PRUŽNOST A PEVNOST

4. přednáška

Smyková napětí za ohybu
Masivní a tenkostěnné průřezy

Prof. Ing. Zdeněk Kala, Ph.D.

Ústav stavební mechaniky, Veveří 95

Přednášky jsou zde:

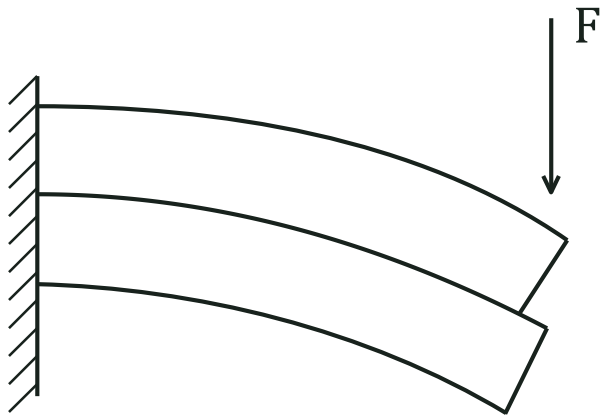
https://www.fce.vutbr.cz/STM/kala.z/

(tlačítko BDA002 Pružnost a pevnost)

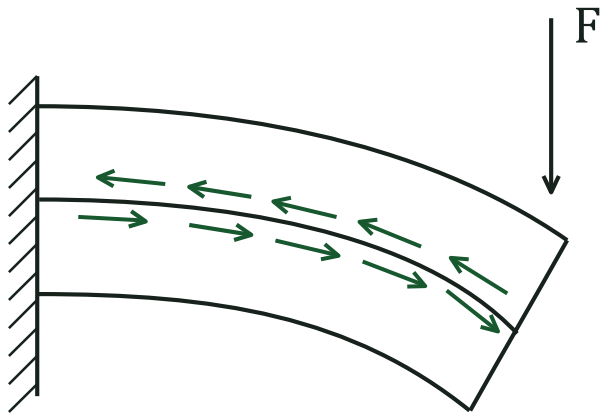
Smyková napětí za ohybu · masivní průřezy

Při ohybu se smykem hypotéza o rovinnosti průřezů přesně neplatí.

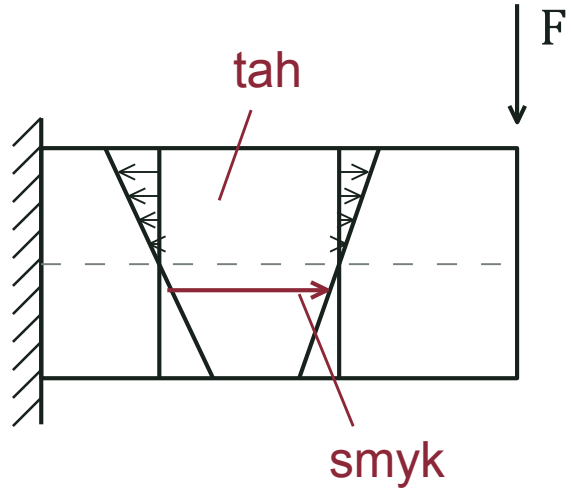
Pro dlouhý a poddajný prut tato deformace není významná.



Vzájemný posun vrstev



Spojení vrstev smykem



Vodorovná tečná napětí zabezpečují kompatibilitu deformací všech částí prutu při jeho ohybu.

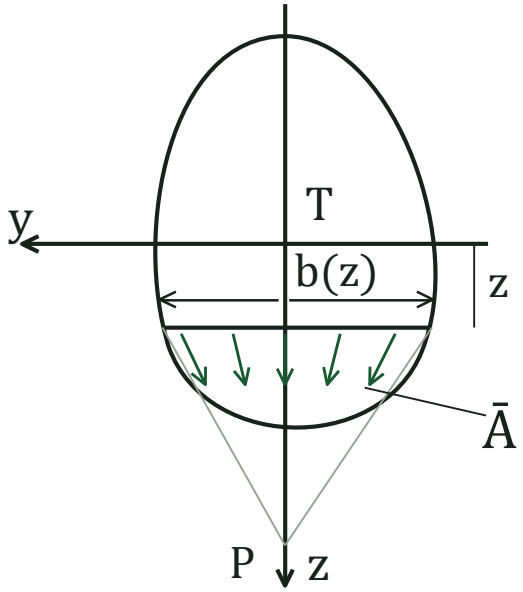
https://www.youtube.com/watch?v=f08Y39UiC-o

Grashofovy předpoklady

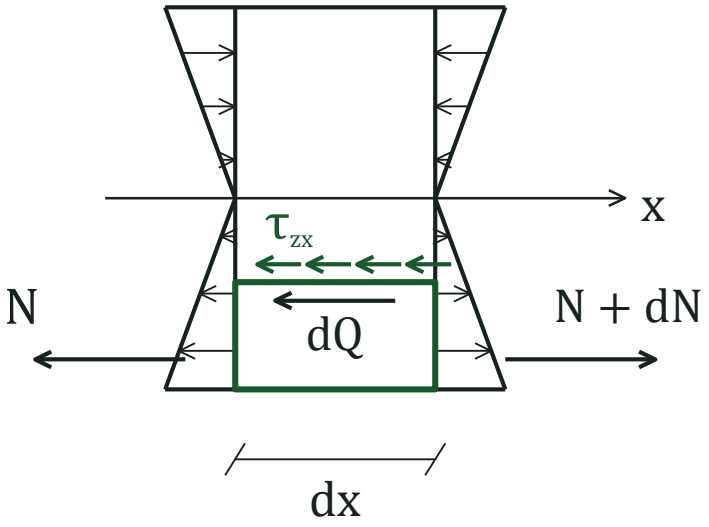
Přibližné technické řešení smyku za ohybu se opírá o tyto předpoklady:

Smyková napětí na přímce z = konst. (rovnoběžné s neutrální osou):

- svislá složka napětí je po šířce průřezu konstantní
- jejich výslednice směřují do společného bodu na ose symetrie, určeného průsečíkem tečen k obrysu průřezu



odříznutá část



Odvození Grashofova vzorce

$$S_y = \int_{\bar{A}} z \, dA$$

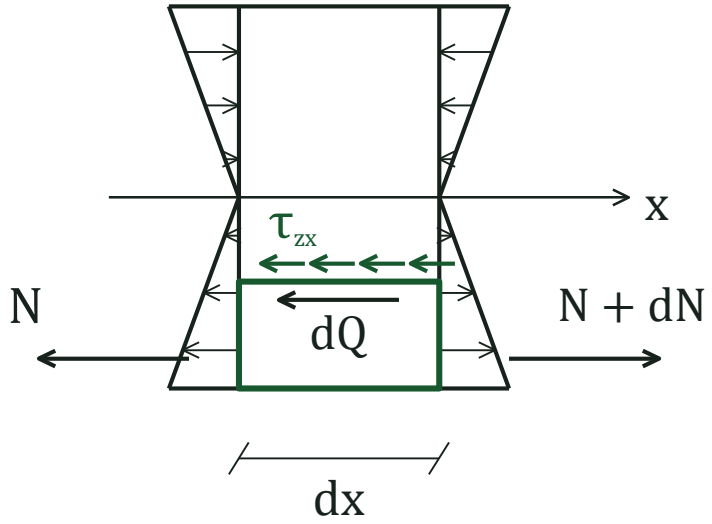
statický moment odříznuté části

Na odříznutou část působí:

$$N = \int_{\bar{A}} \sigma_x \, dA = \frac{M_y}{I_y} \int_{\bar{A}} z \, dA = \frac{M_y}{I_y} S_y$$

$$dN = \frac{dN}{dx} dx = \frac{d}{dx} \left(\frac{M_y}{I_y} S_y\right) dx$$

$$= \frac{dM_y}{dx} \frac{S_y}{I_y} dx = V_z \frac{S_y}{I_y} dx$$



$$dQ = \tau_{zx} \cdot b(z) \cdot dx$$

Statická podmínka rovnováhy

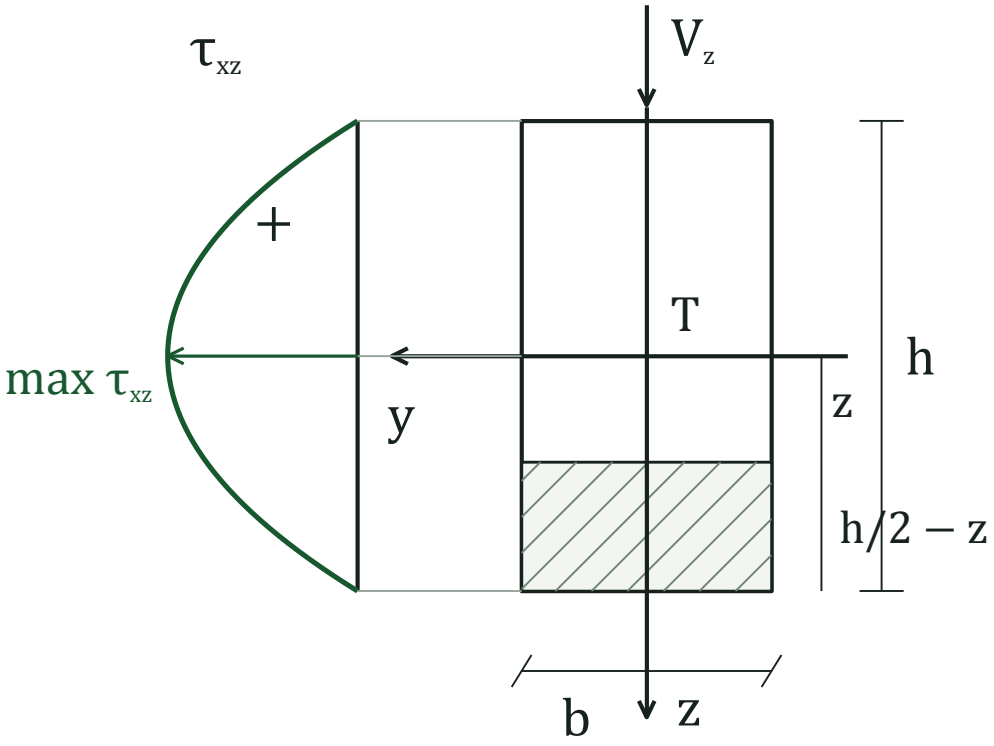
$$-dQ - N + N + dN = 0 \quad \Rightarrow \quad dQ = dN$$

$$\tau_{zx} \cdot b(z) \cdot dx = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y} dx$$

Z podmínky rovnováhy $\tau_{xz} = \tau_{zx}$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{V_z \cdot S_y}{b \cdot I_y}$$

Příklad: obdélníkový průřez



$$S_y = b \cdot \left(\frac{h}{2} - z\right) \cdot \left(z + \frac{h/2 - z}{2}\right)$$

$$= \frac{b}{8}\left(h^2 - 4z^2\right)$$

$$I_y = \frac{1}{12} b\, h^3$$

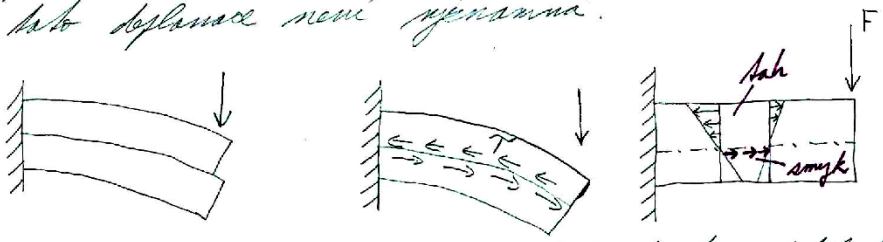
$$\tau_{xz} = \frac{V_z \cdot [b/8 \cdot (h^2 - 4z^2)]}{b \cdot (1/12) \cdot b\, h^3}$$

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2}\frac{V_z}{A}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)$$

$z = 0$: $\quad \max \tau_{xz} = \frac{3}{2}\frac{V_z}{A}$

Smyková napětí za ohybu - masivní průřezy

Tečná napětí při ohybu se snaží rovinu průřezu zprohýbat, takže hypotéza o rovinnosti průřezů přesně neplatí. Pro dlouhý a poddajný prut tato deplanace není významná.

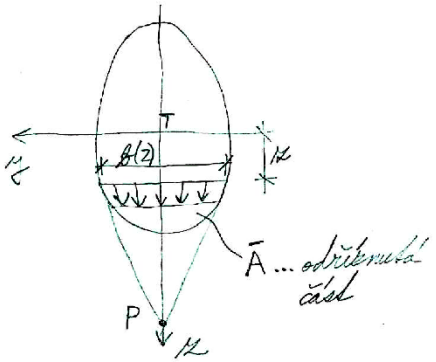


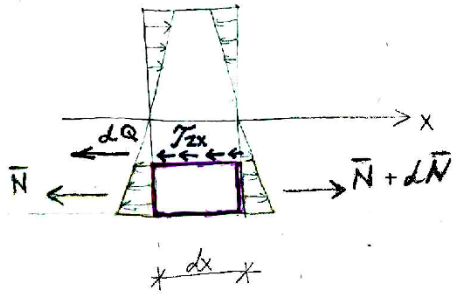
Vodorovná tečná napětí zabezpečují kompatibilní deformaci všech částí prutu při jeho ohybu.

Přibližné technické řešení smyku za ohybu se opírá o tzv. **Grashofovy** předpoklady:

Smyková napětí na přímce z = konst (rovnoběžka s neutrální osou) mají tyto vlastnosti:

- svislá složka napětí je po šířce průřezu konstantní
- jejich výsledné vektory směřují do společného bodu na ose symetrie, určeného průsečíkem tečen k okrysu průřezu





Na odříznutou část působí:

$$\bar{N} = \int_{\bar{A}} \sigma_x \, dA = \frac{M_y}{I_y} \int_A z \, dA = \frac{M_y}{I_y} \cdot S_y$$ ← statický moment odříznuté části

$$d\bar{N} = \frac{d\bar{N}}{dx} dx = \frac{d}{dx}\left(\frac{M_y}{I_y} \cdot S_y\right) dx = \frac{dM_y}{dx} \frac{S_y}{I_y} dx =$$

$$= V_z \frac{S_y}{I_y} dx$$

$$dQ = \tau_{zx} \cdot b(z) \cdot dx$$

Součtová podmínka rovnováhy:

$$-dQ - \bar{N} + \bar{N} + d\bar{N} = 0$$

$$dQ = d\bar{N}$$

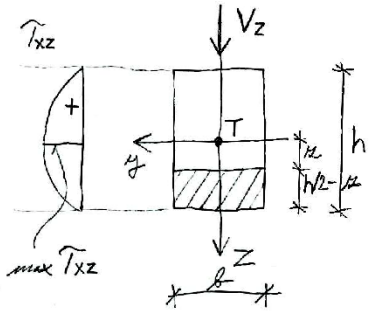
$$\tau_{zx} \cdot b(z) \cdot dx = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y} \cdot dx$$

Z podmínky rovnováhy $\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

Grashofův vzorec

$$\boxed{\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{V_z \cdot S_y}{b \cdot I_y}} \qquad b = b(z)$$

Příklad: Obdélníkový průřez



$$S_y = b \cdot \left(\frac{h}{2} - z\right) \cdot \left(z + \frac{h/2 - z}{2}\right) = \frac{b}{8} \cdot (h^2 - 4z^2)$$

$$I_y = \frac{1}{12} b h^3$$

$$\tau_{xz} = \frac{V_z \cdot \left[\frac{b}{8} \cdot (h^2 - 4z^2)\right]}{b \cdot \frac{1}{12} b h^3}$$

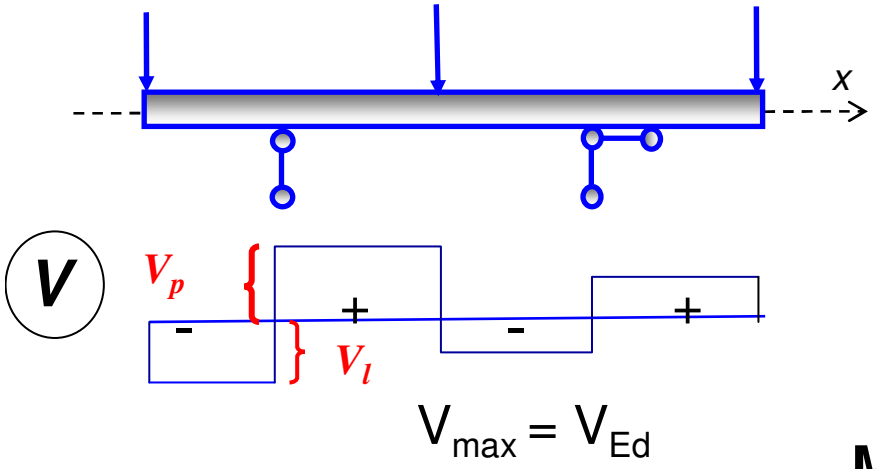
$$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{V_z}{A} \cdot \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)$$

max τ_{xz} pro $z = 0$

$$\max \tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{V_z}{A}$$

Ohyb - smyková napětí

ohýbaný nosník - $M_y \rightarrow \sigma_x$
- $V_z \rightarrow \tau_{xz}$



$V_{max} = V_{Ed}$

Průřezové charakteristiky pro smyková napětí za ohybu jsou statický moment plochy S_y a moment setrvačnosti I_y.

$$\bar{S}_y = A_{\substack{\text{části} \\ \text{průř}}} \cdot z_T \ [m^3]$$

$$\tau = \frac{V \cdot \bar{S}_y}{I_y \cdot b}$$

τ napětí smykové

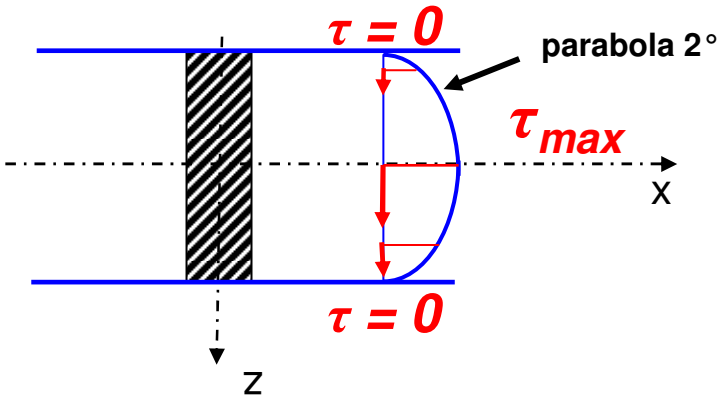
Mezní stav únosnosti – posouzení:

$$\text{ocel}: \ \tau_{dov} = \frac{f_{yd}}{\sqrt{3}} = \frac{f_{yk}}{\gamma_M \sqrt{3}} \geq \tau_{max} = \frac{V_{Ed} \cdot \bar{S}_{y,max}}{I_y \cdot b}$$

obecně: τ_{dov} zadáno

posouzení smykového napětí

průběh τ_{xz} po výšce průřezu pro obdélník



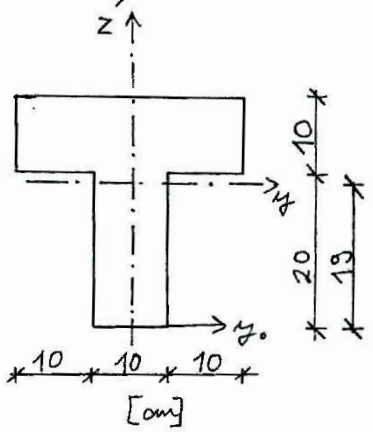
únosnost prutu ve smyku:

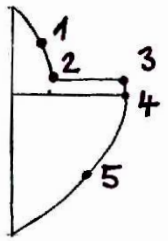
$$V_{Rd} = \frac{\tau_{dov} \cdot I_y \cdot b}{S_y}$$

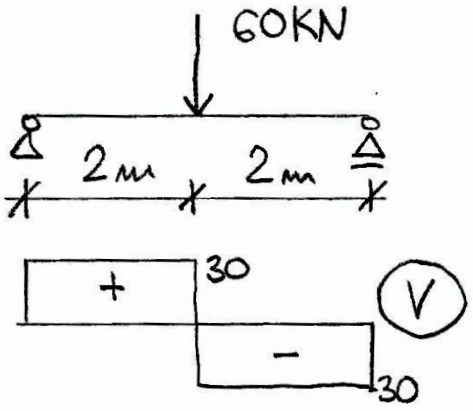
$$V_{Rd} \geq V_{Ed}$$

posouzení únosnosti ve smyku

Příklad: Určete průběh smykových napětí po výšce průřezu T naznačeného na obrázku, působí-li posouvající síla Q = 30 kN







- výpočet těžiště

$$z_t = \frac{10 \cdot 30 \cdot 25 + 10 \cdot 20 \cdot 10}{10 \cdot 30 + 10 \cdot 20} = 19\ \text{cm}$$

- moment setrvačnosti

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 10^3 + 6^2 \cdot 30 \cdot 10 + \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 20^3 + 9^2 \cdot 10 \cdot 20 = 36166{,}667\ \text{cm}^4 = 3{,}61\overline{6} \cdot 10^{-4}\ \text{m}^4$$

$$S_2 = 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}06 = 1{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$$

$$\tau_2 = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y \cdot b} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-3}}{3{,}616\overline{6} \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}3} = \underline{0{,}498\ \text{MPa}}$$

$$\tau_3 = \qquad = \frac{-\|-}{-\|-\ 0{,}1} = \underline{1{,}493\ \text{MPa}}$$

$$S_4 = 0{,}19 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{0{,}19}{2} = 1{,}805 \cdot 10^{-3}$$

$$\tau_4 = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1{,}805 \cdot 10^{-3}}{3{,}616\overline{6} \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1} = \underline{1{,}497\ \text{MPa}}$$

$$S_1 = 0{,}05 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}3 - 0{,}025 - 0{,}19) = 1{,}275 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$$

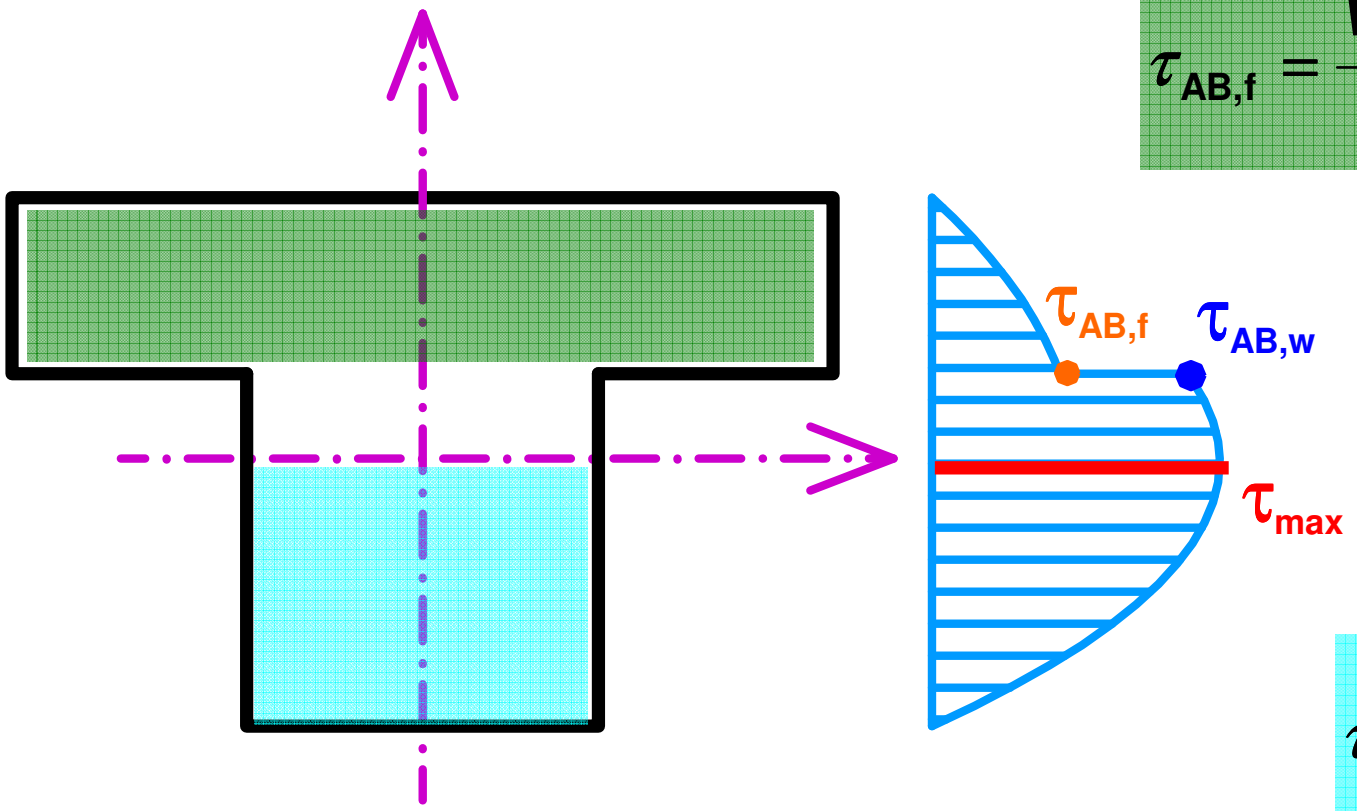
$$\tau_1 = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0{,}9 \cdot 10^{-3}}{3{,}616\overline{6} \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}3} = 0{,}353\ \text{MPa}$$

$$S_5 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}14 = 1{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$$

$$\tau_5 = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-3}}{3{,}61\overline{6} \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1} = 1{,}16\ \text{MPa}$$

Smyková (tečná) napětí za ohybu - masivní průřezy

Smykové napětí v řezu A – B.



$$\tau_{AB,f} = \frac{V_{Ed}\ \overline{S}_{y,AB}}{I_y\ b_f}$$

$$\tau_{AB,w} = \frac{V_{Ed}\ \overline{S}_{y,AB}}{I_y\ b_w}$$

$$\tau_{max} = \frac{V_{Ed}\ \overline{S}_{y,max}}{I_y\ b_w}$$

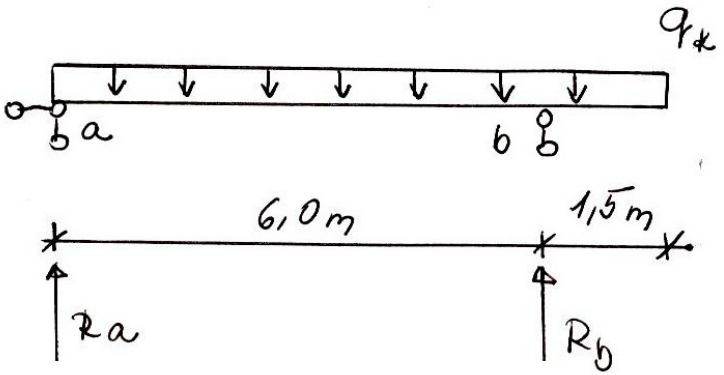
Příklad - dřevěný lepený nosník - návrh rozměru *b*

a) Navrhněte z hlediska smyku dřevěný lepený nosník obdélníkového průřezu na napětí v lepené spáře , je-li $\tau_{dov,lep}$ pro lepidlo 0,5 MPa. Zatížení je nahodilé γ_Q=1,4.

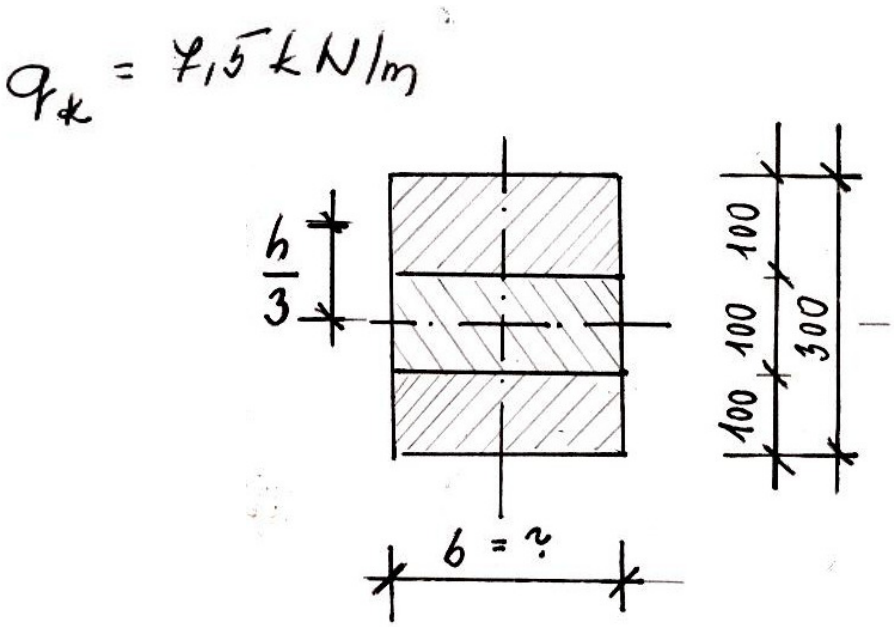
b) Navrhněte průřez také z hlediska maximálního napětí (na ose y), je-li návrhová pevnost dřeva ve smyku $\tau_{dov,dř}$ =1,5 MPa.

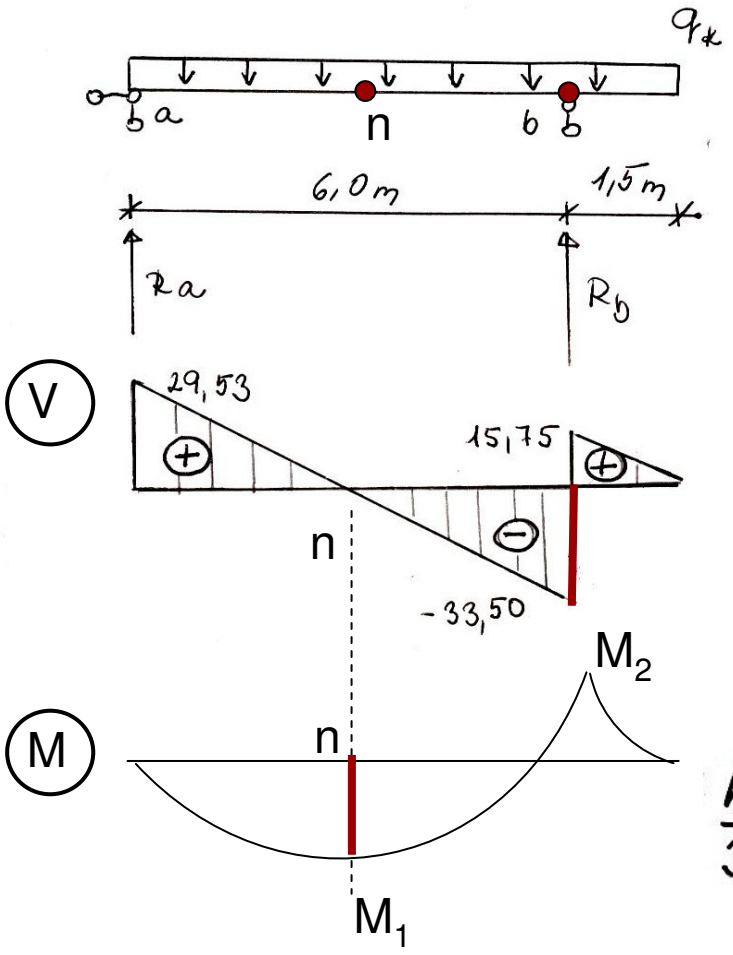
c) Navrhněte nosník z hlediska maximálního normálového napětí za ohybu, je-li $f_{d,dřeva}$ = $\sigma_{dov,dřeva}$ = 13,7 MPa.

d) Vyberte rozhodující hodnotu šířky průřezu a posuďte všechny tři únosnosti ($V_{Rd,lep}$, $V_{Rd,dřeva}$, $M_{Rd,dřeva}$)



Vykreslit průběh V +M



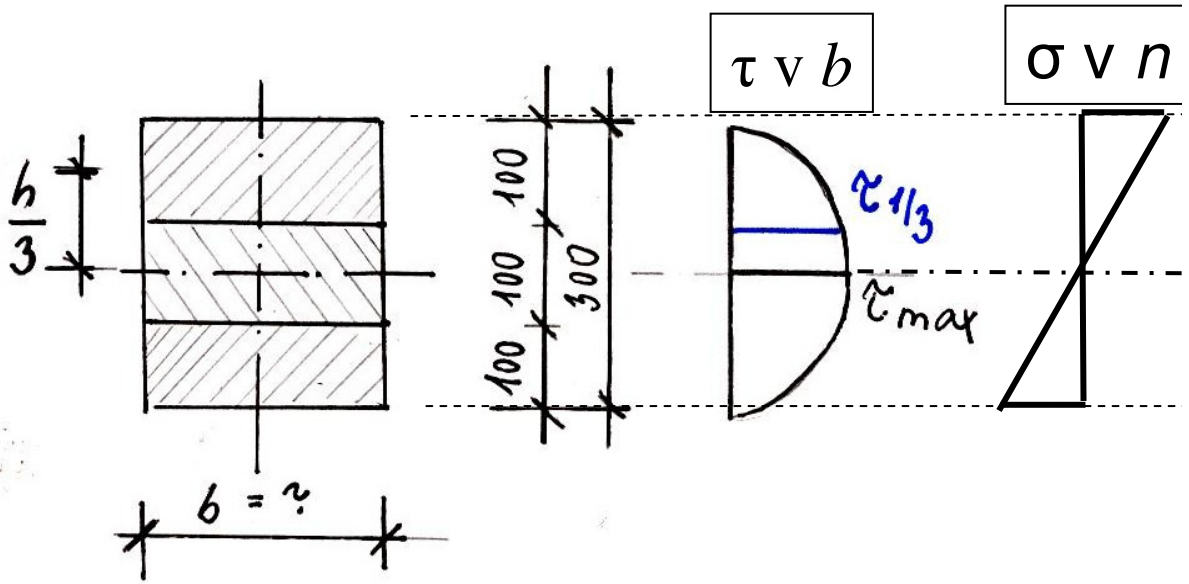


$q_d = 7,5 \cdot 1,4 = 10,5\ kN/m$

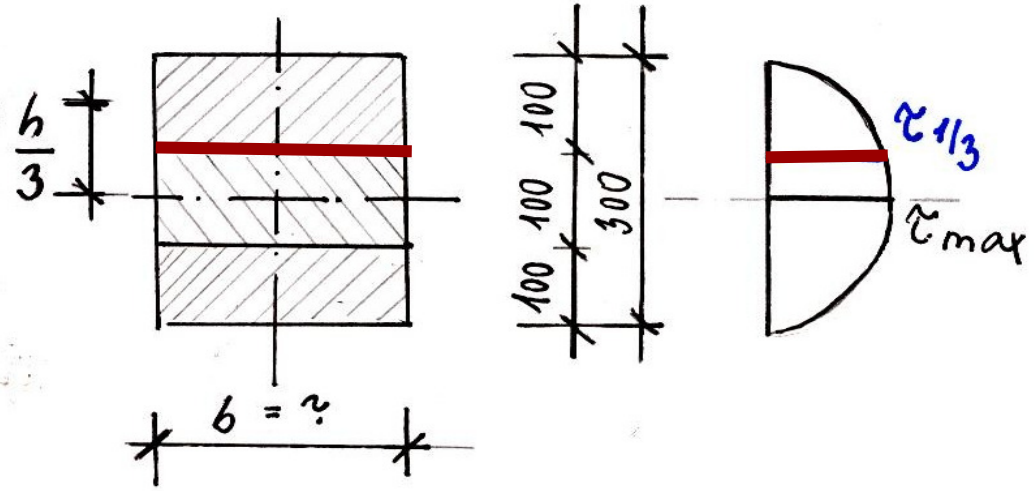
$|V_{Ed}| = 33,5\ kN$

$|M_{Ed}| = 41,5 kNm$

Průběh smykového a normálového napětí po výšce průřezu *b* a *n*



Průběh smykového napětí po výšce průřezu



Výpočet statického momentu:

v 1/3 průřezu:

$$S_{y,1/3} = \frac{b \cdot h}{3} \cdot \frac{h}{3} = \frac{b h^2}{9}$$

v 1/2 průřezu:

$$S_{y,1/2} = \frac{b h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{b h^2}{8}$$

a) Smykové napětí v lepené spáře v bodě *b*

$V_{Ed} = 33{,}5\,kN$

$$\tau_{xz,1/3} = \frac{V_{Ed} \cdot S_{y,1/3}}{I_y \cdot b} = \frac{V_{Ed} \cdot \frac{b h^2}{9}}{\frac{1}{12} b h^3 \cdot b}$$

$$\Rightarrow b_{nut} = \frac{4 \cdot V_{Ed}}{\tau_{xz} \cdot 3 \cdot h} = \frac{4 \cdot 33{,}5 \cdot 10^3}{0{,}5 \cdot 3 \cdot 300} = 297{,}8\,mm$$

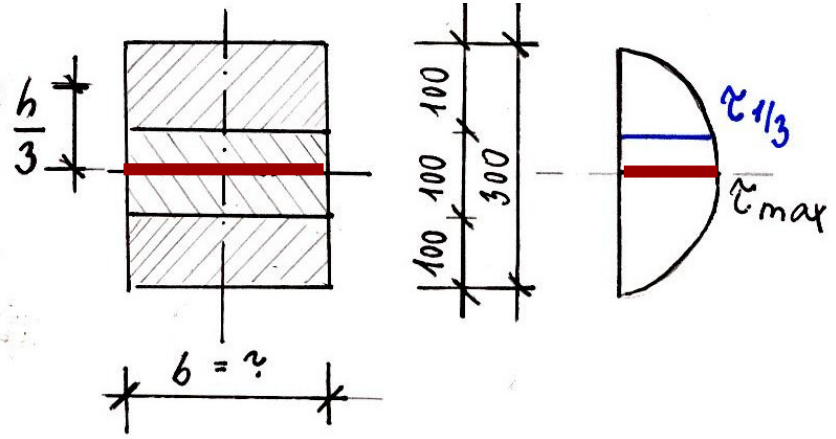
$\tau_{dov,lepidla}$

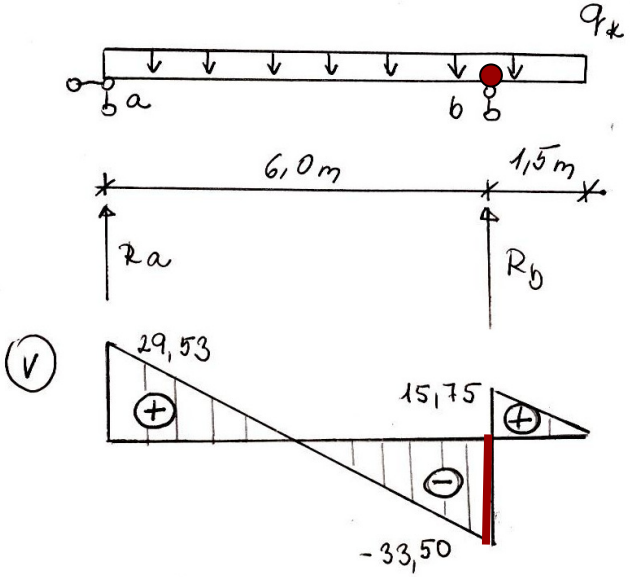
b) Maximální smykové napětí (v těžišti průřezu) v bodě *b*

$V_{Ed} = 33{,}5\text{kN}$

$$\tau_{xz,1/2} = \frac{V_{Ed} \cdot S_{y,1/2}}{I_y \cdot b} = \frac{V_{Ed} \cdot \frac{b h^2}{8}}{\frac{1}{12} b h^3 \cdot b} = \frac{3}{2} \frac{V_{Ed}}{b \cdot h} =$$

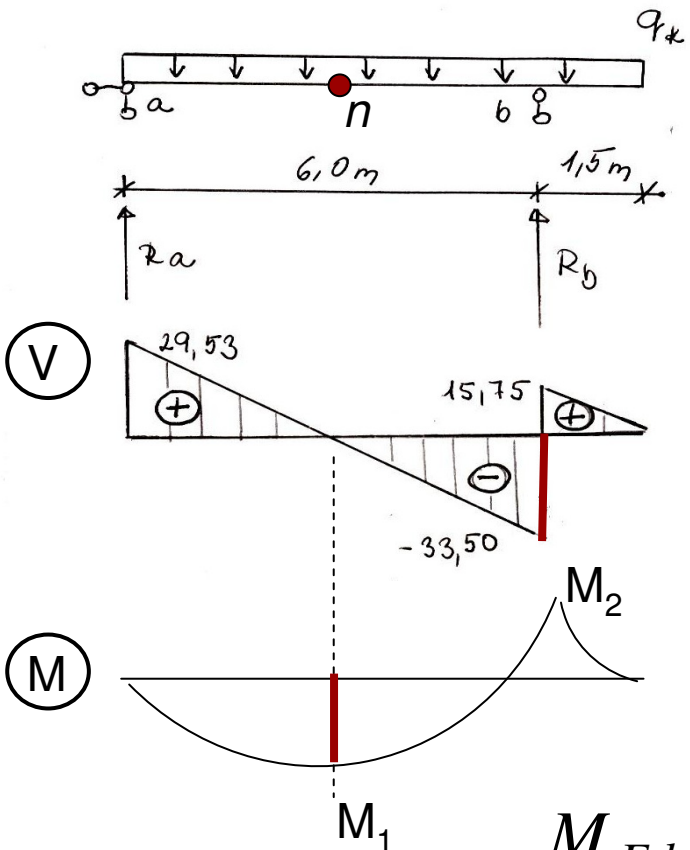
$$\Rightarrow b_{nut} = \frac{3.V_{Ed}}{2.h.\tau_{dov,dř}} = 112mm$$

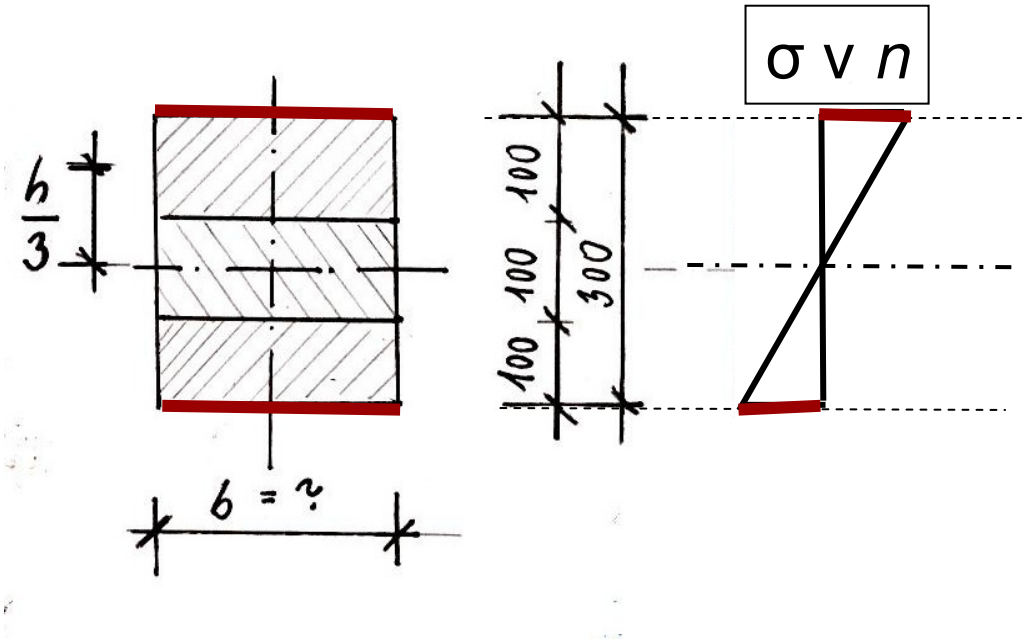




c) maximální normálové napětí v nebezpečném průřezu *n*

$$M_{Ed} = 41{,}5 kNm$$





$$\sigma_x = \frac{M_{Ed}}{W_y} = \frac{M_{Ed}}{\frac{1}{6} b h^2} \Rightarrow b_{nut} = \frac{6.M_{Ed}}{h^2.\sigma_{dov,dř}} = 202mm$$

b=max{297,8 mm; 112mm; 202mm}

Návrh průřezu b = 300mm

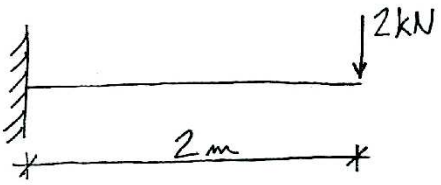
Posouzení únosností:

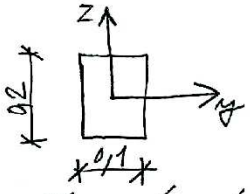
$$V_{Rd,lep} = \frac{3.b.h.\tau_{dov,lep}}{4} = 33{,}75kN \geq V_{Ed} = 33{,}5kN \Rightarrow vyhovuje$$

$$V_{Rd,dř} = \frac{2.b.h.\tau_{dov,dř}}{3} = 90{,}0kN \geq V_{Ed} = 33{,}5kN \Rightarrow vyhovuje$$

$$M_{Rd,dř} = \frac{b.h^2.\sigma_{dov,dř}}{6} = 61{,}65kNm \geq M_{Ed} = 41{,}55kNm \Rightarrow vyhovuje$$

Příklad: Vypočtěte maximální tečné napětí u konzoly obdélníkového průřezu





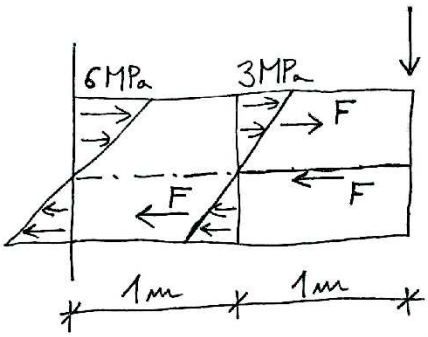
$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2^3 = 6{,}66\bar{6} \cdot 10^{-5}\, m^4$$



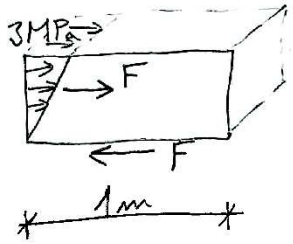
Na úseku délky 1m od volného okraje konzoly dojde k nárůstu ohybového momentu z nuly na hodnotu 2kNm.

Normálové napětí na okraji -

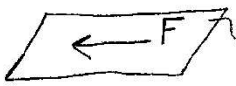
$$\sigma_x = \frac{2\,kNm}{6{,}6\bar{6} \cdot 10^{-5}} \cdot 0{,}1 = 3\,MPa$$



odřízneme horní část prutu



$$F = 3\,MPa \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1/2 = 15\,kN$$



$A_s = 1m \cdot 0{,}1m$

$$\tau = \frac{F}{A_s} = \frac{15\,kN}{1 \cdot 0{,}1} = \underline{\underline{0{,}15\,MPa}}$$

Ověření z výpočtového vzorce:

$$\tau = \frac{T_z \cdot S_y}{I_y \cdot b}$$

$S = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}05 = 5 \cdot 10^{-4}\, m^3$

$I_y = 6{,}\bar{6} \cdot 10^{-5}\, m^4$

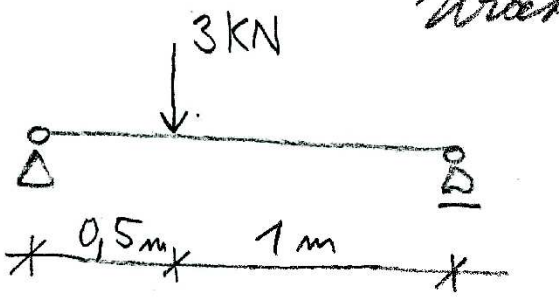
$b = 0{,}1$

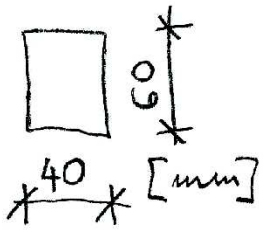
$$\tau = \frac{2\,kN \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{6{,}\bar{6} \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}1} = \underline{\underline{0{,}15\,MPa}}$$

Pro praktický výpočet používáme obecný vztah:

$$\boxed{\tau = \frac{T_z \cdot S_y}{I_y \cdot b}} \quad !$$

Uráčte $\max \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xz}^2}$ (srovnávací nap.)

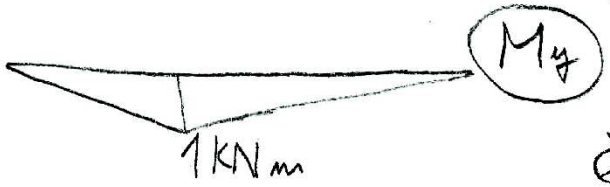






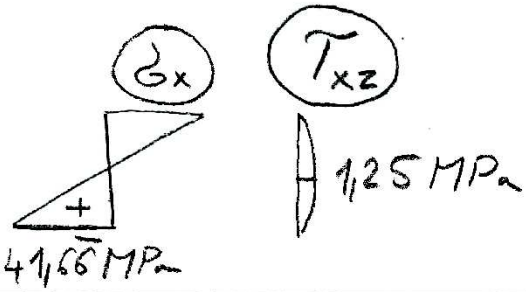
$I_y = 0{,}72 \cdot 10^{-6}\ m^4$

$\max S_y = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}15 = 18 \cdot 10^{-6}\ m^3$

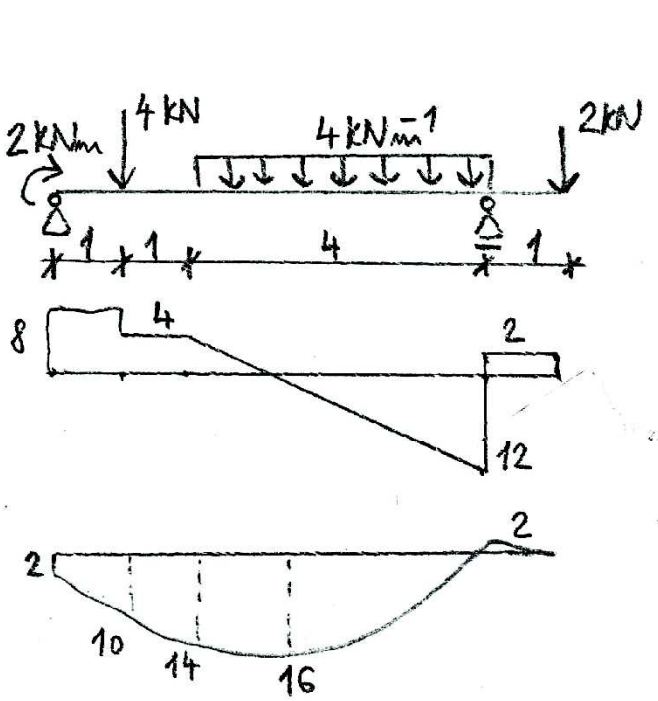


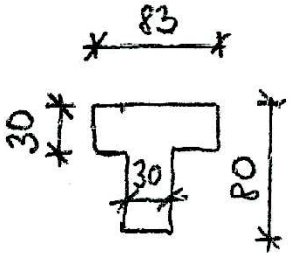
$$\sigma_x = \frac{1 \cdot 10^3}{0{,}72 \cdot 10^{-6}} \cdot 0{,}03 = 41{,}66\ MPa$$

$$\tau_{xz} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 18 \cdot 10^{-6}}{0{,}72 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}04} = 1{,}25\ MPa$$



Vypočtěte maximální absolutní hodnotu normálového a smykového napětí na nosníku.





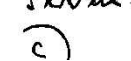
$I_1 = 49{,}9624\ (30{,}03758)$ 50

$S_\delta = 199{,}35 \cdot 10^{-6}$ $200 \cdot 10^{-6}$

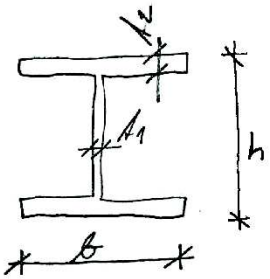
$I_\delta = 1{,}99699 \cdot 10^{-6}$ $2 \cdot 10^{-6}$

$$\sigma_x = \frac{16 \cdot 10^3}{1{,}99699 \cdot 10^{-6}} \cdot 0{,}04996 = 400{,}3\ MPa$$

$$\tau_{xz} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 199{,}35 \cdot 10^{-6}}{1{,}99699 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}01} = 7{,}5\ MPa$$



Smyková napětí v tenkostěnných nosnících - střed smyku



$t_1; t_2 \ll b; h$ často 1:10

Typy tenkostěnných průřezů

a) otevřeného průřezu I, [, T

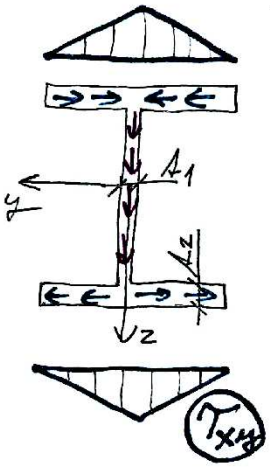
b) uzavřeného průřezu ○, □, apod.

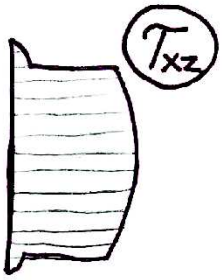
Nosníky s otevřeným průřezem

Předpoklady:

a) smyková napětí jsou konstantní v řezu kolmo k dělicí stěně

b) smyková napětí jsou rovnoběžná s obrysem průřezu



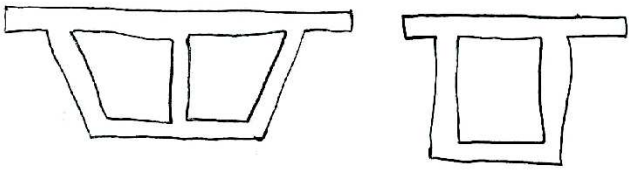


$$\tau_x = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y \cdot t}$$

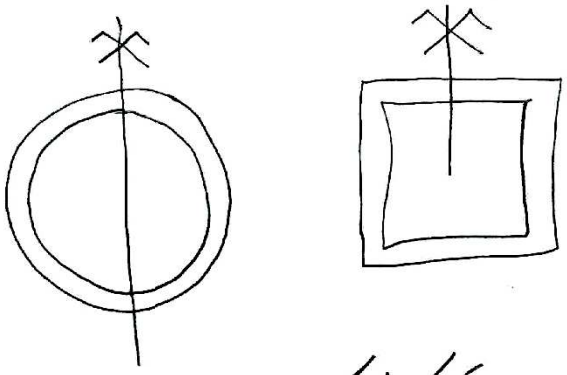
τ_x ... v rovině kolmé k ose x

- svislá část τ_{xz}
- vodorovná část τ_{xy}

Tenkostěnné nosníky uzavřeného průřezu



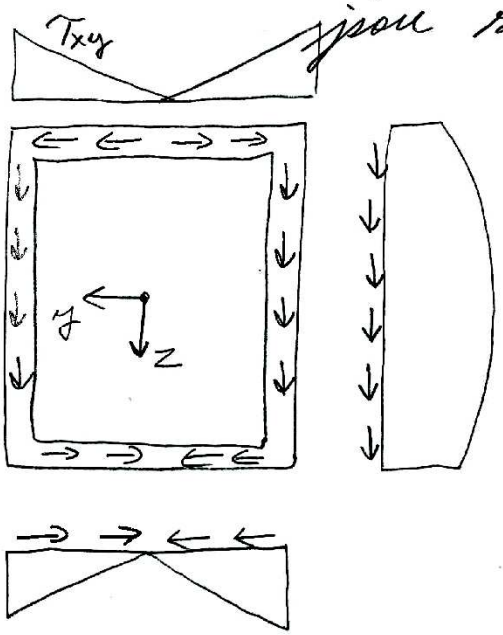
nesymetrické



symetrické

Výpočet smykových napětí představuje stat. neurčitou úlohu

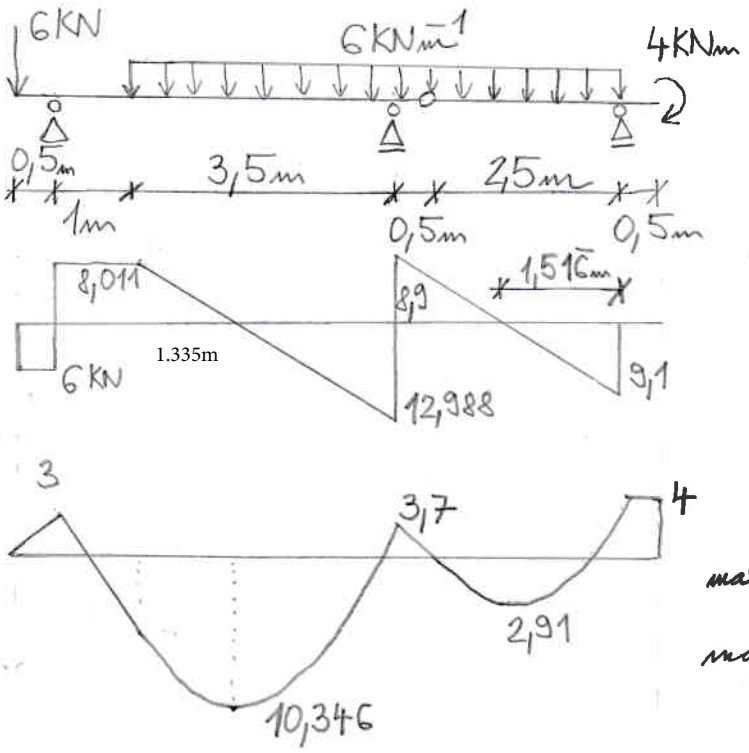
Výjimka - jednohomnůrkové nosníky s rovinnou symetrie, zatížené v této rovině. Smyková napětí na rovině symetrie jsou rovna nule.

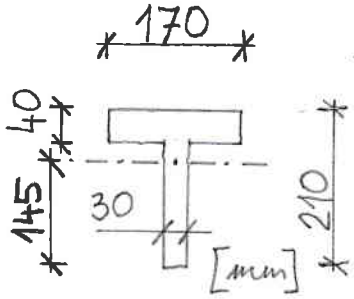


Napětí T_x jako u nosníku otevřeného

1

Vypočtěte maximální hodnotu normálového a smykového napětí na nosníku. Příklad musí obsahovat (budou kontrolovány) obrazce N, V, M včetně popisu všech důležitých extrémů, výpočet těžiště a centrálního momentu setrvačnosti. max 4 b





$z_t = 145\,mm$

$I_y = 45{,}32 \cdot 10^6\,mm^4$

$S_y = 315{,}37 \cdot 10^3\,mm^3$

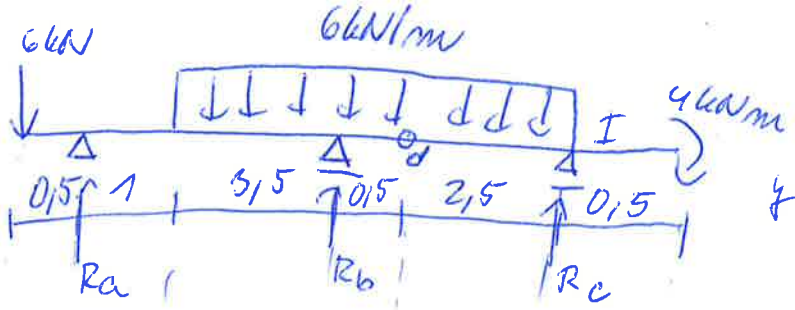
$\max|\sigma_x| = \max \sigma_x = 33{,}1\,MPa$

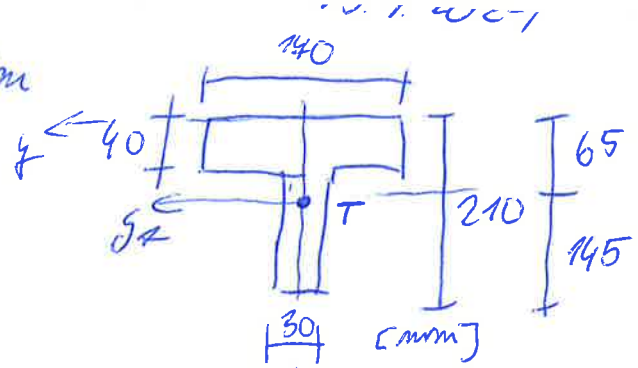
$\max \tau_{xz} = 3{,}013\,MPa$

$$\sigma_x = \frac{M_u}{I_y} \cdot z$$

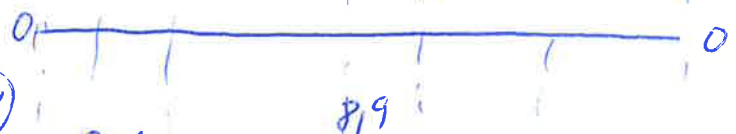
$$\tau_{xz} = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y \cdot b}$$

1)

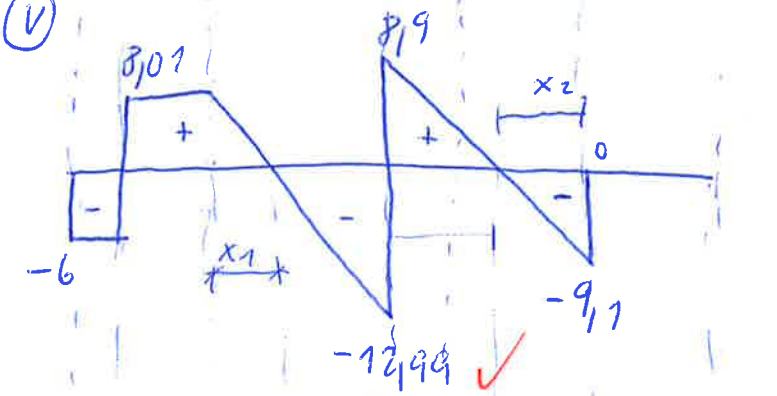




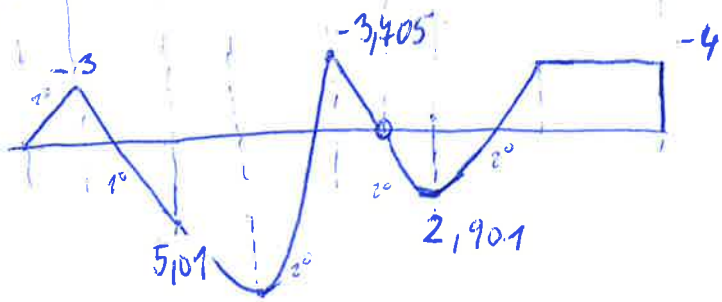
(N)



(V)



(H)



$I: \sum M_{iA} = 0$

$R_c \cdot 2,5 - 6 \cdot 2,5 \cdot 1,25 - 4 = 0$

$R_c = 9,1\,kN$

$\sum M_{iB} = 0$

$6 \cdot 0,5 - 6 \cdot 6,5 \cdot 3,25 + R_b \cdot 4,5 + R_c \cdot 7,5 - 4 = 0$

$R_b = 21,989\,kN$

$\sum F_{iy} = 0$

$R_a - 6 + 21,89 - 6 \cdot 6,5 + 9,1 = 0$

$R_a = 14,01\,kN$

$8,01 = 6 \cdot x_1$

$x_1 = 1,335\,m$

$9,1 = 6 \cdot x_2$

$x_2 = 1,517\,m$

$$y_A = \frac{140 \cdot 40 \cdot 20 + 30 \cdot 140 \cdot 125}{140 \cdot 40 + 30 \cdot 140} = 65\,mm$$

$$I_{yA} = \frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 140^3 + 30 \cdot 140 \cdot 60^2 + \frac{1}{12} \cdot 140 \cdot 40^3 + 40 \cdot 140 \cdot 45^2 =$$

$$= 45,31917 \cdot 10^6\,mm^6$$

$$\max \sigma_x = \frac{M_x}{I_{yA}} \cdot z = \frac{10,357 \cdot 10^3}{45,31917 \cdot 10^{-6}} \cdot 0,145 = 33,138\,MPa$$

$$S_y = 30 \cdot 0,03 \cdot 0,145 \cdot \frac{0,145}{2} = 3,15375 \cdot 10^{-4}\,m^3$$

$$\max \tau_{xy} = \frac{S_y \cdot V_z}{I_{yA} \cdot A} = \frac{3,15375 \cdot 10^{-4} \cdot 12,99 \cdot 10^3}{45,31917 \cdot 10^{-6} \cdot 0,03} = 3,013\,MPa$$