PRUŽNOST A PEVNOST

9. přednáška

Stabilita a vzpěr
Eulerovo řešení. Teorie II. řádu

Prof. Ing. Zdeněk Kala, Ph.D.

Ústav stavební mechaniky, Veveří 95

Přednášky jsou zde:

https://www.fce.vutbr.cz/STM/kala.z/

(tlačítko BDA002 Pružnost a pevnost)

Stabilita



Vzpěr

U štíhlých tlačených prutů neplatí vzorce odvozené pro výpočet napětí a přetvoření u prostého tlaku nebo tahu!

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

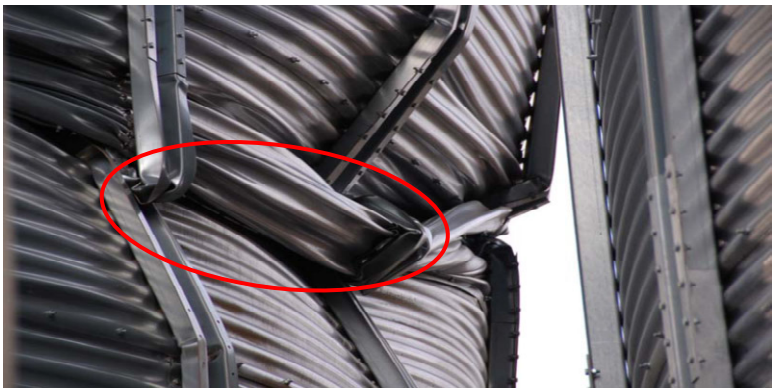
$$\Delta = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$



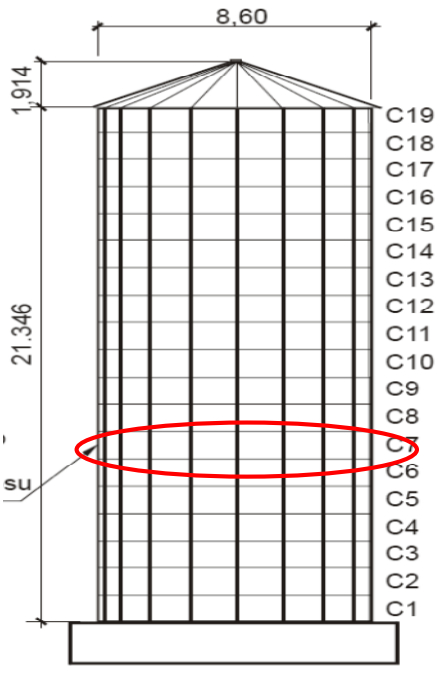
Bambusové tyče









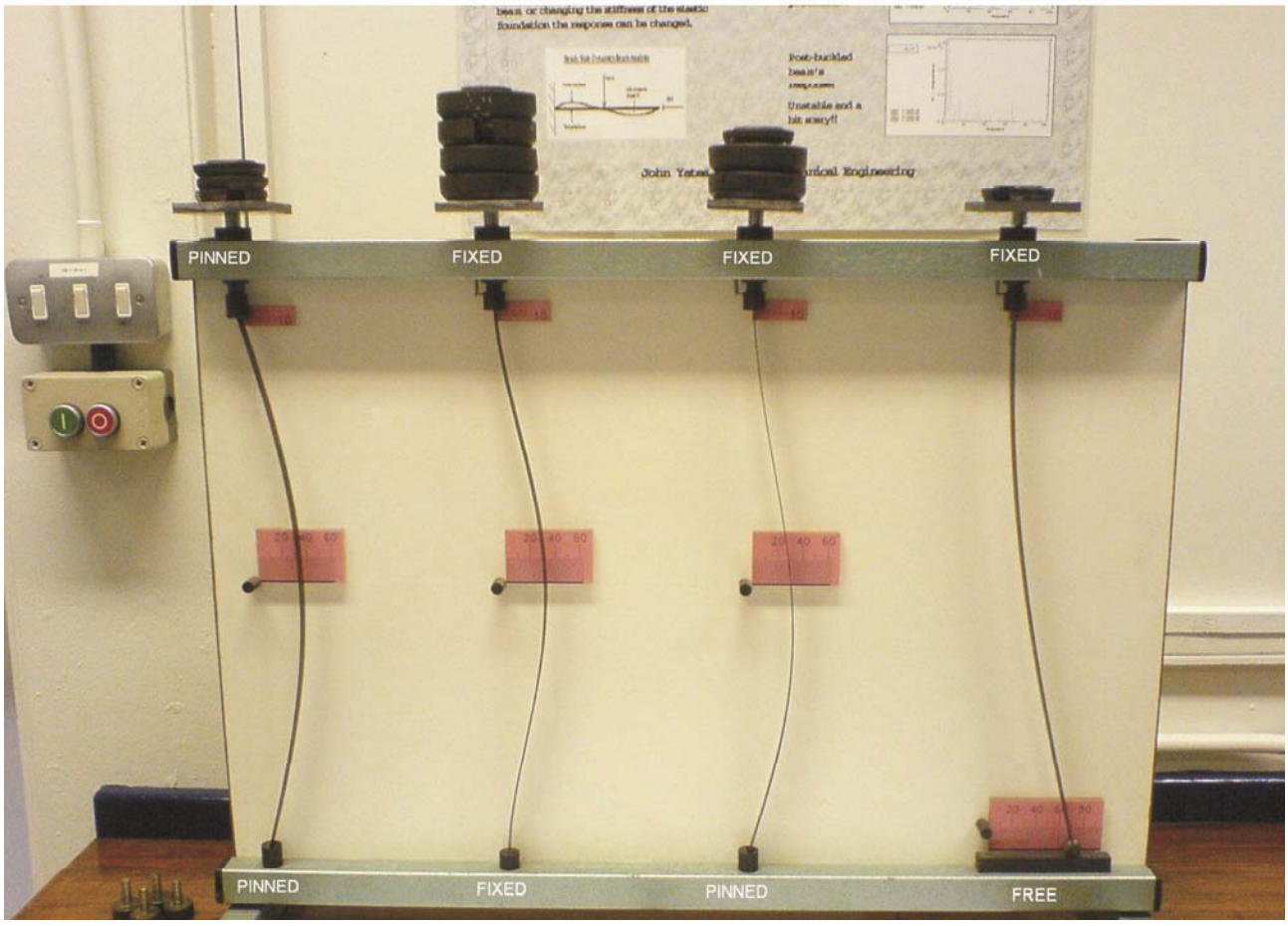




New York, 111 West 57th Street
Hranol vysoký 435 metrů, poměrem výšky a šířky 24:1 je nejštíhlejším mrakodrapem světa.

Stabilita a vzpěrná pevnost tlačených prutů





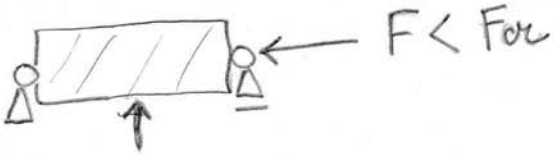
https://www.youtube.com/watch?v=l_HlbF4EoJs

STABILITA

stav stabilní

1)



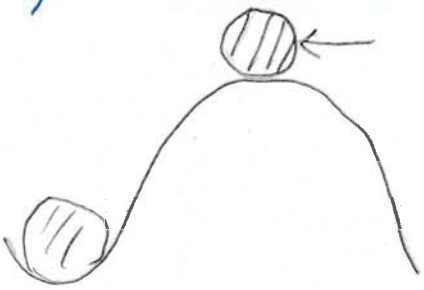


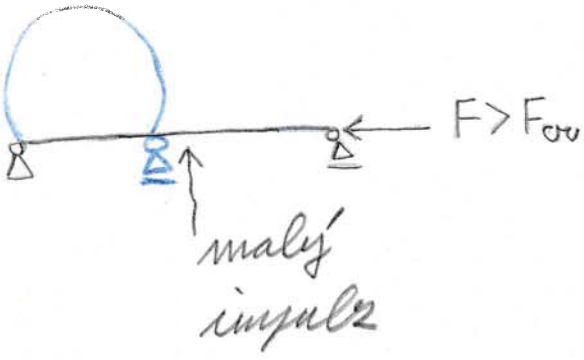
2) stav indiferentní



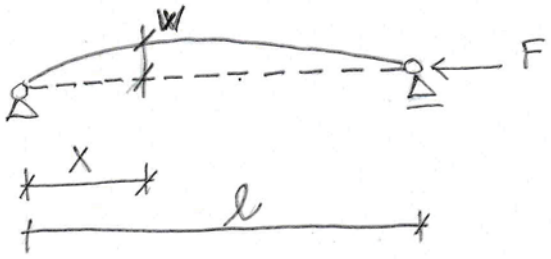


3) stav nestabilní





Stabilita je schopnost soustavy vrátit se do původního stavu jakmile pomine příčina, která změnu stavu vyvolala



$$M = F \cdot w$$

$$w'' = \frac{-M}{E \cdot I} = -\frac{F \cdot w}{E \cdot I}$$

$$F = \alpha^2 \cdot E I$$

$$w'' + \frac{F}{E \cdot I} \cdot w = 0 \qquad \alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I}$$

$$w'' + \alpha^2 w = 0$$

1) $w(x) = c_1 \sin(\alpha \cdot x) + c_2 \cos(\alpha \cdot x) \Rightarrow$ **$w(x) = c_1 \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x\right)$**

$w(0) = c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot 0) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot 0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$w(l) = c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot l) = 0$

$\neq 0 \qquad = 0$

$\alpha \cdot l = k \cdot \pi \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad \alpha = \frac{k \cdot \pi}{l}$

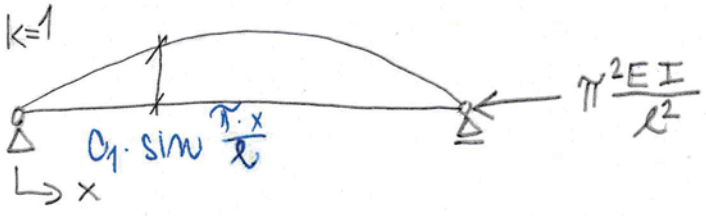
$w(x) = c_1 \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x\right)$

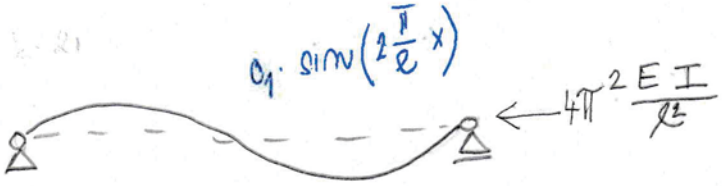
$F_{cr} = \alpha^2 \cdot E \cdot I = \left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right)^2 \cdot E \cdot J$

$F_{cr} = k^2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$

$w' = c_1 \cdot \cos(\alpha x) \cdot \alpha + c_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x) \alpha$

$w'' = c_1 \cdot \alpha^2 \sin(\alpha \cdot x) - c_2 \cdot \alpha^2 \cdot \cos(\alpha \cdot x)$







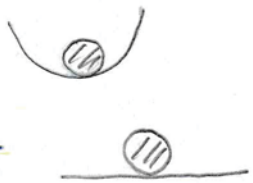
(15. 04. 1707 – 18. 09. 1783)

Leonh. Euler

$F < F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$ stabilní stav

$F = F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$ indiferentní stav

$F > F_{cr}$ nestabilní stav

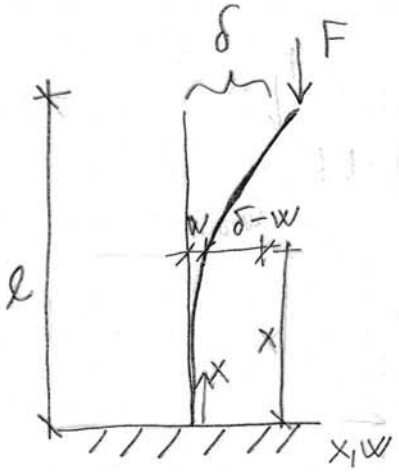


$\sigma_x = \frac{1}{A} \leq f_y \quad (235\ MPa)$

$F \leq f_y \cdot A$

$F \leq F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{\ell^2}$

i)



$M = -F \cdot (\delta - w)$

$w'' = \frac{-M}{E \cdot I} = \frac{F}{E \cdot I}(\delta - w) \qquad \alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I}$

$w'' + \alpha^2 w = \alpha^2 \cdot \delta$

$w(x) = c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \delta$

$w(0) = 0 \qquad c_1 \cdot \sin 0 + c_2 \cdot \cos 0 + \delta = 0$

$w'(0) = 0 \qquad \alpha \cdot c_1 \cdot \cos 0 - \alpha \cdot c_2 \cdot \sin 0 = 0$

$w(\ell) = \delta \qquad c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot \ell) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot \ell) + \delta = \delta$

$\left.\begin{array}{l} c_2 + \delta = 0 \\ \alpha \cdot c_1 = 0 \\ c_1 \cdot \sin(\alpha\ell) + c_2 \cdot \cos(\alpha\ell) \end{array}\right\}$

$x_1 + x_2 = 0$

$2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 0$

$\det = \delta \cdot \cos(\alpha \cdot \ell) = 0$

$\neq 0 \quad = 0$

$\alpha \cdot \ell = \frac{\pi}{2} \qquad \alpha = \frac{\pi}{2 \cdot \ell}$

$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I}$

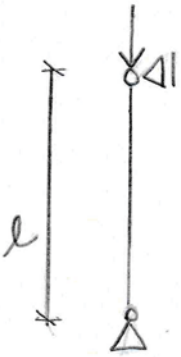
$F_{cr} = \alpha^2 \cdot EI = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I}{\ell^2}$

$c_2 = \delta$

$w = c_2 \cdot \left(1 - \cos\frac{2x}{2\ell}\right)$

VZPĚRNÁ DÉLKA

- Ve znaze vzorcích základní typy Eulerova případu je možné kritickou sílu pružného prutu stálého průřezu s různými okrajovými podmínkami vyjádřit souhrnně ve tvaru $F_{cr} = \pi^2 \frac{E \cdot I}{L_{cr}^2}$ kde L_{cr} je tzv. <u>vzpěrná délka</u>, která závisí na okrajových podmínkách prutu.



$F_{cr} = \pi^2 \frac{E \cdot I}{L_{cr}^2}$

$L_{cr} = l$



$F_{cr} = \pi^2 \frac{E \cdot I}{L_{cr}^2}$

$= \frac{1}{4} \pi^2 \frac{E \cdot I}{l^2}$

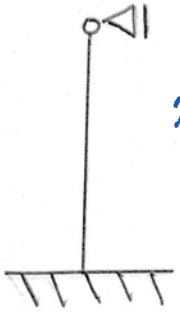
$\pi^2 \frac{E \cdot I}{L_{cr}^2} = \frac{1}{4} \pi^2 \frac{E \cdot I}{l^2}$

$L_{cr} = 2\,l$



$4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$

$L_{cr} = 0{,}5 \cdot l$

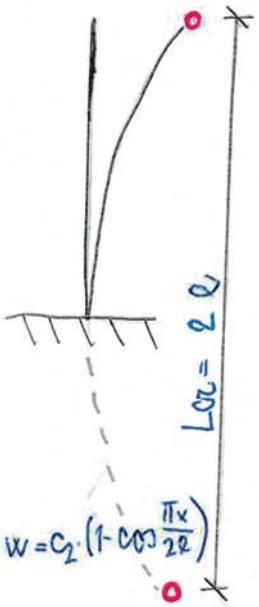


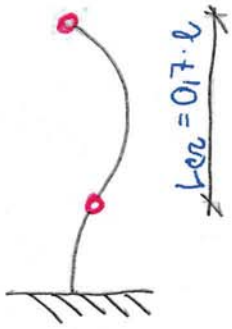
$20{,}19 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$

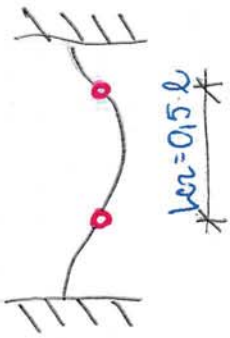
- délka kloubově uloženého prutu s tuhostí v ohybu $E \cdot I$, který ztratí stabilitu při kritické síle vyšetřené na prutu s různými okrajovými podmínkami
- VD lze definovat jako vzdálenost inflexních bodů na vypočteném prutu

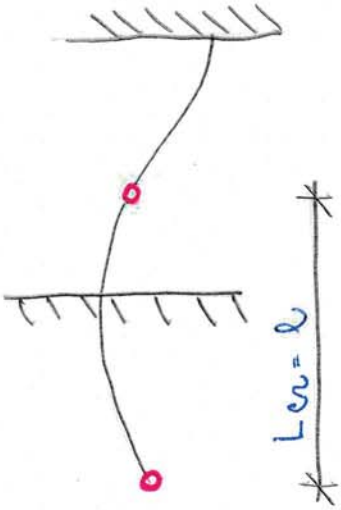


$L_{cr} = l$





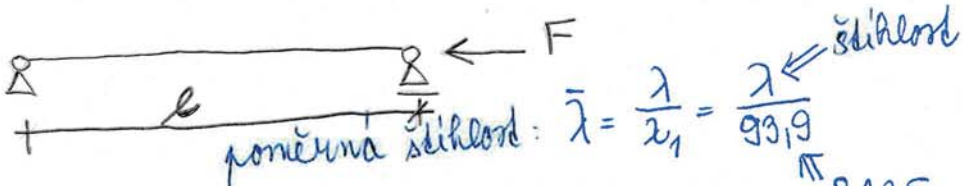




(Př) Průřez 1. třídy S 235

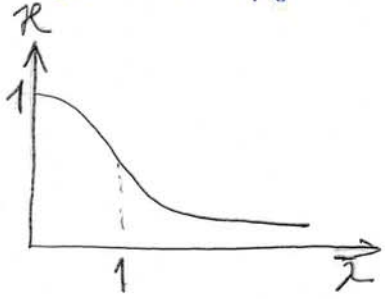
$F \leq F_d$

$F_d = \chi \cdot A \cdot f_y$



poměrná štíhlost: $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{\lambda}{93{,}9}$ ← štíhlost

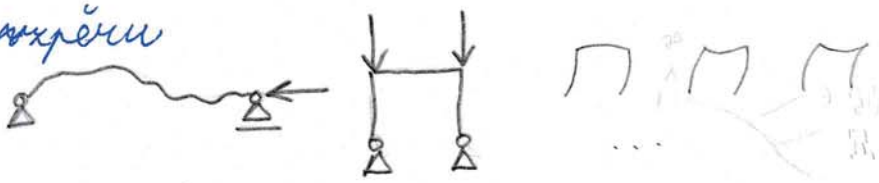
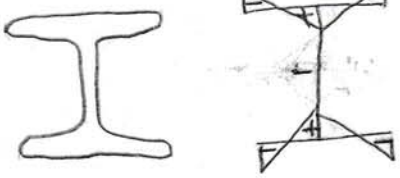
← S 235

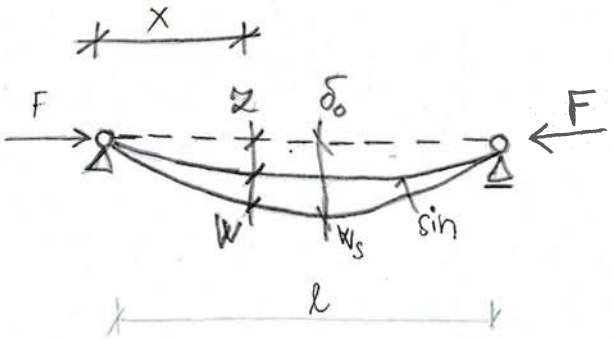


štíhlost: $\lambda = \frac{L_{cr}}{i}$

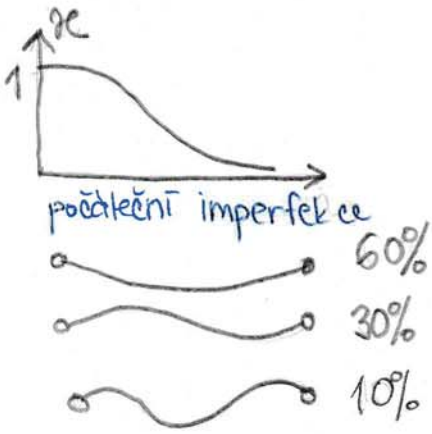
- stabilitní pojetí vzpěru
  - přímý centricky zatížený prut



- pevnostní pojetí vzpěru
  - imperfekce
    1) 
    2)  $t_2 = \llcorner\!\lrcorner \pm \Delta$
    3) Vlastní pnutí 
    4) Fyzikální mechanické vlastnosti reálí mají určité odchylky $E = 210\ GPa \pm 20\ GPa$
    5) Zatížení nepůsobí ideálně v předpokládané pozici



$F_d = \chi \cdot A \cdot f_y$ (↑ λ)



$$w = w_s \cdot \sin\frac{\pi \cdot x}{l}$$

$$M = F \cdot (z + w) = F \cdot (\delta_0 + w_s) \cdot \sin\frac{\pi \cdot x}{l}$$

$$w'' = \frac{-M}{E \cdot I}$$

$$-w_s \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \sin\frac{\pi \cdot x}{l} = -\frac{F}{E \cdot I}(\delta_0 + w_s) \cdot \sin\frac{\pi \cdot x}{l}$$

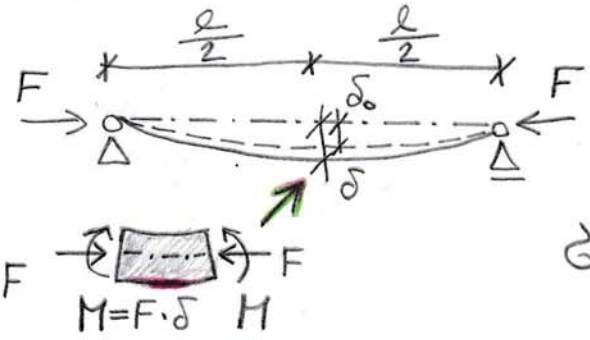
$$-w_s \cdot \frac{\pi^2}{l^2} = -\frac{F}{E \cdot I}(\delta_0 + w_s)$$

$$w_s = \frac{F \cdot l^2}{\pi^2 \cdot E \cdot I}(\delta_0 + w_s) = \frac{F}{F_{cr}}(\delta_0 + w_s)$$

$$w_s = \delta_0 \cdot \frac{F}{F_{cr} - F}$$

$$\delta = \delta_0 + w_s = \delta_0 + \delta_0 \cdot \frac{F}{F_{cr} - F} = \delta_0 \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{cr}}}$$

$$\boxed{\delta = \frac{\delta_0}{1 - \frac{F}{F_{cr}}}}$$



$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} \; ; \; W = \frac{I}{c_1}$$

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{F\cdot\delta}{W}$$

plocha, průřezový modul



tlak, ohyb

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{F\cdot\delta_0}{W\cdot\left(1-\frac{F}{F_{cr}}\right)}$$

zavedeme R jako odolnost (resistance)

$$\sigma_{max} = \frac{R}{A} + \frac{R\cdot\delta_0}{W\cdot\left(1-\frac{R}{F_{cr}}\right)} = f_y \qquad F_{cr} = \pi^2\frac{EI}{l^2}$$ ... Eulerova kritická síla

$$R = -\frac{\sqrt{A^2\cdot(\delta_0\cdot F_{cr}+f_y\cdot W)^2 + 2\cdot A\cdot F_{cr}\cdot W\cdot(\delta_0\cdot F_{cr}-f_y\cdot W)+F_{cr}^2\cdot W^2} - A\cdot(\delta_0\cdot F_{cr}+f_y\cdot W) - F_{cr}\cdot W}{2\cdot W}$$

Norma Eurocode 3 zavádí $R = \varkappa\cdot A\cdot f_y$

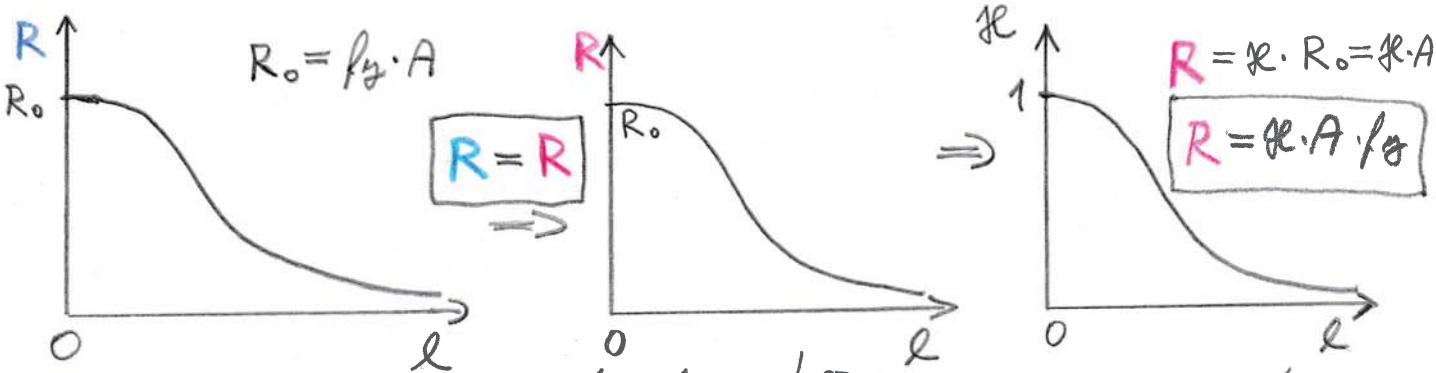
f_y ... mez kluzu (235 MPa, 355 MPa, 420 MPa)

$\varkappa$ ... vzpěrnostní součinitel

$\cdot$ jsou funkcí l, čím větší l tím menší R

$$\delta_0 = \frac{l}{1000} \qquad F_{cr} = \pi^2\frac{EI}{l^2}$$

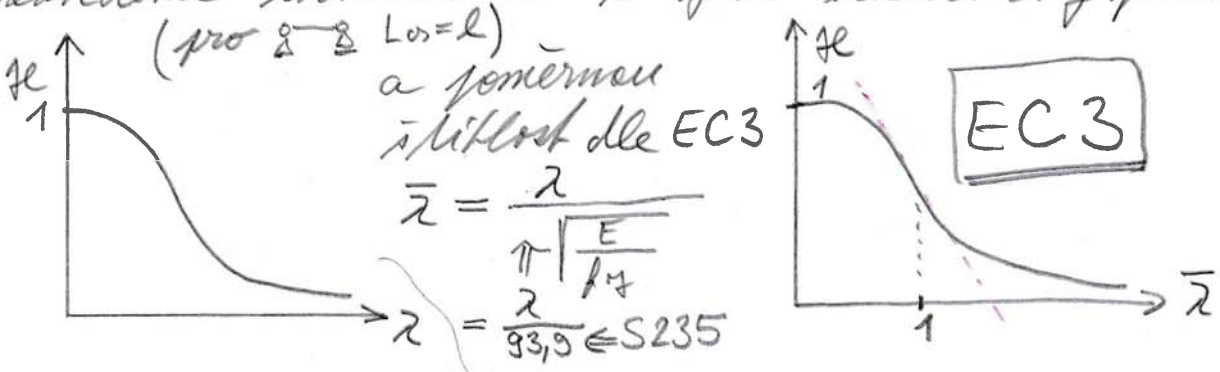
$$R = -\frac{\sqrt{A^2\cdot\left(\frac{EI\cdot\pi^2}{1000\,l}+f_y\cdot W\right)^2 + 2\cdot A\cdot\pi^2\frac{EI}{l^2}\cdot W\cdot\left(\frac{EI\pi^2}{1000\,l}-f_y W\right)+\left(\pi^2\frac{EI}{l^2}\right)^2\cdot W^2} - A\cdot\left(\frac{EI\pi^2}{1000\,l}+f_y W\right) - \frac{\pi^2 EI}{l^2}W}{2\cdot W}$$



zavedeme štíhlost $\lambda = \frac{L_{cr}}{i}$ jako bezrozměrný parametr (pro $L_{cr} = l$)

a poměrnou štíhlost dle EC3

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi\sqrt{\frac{E}{f_y}}} = \frac{\lambda}{93{,}9} \Leftarrow S235$$



e_N posun příslušné těžišťové osy rovnoměrně tlačeného průřezu, viz 6.2.2.5(4).

POZNÁMKA Znaménka N_{Ed}, $M_{y,Ed}$, $M_{z,Ed}$ a $\Delta M_i = N_{Ed}\, e_{Ni}$ se stanoví podle kombinace příslušných normálových napětí.

6.2.10 Ohyb, smyk a osová síla

(1) Při stanovení únosnosti průřezu v ohybu se má uvažovat účinek smyku a osové síly.

(2) Jestliže návrhová hodnota smykové síly V_{Ed} není větší než 50 % návrhové plastické smykové únosnosti $V_{pl,Rd}$, je možné zanedbat její účinek na únosnost průřezu při působení ohybu a osové síly podle 6.2.9, kromě případů, kdy smykové boulení snižuje únosnost průřezu, viz EN 1993-1-5.

(3) Jestliže V_{Ed} je větší než 50 % $V_{pl,Rd}$, má se návrhová únosnost průřezu při kombinaci momentu a osové síly vypočítat s použitím redukované meze kluzu:

$(1-\rho)f_y$ pro smykovou plochu, (6.45)

kde $\rho = (2V_{Ed}/V_{pl,Rd}-1)^2$ a $V_{pl,Rd}$ se určí podle 6.2.6(2).

POZNÁMKA Místo redukce meze kluzu je také možné redukovat tloušťky příslušných částí průřezu.

6.3 Vzpěrná únosnost prutů

6.3.1 Tlačené pruty stálého průřezu

6.3.1.1 Vzpěrná únosnost

(1) Tlačený prut se má posuzovat na vzpěr podle podmínky:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \le 1{,}0 \qquad (6.46)$$

kde N_{Ed} je návrhová hodnota tlakové síly;

$N_{b,Rd}$ návrhová vzpěrná únosnost tlačeného prutu.

(2) U prutů s nesymetrickým průřezem třídy 4 se má uvažovat přídavný moment ΔM_{Ed} v důsledku excentricity těžišťové osy účinného průřezu, viz také 6.2.2.5(4). Interakce tlaku a ohybu se má posoudit podle 6.3.4 nebo 6.3.3.

(3) Návrhová vzpěrná únosnost tlačeného prutu se má určit z výrazu:

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A f_y}{\gamma_{M1}} \qquad \text{pro průřezy třídy 1, 2 a 3} \qquad (6.47)$$

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A_{eff} f_y}{\gamma_{M1}} \qquad \text{pro průřezy třídy 4} \qquad (6.48)$$

kde χ je součinitel vzpěrnosti pro příslušný způsob vybočení.

POZNÁMKA Pro určení vzpěrné únosnosti prutů po délce proměnného průřezu nebo při nerovnoměrném rozdělení tlakové síly se může provést analýza druhého řádu podle 5.3.4(2). Pro vzpěr z roviny, viz také 6.3.4.

(4) Při stanovení A a A_{eff} není nutné uvažovat díry pro spojovací prostředky na koncích sloupů.

6.3.1.2 Křivky vzpěrné pevnosti

(1) Pro osový tlak v prutu se má hodnota χ pro odpovídající poměrnou štíhlost $\bar{\lambda}$ určit z příslušné křivky vzpěrné pevnosti z výrazu:

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \qquad \text{ale} \qquad \chi \le 1{,}0 \qquad (6.49)$$

kde $\phi = 0{,}5\left[1 + \alpha\left(\bar{\lambda} - 0{,}2\right) + \bar{\lambda}^2\right]$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr}}}$$ pro průřezy třídy 1, 2 a 3

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A_{eff}\, f_y}{N_{cr}}}$$ pro průřezy třídy 4

α je součinitel imperfekce;

N_{cr} pružná kritická síla pro příslušný způsob vybočení, určená pro vlastnosti plného průřezu.

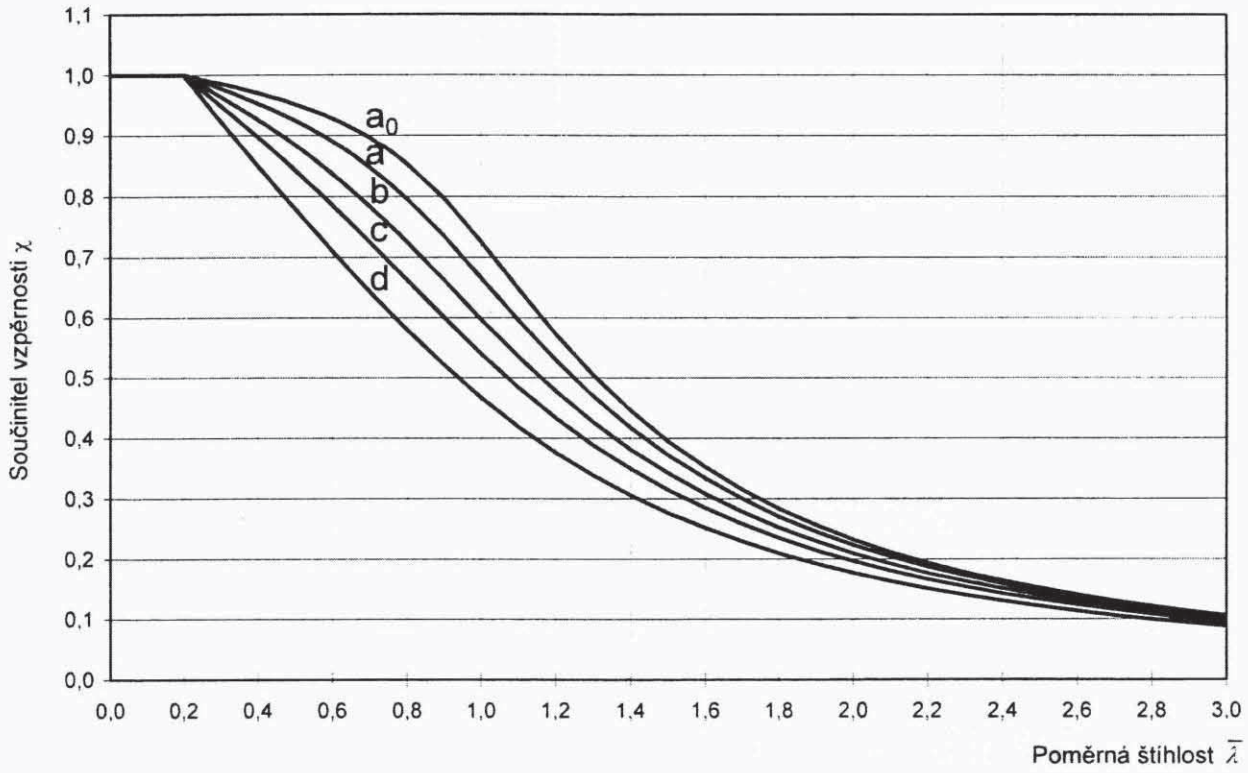
(2) Součinitel imperfekce α pro jednotlivé křivky vzpěrné pevnosti se má stanovit podle tabulek 6.1 a 6.2.

Tabulka 6.1 – Součinitele imperfekce pro křivky vzpěrné pevnosti

Křivka vzpěrné pevnosti	a_0	a	b	c	d
Součinitel imperfekce α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

(3) Hodnoty součinitele vzpěrnosti χ pro příslušnou poměrnou štíhlost $\bar{\lambda}$ je možné stanovit z obrázku 6.4.

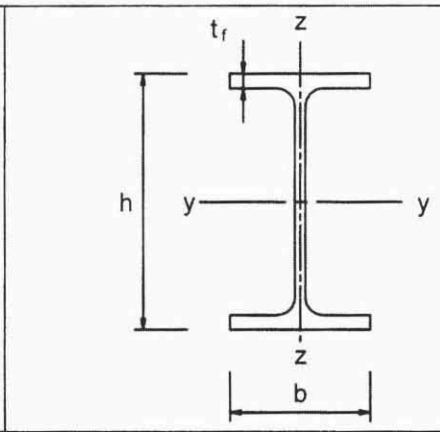
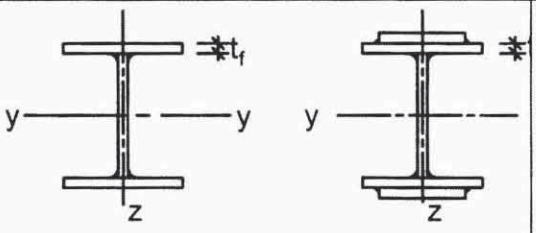
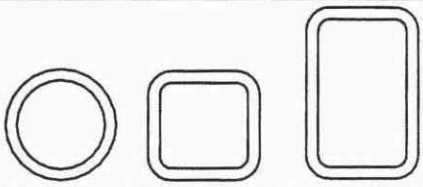
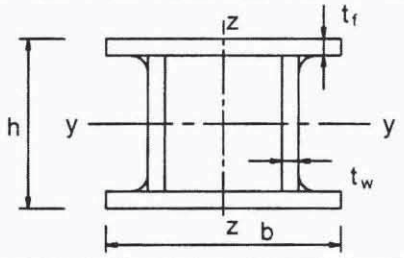
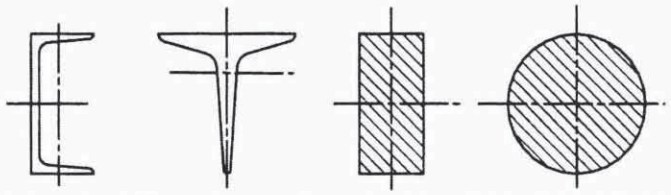
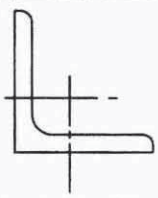
(4) Při poměrné štíhlosti $\bar{\lambda} \le 0{,}2$ nebo pro $\frac{\gamma_M N_{Ed}}{N_{cr}} \le 0{,}04$ [NP] je možné účinky vzpěru zanedbat a posuzovat pouze průřez na prostý tlak.



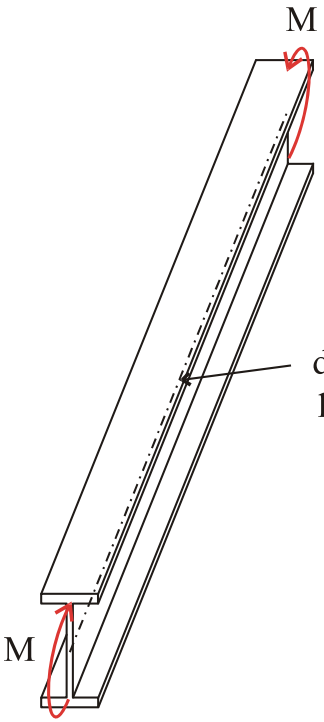
Obrázek 6.4 – Křivky vzpěrné pevnosti

[NP] NÁRODNÍ POZNÁMKA Viz národní příloha, NA.4.

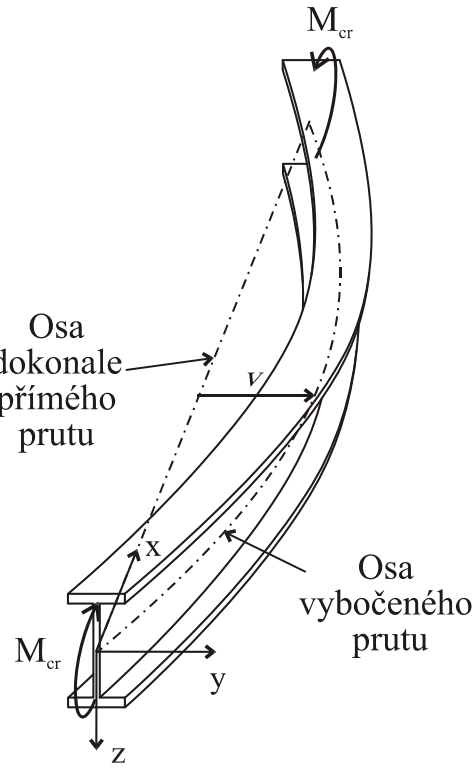
Tabulka 6.2 – Přiřazení křivek vzpěrné pevnosti k průřezům

Průřez		Meze		Vybočení kolmo k ose	Křivka vzpěrné pevnosti	
					S235 S275 S355 S420	S460
Válcované průřezy		$h/b > 1{,}2$	$t_f \leq 40$ mm	$y-y$ $z-z$	a b	a_0 a_0
			40 mm < $t_f \leq 100$ mm	$y-y$ $z-z$	b c	a a
		$h/b \leq 1{,}2$	$t_f \leq 100$ mm	$y-y$ $z-z$	b c	a a
			$t_f > 100$ mm	$y-y$ $z-z$	d d	c c
Svařované průřezy		$t_f \leq 40$ mm		$y-y$ $z-z$	b c	b c
		$t_f > 40$ mm		$y-y$ $z-z$	c d	c d
Duté průřezy		válcované za tepla		všechny	a	a_0
		tvarované za studena		všechny	c	c
Svařované duté průřezy		všechny průřezy kromě níže uvedených výjimek		všechny	b	b
		tlusté svary: $a > 0{,}5\ t_f$ $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$		všechny	c	c
U, T a plné průřezy				všechny	c	c
Úhelníky				všechny	b	b

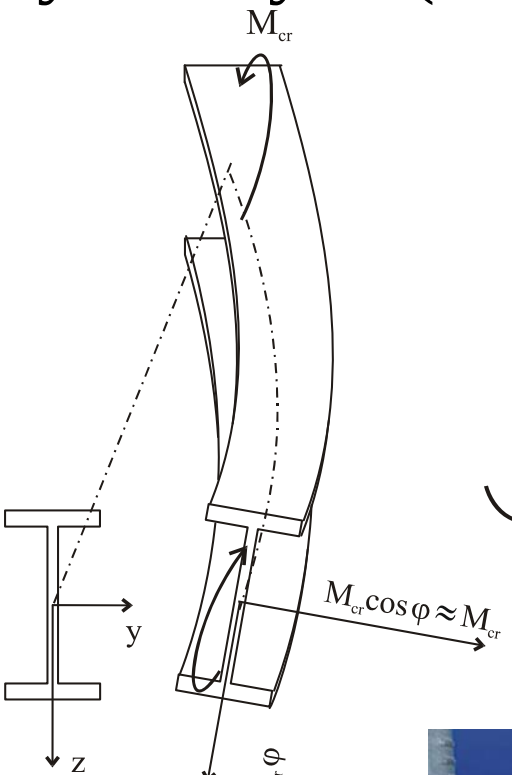
Ztráta stability za ohybu (klopení)

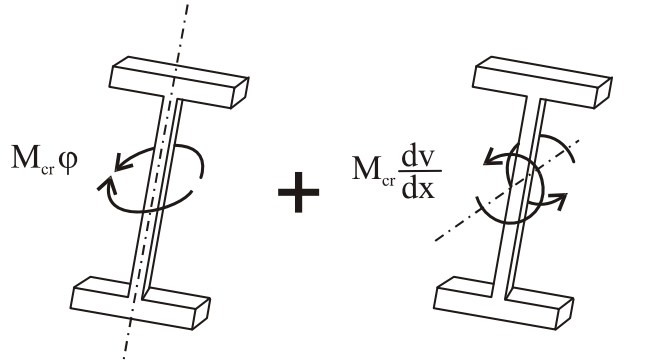


Perfektní dokonale přímý prut



Ztráta stability klopením

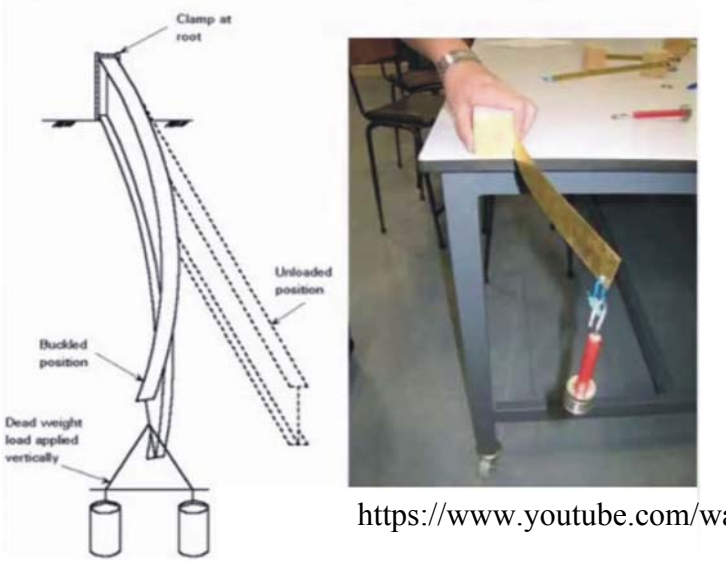




Ohyb z roviny primárního ohybu

Kroucení

Klopení



https://www.youtube.com/watch?v=OoORi_2Vkcg

