PRUŽNOST A PEVNOST

6. přednáška

Kroucení, část 1
Volné kroucení prutů masivních a tenkostěnných průřezů

Prof. Ing. Zdeněk Kala, Ph.D.

Ústav stavební mechaniky, Veveří 95

Přednášky jsou zde:

https://www.fce.vutbr.cz/STM/kala.z/

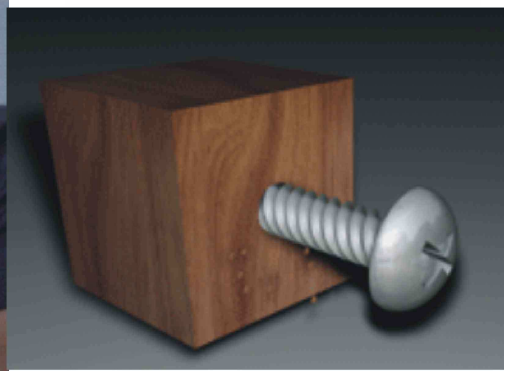
(tlačítko BDA002 Pružnost a pevnost)

Příklady kroucení

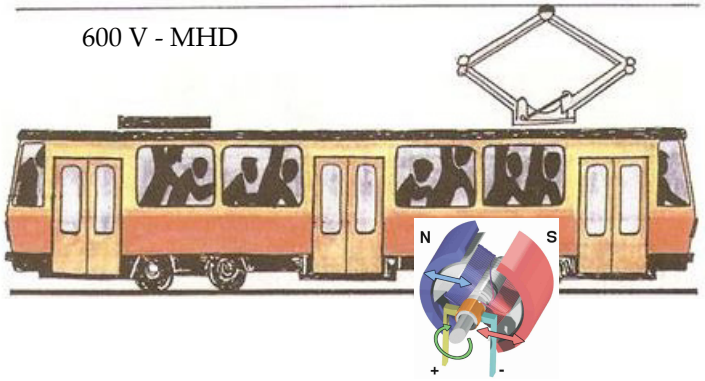








600 V - MHD



https://cs.wikipedia.org/wiki/Stejnosm%C4%9Brn%C3%BD_motor



Příklady konstrukcí namáhaných kroucením







Kroucení prutů kruhového a mezikruhového průřezu

- prosté kroucení; kroutící (kroutný) moment $M_x = M_{kx}$
- rotačně symetrický průřez – kruhový, mezikruhový

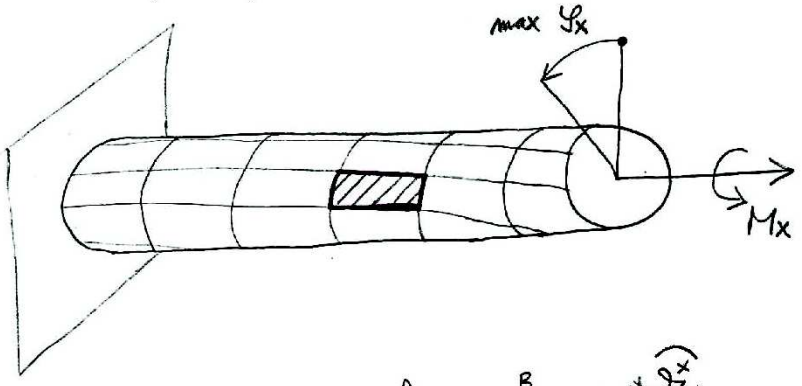
Předpoklady:

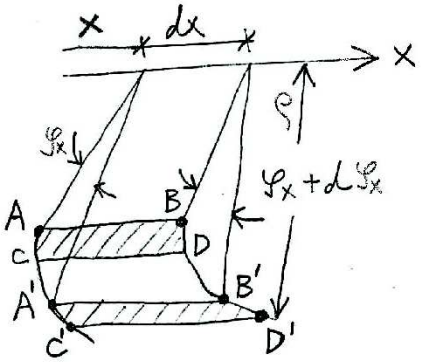
a) osa prutu zůstane i po deformaci přímá

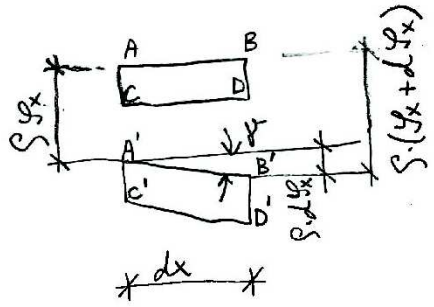
b) průřezy zůstanou rovinnými i po deformaci a vzájemně se nevzdálí

c) jednotlivé průřezy se otáčejí jako tuhé celky

Z předpokladů plyne $\varepsilon_x = 0$, $\sigma_x = 0$.

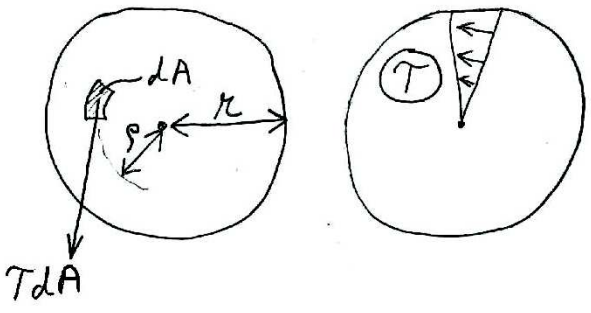






(1) $\gamma = \dfrac{\varrho\, d\varphi_x}{dx} = \varrho \cdot \Theta$ kde $\Theta = \dfrac{d\varphi_x}{dx}$

(2) $\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \varrho \cdot \Theta$ … Hookův zákon … napětí je lin. rostoucí na ϱ



(1) $M_x = \int_A \varrho \cdot \tau \cdot dA = \int_A \varrho \cdot (G\Theta\varrho)\, dA =$

$= G \cdot \Theta \int_A \varrho^2 dA = G \cdot \Theta \cdot I_p$

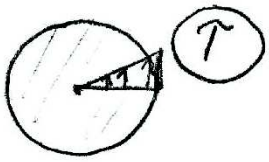
$I_p = I_y + I_z$

Z (3) $\quad \Theta = \frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{M_K}{G I_p}$ (4) I_A... moment tuhosti v prostém kroucení $[m^4]$

pro kruh je $I_A \equiv I_P = \frac{\pi}{2} r^4$

Dosazením (4) do (2)

(5) $$\boxed{\tau = \frac{M_K}{I_A} \cdot s}$$



(6) $$\tau_{max} = \frac{M_K}{I_A} \cdot r$$

Pootočení φ_x lze získat integrací rovnice (4)

$$\varphi_x = \int \Theta \, dx = \int \frac{M_K}{G I_A} dx$$

Integrační konstantu lze získat z podmínky, že prut má v místě uložení nulové natočení. Např. pro $x = 0$; $\varphi_x = 0$ je $c_1 = 0$ a pak

$$\varphi_x = \frac{M_K}{G I_A} \cdot x$$

Přírůstek pootočení po délce prutu je lineární

Vzájemné pootočení průřezů ($x = a$; $x = b$)

$$\varphi_{b-a} = \int_a^b \frac{M_K}{G I_A} dx = \frac{M_K}{G I_A} \cdot l$$

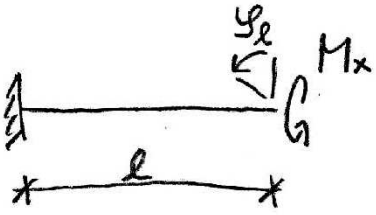
Pro prut z několika úseků pro M_{Ki}, I_{Ki} G_{Ki} jak platí.

$$\varphi_l = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{Ki} l_i}{G_i I_{Ai}}$$

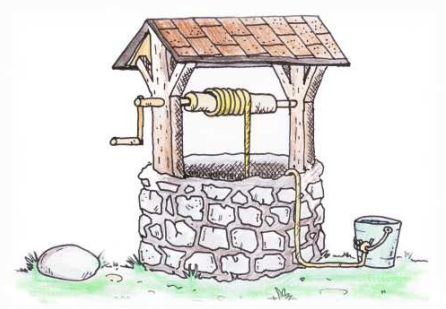
n ... počet úseků

l_i ... délka úseku

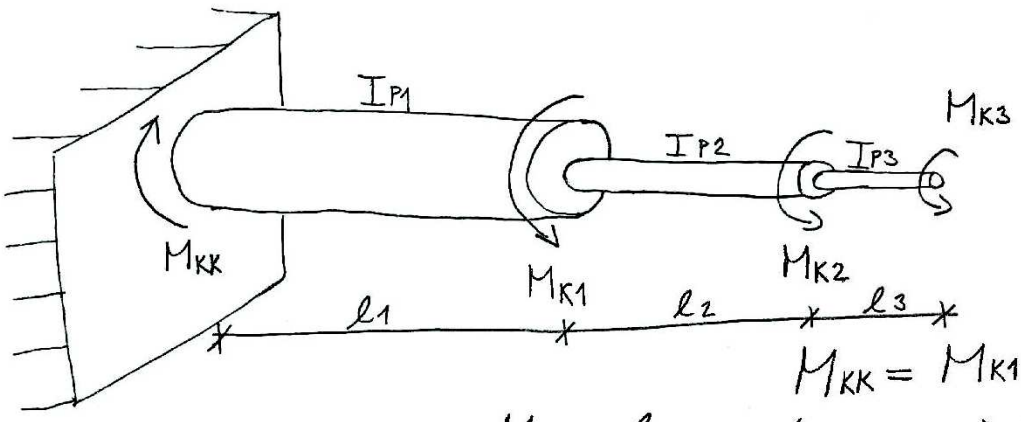
Příklad:



$$\boxed{\varphi_l = \frac{M_x \cdot l}{G \cdot I_A}}$$

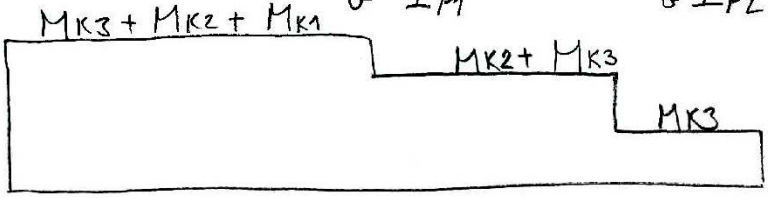


Příklad:

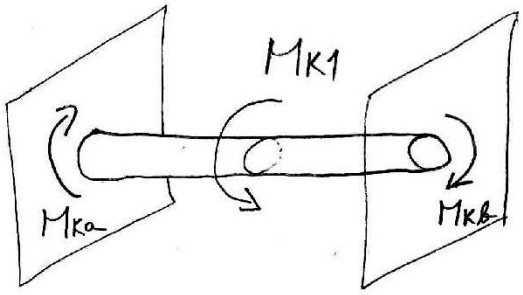


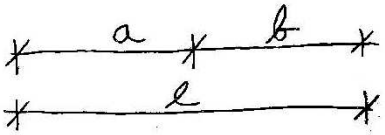
$$M_{KK} = M_{K1} + M_{K2} + M_{K3}$$

$$\varphi = \frac{M_{KK} \cdot l_1}{G\, I_{P1}} + \frac{(M_{K3} + M_{K2}) \cdot l_2}{G\, I_{P2}} + \frac{M_{K3} \cdot l_3}{G\, I_{P3}}$$



Příklad: Určete hodnoty M_{Ka}, M_{Kb}.





Řešení: Úhel pootočení musí být v levé i pravé straně stejný

$$(1)\quad \varphi = \int_0^a \frac{M_{Ka}}{G I_P} \cdot dx = \int_a^b \frac{M_{Kb}}{G I_P} dx$$

$$(2)\quad M_{Ka} + M_{Kb} = M_{K1}$$

$$2(1)\quad \frac{M_{Ka} \cdot a}{G I_P} = \frac{M_{Kb} \cdot b}{G I_P}$$

$$M_{Ka} = M_{Kb} \cdot \frac{b}{a}$$

$$M_{Ka} \cdot a = (M_{K1} - M_{Ka}) \cdot b$$

$$M_{Ka} \cdot (a+b) = M_{K1} \cdot b$$

$$M_{Ka} = M_{K1} \cdot \frac{b}{l}$$

$$\boxed{M_{Ka} = M_{K1} \cdot \frac{b}{l}}$$

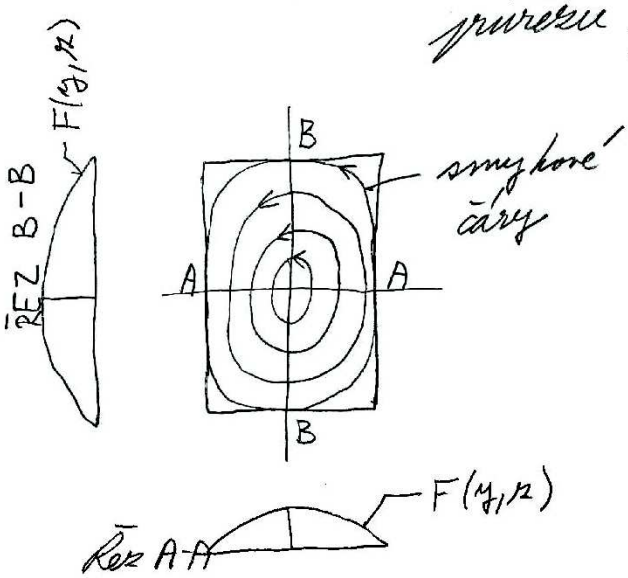
$$\boxed{M_{Kb} = M_{K1} \cdot \frac{a}{l}}$$

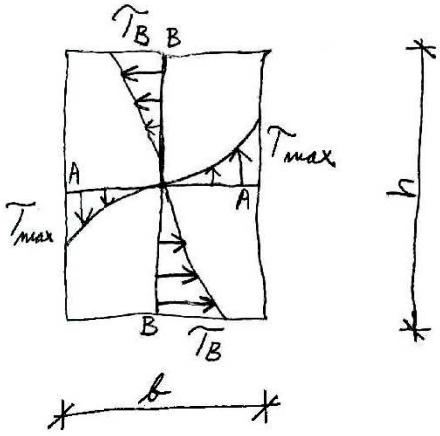


$$I_P = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$W_K = \frac{\pi \cdot D^3}{16}$$

Smyková napětí v prutu oddélníkového průřezu při kroucení





Maximální smykové napětí lze určit pomocí průřezového modulu v kroucení W_t [m^3; mm^3]

$$\tau_{max} = \frac{M_K}{W_t}$$

W_t je obdoba průřezového modulu v ohybu

Pro oddélníkový průřez platí:

$$I_t = \alpha b^3 h$$

$$W_t = \beta b^2 h$$

α, β jsou bezrozměrné součinitelé z výsledků podrobnější analýzy

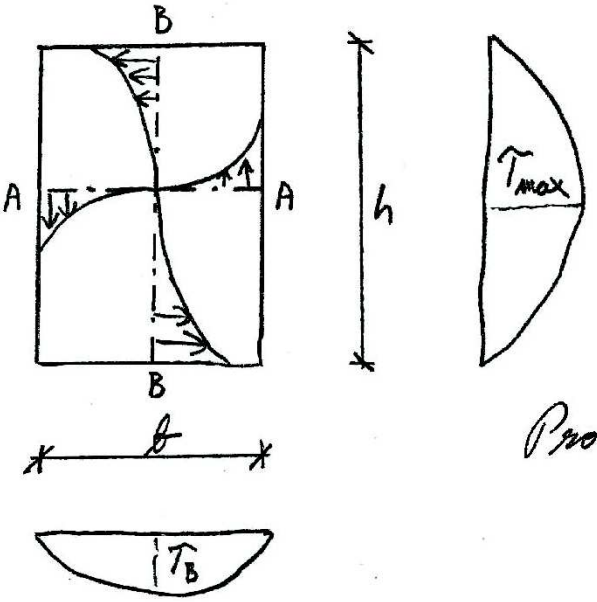
Pro oddélníkový průřez lze moment tuhosti I_t aproximovat vzorcem.

$$I_t \doteq \frac{1}{3}\left[1 - 0{,}63\,\frac{b}{h}\left(1 - \frac{b^4}{12h^4}\right)\right] b^3 h$$

Pro $h \gg b$ lze závorku uvažovat $\doteq 1$

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Torsion_Blender.gif

Kroucení prutů masivního průřezu



$$\tau_{max} = \frac{M_x}{I_t} \cdot e = \frac{M_x}{W_t}$$

W_t ... průřezový modul v kroucení $[m^3]$

Pro 

$$I_t = \alpha \cdot b^3 \cdot h \quad [m^4]$$

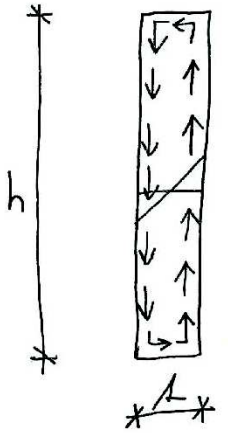
$$W_t = \beta \cdot b^2 \cdot h \quad [m^3]$$

α, β ... bezrozměrné součinitele

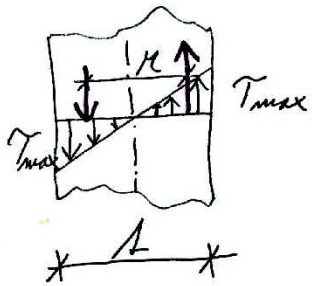
h/b	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
α	0,1406	0,154	0,166	0,177	0,187	0,196	0,204	0,211
β	0,208	0,214	0,219	0,223	0,227	0,231	0,234	0,237

h/b	1,8	1,9	2,0	2,5	3	5	10	∞
α	0,217	0,223	0,229	0,249	0,263	0,291	0,312	0,333
β	0,240	0,243	0,246	0,258	0,267	0,292	0,312	0,333

Kroucení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu



$t \ll h$



Pro $t/h = 0$ jde plocha

$$I_t = \frac{1}{3} t^3 h$$

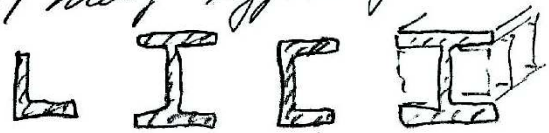
$$W_t = \frac{I_t}{t} = \frac{1}{3} t^2 h$$

Pro průřez složený z obdélníkových ploch:

$$I_t = \eta \sum_{i=1}^{n} I_{ti} = \frac{\eta}{3} \sum t_i^3 \cdot h_i$$

[dle]

η je korekční faktor, který vyjadřuje vliv okolního t/h apod.



Průřez	η
Obdélník	1,00
Válcovaný I profil	1,20
Válcovaný U profil	1,12
Svařovaný I př. s výstuhami	1,5
Svař. T s výstuhami	1,4

Z experimentu:

$$I_t = \frac{M_x \cdot l}{G \cdot \varphi_l} \leftarrow \text{měříme}$$

$$\frac{M_L}{3} \sum t_i^3 \cdot h_i = \frac{M_x \cdot l}{G \cdot \varphi_l}$$

M_L ← výstup

(A) U otevřených svazkových průřezů L_i T_i + lze deplanaci zanedbat a vystačit pouze smykové napětí od prostého kroucení:

$$\tau_t = \frac{M_K}{I_t} \cdot t$$



M_K ... vnější kroutící moment

I_t ... moment tuhosti v prostém kroucení

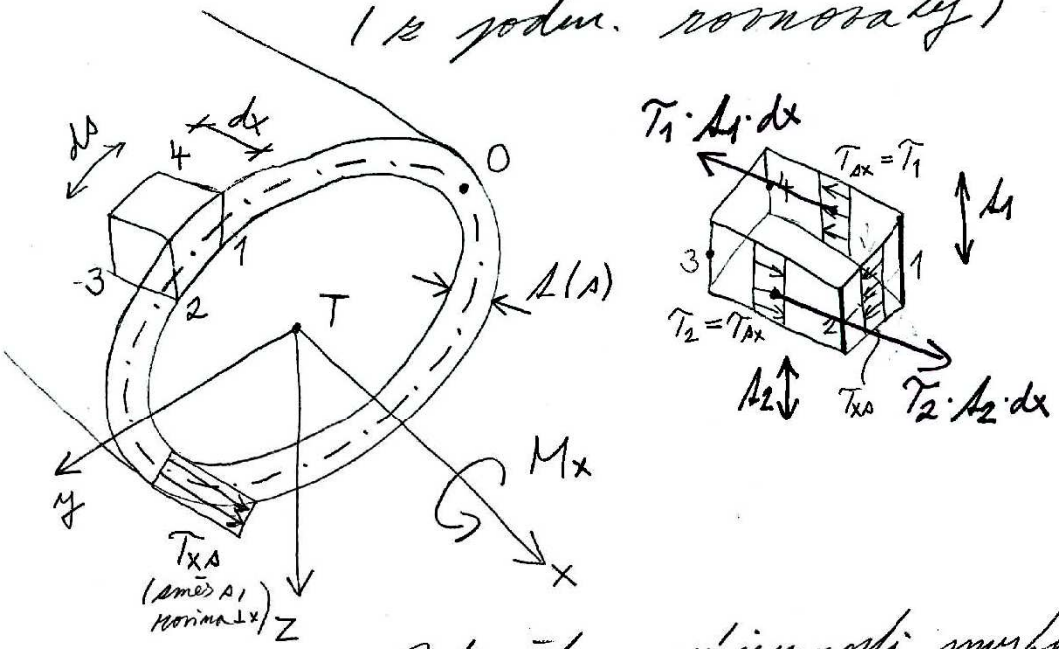
t ... tloušťka průřezu v posuzovaném místě

Kroucení tenkostěnných prutů uzavřeného průřezu

V kroucených tenk. prutech uzavřeného průřezu vzniká odlišné rozložení smyk. napětí než u průřezů otevřených.

Předpoklady:

- tloušťka t je relativně malá, potom lze přibližně předpokládat, že smyková napětí jsou konstantní podél celé tloušťky
- směr napětí musí být tečný ke střednici průřezu
- přibližně se směru tečny ke střednici průřezu
- Výslednice smyk. napětí Q [N/m] v libovolném řezu napříč tloušťkou průřezu je konstantní podél celé uzavřené střednicové křivky průřezu (z podm. rovnováhy)

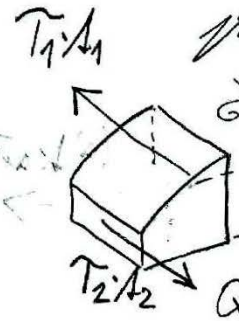


Podle věty o vzájemnosti smykových napětí:

$$\tau_{sx} = \tau_{xs}$$

$$\Sigma F_x = 0: \quad \tau_2 \cdot t_2 \cdot dx = \tau_1 \cdot t_1 \cdot dx \; (= \underbrace{Q \cdot ds}_{\text{konst.}})$$

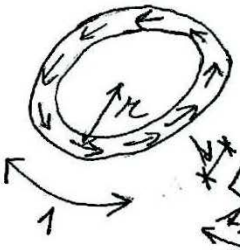
Ze silové podmínky rovnováhy plyne, že v průřezu je konstantní smykový tok, neboť $\sigma_x = 0$. Po obvodu průřezu musí platit, že

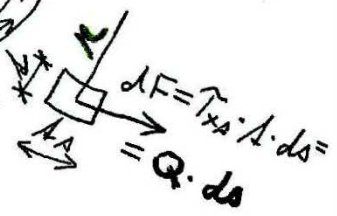


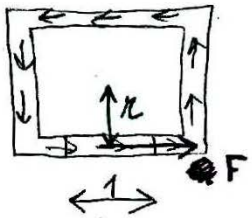
$$Q = T_1 \cdot t_1 = T_2 \cdot t_2 = T_{xs}(s) \cdot t(s) = \text{konst.}$$

Q je síla na jednotku obvodu

$Q\,[N\,mm^{-1}]$







Integrací po průřezu získáme kroutící moment M_x

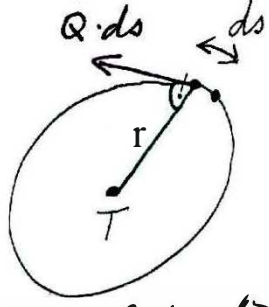
$$M_x = \oint dM_x = \oint dF \cdot r = \oint Q \cdot r \cdot ds = Q \cdot \int r\,ds = Q \cdot 2A_K = T_{xs} \cdot t \cdot 2 \cdot A_K$$

($Q \cdot r \cdot ds$ [Nm], Q [N])

r ... délka kolmice spuštěné z těžiště průřezu k tečně

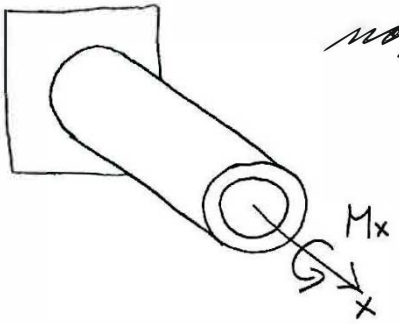
A_K ... plocha ohraničená střednicí průřezu

$$M_x = T_{xs} \cdot t \cdot 2A_K$$



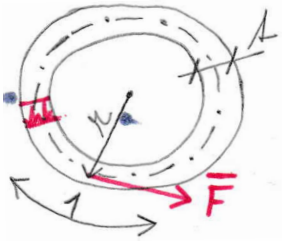
$$\boxed{T_{xs} = \frac{M_x}{2 \cdot A_K \cdot t}}$$

Příklad: Odvoďte vztah pro výpočet smykového napětí tenkostěnného průřezu.



$\bar{M}$ ... moment na jednotkovou délku obvodu

$$\bar{M} = \frac{M_x}{2\pi r}$$

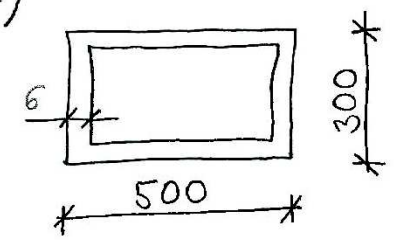


$$\bar{F} = \frac{\bar{M}}{r} = \frac{M_x}{2\pi r^2}$$

$$T_{xs} = \frac{\bar{F}}{1 \cdot t} = \frac{M_x}{2\pi r^2 \cdot t} = \frac{M_x}{2 A_K \cdot t}$$

Příklad: Vypočtěte napětí od prostého kroucení

a)

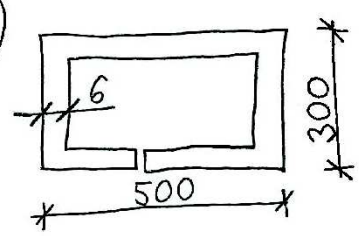


$M_K = 3\,kNm$

$$\tau_K = \frac{M_K}{2 \cdot A_K \cdot t}$$

$$\tau_K = \frac{3\,kNm}{2 \cdot 0{,}494 \cdot 0{,}294 \cdot 0{,}006} = 1{,}72\,MPa$$

b)



$$\tau_K = \frac{M_K}{I_t} \cdot t$$

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot \eta \cdot \sum_{i=1}^{n} h_i t_i^3 \quad [\text{délka}]$$

$$= \frac{2}{3} \cdot (0{,}494 \cdot 0{,}006^3 + 0{,}294 \cdot 0{,}006^3) = 113{,}5 \cdot 10^{-9}\,m^4$$

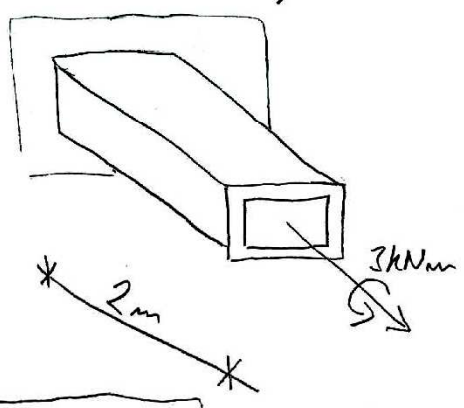
$$\tau_K = \frac{3\,kNm}{113{,}5 \cdot 10^{-9}} \cdot 0{,}006 = 158{,}6\,MPa$$

$\frac{158{,}6}{1{,}72} \doteq$ 90× nižší hodnota napětí !

Příklad: Určete pootočení na konzole délky 2 m

$G = 81\,GPa$

a)



$$I_t = \frac{4 \cdot A_K^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{t_i}} = \frac{4 \cdot (0{,}494 \cdot 0{,}294)^2}{2 \cdot \left(\frac{0{,}494}{0{,}006} + \frac{0{,}294}{0{,}006}\right)} =$$

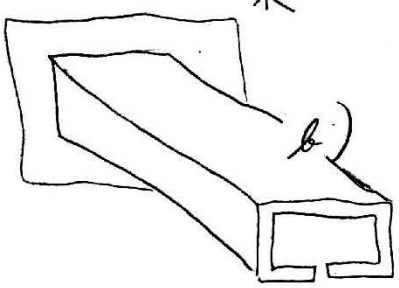
$$= 3{,}2122 \cdot 10^{-4}\,m^4 \checkmark$$

$$\varphi = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot I_t} = \frac{3\,kNm \cdot 2\,m}{81 \cdot 10^9 \cdot 3{,}2122 \cdot 10^{-4}} =$$

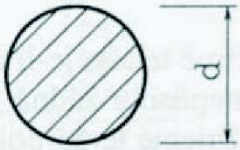
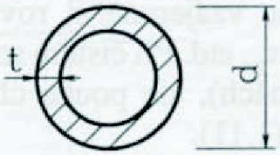
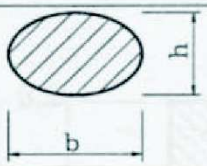
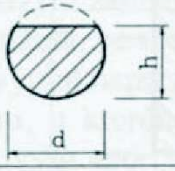
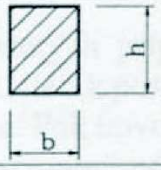
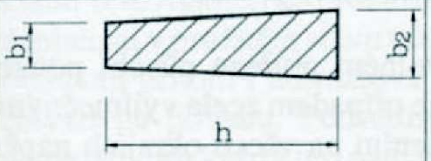
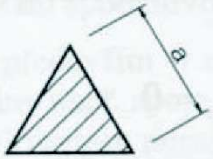
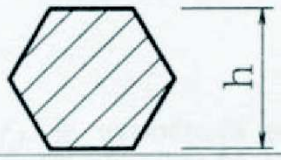
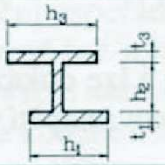
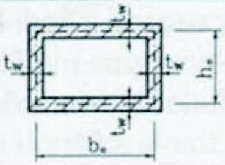
$$= 2{,}31 \cdot 10^{-4}\,rad \checkmark$$

$\frac{0{,}653}{2{,}31E-4} = 2827\times$ nižší hodnota !

b) Pro otevřený průřez



$$\varphi = \frac{3\,kNm \cdot 2\,m}{81 \cdot 10^9 \cdot 113{,}5 \cdot 10^{-9}} = 0{,}653\,rad$$

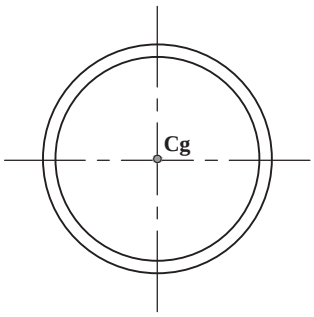
Tvar průřezu	I_t	W_t
	$I_t = I_p = \frac{\pi}{32} d^4$	$W_t = \frac{\pi}{16} d^3$
	$I_t = I_p = \frac{\pi}{32}\left[d^4 - (d-2t)^4\right]$	$W_t = \frac{2I_t}{d}$
	$I_t = \frac{\pi b^3 h^3}{16(b^2+h^2)}$	$W_t = \frac{\pi b h^2}{16}$ $b > h$
	$I_t \approx \frac{d^4}{16}\left(2{,}6\frac{h}{d} - 1\right)$	$W_t \approx \frac{d^3(2{,}6h-d)}{8(0{,}3h+0{,}7d)}$
	$I_t = \alpha b^3 h$ α - viz tab. 3.1	$W_t = \beta b^2 h$ β - tab. 3.1
	$I_t \approx \frac{1}{12} h(b_1 - b_2)(b_1^2 + b_2^2) - 0{,}105(b_1^4 + b_2^4)$	$W_t \approx \frac{I_t}{b_1}$
	$I_t = \frac{\sqrt{3}}{80} a^4$ (rovnostranný trojúhelník)	$W_t = \frac{a^3}{20}$
	$I_t \approx 0{,}115 h^4$ (pravidelný šestiúhelník)	$W_t \approx 0{,}188 h^3$
	$I_t \approx \frac{1}{3}\sum_1^3 t_i^3 h_i$	$W_t = \frac{I_t}{t_{max}}$
	$I_t = \frac{2 t_w t_f b_0^2 h_0^2}{t_f b_0 + t_w h_0}$	$W_t = 2 b_0 h_0 t_{min}$

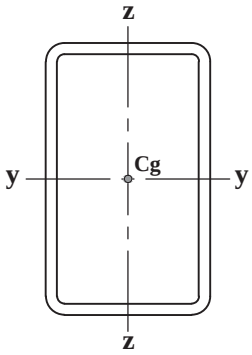
https://www.youtube.com/watch?v=1eBrskh1hJQ

https://www.youtube.com/watch?v=1YTKedLQOa0

KROUCENÍ - TYPY NAPĚTÍ DLE TVARU PRŮŘEZU

Uzavřené průřezy



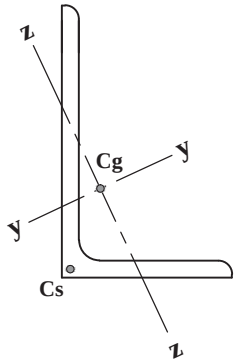


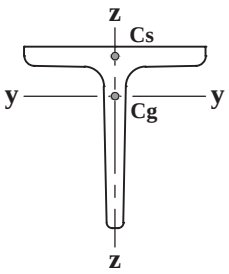
Prosté kroucení

$$\tau_t = \frac{T_t}{2A_k \cdot t}$$

Otevřené průřezy

Nedeplanující průřezy (svazkové)

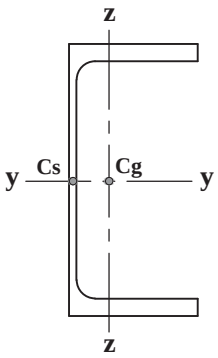




Prosté kroucení

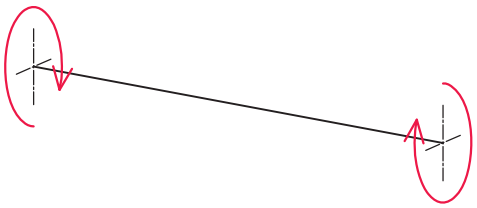
$$\tau_t = \frac{T_t}{I_t} \cdot t$$

Deplanující průřezy



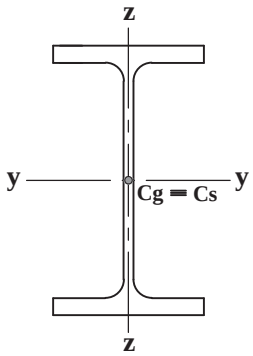
Prosté kroucení

Nastává pokud není bráněno deplanování průřezu a současně je prut zatížen kroutícími momenty na jeho koncích



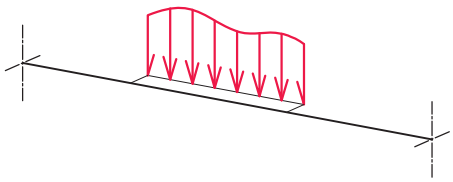
Prosté kroucení

$$\tau_t = \frac{T_t}{I_t} \cdot t$$



Složené kroucení

Nastává pokud není bráněno deplanování průřezu a současně je prut zatížen jinak než kroutícími momenty na jeho koncích nebo pokud je bráněno deplanování průřezu v kombinaci s jakýmkoliv kroutícím zatížením



Prosté kr.

$$\tau_t = \frac{T_t}{I_t} \cdot t$$

Vázané kroucení

$$\tau_\omega = \frac{T_\omega \cdot S_\omega}{t \cdot I_\omega}$$

$$\sigma_\omega = \frac{B \cdot \omega}{I_\omega}$$

Ing. Ondřej Pešek, Ph.D.