PRUŽNOST A PEVNOST

8. přednáška

Přetvoření ohýbaných prutů.
Clebschova metoda. Mohrova metoda

Prof. Ing. Zdeněk Kala, Ph.D.

Ústav stavební mechaniky, Veveří 95

Přednášky jsou zde:

https://www.fce.vutbr.cz/STM/kala.z/

(tlačítko BDA002 Pružnost a pevnost)

Přetvoření ohýbaných nosníků

Deformace pevného tělesa

Pevné vazby mezi částicemi látky způsobují, že tělesa z těchto látek zachovávají svůj tvar. Ke změně tvaru může dojít působením vnějších sil, čímž dojde ke změně vzájemné polohy částic - částice se od sebe oddálí nebo přiblíží, pootočí se vůči sobě, … Nemusí nutně docházet ke změně tvaru, ale může dojít ke změně rozměrů a tím i ke změně objemu. Vždy se jedná o deformaci tělesa:

Deformace tělesa je změna rozměrů, tvaru nebo objemu tělesa, která je způsobena primárně vnějšími (sekundárně vnitřními) silami nebo momenty v tělese.

Rozlišujeme dva druhy deformace:

1. pružná (elastická) - přestanou-li působit vnější (a sekundárně vnitřní) síly, deformace vymizí. Taková tělesa jsou pružná (elastická) a jejich deformace je dočasná (malé prodloužení pružiny, malý průhyb nosníku nebo konzoly).

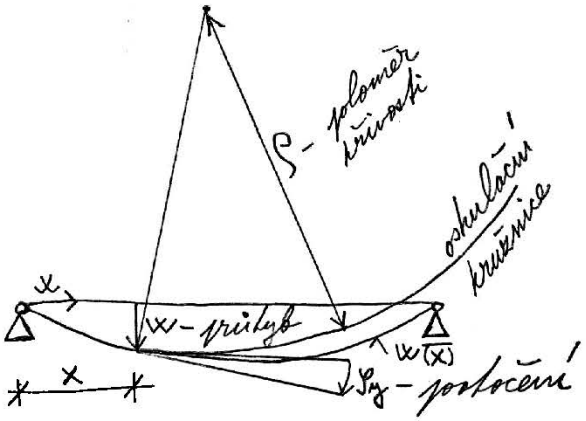
2. plastická (tvárná) - deformace, která přetrvává i pokud přestanou působit vnější síly (ohnutí drátu, změna tvaru kovového tělesa při kování nebo válcování, velký průhyb nosníku).

Podle působení vnějších sil na těleso rozeznáváme pět základních deformací:

1. deformace tahem - na těleso působí dvě stejně velké síly ve směru ven z tělesa, které leží na téže vektorové přímce. Tato vektorová přímka u modelů nosníků nebo táhel většinou splývá s osou prutu. Např. pruty v příhradové konstrukci, zavěšené lano jeřábu, výtahu.
2. deformace tlakem - od deformace tahem se liší pouze tím, že působící síly míří dovnitř tělesa. Např. pruty v příhradové konstrukci, sloupy, pilíře mostu.
3. deformace smykem - na horní a dolní podstavu těles působí tečné opačně orientované síly v rovinách těchto podstav. Síly způsobují vzájemné posunutí jednotlivých vrstev tělesa, přičemž se nemění jejich vzdálenost. Např. šrouby, nýty, velmi krátké nosníky.
4. deformace kroucením - je způsobena dvěma silovými dvojicemi, jejichž momenty jsou stejné velké, ale mají opačný směr. Např. šrouby během utahování, kroucené nosníky.
5. **deformace ohybem - u nosníků, na něž působí síla kolmo k jejich podélné ose. Deformaci nastává v důsledku vnitřního ohybového momentu. Dolní vrstvy tělesa jsou deformovány tahem, horní vrstvy tlakem a střední vrstva v místě těžiště průřezu zachovává svou délku. Např. trám podepřený na obou koncích, nebo tyč zatížená svou vlastní tíhou.**



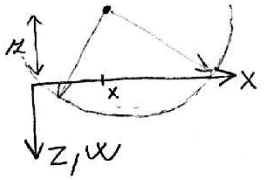
Přetvoření ohýbaných nosníků



$$M_y = \frac{1}{\rho} E I_y$$

Pro oskulační kružnici v místě x musí platit, že má s křivkou w(x) nejen společnou souřadnici souměrnou řadu, ale i první a druhou derivaci.

- oskulační kružnice



(1) $(x-m)^2 + (z-n)^2 = \rho^2$

derivace v obecném bodě x, z

(2) $2\cdot(x-m) + 2\cdot(z-n)\cdot z' = 0$

(3) $1 + z'^2 + (z-n)\cdot z'' = 0$

Vyloučením souřadnic m, n se dvěma normálami dostaneme poloměr křivosti

z (3) $z - n = -\frac{1+z'^2}{z''}$ (4)

Dosazením (4) do (2)

$x - m = z' \frac{1+z'^2}{z''}$ (5)

Dosazením (4) a (5) do (1)

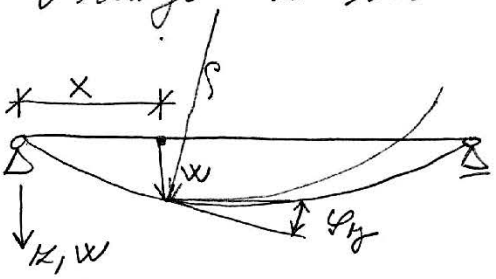
$$\left(z' \frac{1+z'^2}{z''}\right)^2 + \left(-\frac{1+z'^2}{z''}\right)^2 = \rho^2$$

$$\left(\frac{1+z'^2}{z''}\right)^2 \cdot \left(z'^2+1\right) = \rho^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\boxed{\rho = \pm \frac{\left(1+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{z''}}$$

je diferenciální rovnice 2. řádu.

- Průhyb w vodorovného prutu



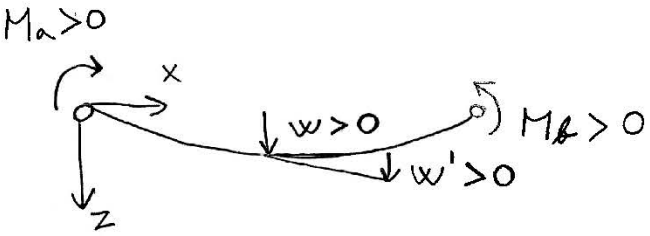
$$\frac{1}{\rho} = -\frac{w''}{(1+w'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

← - odpovídá znaménkové konvenci

V teorii malých deformací platí $\varphi \ll 1$.

$$\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = \frac{dw}{dx} = w'$$

Znaménko +: střed křivosti leží nad nosníkem, tedy jsou tažena spodní vlákna (kladný ohybový moment).



V případě, že $w' \ll 1$ lze psát, že $\frac{1}{\rho} = -w''$

Využitím dříve odvozené známosti založené na Bern. h.

$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{E I_y}$ lze psát diferenciální rovnici 2. řádu ohybové čáry:

$$w'' = -\frac{M_y}{E I_y}$$

!

Okrajové podmínky:

PROSTÉ PODEPŘENÍ



$w = 0$

VETKNUTÍ



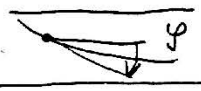
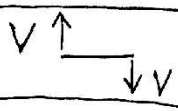
$w = 0$

$w' = 0$

Ze statiky

$$M' = \frac{dM_y}{dx} = V_z \qquad M'' = V_z = \frac{dV_z}{dx} = -q_z$$

Derivační, integrační schéma

Označení ⊕	Veličina	Diferenciální závislost: obecný případ	Diferenciální závislost: EI = konst.
	průhyb	w	
	pootočení	$\varphi = w'$	
	ohyb. moment	$M = -EI\,w''$	
	posouvající síla	$V = -(EI\,w'')'$	$V = -EI\,w'''$
	příčné zatížení	$q = (EI\,w'')''$	$q = EI\,w^{IV}$

Při určování ohybové čáry nosníku musíme dávat pozor jak je nosník zatížený. Pokud mohu v kterém kolivo místě x na nosníku vyjádřit moment jedním výrazem mohu integrovat přímo.

Řešení ohybové čáry integrací

$$w'' = \frac{-M}{EI} \qquad w = w(x), \quad M = M(x)$$

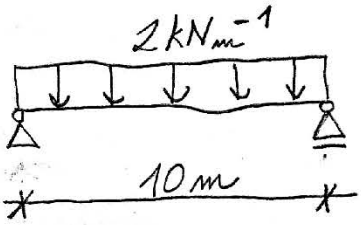
$$w' = c_1 + \int \frac{-M}{EI}\,dx$$

$$w = c_1 \cdot x + c_2 + \iint \frac{-M}{EI}\,dx\,dx$$

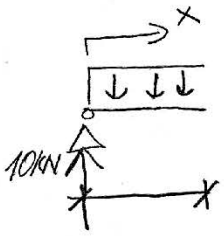
Integrační konstanty získáme uplatněním okrajových podmínek.

Příklad 2: Metodou integrace diferenciální rovnice určete ohybovou čáru nosníku.

EI = konstanta



ŘEŠENÍ:



$$M(x) = 10x - 2 \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$w'' = \frac{-M(x)}{EI}$$

$$w'' EI = -10x + x^2$$

$$w' EI = C_1 - 5x^2 + \frac{x^3}{3}$$

$$w EI = C_1 x + C_2 + \cancel{\quad} - 5\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12}$$

OKRAJOVÉ PODMÍNKY

$x = 0 \quad w(0) = 0$

$$C_1 \cdot 0 + C_2 - 5\frac{0^3}{3} + \frac{0^4}{12} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

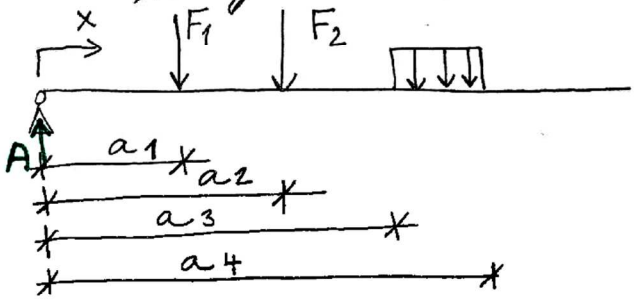
$x = 10\,m \quad w(10) = 0$

$$C_1 \cdot 10 + C_2 - 5\frac{10^3}{3} + \frac{10^4}{12} = 0 \Rightarrow C_1 = 83{,}33\ kN/m^2$$

VÝSLEDEK:

$$w(x) = \frac{1}{EI} \cdot \left(83{,}33 \cdot x - 5\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right)$$

Když je zatížení složitější je nutno integrovat pro. Clebschovou metodou



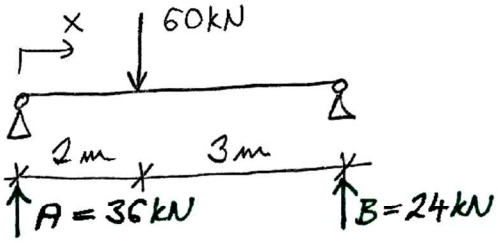
$$M(x) = A\cdot x - \underset{x>a_1}{|}\, F_1\cdot(x-a_1) - \underset{x>a_2}{|}\, F_2\cdot(x-a_2) - \underset{x>a_3}{|}\, \frac{1}{2}q\cdot(x-a_3)^2 + \underset{x>a_4}{|}\, \frac{1}{2}q\,(x-a_4)^2$$

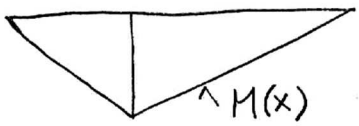
a) Nosník rozdělíme na části (úseky)

b) Všechny členy (výrazy) pro ohybový moment v k-tém úseku musí zůstat i v k+1 úseku, přibývá další člen.

c) Při integraci neodstraňujeme svislý dvojčlenu !

Příklad : U nosníku vypočtěte průhybovou křivku a maximální průhyb. $I = 7590\cdot10^{-8}\,m^4$ $E = 210\,GPa$





$$M(x) = 36\cdot x - \underset{x>2}{|}\, 60\cdot(x-2)$$

$$w'' = -\frac{M(x)}{EI}$$

$$EI\,w'' = -36\cdot x + \underset{x>2}{|}\, 60\cdot(x-2)$$

$$EI\,w' = \int M(x)\,dx = C_1 - 36\cdot\frac{x^2}{2} + \underset{x>2}{|}\, 60\cdot\frac{(x-2)^2}{2}$$

$$EI\,w = C_1\cdot x + C_2 - 36\cdot\frac{x^3}{6} + \underset{x>2}{|}\, 60\cdot\frac{(x-2)^3}{6}$$

$x = 0$, $w = 0$ $\quad C_1\cdot 0 + C_2 - 36\cdot\frac{0}{6} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

DOSAZUJEME JEN DO ČÁSTI PRO PRVNÍ ÚSEK !

$x = 5\,m$, $w = 0$ $\quad C_1\cdot 5 + 0 - 36\cdot\frac{5^3}{6} + 60\cdot\frac{(5-2)^3}{6} = 0 \Rightarrow C_1 = 96\,kNm^2$

$$w(x) = \frac{1}{EI}\cdot\left[96\cdot x - 6x^3 + \underset{x>2}{|}\, 10(x-2)^3\right]$$

Určení maximálního průhybu v místě, kde je stočení nulové

$$w' = 0$$

$$EI\,w' = 96 - 36 \cdot \frac{x^2}{2} + 60\,\frac{(x-2)^2}{2} = 0$$

předpokládáme, že max. průhyb je až za břemenem

$$96 - 18x^2 + 30 \cdot x^2 - 120 \cdot x + 120 = 0$$

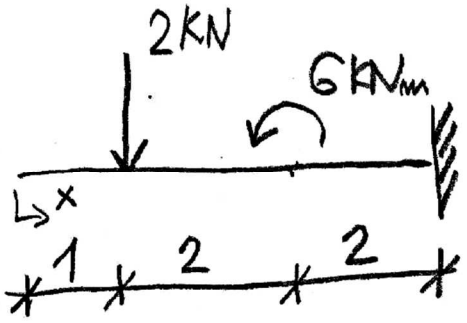
$$12x^2 - 120x + 216 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{120 \pm \sqrt{120^2 - 4 \cdot 12 \cdot 216}}{24}$$

$x_1 = 2{,}36$ m

x_2 mimo nosník

$$w_{max} = w(2{,}36) = 0{,}929 \text{ cm}$$



$EI_y = konst.$

$$M_y = -\underset{x>1}{\square}\, 2\cdot(x-1) - \underset{x>3}{\square}\, 6$$

$$\boxed{w'' = -\frac{M_y}{EI_y}}$$

$$EI_y \cdot w'' = \underset{x>1}{\square}\, 2\cdot(x-1) + \underset{x>3}{\square}\, 6$$

$$EI_y \cdot w' = C_1 + \underset{x>1}{\square}\, 2\,\frac{(x-1)^2}{2} + \underset{x>3}{\square}\, 6\cdot(x-3)$$

$$EI_y \cdot w = C_1 \cdot x + C_2 + \underset{x>1}{\square}\, 2\,\frac{(x-1)^2}{6} + \underset{x>3}{\square}\, 6\,\frac{(x-3)^2}{2}$$

C_1, C_2 z počáteční podmínky

$$\left.\begin{array}{l} x=5,\ w=0 \\ x=5,\ w'=0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1, C_2$$

Mohrova metoda

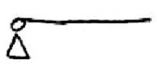
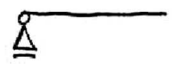
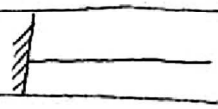
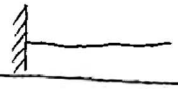
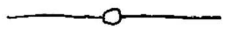
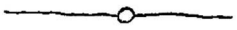
Analogie mezi určením průhybu w ze známého průběhu ohb. momentu $M(x)$ a určením ohybových momentů, je-li dáno příčné zatížení $q(x)$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q \quad \text{analogické s} \quad \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

Zavedeme-li myšlené (fiktivní) zatížení:

$$\bar{q} = \frac{M}{EI}$$

kterým zatížíme fiktivní nosník. Fiktivní nosník musí být podepřen takovým způsobem, aby byly vůči ~~pos~~ ohybovému momentu a posouvající síle splněny bytéž okrajové podmínky, případně podmínky spojitosti jaké plní skutečný nosník vůči průhybu a pootočení.

Skutečný nosník		Fiktivní nosník	
$w=0$, $\varphi\neq0$		$\bar{M}=0$, $\tilde{V}\neq0$	
$w\neq0$, $\varphi\neq0$		$\bar{M}\neq0$, $V\neq0$	
$w=0$, $\varphi=0$		$\bar{M}=0$, $V=0$	
$w=0$, $\varphi\neq0$		$\bar{M}=0$, $\bar{V}=0$	
$w\neq0$, $\varphi\neq0$		$\bar{M}\neq0$, $\bar{V}\neq0$	

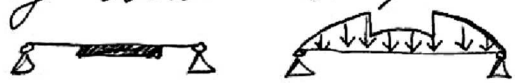
Postup:

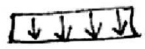
1) Na daném staticky určitém nosníku vyřeším průběh ohybového momentu

2) Vytvořím fiktivní nosník a ten zatížím převráceným momentovým obrazcem. Pokud platí a) nosník má všude stejný průřez I_y = konst.

b) Nosník je celý ze stejného materiálu

tak hodnotou EI dělím vypočítaný fiktivní moment či fikt. pos. sílu až na konec. Neplatí-li a či b musím zatěžovací momentový obrazec napřed upravit podílem $E_i I_i$.

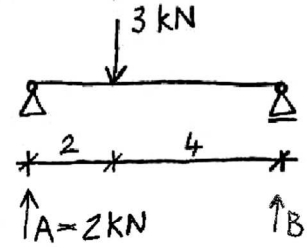


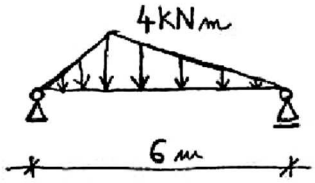
Kladné momenty  zavádíme jako kladné zatížení (působí směrem dolů 

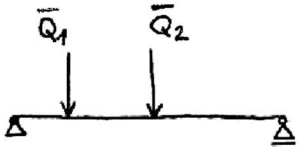
3) Tam kde chci určit průhyb vypočítám na fiktivním nosníku moment. Tam kde chci určit stočení, vypočítám na fiktivním nosníku posouvající sílu

4) Skutečné hodnoty deformací získám dělením EI.

Příklad: Zjistěte stočení a průhyb pod břemenem na zadaném nosníku $EI = 10^7 kN cm^2 = 1000 kN m^2$







$\bar{Q}_1 = 4 kN m^2$
$\bar{Q}_2 = 8 kN m^2$



$\bar{A} \cdot 6 - \bar{Q}_1 \cdot 4{,}666 - \bar{Q}_2 \cdot 2{,}666 = 0 \Rightarrow \bar{A} = 6{,}665 kN m^2$

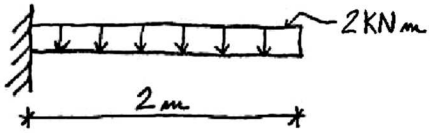
$\bar{T}_c = \bar{A} - \bar{Q}_1 = 6{,}665 - 4 = 2{,}665 kN m^2$

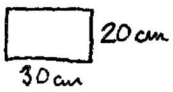
$\bar{M}_c = \bar{A} \cdot 2 - \bar{Q}_1 \cdot 0{,}66 = 6{,}665 \cdot 2 - 4 \cdot 0{,}66 = 10{,}662 kN m^3$

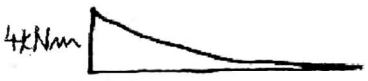
- průhyb $w = \frac{\bar{M}_c}{EI} = \frac{10{,}662 kN m^3}{1000 kN m^2} = 0{,}010662 m \doteq 1 cm$

- stočení $\varphi = \frac{\bar{T}_c}{EI} = \frac{2{,}665 kN m^2}{1000 kN m^2} = 0{,}002665 rad$

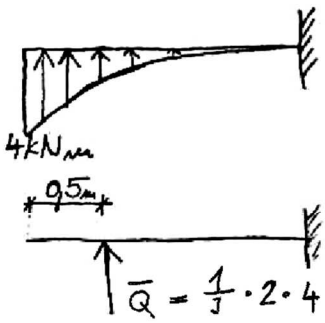
Příklad: Vypočtěte průhyb a pootočení konce konzoly zatížené rovnoměrně. $E = 10^4 MPa$







$I = \frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 20^3 =$
$= 20000 cm^4 = 2 \cdot 10^{-4} m^4$



$\bar{M}_{max} = \bar{Q} \cdot 1{,}5 m = 4{,}00 kN m^3$

$\bar{Q} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 4 = 2{,}667 kN m^2$

$w_{max} = \frac{\bar{M}_{max}}{EI} = \frac{4 kN m^3}{10^4 \cdot 10^3 kPa \cdot 2 \cdot 10^{-4} m^4} = 2 \cdot 10^{-3} m = 2 mm$

$\varphi_{max} = \frac{\bar{T}}{EI} = \frac{\bar{Q}}{EI} = \frac{2{,}667 kN m^2}{10^7 kPa \cdot 2 \cdot 10^{-4} m^4} = 0{,}0013 rad$

Znaménko stočení se řídí znaménkem posouvající síly ne reakce.