17. Úlohu řešte samostatně.

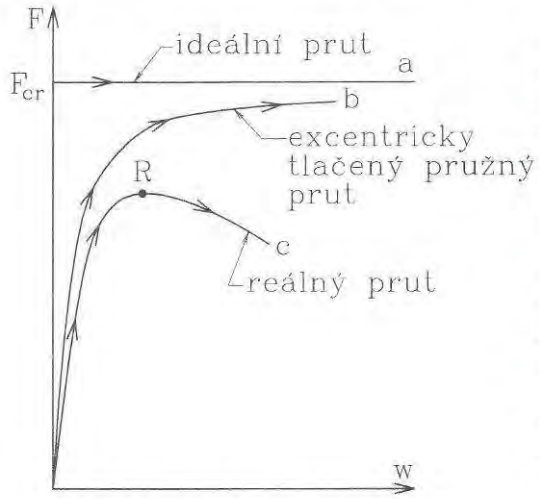
Výsledky:

$$w = e\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} \cdot \sin \alpha x + \cos \alpha x - 1\right),$$

$$w_{\max} = w\left(\frac{l}{2}\right) = e\left(\frac{1}{\cos \alpha l/2} - 1\right), \tag{8.28}$$

$$M_{\max} = \frac{Fe}{\cos \alpha l/2} = Fe \sec \frac{l}{2}\sqrt{\frac{F}{EI}}, \tag{8.29}$$

(tzv. sekantová rovnice).



Obr. 8.18 *Ideální a reálný tvar deformační křivky*

Výsledku příkladu 8.2 můžeme využít ke srovnání deformací ideálně pružného a dokonale přímého prutu, který až do hodnoty kritické síly zůstává přímý a pak se může libovolně vychýlit (po vodorovné přímce *a* na obr. 8.18) a excentricky zatíženého prutu. Jeho průhyb narůstá od počátku zatěžovacího procesu, při $F \to F_{cr}$ se asymptoticky blíží k přímce *a* - viz křivku *b* na obr. 8.18. Obě tato řešení ovšem platí jen za předpokladu malých deformací a lineární pružnosti. Dojde-li současně i ke zplastizování prutu, je vyčerpána vzpěrná únosnost dříve - viz bod *R* na křivce *c* obr. 8.18.

8.5 Pevnostní pojetí vzpěru. Posouzení prutů na vzpěr

● Pevnostní pojetí vzpěru

Vycházíme-li při posuzování spolehlivosti tlačených štíhlých prutů z řešení stability ideálního (přímého, centricky zatíženého) prutu, hovoříme o tzv. **stabilitním** pojetí vzpěru. Např. u pružnoplastického materiálu, jako je konstrukční ocel, bychom za limitní případ pokládali dosažení kritického napětí v pružném nebo nepružném oboru (na obr. 8.12 čára *ACD*), a vhodně volenými součiniteli spolehlivosti bychom zabezpečili přiměřenou rezervu únosnosti.

Při **pevnostním** pojetí opouštíme představu ideálního prutu a vycházíme z určitého modelu **reálného** prutu, který má jisté **imperfekce** (nedokonalosti), např. tím, že je zakřivený nebo vychýlený, má nahodilé excetricity v působení tlakových sil apo d. Tyto imperfekce se pak zavedou do výpočtu a respektují se přitom účinky dle teorie II. řádu. Způsob aplikace na jednotlivé typy konstrukcí je různý.

● Ocelové konstrukce

Jeden z možných přístupů k stanovení vzpěrné pevnosti spočívá v tomto modelovém postupu:

1) veškeré předpokládané imperfekce nahradíme jedinou ekvivalentní - výchylkou počátečně zakřiveného prutu,

2) určíme zvětšenou konečnou hodnotu celkové výchylky ovlivněnou tlakovou silou - podle rov. (8.27),

3) napětí v extrémně tlačených vláknech položíme rovno mezi kluzu.

Tomu odpovídá závislost (tlak zde uvažujeme kladně):

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{F}{A} + \frac{F\sigma}{W} = \frac{F}{A} + \frac{F\delta_0}{(1 - F/F_{cr})W} = f_y. \qquad (8,30)$$

Tabulka 8.1 *Součinitele vzpěrnosti* χ *pro ocel Fe 360 (St 235),* f_y *= 235 MPa*

λ	a	b	c	λ	a	b	c	λ	a	b	c
0	1,00	1,00	1,00	100	0,62	0,56	0,50	200	0,20	0,19	0,18
10	1,00	1,00	1,00	110	0,55	0,49	0,45	210	0,18	0,17	0,16
20	1,00	1,00	0,99	120	0,48	0,44	0,40	220	0,17	0,16	0,15
30	0,97	0,96	0,94	130	0,43	0,39	0,36	230	0,15	0,15	0,14
40	0,95	0,92	0,88	140	0,38	0,35	0,32	240	0,14	0,13	0,13
50	0,91	0,87	0,89	150	0,33	0,31	0,28	250	0,13	0,12	0,12
60	0,87	0,82	0,76	160	0,30	0,28	0,26	260	0,12	0,12	0,11
70	0,83	0,76	0,70	170	0,27	0,25	0,23	270	0,11	0,11	0,10
80	0,76	0,69	0,63	180	0,24	0,23	0,21	280	0,10	0,10	0,10
90	0,69	0,62	0,56	190	0,22	0,21	0,19	290	0,10	0,09	0,09

a - duté průřezy válcované za tepla, válcované I k ose *y* při $h/b > 1,2$
b - svařované truhlíkové průřezy, svař. I k ose *y*, válc. I k ose *z* aj.
c - U, L, T, obdílníkové, kruhové, svařované I profily k ose *z* (svislé) při $t_f < 40$ mm

Vyjádřením napětí $\bar{\sigma} = F/A$ obdržíme křivky, které jsou ilustrativně znázorněny čárkovaně na obr. 8.12. Jejich odvození může být ovšem i jiné než z uvedené představy zakřiveného prutu, avšak při pevnostném pojetí jsou u středních štíhlostí rozhodující napětí F/A vždy nižší než kritická napětí odpovídající stabilitnímu pojetí; při vyšších hodnotách štíhlostí se odpovídající velikosti napětí sbližují.

Vydělíme-li takto odvozené hodnoty vzpěrné pevnosti mezí kluzu f_y, obdržíme bezrozměrná čísla klesající od jedničky při zvětšující se štíhlosti - tzv. **součinitele vzpěrnosti** χ (chí), které vyjadřují snížení přípustného napětí vzhledem k účinkům II. řádu (dříve se označovaly značkou φ). Pomineme-li podrobnosti, můžeme pro běžné profily vyjádřit vzpěrnou únosnost centricky tlačeného prutu

$$N_{Rd} = \chi A f_d = \chi \frac{A f_y}{\gamma_M} \qquad (8.31)$$

Posouzení na mezní stav únosnosti pak spočívá v tom, že výpočtová normálová síla N_{Sd}, která v prutu vznikne, nesmí překročit jeho vzpěrnou únosnost:

$$N_{Sd} \leq N_{Rd}, \tag{8.32}$$

což je podmínka formálně shodná s relací pro osové namáhání (2.20), únosnost N_{Rd} nyní však obsahuje součinitele vzpěrnosti - srov. rovnice (8.31) a (2.16), je tedy nižší než při prostém tahu a tlaku.

V tabulce 8.1 jsou uvedeny součinitele vzpěrnosti χ pro ocel s mezí kluzu 235 MPa (ve zjednodušené podobě). Z tabulky je zřejmé, že při štíhlosti menší než $\lambda = 20$ je $\chi \approx 1$, takže jde o prostý tlak.

Postup při **posouzení** ocelového prutu na vzpěr tedy spočívá v těchto krocích:

- určíme geometrické charakteristiky průřezu: A, I_y, I_z, i_y, i_z,
- podle způsobu uložení (obr. 8.8) stanovíme vzpěrnou délku (může být rozdílná v obou rovinách),
- určíme štíhlosti podle rov. (8.16) v obou rovinách a určíme rozhodující (větší) z obou štíhlostí,
- v tabulce vyhledáme součinitele vzpěrnosti χ a pomocí rovnic (8.31) a (8.32) prut posoudíme.

Návrh průřezu provádíme zkusmo, průřez posoudíme a podle potřeby opakovaně upravíme.

Příklad 8.3

Posuďte, zda ocelový sloup podle obr. 8.9 (příklad 8.1) přenese výpočtovou tlakovou sílu $N_{Sd} = 750$ kN, je-li mez kluzu $f_y = 235$ MPa a součinitel materiálu $\gamma_M = 1{,}1$.

Řešení:

Plocha průřezu $A = 7{,}81 \cdot 10^3$ mm^2, štíhlosti převezmeme z výsledků řešení příkladu 8.1:

$$\lambda_y = 112{,}4, \qquad \lambda_z = 66{,}3.$$

Vzhledem k rozdílnému podepření v obou hlavních rovinách jsou štíhlosti výrazně rozdílné - rozhoduje $\lambda_y = 112{,}4$. Protože $h/b = 1 < 1{,}2$, užijeme křivky vzpěrnosti b a interpolací určíme součinitele vzpěrnosti $\chi = 0{,}48$. Dosazením do rovnice (8.31) je výpočtová únosnost

$$N_{Rd} = \chi \frac{Af_y}{\gamma_M} = 0{,}48 \frac{7{,}81 \cdot 10^{-3} \cdot 235}{1{,}1} = 801 \cdot 10^{-3} \text{ MN} = 801 \text{ kN}.$$

Posouzení:

$$N_{Sd} = 750 \text{ kN} < N_{Rd} = 801 \text{ kN} \text{ - sloup vyhoví.}$$

Postup při posouzení dřevěných tlačených prutů na vzpěr je podobný. Součinitele vzpěrnosti podle dosud platné ČSN 73 17 01 se označují φ a jsou dány rovnicemi

$$\varphi = 1 - 0{,}8\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 \text{ pro } \lambda \le 75, \quad \varphi = \frac{3100}{\lambda^2} \text{ pro } \lambda > 75,$$

zjednodušený výtah hodnot viz tab. 8.2 (horní řádky). Návrh Eurokódu (ENV 1995-1-1: 1993) používá jiného uspořádání posouzení, roli součinitele vzpěrnosti tam plní koeficient k_c, který byl vypočten pro rostlé dřevo a uveden rovněž v tabulce 8.2. Rozdíly nejsou významné.

U dřevěných konstrukcí je nutné též respektovat určitou poddajnost spojů, takže s plným vetknutím nelze počítat, což ovlivňuje vzpěrné délky: pro oboustranně vetknutý prut $\beta = 0{,}6 \div 0{,}7$ místo 0,5, pro jednostranně vetknutý $\beta = 0{,}75 \div 0{,}90$ místo 0,7 - srov. obr. 8.8.

Tabulka 8.2 *Součinitel vzpěrnosti pro dřevo (ČSN, ENV)*

λ	0	10	20	30	40	50	60	70	80
φ	1	0,99	0,97	0,93	0,87	0,80	0,71	0,61	0,48
k_c	1	1	1	0,99	0,93	0,83	0,69	0,55	0,44
λ	90	100	110	120	130	140	150	175	200
φ	0,38	0,31	0,26	0,22	0,18	0,15	0,13	0,10	0,08
k_c	0,36	0,30	0,25	0,21	0,18	0,16	0,14	0,10	0,08

Příklad 8.4

Dřevěný sloupek čtvercového průřezu 100x100 mm, dlouhý 3,0 m, je na koncích kloubově uložen. Posuďte, zda přenese výpočtovou tlakovou sílu N_{Sd} = 30 kN, je-li pevnost dřeva v tlaku $f_k = 20$ MPa, modifikační součinitel $k_{\text{mod}} = 0{,}8$ (střednědobé zatížení, obvyklá vlhkost) a součinitel materiálu $\gamma_M = 1{,}3$.

Řešení:

Výpočtovou pevnost

$$f_d = k_{\text{mod}} \frac{f_k}{\gamma_M} = 0{,}8 \frac{20{,}0}{1{,}3} = 12{,}3 \text{ MPa}.$$

Plocha a poloměr setrvačnosti

$$A = 100^2 = 10000 \text{ mm}^2 = 0{,}01 \text{ m}^2, \qquad i = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{0{,}1}{\sqrt{12}} = 0{,}0289 \text{ m}.$$

$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i} = \frac{l}{i} = \frac{3{,}0}{0{,}0289} \approx 104 \quad \Rightarrow \quad \chi = k_c \approx 0{,}28 \text{ (tab. 8.2)},$$

$$N_{Rd} = \chi A f_d = 0{,}28 \cdot 0{,}010 \cdot 12{,}3 = 34{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ MN} = 34{,}4 \text{ kN}.$$

Posouzení:

$$N_{Sd} = 30 \text{ kN} < N_{Rd} = 34{,}4 \text{ kN} \text{ - vyhoví.}$$

● Betonové konstrukce

Při posuzování betonových konstrukcí se v současném pojetí ani dle našich předpisů (ČSN 73 1201-86) ani podle návrhů Eurokódů (ENV 192-1-1) nepoužívají vzpěrnostní součinitele, ale imperfekce tlačeného prutu se modelují zaváděním nahodilé excentricity s případnou korekcí (zvětšením) o účinky II. řádu (výpočet na přetvořené konstrukci) a dotvarování. Blíže o tom pojednává nauka o betonových konstrukcích.

9 Úvod do rovinné a prostorové napjatosti

9.1 Hlavní napětí při rovinné napjatosti

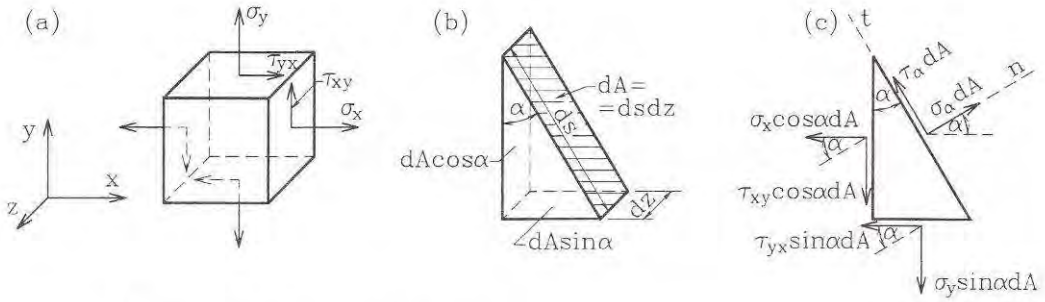
Při analýze prutů jsme se zajímali především o napětí v průřezu, tj. v řezu kolmém k ose prutu. Nyní rozebereme poněkud podrobněji stav napjatosti v určitém bodu tělesa, charakterizovaný tenzorem napětí podle rov. (1.3).

Napjatost v bodu tělesa může být **přímková**, **rovinná** nebo **prostorová** (obecná). U přímkové napjatosti leží výsledný vektor napětí v libovolném řezu vedeném uvažovaným bodem vždy v téže přímce; u rovinné napjatosti se pohybuje v určité společné rovině, kdežto v obecném případě prostorové napjatosti se vektor napětí otáčí obecně v prostoru. Při rozlišení mezi uvedenými třemi případy je též možné vyjít z pojmu tzv. hlavních napětí, jež definujeme později.

Nejprve se budeme zabývat **rovinnou napjatostí**. Rovinu, s níž jsou veškerá napětí rovnoběžná, ztotožníme - bez újmy na obecnosti - s čelní rovinou xy (při aplikaci na pruty, kde užíváme jinou orientaci os, získáme potřebné vztahy jednoduchou úpravou označení, příp. znamének). Z devíti složek napětí znázorněných na obr. 1.3 odpadnou tedy všechny složky kolmé k rovině xy a vzhledem k platnosti vzájemnosti smykových napětí (1.4) charakterizují rovinnou napjatost tři nezávislé složky: σ_x, σ_y a $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ - obr. 9.1a.

● Napětí v šikmém řezu při rovinné napjatosti

Uvažujme nyní řez rovinou, jejíž normála svírá úhel α s osou x (tato rovina je ovšem kolmá k rovině napjatosti xy). Normálovou a smykovou složku napětí v tomto řezu označíme σ_α a τ_α. Jejich velikost odvodíme z podmínek rovnováhy elementárního trojbokého hranolu vyděleného v okolí vyšetřovacího bodu. Na obr. 9.1b je znázorněn jeho tvar a vztahy mezi plochami jednotlivých stěn (čelní plochy rovnoběžné s rovinou napjatosti xy nejsou zatíženy). Na obr. 9.1c jsou pak znázorněny výsledné elementární síly, které získáme jako součin příslušné složky napětí a plochy. Silové podmínky rovnováhy ve směru normály a tečny ke skloněnému řezu jsou pak (při $\tau_{yx} = \tau_{xy}$)



Obr. 9.1 *Napětí při rovinné napjatosti*

$$\sum F_n = 0: \quad \sigma_\alpha dA - \sigma_x \cos^2\alpha\, dA - \sigma_y \sin^2\alpha\, dA - 2\tau_{xy} \sin\alpha \cos\alpha = 0,$$

$$\sum F_t = 0: \quad \tau_\alpha dA + \sigma_x \sin\alpha \cos\alpha\, dA - \sigma_y \sin\alpha \cos\alpha\, dA - \tau_{xy} \cos^2\alpha\, dA + \\ + \tau_{xy} \sin^2\alpha\, dA = 0.$$

Po úpravě nabudou tyto rovnice tvar

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha,$$
$$\tau_\alpha = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \tag{9.1}$$

Těmito vztahy jsou tedy určeny **složky napětí v šikmém řezu** při rovinné napjatosti. V základních rovinách, tj. při $\alpha = 0$ a $\alpha = 90^\circ$ se ovšem ztotožní s výchozími hodnotami σ_x, σ_y a $\pm \tau_{xy}$.

Rovnice (9.1) potvrzují, že danými třemi nezávislými aložkami napětí σ_x, σ_y a $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ je stav rovinné napjatosti jednoznačně definován. Ze tří podmínek rovnováhy pro rovinnou soustavu sil jsme užili jen silové podmínky; momentová podmínka by jen potvrdila platnost věty o vzájemnosti smykových napětí $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, neboť k jejímu odvození byla již použita - viz odvození rov. (1.4).

● Hlavní napětí

Otáčíme-li skloněnou rovinu kolem osy kolmé k rovině xy, nabude normálové napětí v šikmém řezu při určitých hodnotách úhlu α svých extrémních hodnot, jež označujeme jako hlavní napětí. Podmínka extrému je

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0: \quad \sigma_x 2\cos\alpha(-\sin\alpha) + \sigma_y 2\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy} 2\cos 2\alpha = 0,$$

neboli

$$-(\sigma_x - \sigma_2)\sin 2\alpha + 2\tau_{xy}\cos 2\alpha = 0. \tag{a}$$

Z této rovnice je

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \tag{9.2}$$

Tato rovnice určuje dva vzájemně kolmé směry ($\alpha_2 = \alpha_1 \pm 90^\circ$). Úpravou první rovnice (9.1) zavedením goniometrických funkcí dvojnásobného úhlu a dosazením za vztahu (9.2) odvodíme **velikosti hlavních napětí**

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \tag{9.3}$$

Obvykle označujeme jako σ_1 algebraicky větší z obou hlavních napětí ($\sigma_1 \geq \sigma_2$), pak jeho hodnota plyne použitím kladného znaménka ve vzorci (9.3), hodnota σ_2 pak znaménka záporného. Seřadíme-li úhly vyhovující rovnice (9.2) tak, že $|\alpha_1| \leq |\alpha_2|$, pak hlavní napětí σ_1 svírá úhel α_1 s algebraicky větším z daných normálových napětí σ_x, σ_y.

Srovnáním rovnice (a) s druhou rovnicí (9.1) vyplývá, že v rovinách, v nichž je normálové napětí extrémní, je **smykové napětí rovno nule**.

Transformační vztahy pro napětí v šikmém řezu, velikost hlavních napětí a další jsou zcela analogické závislostem pro výpočet momentů setrvačnosti k pootočeným osám, hlavních momentů setrvačnosti atd. - tato shoda je v důsledkem tenzorové povahy sledovaných veličin.

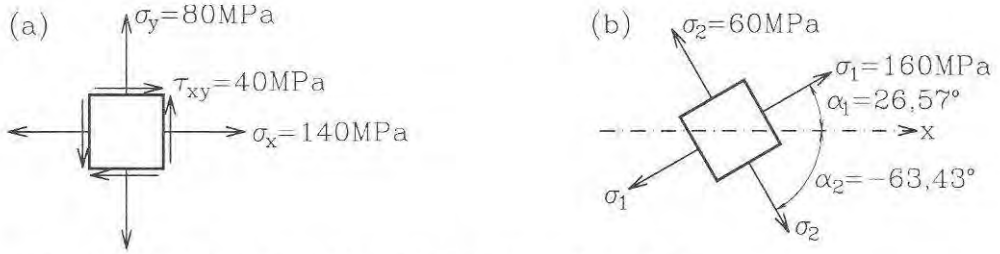
● Extrémní smyková napětí

Podobně jako pro extrémní normálová (tj. hlavní) napětí můžeme odvodit i extrémní smyková napětí. Působí v rovinách odkloněných o 45° od hlavních rovin a vyjádříme je pomocí hlavních napětí; jsou rovna

$$\tau_{\substack{\max \\ \min}} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2). \tag{9.4}$$

Příklad 9.1

V bodu namáhaném rovinnou napjatostí působí složky napětí σ_x = 140 MPa, σ_y = 80 MPa a τ_{xy} = 40 MPa. Určete velikost a směr hlavních napětí a extrémní smyková napětí.



Obr. 9.2 *Směr a velikost hlavních napětí (k příkladu 9.1)*

Řešení:

Dosazením do vztahu (9.2)

$$\operatorname{tg}2\alpha_{1,2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\cdot 40}{140-80} = 1{,}333 \Rightarrow \begin{matrix} 2\alpha_1 = 53{,}13^\circ, \\ \alpha_1 = 26{,}57^\circ. \end{matrix}$$

Z rovnice (9.3)

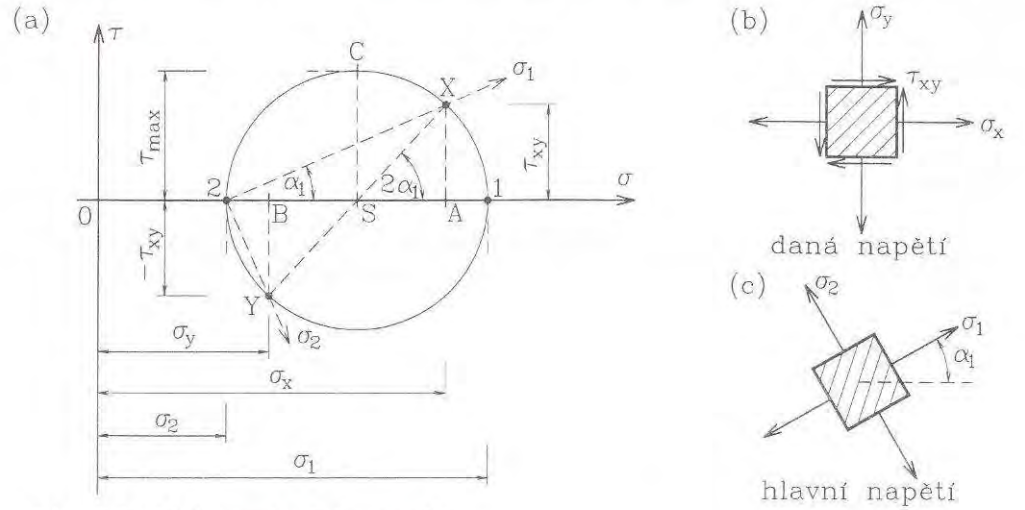
$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(140+80) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(140-80)^2 + 4\cdot 40^2} = 110 \pm 50 = \begin{matrix} 160\ \text{MPa} = \sigma_1 \\ 60\ \text{MPa} = \sigma_2 \end{matrix}$$

Z rovnice (9.4)

$$\tau_{\substack{\max\\ \min}} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \pm\frac{1}{2}(160 - 60) = \pm 50 \text{ MPa}.$$

● Grafické řešení pomocí Mohrovy kružnice napětí

Velikost a směr hlavních napětí i další veličiny můžeme též určit pomocí tzv. Mohrovy kružnice napětí. Při jejím sestrojení (obr. 9.3) postupujeme takto. Na osu σ rovnoběžnou s x vyneseme normálová napětí $\sigma_x = \overline{OA}$ a $\sigma_y = \overline{OB}$. Kolmo k nim pak vyneseme smykové napětí $\pm\tau_{xy}$ a to z bodu A podle jeho znaménka (tedy směrem nahoru, je-li τ_{xy} kladné dle obr. 9.3b a naopak), z bodu B pak s opačným znaménkem. Tím odvodíme body X a Y, které tvoří průměr kružnice napětí, jejíž střed S leží na ose σ. Opíšeme-li pak kružnici, určují její průsečíky s osou σ velikost hlavních napětí: $\sigma_1 = \overline{01}$, $\sigma_2 = \overline{02}$ a směry hlavních napětí jsou dány spojnicí levého průsečíku (bodu 2) s body X a Y - obr. 9.3a. Poloměr Mohrovy kružnice je roven maximálnímu smykovému napětí τ_{max}.



Obr. 9.3 *Mohrova kružnice napětí*

Zdůvodnění vyplývá z geometrických vztahů, jak jsou patrné z obr. 9.3a:

$$\overline{OS} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right), \quad \overline{SA} = \overline{BS} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right),$$

$$\overline{SX} = \overline{SY} = \overline{SC} = \sqrt{\left(\overline{SA}\right)^2 + \left(\overline{AX}\right)^2} = \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\right]^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\overline{01} = \overline{0S} + \overline{S1} = \overline{0S} + \overline{SX}, \qquad \overline{02} = \overline{0S} - \overline{S2} = \overline{0S} - \overline{SX},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{\overline{AX}}{\overline{SA}} = \frac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)}.$$

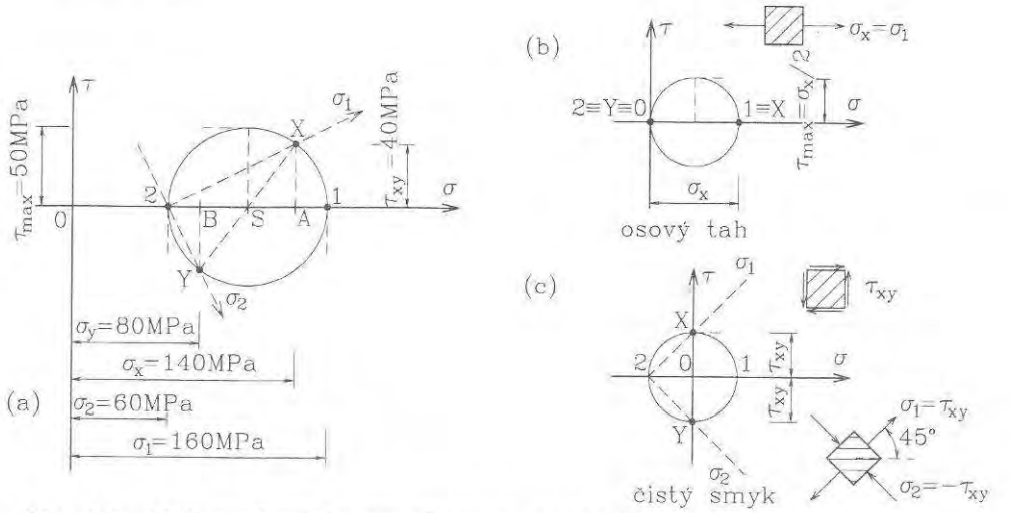
Srovnání s početními vztahy (9.2) až (9.4) potvrzuje vzájemnou shodu. Kružnice napětí umožňuje též stanovit hodnoty σ_α a τ_α v libovolném řezu, dané rovnicemi (9.1), avšak tuto úlohu řešíme jen zřídka.

Příklad 9.2

Graficky vyřešte úlohu podle zadání v příkladu 9.1 (σ_x = 140 MPa, σ_y = 80 MPa a τ_{xy} = 40 MPa).

Řešení:

viz obr. 9.4a.



Obr. 9.4 *Mohrova kružnice pro obecný případ (příklad 9.2), osový tah a čistý smyk*

● Vybrané zvláštní případy rovinné napjatosti

Přímková (osová) napjatost

Přímková napjatost je nejjednodušším případem napjatosti a můžeme ji pokládat za zvláštní případ rovinné napjatosti, při níž je jen jedno hlavní napětí různé od nuly. Např. je-li $\sigma_x > 0$ a $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$, pak vzniká přímková napjatost ve směru osy x, a to kladná - napětí jsou tahová. Tento stav napjatosti vzniká při osovém tahu prutu stálého průřezu (v místech dostatečně vzdálených od konců prutu); v šikmých řezech jsou složky napětí podle rov. (9.1)

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha, \qquad \tau_\alpha = -\frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\alpha = -\sigma_x \sin\alpha\cos\alpha. \tag{9.5}$$

Hlavní napětí jsou $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y = 0$, extrémní smyková napětí vznikají v řezech skloněných o 45° od osy prutu a jsou v absolutní hodnotě rovna $\sigma_x/2$. Mohrova kružnice se dotýká osy τ - obr. 9.4b.

Prostý (čistý) smyk

Prostý smyk v bodu tělesa vzniká tehdy, působí-li na stěnách pravoúhlého kvádru jen smyková napětí, tedy např. je-li $\tau_{xy} = \tau_{yx} \neq 0$ a $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Hlavní napětí pak vyjdou z rovnice (9.3) rovna $\pm \tau_{x\ y}$ a působí v rovinách $\alpha_{1,2} = \pm 45^\circ$ ($tg2\alpha_{1,2} = \pm\infty$ - viz rovnici 9.2). Mohrova kružnice má střed v počátku soustavy souřadnic σ, τ - obr. 9.4c. Z uvedených údajů vyplývá, že stav prostého smyku (pootočený oproti vyšetřovanému případu o 45°) můžeme při rovinné napjatosti vyvodit také pomocí dvou shodných normálových napětí rozdílného znaménka ve dvou vzájemně kolmých směrech: $\sigma_y = -\sigma_x$, $\tau_{xy} = 0$.

Všesměrný (izotropický) tah nebo tlak

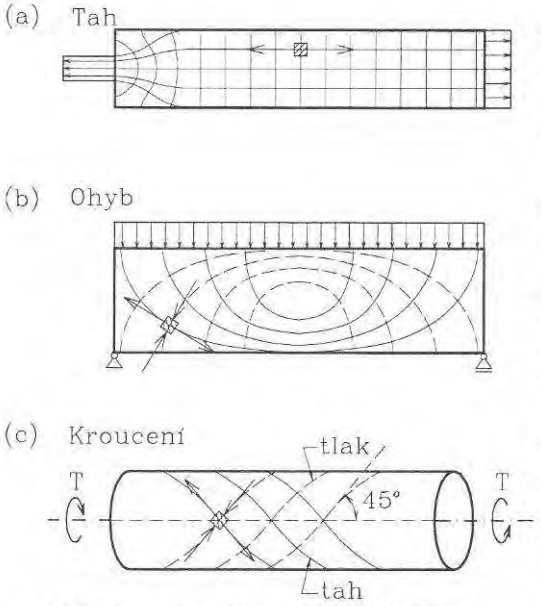
Jsou-li naopak napětí ve dvou vzájemně kolmých směrech shodná i co do znaménka $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, a nepůsobí-li žádné smykové napětí, tj. $\tau_{xy} = 0$, pak jde o tzv. všesměrný tah (při $\sigma > 0$) nebo tlak ($\sigma < 0$). Z rovnic (9.1) pak vyjde

$$\sigma_\alpha = \sigma\cos^2\alpha + \sigma\sin^2\alpha = \sigma, \qquad \tau_\alpha = -\frac{1}{2}(\sigma - \sigma)\sin 2\alpha = 0,$$

tedy: ve všech směrech je normálové napětí shodné a smyková napětí vůbec nevznikají. Mohrova kružnice napětí degeneruje na bod.

● Trajektorie hlavních napětí

Poznatků o rozložení a směrech hlavních napětí můžeme užít ke stadiu napjatosti prvků v nichž - alespoň přibližně - vzniká rovinný stav napjatosti. Názornou představu o "toku sil" podávají tzv. **trajektorie hlavních napětí**, což jsou křivky, sledující v každém bodě směr hlavních napětí. Vytvářejí dvě vzájemně kolmé (ortogonální) soustavy křivek.



Obr. 9.5 *Trajektorie hlavních napětí*

U **taženého** prutu (obr. 9.5a) v místech, kde nedochází ke koncentraci napětí, je v každém bodě přímkový stav napjatosti a trajektorie jsou rovnoběžné s osou prutu a kolmé k ose.

U **ohýbaného** nosníku např. obdélníkového průřezu, obvykle nehrají podstatnou roli napětí kolmá k ose (příčná). Na okrajích jsou smyková napětí rovna nule, takže hlavní napětí (a tedy i jejich trajektorie) jsou s okraji rovnoběžná a k nim kolmá. Na neutrální ose naopak vzniká čistý smyk, takže směr trajektorií je skloněn pod úhlem 45°. Tahové trajektorie (na obr. 9.5b značené plně) napovídají směr, v němž by měl být vyztužen nosník z materiálu málo odolného v tahu (směr výztuže v železobetonu, předpínacích kabelů u předpjatého betonu apod.).

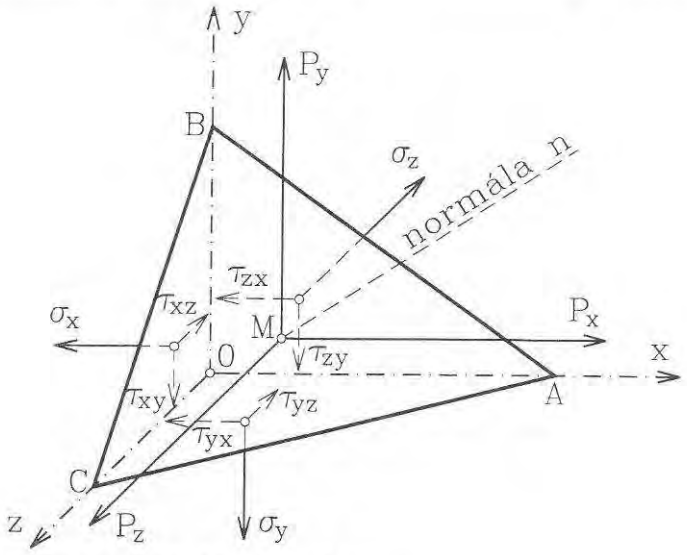
V **krouceném** prutu kruhového průřezu vzniká stav čistého smyku v rovinách tečných k válci obecného poloměru. Trajektorie hlavních napětí tvoří tedy soustavu šroubovic vzájemně kolmých, z nichž jedna osnova je tahová a druhá tlaková, jak je pro povrch prutu znázorněno na obr. 9.5c.

9.2 Hlavní napětí při prostorové napjatosti

Uvažujme obecně skloněnou rovinu, jejíž normála n svírá s osami souřadnic úhly se směrovými kosiny l, m a n, jež ovšem splňují podmínku

$$\cos^2(x,n)+\cos^2(y,n)+\cos^2(z,n)=l^2+m^2+n^2=1, \tag{9.6}$$

-viz obr. 9.6. Na odvrácených ploškách elementárního čtyřstěnu, vyťatého skloněnou rovinou a souřadnicovými rovinami, působí složku tenzoru napětí (1.3) - srov. obr. 1.3,



Obr. 9.6 *Napětí v obecně skloněném řezu*

kde jsou zakresleny na kladných ploškách a mají proto opačný smysl. Rozložíme-li nyní napětí působící na skloněné rovině do směrů os souřadnic p_x, p_y a p_z, jsou tyto složky ze silových podmínek rovnováhy do směrů os rovny

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x l+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n,\\ p_y &= \tau_{yx}l+\sigma_y m+\tau_{yz}n,\\ p_z &= \tau_{zx}l+\tau_{zy}m+\sigma_z n, \end{aligned} \tag{9.7}$$

neboť boční plochy jsou průmětem plochy skloněné (tedy uvažujeme-li plochu ΔABC jako jednotkovou, je plocha ΔOBC rovna $\cos(x,n) = l$ atd.).

Definujme nyní **hlavní roviny** pro danou napjatost ve vyšetřovaném bodu jako takové, v nichž je **smykové napětí nulové**; normálové napětí působící na těchto rovinách označíme jako **hlavní napětí**. Směr výsledného napětí na skloněné ploše je tedy shodný se směrem její normály a p_x, p_y a p_z jsou jeho složkami:

$$p_x = \sigma l, \quad p_y = \sigma m, \quad p_z = \sigma n. \tag{9.8}$$

Dosadíme-li odtud do rovnic (9.7), obdržíme tři rovnice

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0, \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0, \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Aby tato homogenní soustava měla řešení, musí být její determinant roven nule. Označíme-li

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2, \end{aligned} \tag{9.10}$$

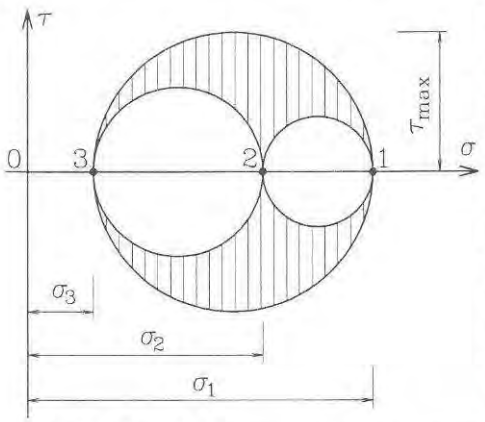
pak podmínka nulového determinantu nabude tvar kubické rovnice

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0. \tag{9.11}$$

Tato rovnice má tři reálné kořeny, jak lze dokázat; obvykle je označujeme indexy tak, aby platilo $\sigma_1 = \sigma_{max}$ a $\sigma_3 = \sigma_{min}$, tedy

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \tag{9.12}$$

Jejich dosazením do rovnic (9.9) s využitím vztahu (9.6) lze určit směrové kosiny příslušné k jednotlivým hlavním rovinám (v podrobnostech matematického řešení odkážeme čtenáře např. na práce [5] nebo [10] aj.). Tyto **hlavní roviny** jsou **vzájemně kolmé**. Veličiny, které jsme definovali rovnicemi (9.10), jsou tzv. **invarianty napětí** (lineární I_1, kvadratický I_2 a kubický I_3), které nezávisí na volbě soustavy souřadnic.



Obr. 9.7 *Mohrovy kružnice v hlavních rovinách*

Sestrojíme-li Mohrovy kružnice napětí pro tři hlavní roviny, dotýkají se navzájem způsobem znázorněným na obr. 9.7. Lze dokázat, že veškeré vektory napětí v daném bodu tělesa (při libovolném sklonu řezu vedeném tímto bodem) odpovídají oblastem mezi kružnicemi napětí, zašrafovaným na obr. 9.7.

Rovněž bez odvození uvedeme, že maximální smyková napětí v rovinách procházejících některou z hlavních os vznikají v rovinách půlících úhel mezi těmito rovinami (tedy odkloněných o 45°) a jsou rovna poloměru příslušné Mohrovy kružnice. Vůbec **největší smykové napětí** ve vyšetřovaném bodu je tedy

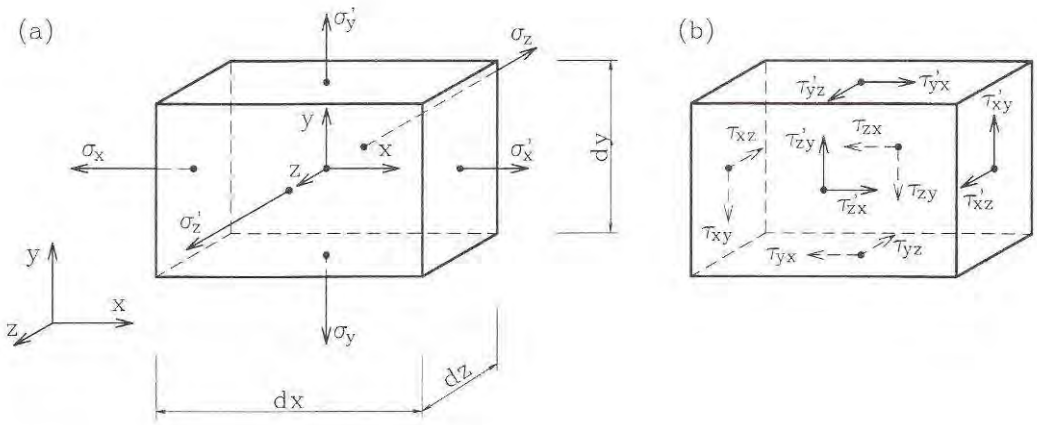
$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3). \tag{9.13}$$

Vrátíme-li se nyní k rozlišení jednotlivých případů napjatosti, jak byly uvedeny na začátku této kapitoly, můžeme alternativně definovat **rovinnou** napjatost jako zvláštní případ prostorové napjatosti, kdy jedno ze tří hlavních napětí je rovno nule, a **přímkovou** jako stav, kdy jsou dvě rovna nule a pouze jediné je různé od nuly.

9.3 Diferenciální rovnice rovnováhy

V předešlých úvahách jsme se zabývali stavem napjatosti v určitém **bodu tělesa**, i když jsme jednotlivé složky napětí znázorňovali na stěnách elementárních těles (kvádru, čtyřstěnu) vydělených v okolí bodu.

Při sestavování diferenciálních podmínek rovnováhy při obecném (prostorovém) stavu napjatosti však musíme respektovat **přírůstky** napětí odpovídající přechodu z jednoho bodu tělesa do bodu soumezného (velmi blízkého). Všechny složky napětí jsou totiž obecně funkcemi polohy bodu, tedy např. $\sigma_x = \sigma_x(x, y, z)$ atp.



Obr. 9.8 *Silové účinky působící na elementární kvádr*

Na obr. 9.8 jsou schematicky znázorněny jednotlivé složky napětí (pro přehlednost jsou smykové složky uvedeny zvlášť) na elementárním kvádru o hranách dx, dy a dz. Čárkami

jsou přitom označeny vždy složky napětí na stěně vzdálenější od počátku souřadnic, které jsou o diferenciální přírůstek větší, tedy např. je

$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x, \qquad \tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y, \qquad \tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{9.14}$$

apod. Přitom se vždy uplatní parciální derivace ve směru přechodu od jedné stěny kvádru ke vzdálenější.

Kromě složek napětí na povrchu prvku mohou též působit objemové síly X, Y a Z [N/m^3] - např. vlastní tíha, odstředivé síly a podobně.

Ze složek napětí získáme elementární síly vynásobením plochou příslušné stěny kvádru, výsledné účinky objemových sil vyplynou vynásobením objemem elementu.

Tak např. silová podmínka ve směru osy x bude

$$(\sigma'_x - \sigma_x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (\tau'_{yx} - \tau_{yx})\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (\tau'_{zx} - \tau_{zx})\mathrm{d}x\mathrm{d}y + X\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

Dosazením z rovnic (9.14) se tato podmínka konkretizuje takto:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \sigma_x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \tau_{yx}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z +$$
$$+\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + X\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

Po zrušení shodných členů v jednotlivých závorkách a vydělením součinem diferenciálů $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ obdržíme první rovnici (9.15); ostatní se odvodí zcela shodně. Souhrně jsou tedy **diferenciální podmínky rovnováhy** (Cauchyho)

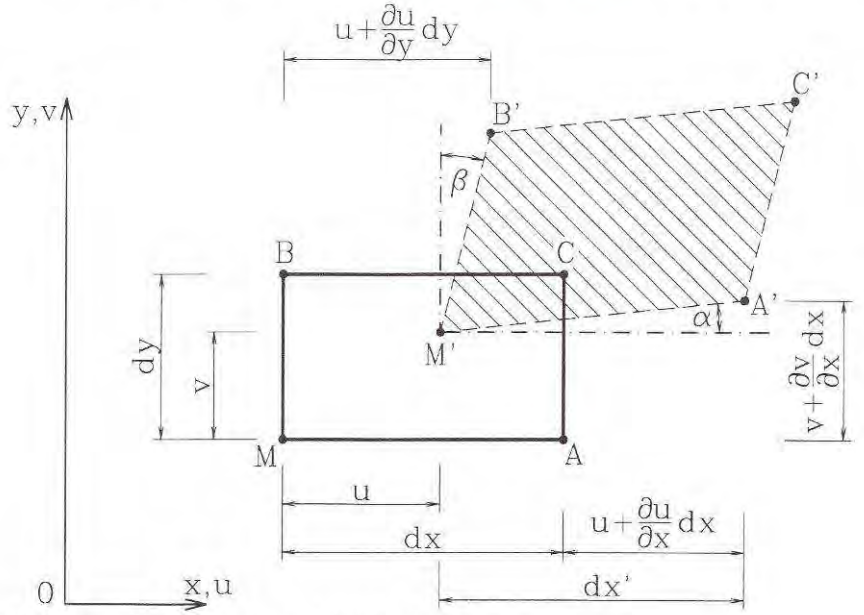
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0,\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0,\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0.
\end{aligned} \tag{9.15}$$

Spolu se třemi rovnicemi (1.4), které byly odvozeny z momentových podmínek, máme tedy k dispozici šest rovnic pro devět neznámých složek tenzoru napětí (1.3). Uvažujeme-li již vzájemnost smykových složek podle rovnic (1.4) a pokládáme-li za neznámé jen šest nezávislých složek napětí, zbývají tedy tři rovnice (9.15), úloha je tedy třikrát (vnitřně) staticky neurčitá.

9.4 Deformační (geometrické) rovnice

Statické rovnice doplníme deformačními vztahy, které budou mít povahu geometrických vztahů mezi posuvy u , v, w a poměrnými deformacemi ε_x, ..., γ_{xy}, ... Každá složka posuvu je funkcí polohy bodu v tělese, např. $u = u(x, y, z)$ atp.

Odvodíme vzájemné závislosti pro rovinu xy - srov. též obr. 1.7 a rovnice (1.7) v kapitole 1. Na obr. 9.9 jsou popsány posuvy vrcholů pravoúhlého prvku (ve zveličeném



Obr. 9.9 *K odvození geometrických rovnic*

měřítku, ve skutečnosti jde o velmi malé délky i úhly). Poměrné protažení ve směru x uvažované pro vlákno $\overline{MA}$ je

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{\left(dx + u + \frac{\partial u}{\partial x}dx - u\right) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \qquad \text{(a)}$$

Úhlová změna - zkosení γ_{xy} je

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \approx \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} - v}{dx} + \frac{u + \frac{\partial u}{\partial y}dy - u}{dy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad \text{(b)}$$

Využili jsme toho, že deformace jsou malé, takže vždy veličiny řádově nižší můžeme pominout, je tedy např. $dx' \approx dx$ a $\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha$ při odvození rovnice (b) atp.

Analogicky se odvodí závislosti ve zbývajících dvou rovinách (plyne též cyklickou záměnou indexů). **Geometrické rovnice** tedy znějí

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \tag{9.16}$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Je-li posun u jen funkcí proměnné x, ztotožní se první geometrická rovnice se vztahem (2.12), platným pro osový tah. Podobně rovnice (5.23), jíž jsme užili v odst. 5.4, má povahu geometrické rovnice pro zkosení v rovině rozvinuté střednicové plochy uzavřeného tenkostěnného prutu.

Znalost pole posunů tedy umožňuje jednoznačně stanovit všechny složky poměrných deformací. Vzhledem k tomu, že těchto složek je šest, nemohou být vzájemně nezávislé a musí mezi nimi platit určité vztahy, tzv. **podmínky kompatibility** (slučitelnosti), které se dají odvodit z geometrických rovnic. Tak např. derivujeme-li ε_x parciálně dvakrát podle y, ε_y pak podle y a sečteme-li získané výrazy, obdržíme smíšenou derivaci zkosení γ_{xy}:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \tag{9.17}$$

Podobně lze odvodit další rovnice kompatibility - viz např. [5]. Celkem je v prostoru 6 podmínek kompatibility, z nichž však jen 3 jsou vzájemně nezávislé. Nejsou-li tyto podmínky splněny, nejsou složky deformací vzájemně v souladu a z deformovaných dílčích elementů tělesa nelze "složit" spojité deformované těleso bez mezer nebo vzájemných proniků.

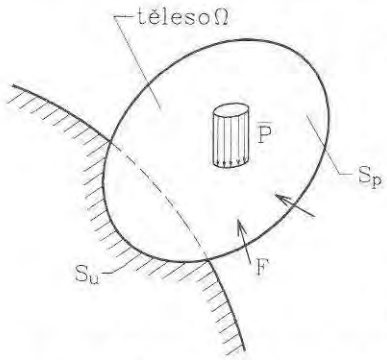
9.5 Fyzikální rovnice - obecný Hookův zákon

Statické rovnice (9.15) vyjadřují podmínky rovnováhy, formulované ve složkách napětí, geometrické rovnice (9.16) naopak obsahují jen složky deformací a posuvů. Vzájemný vztah mezi oběma skupinami veličin definují fyzikální vztahy, jak již bylo zmíněno v odst. 1.4. Ty ovšem závisí na tom, zda je materiál (v daném bodu tělesa) v pružném, plastickém nebo reologicky jinak definovaném stavu, zda je izotropní apod.

Omezíme se na základní případ **lineárně pružného izotropického** stavu, pro který jsme odvodili rovnici (1.10) pro délkové deformace a vztah (1.11) pro zkosení. Záměnou indexů získáme 6 rovnic vyjadřujících **obecný Hookův zákon** pro případ izotropie:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G},$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \upsilon\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \qquad (9.18)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \upsilon\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right], \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Pružné konstanty - modul pružnosti v tahu E, ve smyku G a Poissonův součinitel příčné deformace υ jsou přitom vzájemně vázány rovnicí (1.12), kterou lze dokázat rozborem vztahů mezi deformacemi v různých směrech.



Obr. 9.10 *Obecná úloha teorie pružnosti*

Fyzikálními rovnicemi se doplňuje systém rovnic obecné úlohy pružnosti na dostatečný počet, neboť - při vyjádření ve složkách - jsou neznámými tyto funkce:

posuny u, v, w,

deformace ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx},

napětí σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx},

tedy celkem patnáct funkcí. K jejich určení máme rovněž patnáct rovnic - tři Cauchyho podmínky rovnováhy (9.15), šest geometrických rovnic (9.16) a šest fyzikálních rovnic (9.18). Úloha teorie pružnosti, spočívající v určení všech hledaných funkcí v celém objemu Ω tělesa (obr. 9.10), je tedy řešitelná. Kromě splnění zmíněných rovnic ve všech bodech tělesa musí být na jeho hraničním povrchu splněny rovněž **okrajové podmínky**:

- na části S_p povrchu, kde jsou předepsány **statické** podmínky, musí se napětí uvnitř tělesa p_i ($i = x, y, z$) daná pro obecně skloněnou tečnou rovinu vztahy (9.7) shodovat s vnějším daným zatížením $\bar{p}_i$,
- na části S_u povrchu, kde jsou předepsány **deformační podmínky**, musí složky posunů odpovídat vnějším vazbám.

Kromě uvedených nejjednodušších dvou alternativ mohou ovšem být zadány okrajové podmínky i jinak (smíšené apod.). S řešením úloh obecné pružnosti a jejich zvláštních případů - stěn, desek, skořepin aj. - se seznámí čtenář ve vyšším kurzu pružnosti - viz [5], [13] aj.

Poměrná změna objemu

Délkové poměrné deformace ε_x, ε_y a ε_z ovlivní změnu objemu elementárního kvádru $dV = dxdydz$ (obr. 9.8). Poměrná změna objemu

$$\Delta = \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{1}{dxdydz}\left[\left(1+\varepsilon_x\right)dx\left(1+\varepsilon_y\right)dy\left(1+\varepsilon_z\right)dz - dxdydz\right] = \qquad (9.19)$$
$$= \left(1+\varepsilon_x\right)\left(1+\varepsilon_y\right)\left(1+\varepsilon_z\right) - 1 \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

kde jsme zanedbali malé veličiny vyššího řádu. Dosadíme-li nyní z obecného Hookova zákona, tj. sečteme-li první tři rovnice (9.18), vyjde po úpravě

$$\Delta = \frac{1-2\upsilon}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right) = \frac{1}{K_o}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right). \tag{9.20}$$

Poměrná změna je tedy přímo úměrná prvnímu invariantu napětí I_1 - rov. (9.10). Veličina $K_o = E/(1\text{-}2\upsilon)$ se označuje jako **objemový modul pružnosti.** Z rovnice (9.20) je zřetelná role Poissonova součinitele: při υ = 0,5 je materiál nestlačitelný (υ > 0,5 představuje fyzikálně nemožný stav).

Maticový zápis fyzikálních rovnic

Definujeme-li vektory napětí $\{\sigma\}$ a deformací $\{\varepsilon\}$ pomocí složek v uspořádání

$$\{\sigma\} = \left\{\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{yz},\tau_{zx},\tau_{xy}\right\}^T, \quad \{\varepsilon\} = \left\{\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{yz},\gamma_{zx},\gamma_{xy}\right\}^T, \tag{9.21}$$

(jde o sloupcové matice), pak obecný Hookův zákon pro izotropní materiál - rov. (9.18) můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\}, \tag{9.22}$$

kde $[C]$ je tzv. **matice poddajnosti materiálu**, jejíž prvky tvoří součinitele soustavy rovnic (9.18), tj. platí

$$[C] = \begin{bmatrix} 1/E & -\upsilon/E & -\upsilon/E & 0 & 0 & 0 \\ -\upsilon/E & 1/E & -\upsilon/E & 0 & 0 & 0 \\ -\upsilon/E & -\upsilon/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix}. \tag{9.23}$$

Inverzí rovnice (9.22) můžeme vektor napětí vyjádřit pomocí vektoru deformací

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \tag{9.24}$$

kde $[D]$ je tzv. **matice tuhosti materiálu**, jež je inverzní vůči matici poddajnosti. S využitím vztahu mezi pružnými konstantami (1.12) je

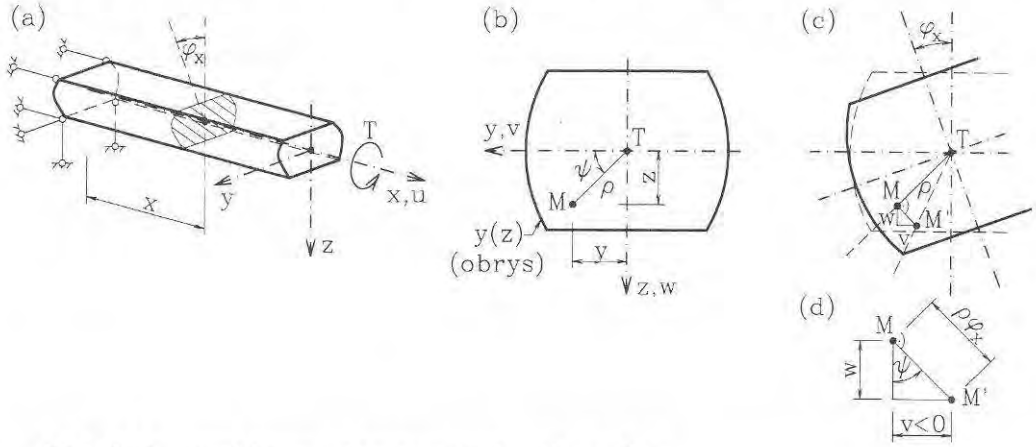
$$[D] = [C]^{-1} = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \begin{bmatrix} 1-\upsilon & \upsilon & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon & 1-\upsilon & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon & \upsilon & 1-\upsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\upsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\upsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\upsilon \end{bmatrix}. \tag{9.25}$$

Součinitele této matice můžeme ověřit řešení rovnic (9.18) pro neznámé složky napětí. Obě matice jsou symetrické vůči hlavní diagonále.

9.6 Volné kroucení prutu nekruhového průřezu

Základních rovnic teorie pružnosti využijeme k odvození potřebných vztahů pro Prandtlovu funkci napětí $F(y,z)$, pomocí níž lze řešit úlohu o volném kroucení prutu obecného průřezu, jak bylo uvedeno v kapitole 5, odst. 5.2.

Uvažujeme prut stálého průřezu, zatížený na volném konci zkrucujícím momentem T, který je současně krouticím momentem ve všech průřezech prutu - obr. 9.11. Poměrný



Obr. 9.11 *Volné kroucení prutu nekruhového průřezu*

úhel zkroucení podle rovnice (5.2) je tedy konstantní a při uložení na levém konci je tedy pootočení obecného průřezu úměrné pořadnici x:

$$\varphi_x = \theta x \tag{c}$$

Složky posunů v, w obecného bodu M vzdáleného ρ od těžiště, vyvolané touto rotací jsou

$$\begin{aligned} v &= -\rho\varphi_x \sin\psi = -\varphi_x z = -\theta xz, \\ w &= \rho\varphi_x \cos\psi = \varphi_x y = \theta xy, \end{aligned} \tag{d}$$

kde ψ je úhel průvodiče $\overline{TM}$ s osou y - viz obr. 9.11b,c,d . Podélný posun - **deplanace** je funkcí polohy bodu v průřezu, ale podél x je konstantní (shodná deplanace ve všech průřezech)

$$u = u(y,z), \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{e}$$

Dosazením do prvních tří geometrických rovnic (9.16) pro poměrná protažení:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{f}$$

Veškeré délkové deformace jsou tedy rovny nule a z fyzikálních rovnic (9.16), nebo z jejich inverzního vyjádření (9.24) vyplývá, že veškerá **normálová napětí** jsou **rovna nule** $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$. Není-li deplanací zabráněno (např. v uložení) nevznikají u **volného** kroucení (na rozdíl od vázaného) v příčných řezech normálová napětí.

Dosadíme-li vztahy (d) a (e) do zbývajících geometrických rovnic (9.16), je

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - \theta z, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} + \theta y. \tag{g}$$

Jediným nenulovými deformacemi jsou tedy zkosení γ_{xy} a γ_{xz}, takže za složek napětí zbývají smyková napětí τ_{xy} a τ_{xz}, jež získáme z odpovídajících fyzikálních rovnic (9.18):

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \theta z\right), \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \theta y\right). \tag{h}$$

Zavedeme-li Prandtlovu funkci napětí $F = F(y,z)$ definovanou vztahy (5.11), které pro přehlednost přepíšeme

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \tag{5.11)≡(i)}$$

pak dosazením do první statické rovnice (9.15) při nulových objemových silách a při $\sigma_x = 0$ obdržíme

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 0.$$

Tato rovnice je tedy splněna a zbylé dvě rovnice (9.15) jsou splněny identicky, takže všem podmínkám rovnováhy je vyhověno.

Derivujeme-li nyní τ_{xy} podle z a τ_{xz} podle y, vyjde z rovnic (h):

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \theta\right), \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \theta\right). \tag{j}$$

Deplanace $u(y,z)$ je uvnitř tělesa spojitá včetně svých derivací, takže u smíšené parciální derivace nezáleží na pořadí a odečtením druhé rovnice (j) od prvé je

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = -2G\theta. \tag{k}$$

Vyjádřením smykových napětí pomocí Prandtlovy funkce z rovnic (i) a dosazením do vztahu (k) získáme diferenciální rovnici úlohy ve tvaru

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=-2G\theta \tag{9.26}$$

Okrajová podmínka požaduje, aby na okraji (obrysu průřezu) mělo výsledné smykové napětí shodný sklon jako tečna k obrysu

$$\frac{\tau_{xy}}{\tau_{xz}}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{-\dfrac{\partial F}{\partial y}}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F}{\partial z}\mathrm{d}z=0, \tag{l}$$

tedy totální diferenciál funkce F je podél obrysu roven nule, funkce je tedy na okraji konstantní a pro jednosvazný průřez ji můžeme klást rovnu nule, tedy $F(y,z)=0$ na okraji.

Výsledný krouticí moment získáme dosazením za složky smykových napětí z definičních rovnic (i) do čtvrté rovnice (1.6)

$$M_x=T=\int_A\left(\tau_{xz}y-\tau_{xy}z\right)\mathrm{d}A=-\iint\left(\frac{\partial F}{\partial y}y+\frac{\partial F}{\partial z}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{m}$$

Využitím pravidla integrace per partes a respektováním nulové hodnoty F na okraji vyjde

$$T=2\iint F\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_A F\mathrm{d}A. \tag{9.27}$$

Krouticí moment je tedy roven objemu Prandtlova vrchlíku. Redukujeme-li funkci F součinem $G\theta$, tj. zavedeme-li funkci

$$F^*=\frac{F}{G\theta}, \tag{9.28}$$

pro níž pak úpravou rovnice (9.26) platí Poissonova diferenciální rovnice ve tvaru

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F^*}{\partial z^2}=-2, \tag{9.29}$$

pak moment tuhosti v kroucení I_t vyjádřený ze vztahu (5.2) je

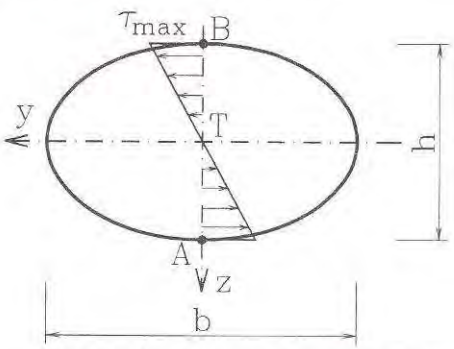
$$I_t=\frac{T}{G\theta}=\frac{1}{G\theta}2\int_A F\mathrm{d}A=2\int_A F^*\mathrm{d}A. \tag{9.30}$$

Řešit úlohu volného kroucení prutu masivního průřezu tedy znamená určit funkci $F(y,z)$ vyhovující rovnici (9.26) a okrajové podmínce $F=0$ na okraji průřezu. Smyková napětí jsou pak dána vztahy (5.11), moment tuhosti I_t rovnicí (9.30).

Řešení v uzavřeném tvaru lze nalézt jen pro ojedinělé tvary průřezu. Obvykle se úloha řeší přibližnými numerickými metodami - metodou sítí, metodou konečných prvků apod.

Příklad 9.3

Určete moment tuhosti v kroucení I_t a průřezový modul v kroucení W_t elipsy o rozměrech podle obr. 9.12 ($b > h$).



Obr. 9.12 *Kroucení prutu s průřezem ve tvaru elipsy*

Řešení:

Hledejme Prandtlovu funkci ve tvaru

$$F = C\left(\frac{4y^2}{b^2} + \frac{4z^2}{h^2} - 1\right). \tag{n}$$

Tato funkce plní okrajovou podmínku, neboť na obrysu průřezu je rovna nule.

Dosadíme do diferenciální rovnice (9.26):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = C\frac{8}{b^2} + C\frac{8}{h^2} = -2G\theta,$$

odkud je hledaná konstanta C a dosazením do (l) pak samotná Prandtlova funkce

$$C = -G\theta\frac{b^2h^2}{4\left(b^2+h^2\right)}, \qquad F = -G\theta\frac{1}{b^2+h^2}\left(h^2y^2 + b^2z^2 - \frac{b^2h^2}{4}\right). \tag{o}$$

Redukovaná funkce F^* je tedy podle (9.28)

$$F^* = -\frac{1}{b^2+h^2}\left(h^2y^2 + b^2z^2 - \frac{b^2h^2}{4}\right) \tag{9.31}$$

a její integrací podle (9.30) je moment tuhosti v kroucení

$$\begin{aligned} I_t &= 2\int_A F^*\mathrm{d}A = -\frac{2}{b^2+h^2}\left(h^2\int_A y^2\mathrm{d}A + b^2\int_A z^2\mathrm{d}A - \frac{b^2h^2}{4}\int_A \mathrm{d}A\right) = \\ &= -\frac{2}{b^2+h^2}\left(h^2I_z + b^2I_y - \frac{b^2h^2}{4}A\right) = \\ &= -\frac{2}{b^2+h^2}\left(h^2\frac{\pi}{64}hb^3 + b^2\frac{\pi}{64}bh^3 - \frac{b^2h^2}{4}\frac{\pi}{4}bh\right) = \\ &= \frac{\pi b^3h^3}{16\left(b^2+h^2\right)}. \end{aligned} \tag{9.32}$$

Přitom jsme využili známých výrazů pro axiální momenty setrvačnosti a plochu elipsy

$$I_z = \frac{\pi}{64}hb^3, \quad I_y = \frac{\pi}{64}bh^3, \quad A = \frac{\pi}{4}bh.$$

Maximální smykové napětí lze očekávat na okraji v bodech A a B (obr. 9.12). Obecně je

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z} = -G\theta \frac{1}{b^2 + h^2} 2b^2 z$$

a pro bod B, tj. pro $z = -\frac{h}{2}$ je

$$\tau_{zy,\max} = -G\theta \frac{1}{b^2 + h^2} 2b^2 \left(-\frac{h}{2} \right) = G\theta \frac{b^2 h}{b^2 + h^2} = \frac{T}{I_t} \frac{b^2 h}{b^2 + h^2} =$$

$$= T \frac{16\left(b^2 + h^2\right)}{\pi b^3 h^3} \frac{b^2 h}{b^2 + h^2} = T \frac{16}{\pi b h^3},$$

kde jsme využili rovnic (5.2) a (9.32). Ze vztahu (5.14) je

$$W_t = \frac{T}{\tau_{\max}} = \frac{\pi b h^3}{16}. \tag{9.33}$$

Rovnice (9.32) a (9.33) byly uvedeny v tabulce 5.3. Průřez ve tvaru elipsy je jedním z mála, u nichž lze odvodit řešení v uzavřeném tvaru. Řešení průřezů jiného tvaru viz např. [2], [5] aj.

10 Kritéria pevnosti a plasticity

10.1 Porušení materiálu a jeho modelování

Při jednoosé napjatosti je podmínkou porušení dosažení meze pevnosti f_u, případně dosažení meze kluzu f_y, které znamená vznik výrazných plastických deformací. Jestliže je stav napjatosti tělesa (konstrukce) víceosý, je třeba formulovat kritéria pro porušení nebo zplastizování materiálu obecněji.

Klasické tzv. **teorie pevnosti** formulovaly určitá zjednodušená kritéria, jak se o nich zmíníme podrobněji později, na základě empiricky získaných údajů získaných z rozsáhlých laboratorních zkoušek. V běžných podmínkách se tato kritéria osvědčují a proto se používají i nadále. Mají však povahu **fenomenologických** teorií, protože nevysvětlují příčiny jednotlivých procesů, nýbrž jen popisují jejich vnější projevy (metoda "černé skříňky"). Charakterizujeme je též jako bodové, **lokální** podmínky, neboť vycházejí ze stavu napjatosti tělesa v určitém bodu bez souvislosti se se stavem napjatosti v okolí - např. s gradientem (spádem) napětí, rozměrem prvku v relaci s charakteristickým rozměrům zrn nebo složek látky (tzv. rozměrový efekt) aj.

Porušení, tj. ztráta pevnosti, je ovšem velmi mnohotvárný jev. Někdy se projevuje především tvárnými - plastickými deformacemi, v jiných případech má povahu **křehkého lomu**. U jednoho a téhož materiálu může dojít k porušení jedním nebo druhým způsobem: tak. např. u kovů se pravděpodobnost vzniku křehkého lomu zvyšuje při nízkých teplotách, koncentraci napětí u vrubů, při vnitřních pnutích vyvolaných výrobou (např. svařováním) apod. Poruchy křehkým lomem vznikají náhle a vedou někdy k závažným haváriím.

Porušení může také být důsledkem tzv. **únavy materiálu**. Rozumí se tím lom při poměrně nízkých hodnotách napětí (podstatně nižších než je mez kluzu), jež však kolísají v určitém rozpětí opakovaně v mnoha cyklech.

Fyzikální podstatou procesů, které vedou k porušení, se zabývá **lomová mechanika** (viz např. [11]) a teorie poškození. Opouští se představa spojité látky a studuje se pohyb nebo rozvoj trhlin, které je nutné vždy v materiálu předpokládat - ať již v důsledku vrubových napětí, lokální defektů materiálu nebo drsnosti povrchu apod.

Nové pohledy na reologické procesy heterogenních látek, jíž je např. beton, přináší tzv. mezomechanika [4], která vychází z analýzy na úrovni mezilehlé mezi makroskopickým a mikroskopickým modelem struktury látky.

Blíže se o této problematice dozví čtenář v práci [11] (nebo též ve volitelném předmětu "Mechanika materiálu"). V dalším výkladu se zaměříme na některá jednoduchá (fenomenologická) kritéria pevnosti a plasticity užívaná u stavebních látek s tím, že aplikace na konkrétní materiály (ocel, beton, zeminy aj.) budou podrobněji rozebrány v odborných předmětech.

10.2 Kritéria pevnosti (plasticity) pro materiály se shodnou mezí pevnosti (kluzu) v tahu a tlaku

Budeme uvažovat materiál, jehož charakteristiky při jednoosé napjatosti v tahu a v tlaku jsou v absolutní hodnotě shodné (mez kluzu f_y a mez pevnosti f_u) a formulujeme pro něj lokální podmínku plasticity ve tvaru

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, f_y) \leq 0, \tag{10.1}$$

kde σ_1, σ_2 a σ_3 jsou hlavní napětí v uvažovaném bodu.

V případě podmínky pevnosti nahradíme mez kluzu f_y mezí pevnosti f_u. Hledáme tedy takový vztah mezi stavem napjatosti v bodu a mezí kluzu při jednoosém tahu f_y, který definuje okamžik zplastizování tělesa v daném bodu.

Zdánlivě nejpřirozenějším řešením této úlohy by byl předpoklad, že záleží na extrémních hodnotách napětí v uvažovaném bodu: jestliže **maximální napětí**, tj. hlavní napětí σ_1 dostoupí hodnoty f_y v tahu anebo minimální napětí σ_3 hodnoty meze kluzu v tlaku ($\sigma_3 = -f_y$), započne proces plastifikace. Z tohoto předpokladu vycházela jedna ze starších teorií (Navier, Rankin), uplatněná na posouzení pevnosti.

Porovnání s výsledky zkoušek však tento předpoklad nepotvrdilo. Např. působí-li tlak na prvek rovnoměrně ze všech stran ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 < 0$), pak k porušení nedojde ani při napětí mnohonásobně vyšším než je pevnost v tlaku při jednoosém stavu napjatosti. Ukázalo se, že přechod do plastického stavu závisí především na deviátoru napětí a nikoli na absolutní velikosti napětí.

Dobrou shodu se skutečností - např. u **oceli** a jiných kovů - prokázala tzv. **Misesova podmínka plasticity**, formulovaná nezávisle Huberem, von Misesem a Henckym (označovaná proto též HMH), která vyjadřuje podmínku (10,1) takto:

$$F_3 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2f_y^2 \leq 0. \tag{10.2}$$

Tato relace platí pro obecnou (prostorovou) napjatost. Pro případ rovinné napjatosti můžeme podmínku plasticity zapsat ve tvaru

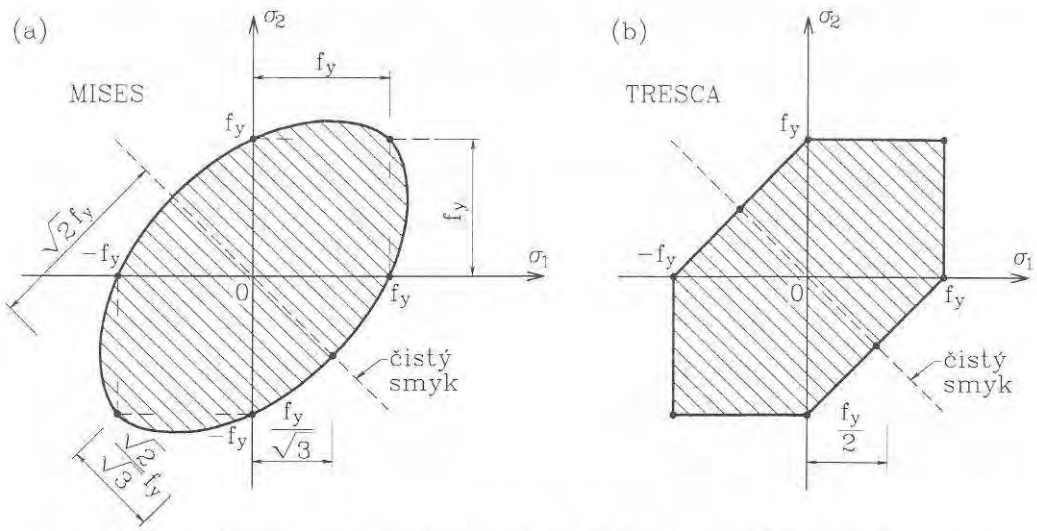
$$F = F_2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - f_y^2 \leq 0 \tag{10.3}$$

(kde $F_2 = F_3/2$). Tato podmínka je znázorněna na obr. 10.1a oblastí emezenou elipsou: při $F < 0$ je znázorňující bod uvnitř zašrafované oblasti, při $F = 0$ je na jejím obrysu - dojde ke zplastizování; stav $F > 0$ je u materiálu bez zpevnění nemožný, jinak odpovídá pružnoplastickému stavu na vzestupné větvi pracovního diagramu.

Ve složkách napětí můžeme podmínku (10.3) dosazením z rovnic (9.3) po úpravě vyjádřit v rovině xy takto

$$\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 \leq f_y^2 \tag{10.4}$$

(v rovině xz pak záměnou indexu y za z). Pro případ osové napjatosti např. ve směru x vyjde ovšem identita $\sigma_x \leq |f_y|$. Pro stav čistého smyku plyne



Obr. 10.1 *Misesova a Trescova podmínka plasticity (rovinná napjatost)*

$$|\tau_{xy}| \le \frac{f_y}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577 f_y \approx 0{,}6 f_y, \tag{10.5}$$

což jsme již předběžně uplatnili dříve: mez kluzu ve smyku činí tedy necelých 60% meze kluzu v tahu nebo tlaku.

Fyzikální podstatu Misesovy podmínky lze interpretovat různě, za nejvýstižnější je možné pokládat pojetí, podle něhož materiál zplastizuje tehdy, když **přetvárná práce** potřebná ke **změně tvaru** dosáhne své mezní hodnoty. Zaměníme-li v uvedených relacích mez kluzu f_y za mez pevnosti f_u, mají význam kritérií pevnosti.

Alternativně můžeme vycházet též z tzv. **Trescovy** podmínky plasticity, která rovněž vcelku dobře vystihuje výsledky zkoušek (které nevyhnutelně vykazují určitý rozptyl), a kterou můžeme charakterizovat jako podmínku **maximálních smykových napětí**. Pro případ prostorové napjatosti při seřazení tří hlavních napětí podle jejich algebraické hodnoty podle rovnice (9.12), tedy

$$\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3 \qquad (9.12) \equiv (a)$$

ji můžeme zapsat jednoduše ve tvaru

$$F_3 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - f_y^2 \le 0. \tag{10.6}$$

Při rovinné napjatosti je mezní křivka znázorněna šestiúhelníkem podle obr. 10.1b, tj.:

$$\begin{aligned} F &= \max\left\{\sigma_1^2 - f_y^2, \sigma_2^2 - f_y^2\right\} \le 0 \qquad \sigma_1\sigma_2 > 0, \\ F &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - f_y^2 \le 0 \qquad\quad \sigma_1\sigma_2 < 0. \end{aligned} \tag{10.7}$$

Souvislost vztahů (10.7) s obecnou formulací (10.6) je dána tím, že při shodných znaménkách napětí σ_1 a σ_2 přebírá nulové napětí v kolmém směru roli extrémního napětí (nahlíženo z hlediska prostorové napjatosti), kdežto při rozdílných znaménkách σ_1 a σ_2 jsou tato dvě extrémními napětími - srov. relaci (9.12).

Trescova podmínka definuje oblast, ležící zcela uvnitř oblasti ohraničené Misesovou podmínkou, je tedy na straně bezpečné. Mez kluzu ve smyku by odpovídala poloviční hodnotě meze kluzu v tahu nebo tlaku ($|\tau_{xy}| \leq 0{,}5 f_y$), což je asi o 15,5% méně než vyplývá z Misesovy podmínky podle rov. (10.5). Použití Trescovy podmínky vede k jednodušším výpočetním postupům tehdy, když způsob namáhání předurčuje platnou větev podmínek (10.7), resp. (10.6); v opačném případě (u rovinných nebo prostorových úloh), kdy není rozhraní mezi oblastmi spojitosti relace (a) předem známo, se tato výhoda ztrácí. Z teoretického hlediska vyvolává určitou pochybbnost ta okolnost, že Trescova podmínka (na rozdíl od Misesovy) nebere zřetel na **prostřední ze tří hlavních napětí** (tedy při dodržení relace (a) na napětí σ_2). Otázku vlivu tohoto napětí byla v první polovině tohoto století předmětem rozsáhlého výzkumu (kovové tenkostěnné válcové prvky namáhané tahem, kroucením a vnitřním přetlakem), který potvrdil určitou roli prostředního ze tří hlavních napětí, i když nikoli rozhodující.

Příklad 10.1

Určete zda je překročena mez plasticity u materiálu, jehož mez kluzu při jednoosém tahu (a tlaku) je rovna f_y = 240 MPa, působí-li při rovinném namáhání v daném bodu napětí:

a) σ_x = 180 MPa, σ_y = 60 MPa, τ_{xy} = 90 MPa,

b) σ_x = 180 MPa, σ_y = -60 MPa, τ_{xy} = 90 MPa,

c) σ_x = 180 MPa, σ_y = 0, τ_{xy} = 90 MPa.

Řešení:

Pro rovinnou napjatost definovanou složkami σ_x, σ_y a τ_{xy} užijeme relace (10.4). Pro jednotlivé případy dostáváme:

a) $180^2 - 180 \cdot 60 + 60^2 + 3 \cdot 90^2 = 49500 < f_y^2 = 240^2 = 57600$ MPa^2,

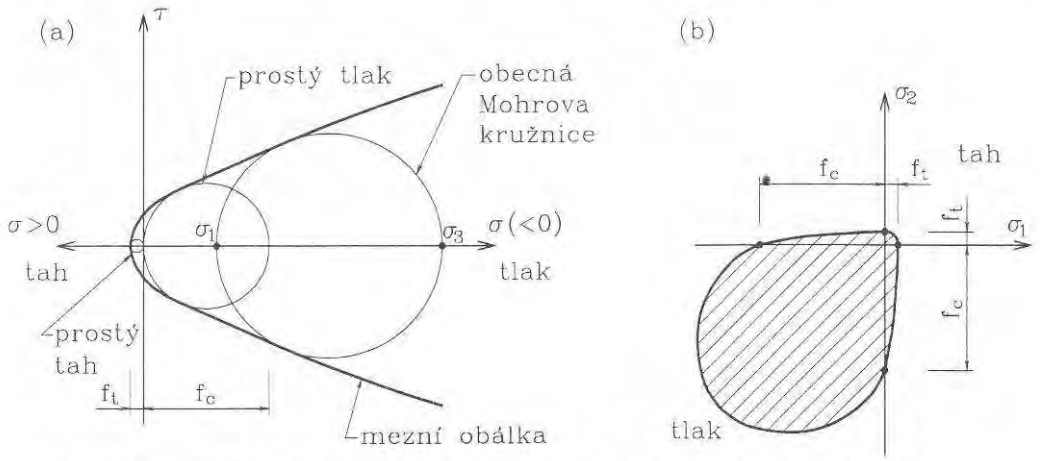
b) $180^2 + 180 \cdot 60 + 60^2 + 3 \cdot 90^2 = 71100 > 57600$ MPa$^2 = f_y^2$,

c) $180^2 + 3 \cdot 90^2 = 56700 < 57600$ MPa^2.

V případech a), c) mez plasticity překročena nebyla (materiál je v pružném stavu), v alternativě ad b) je mez plasticity překročena.

10.3 Materiály s různou pevností v tahu a tlaku

Některé stavební materiály, jako např. **beton**, mají podstatně rozdílnou pevnost v tahu a tlaku. V tom případě podává poměrně výstižnou představu o jejich pevnosti **Mohrova teorie porušení**. Její smysl je nejlépe patrný z grafického vyjádření (obr. 10.2a): podrobíme-li materiál řadě zkoušek (v prostém tahu, smyku, tlaku atp.) a sestrojíme-li Mohrovy kružnice napětí odpovídající okamžiku porušení, obdržíme mezní plochu jako **obálku** těchto kružnic. Při stavech napjatosti zobrazených Mohrovou kružnicí (sestrojenou z extrémních napětí σ_1 a σ_3) ležící uvnitř oblasti nedojde k porušení, kdežto dotkne-li se



Obr. 10.2 *Mohrova podmínka; materiál s různou pevností v tahu a tlaku*

kružnice mezní křivky, je dosaženo meze pevnosti. U betonu má obálka přibližně tvar semikubické paraboly, kterou můžeme zapsat ve tvaru

$$(f_t - \sigma)^2 = k\tau^3, \tag{10.8}$$

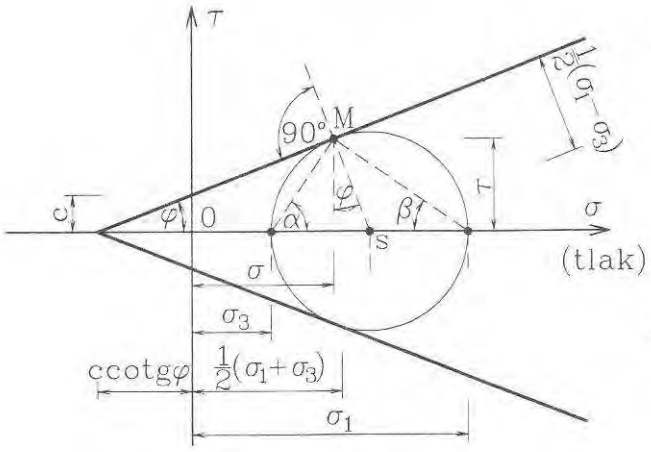
kde f_t je pevnost betonu v jednoosém tahu a k konstanta určená zkouškami.

Mohrovo kritérium pevnosti nebere rovněž zřetel na prostřední ze tří hlavních napětí a můžeme je chápat jako rozšíření kritéria maximálního smyku (Trescova) na materiály s rozdílnou pevností v tahu a tlaku. Z Mohrovy obálky je zřejmé, že tlak působící ve dvou nebo více směrech zvyšuje pevnost materiálu - na obr. 10.2b jsou v souřadnicovém systému σ_1, σ_2 znázorněny výsledky zkoušek při rovinné napjatosti. Při prostorovém tlakovém namáhání se pevnost betonu v tlaku zvyšuje několikanásobně.

Pro pevnost **zemin** se používá Coulombovy podmínky

$$\tau \leq c + \sigma \mathrm{tg}\varphi \tag{10.9}$$

kde c je soudržnost (koheze) a φ je úhel vnitřního tření; normálové napětí σ se zde uvažuje jako kladné, je-li tlakové (jak je to užíváno v mechanice zemin). Tuto podmínku můžeme chápat jako zvláštní případ Mohrovy podmínky, kdy obálku kružnic napětí tvoří dvě přímky (Coulombova podmínka však byla odvozena dříve a nezávisle na Mohrově).



Obr. 10.3 *Coulombova podmínka (zeminy)*

Z geometrie lze odvodit velikost úhlů na obr. 10.3:

$$\alpha = 45^o + \frac{\varphi}{2}, \qquad \beta = 45^o - \frac{\varphi}{2}. \tag{a}$$

Vyjádříme-li smykové napětí τ a normálové napětí σ pomocí hlavních napětí σ_1 a σ_3 při označení podle obr. 10.3

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\cos\varphi,$$
$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) - \tau\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{2}\sigma_1(1-\sin\varphi) + \frac{1}{2}\sigma_3(1+\sin\varphi), \tag{b}$$

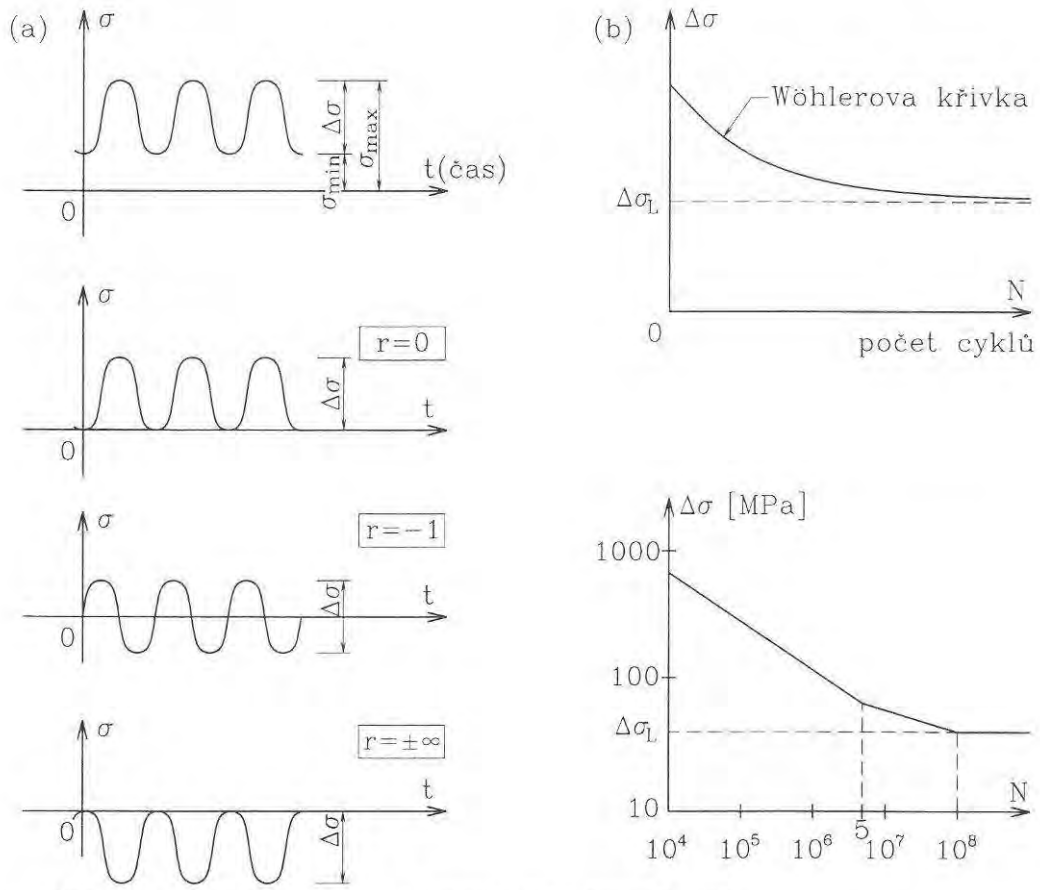
pak dosazením do relace (10.9) po úpravě získáme Coulombovo kritérium vyjádřené v extrémních hlavních napětích

$$\sigma_1 - \sigma_3\mathrm{cotg}^2\left(45^o - \frac{\varphi}{2}\right) \le 2c\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}. \tag{10.10}$$

Coulombova podmínka (10.9) představuje ovšem jen nejjednodušší variantu posouzení pevnosti zemin nebo hornin. Podobně jako u látek se shodnou pevností v tahu a tlaku lze i zde zavést vliv středního hlavního napětí (σ_2) a dalších faktorů, jak se o tom pojednává blíže v mechanice zemin.

10.4 Únavová pevnost

V řadě případů dochází k porušení stavebních konstrukcí (u strojních konstrukcí pak v převážné většině) vlivem zatížení, vyvolávajících proměnná napětí - různé velikosti nebo i znaménka, a to opakovaně v mnoha cyklech. K porušení přitom dochází při nižších hodnotách napětí než při klidném (statickém) zatížení, které kolísá jen málo a méně často; tento jev označujeme jako **únavu materiálu**.



Obr. 10.4 *Charakteristiky cyklu napětí, Wöhlerova křivka*

Pro jednoosý stav napětí je cyklus změny napětí definován především krajními hodnotami napětí σ_{max} a σ_{min} - obr. 10.4a. Z nich plyne tzv. součinitel nesymetričnosti cyklu r a rozkmit $\Delta\sigma$:

$$r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}, \qquad \Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}. \tag{10.11}$$

Při $r = 0$ jde o pulzující napětí v tahu, $r = \pm\infty$ odpovídá pulsujícímu napětí v tlaku, $r = -1$ pak znamená symetrické střídavé napětí.

Podrobíme-li vzorek ve zkušebním zařízení (např. v pulzátoru) cyklickému zatížení určitého typu (parametru r), dojde k lomu po určitém počtu cyklů N. Volíme-li postupně nižší hodnoty napětí, zvětšuje se počet cyklů do okamžiku porušení a při určité hladině napětí již materiál snese (prakticky) neomezený počet cyklů.

Zkoušky ukázaly, že rozhodujícím ukazatelem je **rozkmit napětí** $\Delta\sigma$ (a nikoli maximální dosahované napětí σ_{max}), takže jako **mez únavy** můžeme označit takový rozkmit napětí, který při daném uspořádání snese materiál při neomezeném počtu cyklů. Tzv. **Wöhlerova křivka**, vyjadřující závislost mezi charakteristikami napětí a počtem cyklů do okamžiku porušení (obr. 10.4b) se k mezi únavy asymptoticky blíží; při logaritmickém

vyjádření ji lze přibližně vyjádřit dvěma nebo více úsečkami. Pokud se očekává, že v průběhu předpokládané životnosti konstrukce dojde jen k omezenému počtu cyklů N. lze připustit vyšší úroveň napětí - tzv. časovou pevnost , odpovídající konkrétnímu počtu cyklů N.

Mechanismus porušení v popsaném případě tzv. **vysokocyklické únavy** je spojen se vznikem plastických deformací v mikroskopickém měřítku, které při střídavém namáhání vedou postupně k porušení krystalické mřížky kovu. V prvním stadiu se zvětšuje hustota poruch a nerovnoměrnost v jejich rozložení, ve druhém pak vznikají zárodky trhlin (obvykle při povrchu dílce) a ve třetím stadiu roste hlavní trhlina - zpravidla napříč zrny ve směru kolmém k normálovému napětí.

Zdrojem mikrotrhlin jsou často **koncentrace napětí** v místech vrubů a jiných náhlých změn tvaru, jak již bylo zmíněno dříve. Snížení meze únavy není však lineárně závislé na teoretické hodnotě součinitele koncentrace napětí, ale závisí též na vlastnostech materiálu (jeho vrubové citlivosti ovlivněné velikostí zrn), na gradientu napětí, způsobu opracování (drsnosti povrchu) a dalších faktorech. V každém případě však je účelné volit konstrukční uspořádání umožňující plynulý silový tok bez náhlých přechodů.

Nízkocyklická vzniká při střídavém zplastizování (v tahu a tlaku) makroskopického objemu konstrukce. Ohýbáme-li např. drát z měkké oceli střídavě v kladném a záporném smyslu křivosti, vyčerpá se rychle jeho schopnost plasticky se deformovat a dojde k jeho lomu. Proto při návrhu nosné konstrukce střídavé zplastizování obvykle zcela vylučujeme.

Literatura

[1] Bažant, Z.P. - Cedolin, L.: Stability of Structures.
New York, Oxford University Press, 1991.

[2] Crha, M. - Šmiřák, S. - Dočkal, P.: Pružnost a plasticita (skriptum).
Ediční středisko VUT v Brně, 1991

[3] Hořejší, J. - Šafka, J.: Statické tabulky. Technický průvodce 51.
Praha, SNTL/Alfa 1987.

[4] Kafka, V.: Základy teoretické mikroreologie heterogenních látek.
Praha, Academia 1984.

[5] Kaiser, J. a kol.: Pružnost a plasticita I.
Bratislava, Alfa 1990

[6] Křístek, V.: Teorie výpočtu komůrkových nosníků.
Praha, SNTL 1974.

[7] Mrázik, A. - Gruska, J.: Výpočet tenkostěnných prútov.
Bratislava, Vydavatelstvo SAV 1965.

[8] Rektorys, K. a kol.: Přehled užité matematiky.
Praha, SNTL 1963.

[9] Roark, R.J.: Formulas for Stress and Strain.
New York, Mc Graw-Hill, 1965.

[10] Servit, R. - Doležalová, E. - Crha, M.: Teorie pružnosti a plasticity I.
Praha, SNTL/Alfa 1981.

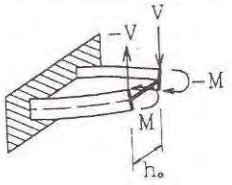
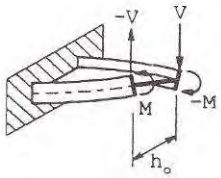
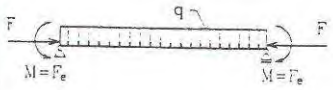
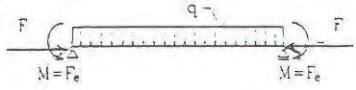
[11] Šejnoha, J. - Kufner, V.: Pružnost, pevnost, plasticita III (skriptum).
Ediční středisko ČVUT Praha, 1990.

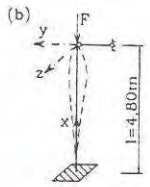
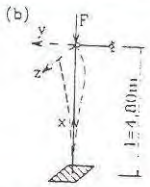
[12] Šmiřák, S. - Bažant, Z. - Kolář, A. - Svoboda, M.:
Teorie plasticity a mezních stavů (skriptum).
Praha, SNTL 1972.

[13] Teplý, B. - Šmiřák, S.: Pružnost a plasticita II (skriptum).
Nakladatelství VUT Brno, 1993.

Seznam oprav chyb

Vzhledem k tomu, že z technických důvodů nebylo možné provést opravy přímo v textu, připojuje se souhrnný seznam oprav (nejsou uváděny podružné chyby v textu, je-li správné znění zřejmé ze souvislosti).

Strana	Řádek	Chybně	Správně
15	rov. (1.13)	.. $= \varepsilon_{zTD} = \ldots$ $\gamma_{xyTD} = \ldots$	.. $= \varepsilon_{zT} = \ldots$ $\gamma_{xyT} = \ldots$
30	11. shora	$N_2 = 221{,}96$ kN,	$N_2 = 21{,}96$ kN,
32	6. shora	vnější průměr $d = 600$ mm	vnější průměr $d = 60$ mm
38	7. zdola (rov.)	$\ldots -3F_a = 0$	$\ldots -3F \,.\, a = 0$
58	13. shora	...napětí ve svislém řezu τ_{xy}...	...napětí ve svislém řezu τ_{xz} ...
59	6. a 8. zdola	$-d\overline{Q}$ - ... $d\overline{Q} = \ldots$	-dQ- ... $dQ = \ldots$
60	obr. 3.12 b, c	$\tau_{x\sigma}$	τ_{xo}
70	4. zdola	.. podle obr. 3.20 c ...	.. podle obr. 3.20 e ...
71	11. shora	= 95,7 kN.	= 97,5 kN.
85	12. shora	.. v pracích [8], ...	.. v pracích [14], ...
92	8. zdola (v rovnici)	$M = \ldots = \frac{q}{2}\left(2x - x^2\right)$	$M = \ldots = \frac{q}{2}\left(lx - x^2\right)$
94	4. zdola (v rovnici)	$C_1 = -\frac{ql^4}{24}$,	$C_1 = -\frac{ql^3}{24}$,
95	3. zdola	I 220	I 200
116	7. shora	.. konstanta C^* odpadá.	.. konstanta C_1^* odpadá.
117	1. zdola (v tab. 4.4)	$\frac{Fl}{4EI^*}$	$\frac{Fl}{4GA^*}$
128	obr. 5.7 d		
146	12. shora (v rovnici)	.. $+ A_1 (c_1 - \frac{h}{2})^2 + \ldots$	.. $+ A_1 (c_1 - \frac{h_1}{2})^2 + \ldots$
148	obr. 7.9		
156	22. shora	.. v práci [8].	v práci [14].

Strana	Řádek	Chybně	Správně
157	2. shora	.. (obr. 7.10), …	.. (obr. 7.14), …
160	11. zdola	.. = 92,5 MNm.	.. = 92,5 kNm.
164	rov. (f)	$w'' = + \alpha^2 w = \alpha^2 \delta$	$w'' + \alpha^2 w = \alpha^2 \delta$
168	obr. 8.9 b		
170	10. zdola	$F_{cr} = 4{,}858\ EI/l$	$F_{cr} = 4{,}858\ EI/l^2$
179	rov. (8.30)	$.. = \frac{F}{A} + \frac{F\sigma}{W} = \ldots$	$.. = \frac{F}{A} + \frac{F\delta}{W} = \ldots$
183	5. zdola	.. okolí vyšetřovacího bodu …	.. okolí vyšetřovaného bodu …
190	10. shora	.. měla řešení …	.. měla nenulové řešení …
199	12. shora	.. roven objemu Prandtlova vrchlíku …	.. roven dvojnásobku objemu …
200	4. shora	Nízkocyklická vzniká …	Nízkocyklická únava vzniká …
210	doplnit	[14] Mrázik, A. – Škaloud, M. – Tocháček, M.: Navrhování ocelových konstrukcí podle plasticity. Praha, SSNTL 1980.	

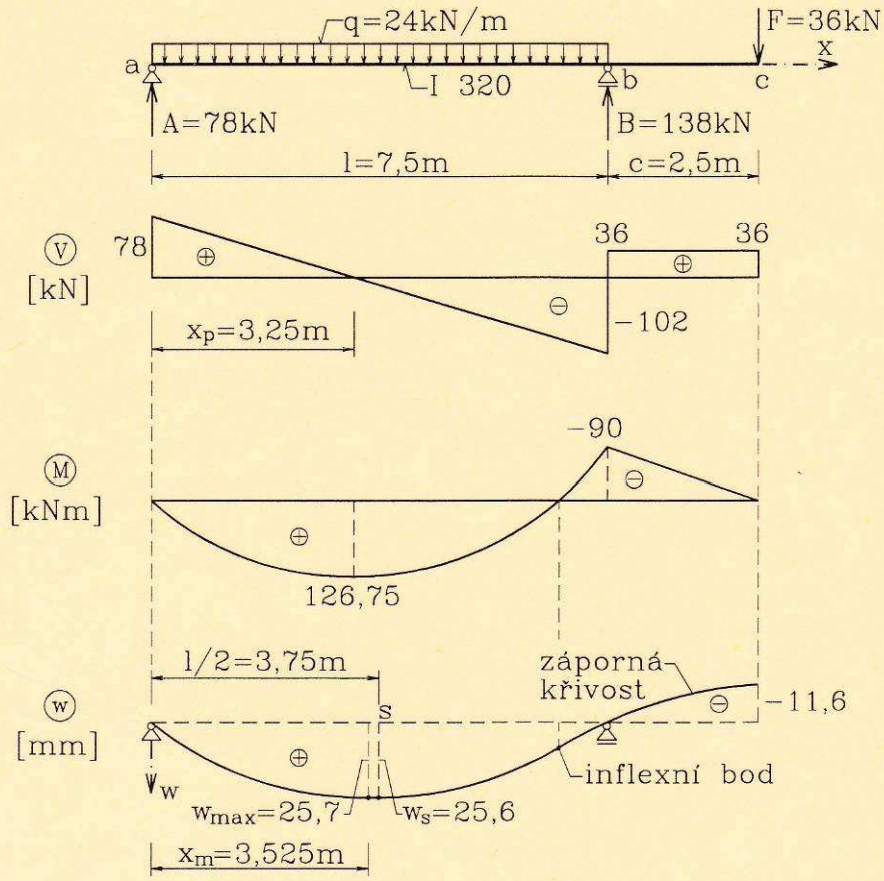
Název PRUŽNOST A PLASTICITA I
pro distanční studium

Autor Doc. Ing. Svatopluk Šmiřák, CSc.
Nakladatelství AKADEMICKÉ NAKLADATELSTVÍ CERM®, s.r.o. Brno
Tisk FINAL TISK s.r.o Olomučany
Vyšlo říjen 2006
Vydání třetí
V Akademickém nakladatelství CERM®, s.r.o. první

AA – VA 18,16 – 18,40

Tato publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou

ISBN 80 – 7204 – 468 – 0



Doc. Ing. Svatopluk Šmiřák, CSc.

PRUŽNOST A PLASTICITA I

pro distanční studium

Fakulta stavební Vysokého učení technického v Brně