PRUŽNOST A PEVNOST

7. přednáška

Kroucení, část 2
Výsečové souřadnice. Vázané kroucení. Bimoment.

Prof. Ing. Zdeněk Kala, Ph.D.

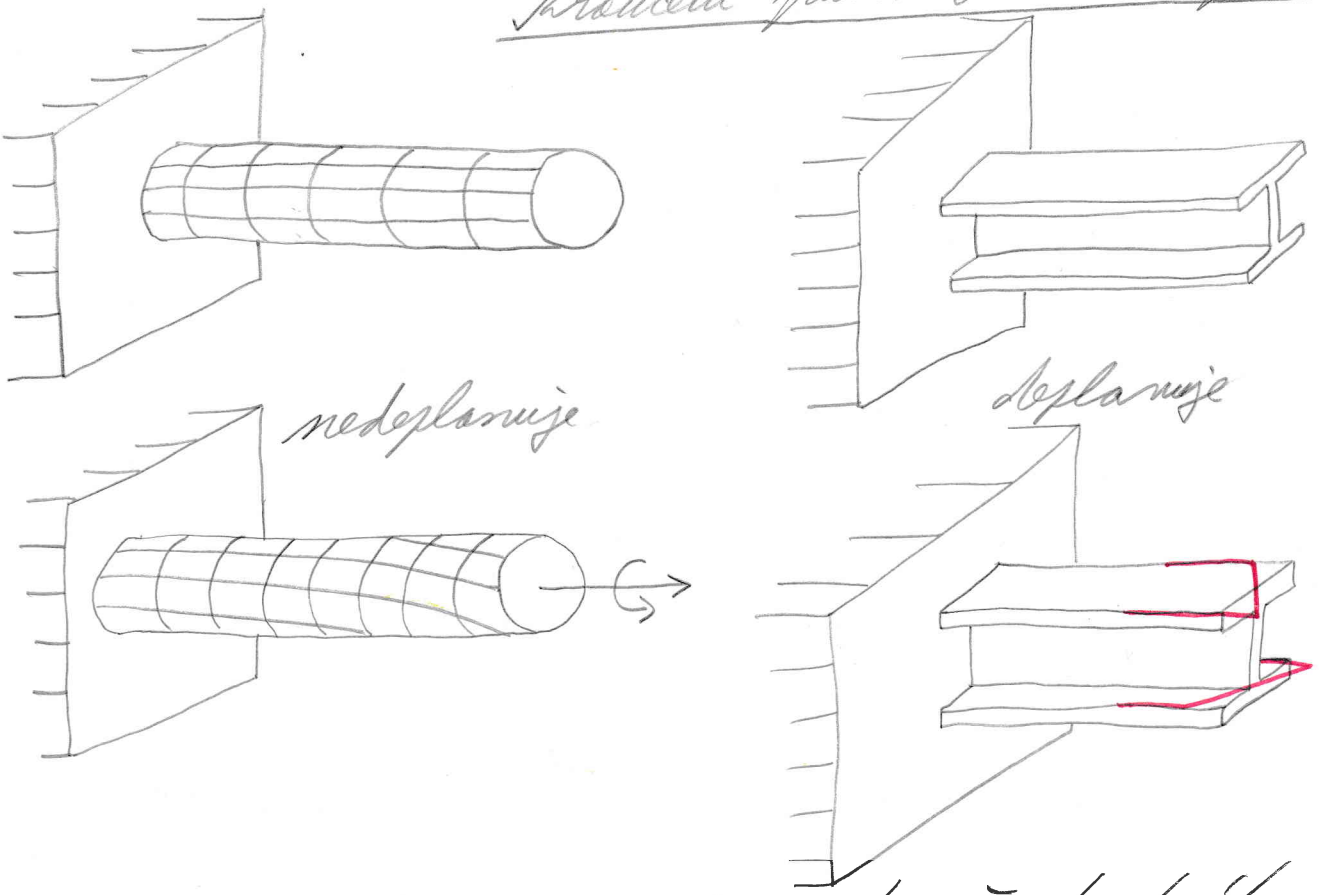
Ústav stavební mechaniky, Veveří 95

Přednášky jsou zde:

https://www.fce.vutbr.cz/STM/kala.z/

(tlačítko BDA002 Pružnost a pevnost)

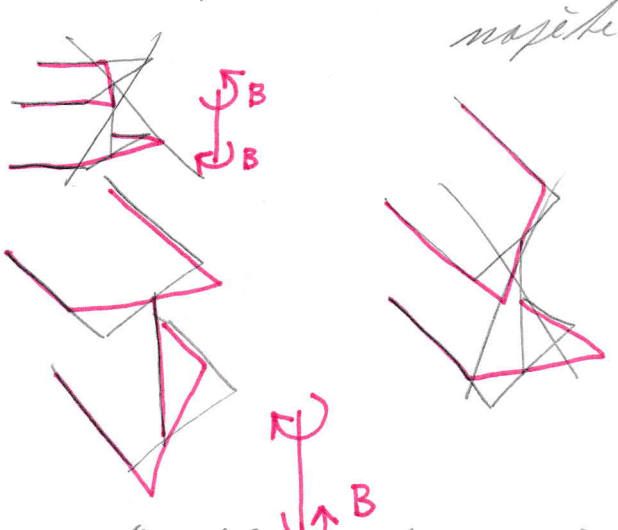
Kroucení prutů obecného průřezu



Jakýkoliv průřez kromě kruhového (mezikruhového) nezůstane rovinný – průřez se bortí ⇒ deplanuje

Deplanuje — volná deplanace (normálová napětí jsou nulová σ_x; deplanace je stodná ve všech průřezech; pouze τ)

— vázaná deplanace (vznikají normálová napětí)

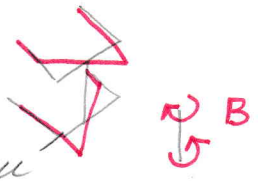


Kroucení vzniká u ohýbaných prutů v případech, kdy příčně působící zatížení neprochází tzv. středem smyku a v případech osamělé působících kroutících momentů.

U deformujících průřezu I apod. vznikají tři vnitřní silové veličiny

- bimoment B

$$B = -EI_\omega \varphi''$$



- moment ohybového kroucení

$$M_\omega = -EI_\omega \varphi''' = \frac{dB}{dx}$$

- moment prostého kroucení

$$M_K = GI_t \cdot \varphi'$$

Vnější kroutící moment $M_x = M_\omega + M_K =$

$$= -EI_\omega \varphi''' + GI_t \varphi'$$

$$M_x = -EI_\omega \frac{d^2\Theta}{dx^2} + GI_t \Theta$$

Řešením dif. rovnice získáme průběh Θ po prutu. Dále lze pak určit:

$\sigma_\omega = \frac{B \cdot \omega}{I_\omega}$ ... normálové napětí od kroucení

$\tau_\omega = \frac{M_\omega \cdot S_\omega}{I_\omega \cdot t}$ ... smykové napětí od ohybového kroucení

$\tau_t = \frac{M_K \cdot t}{I_t}$ ... smykové napětí od prostého kroucení

Obecný integrál rovnice má tvar:

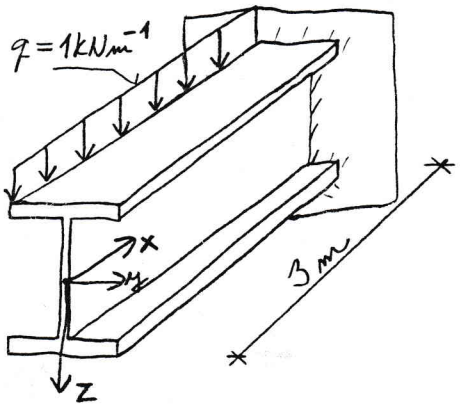
$$\Theta(x) = c_1 \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + c_2 \cdot \cosh(\lambda \cdot x) + \\ - \frac{\lambda}{G I_k} \int_0^x M_x(\xi) \cdot \sinh(\lambda \cdot (x - \xi))\, d\xi$$

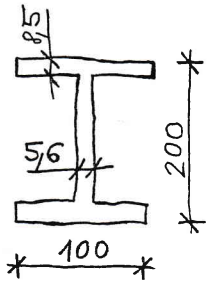
kde $\lambda = \sqrt{\frac{G I_k}{E I_\omega}}$ $[m^{-1}]$

Integrační konstanty c_1; c_2 určíme z okrajových podmínek

vetknutí $\Theta = 0$ volný konec $\frac{d\Theta}{dx} = 0$

Příklad 1: Určete relativní úhel zkroucení Θ u konzoly na obrázku z profilu IPE 200. Vyneste průběh kroutícího momentu.

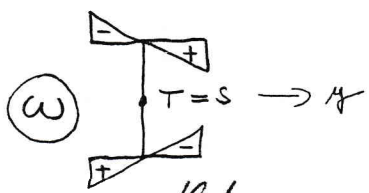




$G = 81$ GPa

$I_k = 69{,}8 \cdot 10^3$ mm^4

$E = 210$ GPa



směr pohledu z druhé strany !

$$\omega = \int \varrho \, ds = \int (100 - 4{,}25)\, ds = 95{,}75 \cdot x$$

$$I_\omega = 2 \cdot \int_{91{,}5}^{100} \left[\int_{-50}^{50} (95{,}75 \cdot x)^2 \, dy \right] dz = 13 \cdot 10^9 \text{ mm}^6$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{G \cdot I_k}{E \cdot I_\omega}} = \sqrt{\frac{81 \cdot 10^9 \cdot 69{,}8 \cdot 10^{-1} \cdot (0{,}001)^4}{210 \cdot 10^9 \cdot 13 \cdot 10^9 \cdot (0{,}001)^6}} = 1{,}430822_4$$

KSÍ

$$\Theta(x) = C_1 \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda \cdot x) - \frac{\lambda}{GI_k} \cdot \int_0^x -q \cdot \xi \cdot 0{,}05 \cdot \sinh(\lambda \cdot (x-\xi))\, d\xi$$

$$\Theta(x) = C_1 \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda \cdot x) + \frac{q}{20 G I_k} \cdot \left(\frac{\sinh(\lambda \cdot x)}{\lambda} - x \right)$$

Okrajové podmínky

pro $x = 0$ $\quad \frac{d\Theta}{dx} = 0$ ... nevzniká normálové napětí $B = 0$

pro $x = 3\,m$ $\quad \Theta = 0$ ... vetknutí zcela vylučuje deplanaci

$$\frac{d\Theta(x)}{dx} = C_1 \cdot \lambda \cdot \cosh(\lambda \cdot x) + C_2 \cdot \lambda \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + \frac{q}{20 G I_k} \cdot \left(\cosh(\lambda \cdot x) - 1 \right) = 0$$

pro $x = 0 \Rightarrow C_1 \cdot \lambda + C_2 \cdot 0 + \frac{q}{20 G I_k} \cdot (1-1) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

pro $x = 3\,m \Rightarrow C_2 \cdot \cosh \cdot (1{,}4308 \cdot 3) + \frac{1E3}{20 \cdot 81\,GPa \cdot 69{,}8 \cdot 10^3\,mm^4} \cdot \left(\frac{\sinh(1{,}4308 \cdot 3)}{1{,}4308} - 3 \right) =$

$$C_2 \cdot 37{,}49884 + 0{,}203827 = 0 \Rightarrow C_2 = -5{,}43557 \cdot 10^{-3}$$

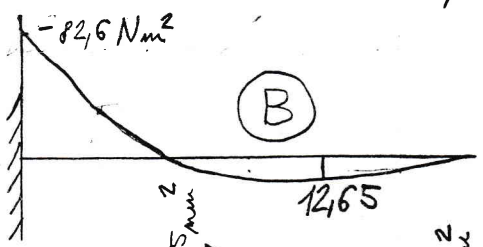
Často nahrazujeme integrační konstanty tzv. počátečními parametry, tj. hodnotami veličin v počátku prutu.

$$\Theta(\emptyset) = C_2 \qquad B(\emptyset) = -\frac{GI_k}{\lambda} \cdot C_1$$

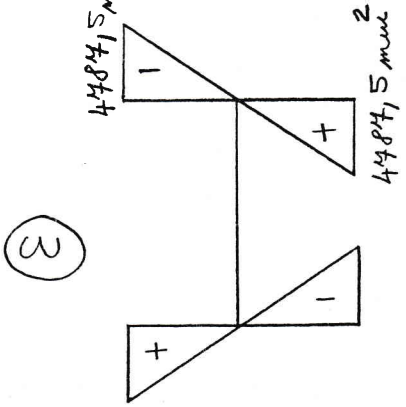
$$B(x) = -EI\omega \cdot \frac{d\Theta}{dx} = -2730 \cdot \left(-5{,}43557 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}4308224 \cdot \right.$$

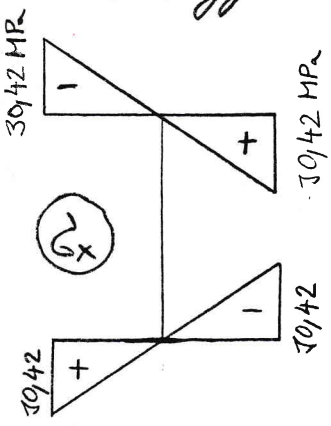
$$\left. \cdot \sinh(1{,}4308224 \cdot x) + \frac{1\,kNm^{-1}}{20 \cdot 81G \cdot 69{,}8 \cdot 10^3\,mm^4} \cdot \left(\cosh(1{,}4308224 \cdot x) - 1 \right) \right.$$

$$B(3) = -2730 \cdot 0{,}030267 = -82{,}63\ Nm^2$$



Dle vztahu (1) stanovíme ve vetknutí napětí σ_x. Jeho průběh je v podstatě vyjádřen průběhem souřadnice ω.





od ohybu 23,2 MPa
prosté kroucení
18,3 MPa

Pro smykové vyjádření počátečních parametrů je možno psát:

$$\Theta(x) = \Theta(0) \cdot \cosh(\lambda \cdot x) - \frac{\lambda}{GI_K} \cdot \sinh(\lambda x) - \frac{\lambda}{GI_K} \cdot \int_0^x M_x(\xi) \cdot \sinh(\lambda \cdot (x-\xi)) \cdot$$

$$B(x) = -\frac{GI_K}{\lambda} \cdot \Theta(0) \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + B(0) \cdot \cosh(\lambda \cdot x) + \int_0^x M_x(\xi) \cdot \cosh(\lambda \cdot (x - \xi)) \, d\xi$$