PRUŽNOST A PEVNOST

3. přednáška

Mimostředný tah a tlak. Jádro průřezu.
Šikmý ohyb.

Prof. Ing. Zdeněk Kala, Ph.D.

Ústav stavební mechaniky, Veveří 95

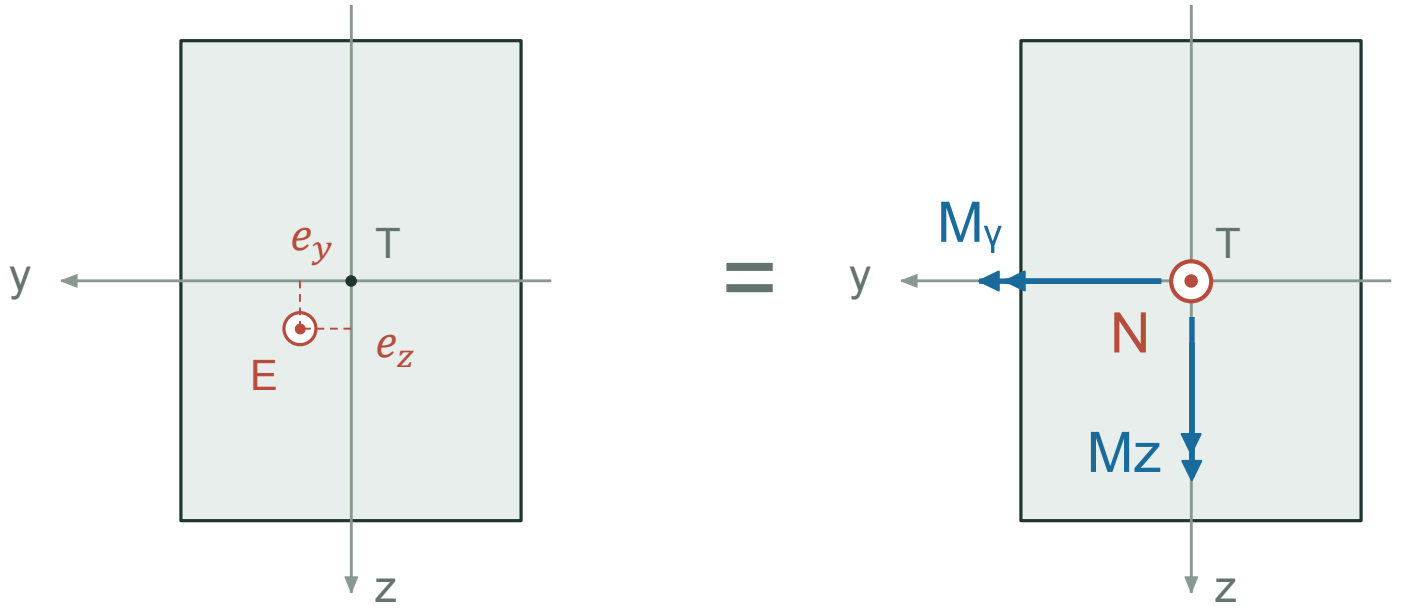
Přednášky jsou zde :

https://www.fce.vutbr.cz/STM/kala.z/

(tlačítko BDA002 Pružnost a pevnost)

Mimostředný tah a tlak

Síla působí rovnoběžně s osou prutu mimo těžiště průřezu.



$$M_y = N e_z$$

$$M_z = -N e_y$$

Tah: N > 0
Tlak: N < 0

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

Osy y, z jsou hlavní centrální. Všechny veličiny včetně znamének.

Výpočtový vztah pro mimostřednou sílu

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

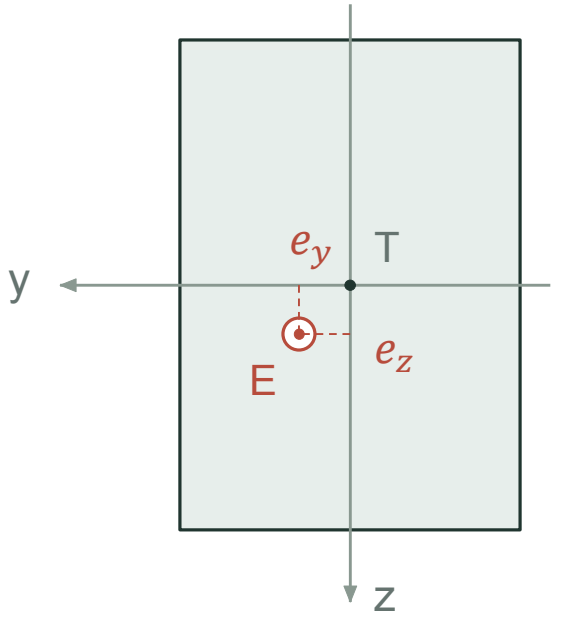
$$M_y = N e_z, \qquad M_z = -N e_y$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{N e_z}{I_y} z + \frac{N e_y}{I_z} y$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_z z}{I_y/A} + \frac{e_y y}{I_z/A}\right)$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A}, \qquad i_z^2 = \frac{I_z}{A}$$

$$\sigma_x(y,z) = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_z z}{i_y^2} + \frac{e_y y}{i_z^2}\right)$$



E: působiště síly
y, z: bod výpočtu napětí

Neutrální osa a její průsečíky

$$\sigma_x = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_y y}{i_z^2} + \frac{e_z z}{i_y^2}\right) = 0, \qquad N \neq 0$$

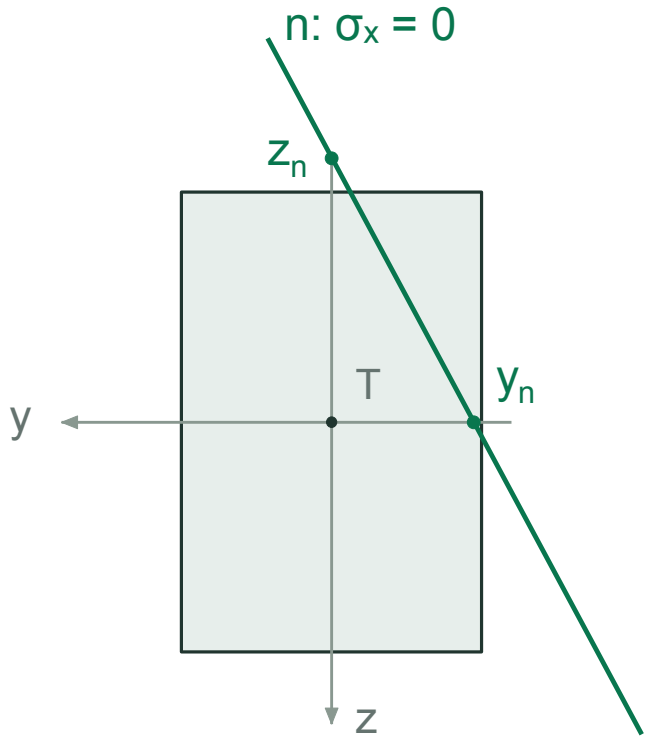
$$1 + \frac{e_y y}{i_z^2} + \frac{e_z z}{i_y^2} = 0$$

Průsečík s osou y

$$z = 0: \quad 1 + \frac{e_y y_n}{i_z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y_n = -\frac{i_z^2}{e_y}$$

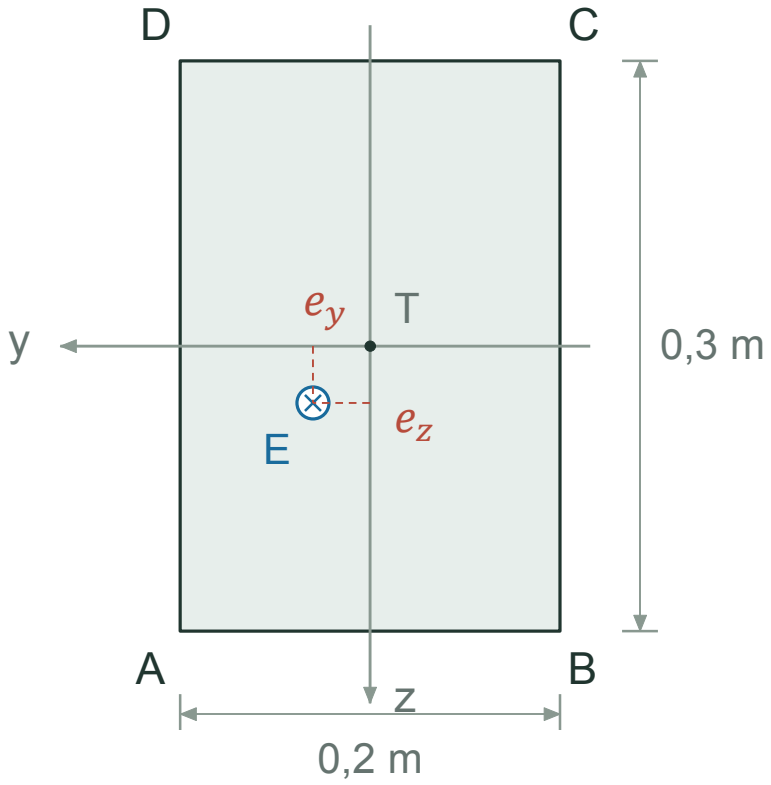
Průsečík s osou z

$$y = 0: \quad 1 + \frac{e_z z_n}{i_y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_n = -\frac{i_y^2}{e_z}$$



Při N ≠ 0 neutrální osa neprochází těžištěm.

Příklad mimostředného tlaku: napětí



Tlaková síla 100 kN v E

$$N=-100\,\text{kN}, \qquad e_y=e_z=0{,}03\,\text{m}$$

$$M_y=-100\cdot 0{,}03=-3\,\text{kNm}, \qquad M_z=100\cdot 0{,}03=3\,\text{kNm}$$

$$A=0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}06\,\text{m}^2$$

$$I_y=\frac{0{,}2\cdot 0{,}3^3}{12}=4{,}5\cdot 10^{-4}\,\text{m}^4 \qquad I_z=\frac{0{,}3\cdot 0{,}2^3}{12}=2{,}0\cdot 10^{-4}\,\text{m}^4$$

$$\sigma_x=\frac{-100\cdot 10^3}{0{,}06}+\frac{-3\cdot 10^3}{4{,}5\cdot 10^{-4}}z-\frac{3\cdot 10^3}{2\cdot 10^{-4}}y$$

$$\sigma_x=-1{,}666667\cdot 10^6-6{,}666667\cdot 10^6\cdot z-15\cdot 10^6\cdot y$$

Poslední vztah: σ_x v Pa, y a z v metrech.

Příklad: krajní napětí a neutrální osa

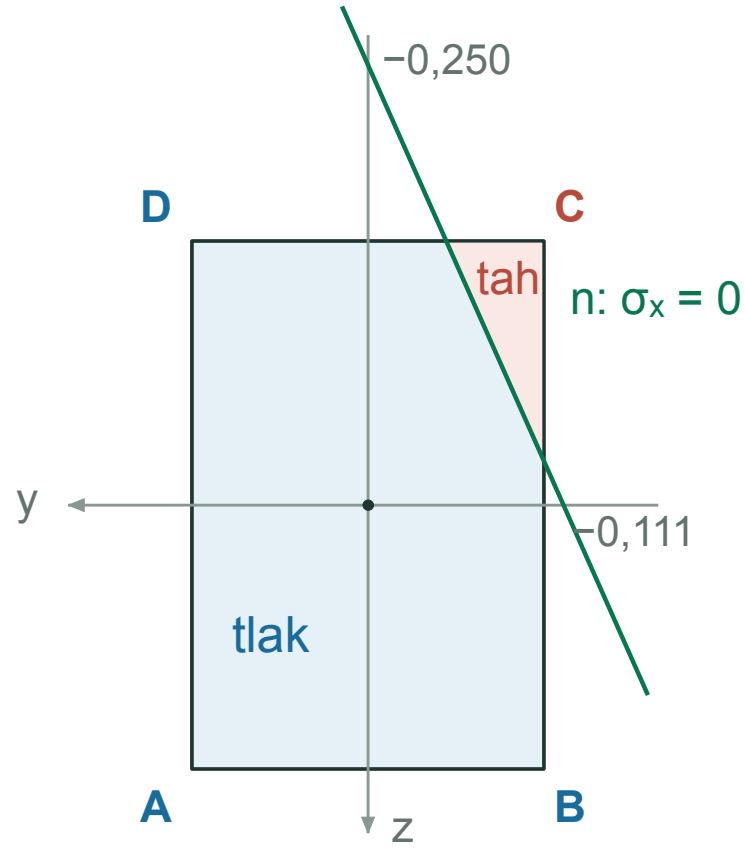
$$\sigma_x = -1{,}666667 - 6{,}666667z - 15y \quad [\text{MPa}]$$

$$\sigma_A = -1{,}666667 - 6{,}666667 \cdot 0{,}15 - 15 \cdot 0{,}1 = -4{,}167$$

Bod	y [m]	z [m]	σ_x [MPa]
A	+0,10	+0,15	−4,167
B	−0,10	+0,15	−1,167
C	−0,10	−0,15	+0,833
D	+0,10	−0,15	−2,167

$$y_n = -\frac{I_z}{Ae_y} = -\frac{2 \cdot 10^{-4}}{0{,}06 \cdot 0{,}03} = -0{,}111\ \text{m}$$

$$z_n = -\frac{I_y}{Ae_z} = -\frac{4{,}5 \cdot 10^{-4}}{0{,}06 \cdot 0{,}03} = -0{,}250\ \text{m}$$

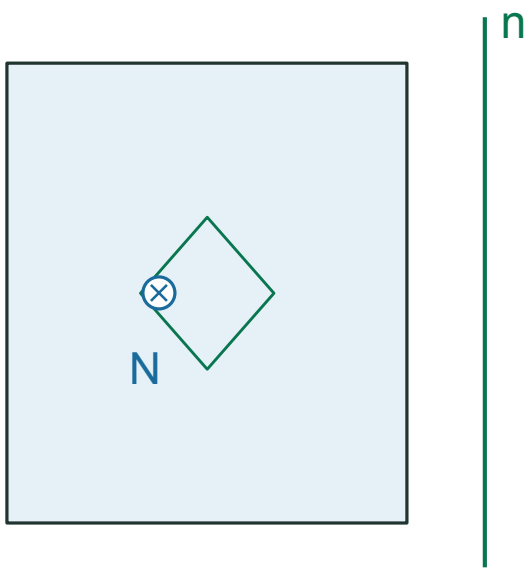


Tah vzniká pouze u rohu C.

Jádro průřezu

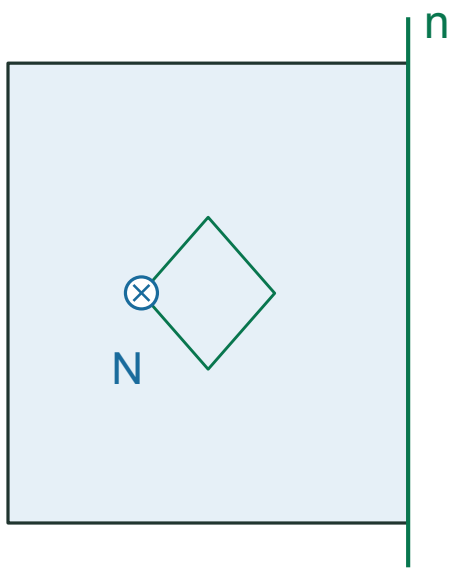
Oblast působišť síly, při nichž má normálové napětí v celém průřezu stejné znaménko.

Uvnitř jádra



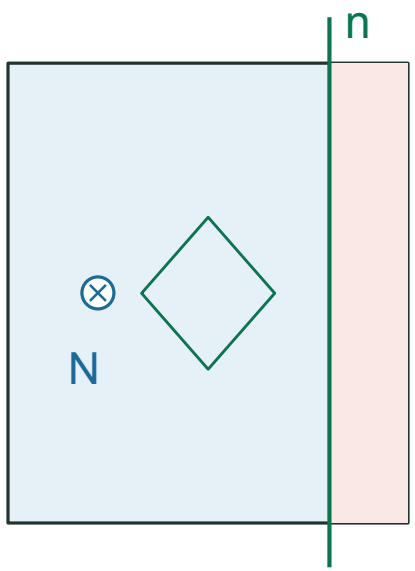
Celý průřez je tlačený.

Na hranici jádra



Na okraji je napětí nulové.

Vně jádra



V části průřezu vzniká tah.

Konstrukce jádrové čáry

Neutrální osa v mezní poloze se dotýká obrysu a neprotíná plochu průřezu.

1. Určíme průsečíky mezní polohy n_j s osami.

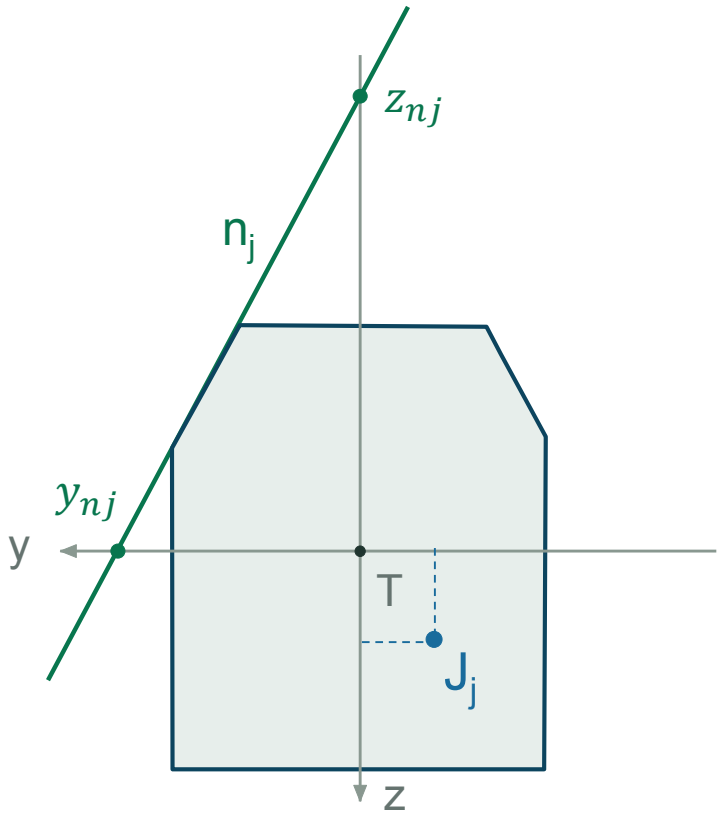
$$\frac{y}{y_{nj}}+\frac{z}{z_{nj}}=1$$

2. Ze vztahů pro průsečíky vyjádříme excentricity.

$$y_{nj}=-\frac{i_z^2}{e_{yj}} \quad \Rightarrow \quad e_{yj}=-\frac{i_z^2}{y_{nj}}$$

$$z_{nj}=-\frac{i_y^2}{e_{zj}} \quad \Rightarrow \quad e_{zj}=-\frac{i_y^2}{z_{nj}}$$

3. Excentricity určují bod J_j jádrové čáry.



Nekonečný průsečík znamená nulovou excentricitu.

Jádro obdélníkového průřezu

$$A=bh, \qquad I_y=\frac{bh^3}{12}, \qquad I_z=\frac{hb^3}{12}$$

$$i_y^2=\frac{I_y}{A}=\frac{h^2}{12}, \qquad i_z^2=\frac{I_z}{A}=\frac{b^2}{12}$$

Horní okraj: $z_{n1} = -h/2$, $y_{n1} = \infty$

$$e_{y1}=-\frac{b^2/12}{\infty}=0, \qquad e_{z1}=-\frac{h^2/12}{-h/2}=\frac{h}{6}$$

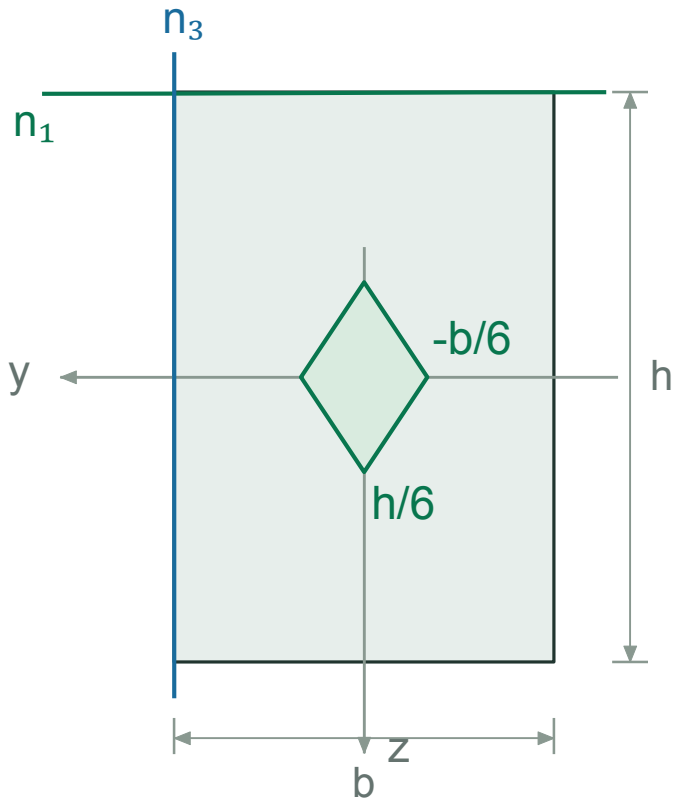
Levý okraj: $y_{n3} = +b/2$, $z_{n3} = \infty$

$$e_y=-\frac{b^2/12}{b/2}=-\frac{b}{6}, \qquad e_z=-\frac{h^2/12}{\infty}=0$$

$$\frac{6|e_y|}{b}+\frac{6|e_z|}{h}\le 1$$

$$e_{yj}=-\frac{i_z^2}{y_{nj}}$$

$$e_{zj}=-\frac{i_y^2}{z_{nj}}$$



Zbývající vrcholy doplníme souměrností.

Jádro kruhového průřezu

$$A=\frac{\pi d^2}{4}, \qquad I_y=I_z=\frac{\pi d^4}{64}$$

$$i_y^2=i_z^2=\frac{I}{A}=\frac{d^2}{16}$$

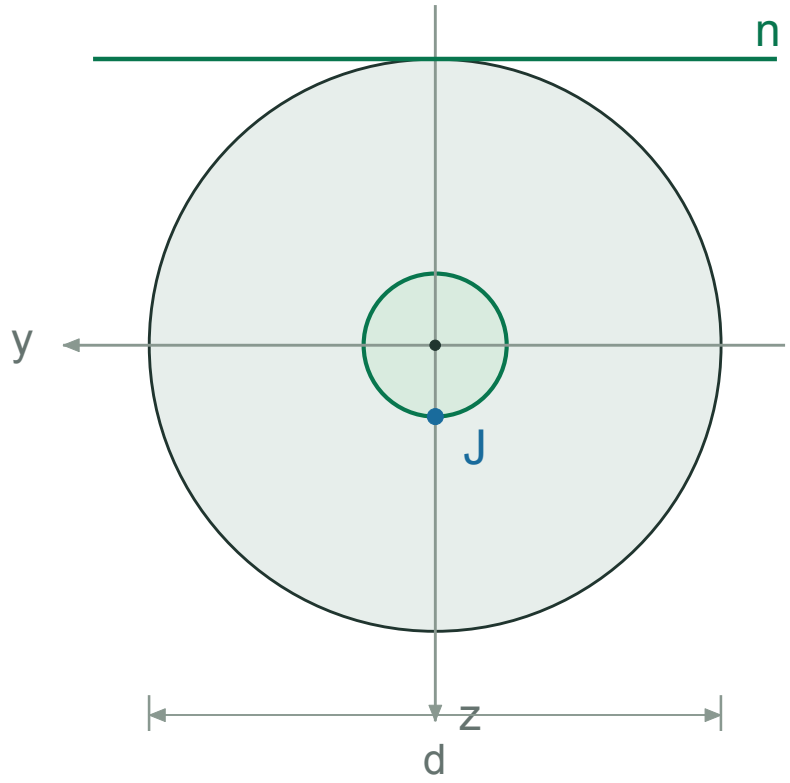
Opěrná přímka na horním okraji

$$z_n=-\frac{d}{2}, \qquad y_n=\infty$$

$$e_y=0, \qquad e_z=-\frac{d^2/16}{-d/2}=\frac{d}{8}$$

$$e_{yj}=-\frac{i_z^2}{y_{nj}}$$

$$e_{zj}=-\frac{i_y^2}{z_{nj}}$$



Rotační souměrnost: jádro je kruh o poloměru d/8.

T průřez: geometrie a těžiště

Dvě obdélníkové části bez překryvu

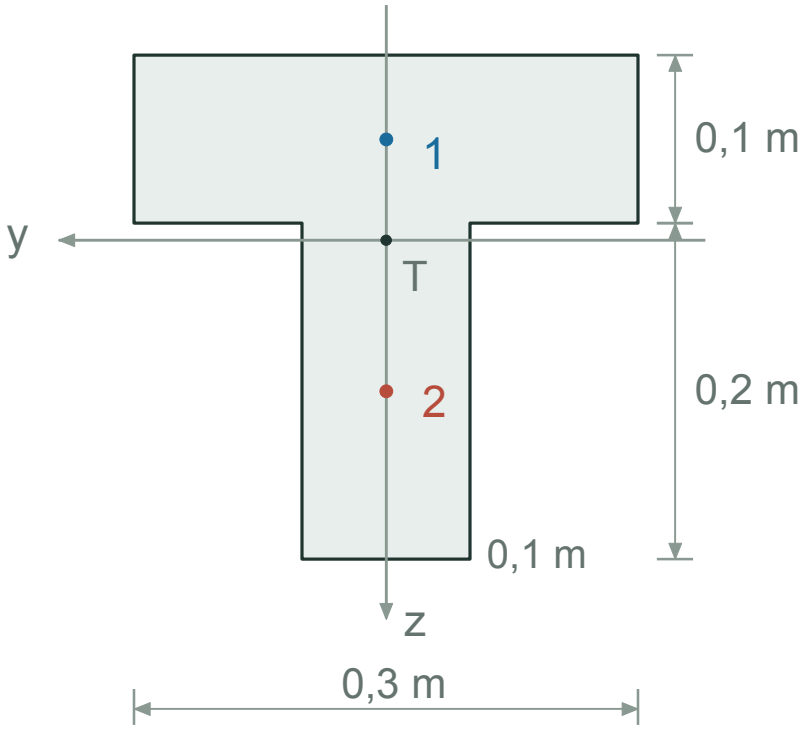
$$A_1 = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03\ \mathrm{m}^2$$

$$A_2 = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02\ \mathrm{m}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 0{,}05\ \mathrm{m}^2$$

$$h_T = \frac{A_1 \cdot 0{,}25 + A_2 \cdot 0{,}10}{A} = \frac{0{,}0095}{0{,}05} = 0{,}190\ \mathrm{m}$$

$$z_{\text{horní}} = -0{,}110\ \mathrm{m}, \qquad z_{\text{dolní}} = +0{,}190\ \mathrm{m}$$



Osa z je osou souměrnosti. Osy y, z jsou hlavní centrální.

T průřez: momenty a poloměry setrvačnosti

$A = 0{,}05\ \mathrm{m}^2, \qquad h_T = 0{,}190\ \mathrm{m}$

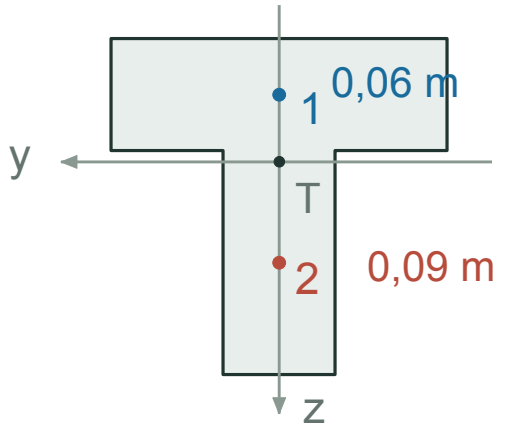
$$I_y = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}1^3}{12} + 0{,}03 \cdot (0{,}25 - 0{,}19)^2 + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2^3}{12} + 0{,}02 \cdot (0{,}19 - 0{,}1)^2 = 3{,}61667 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^4$$

0,06 m 0,09 m

$$I_z = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}3^3}{12} + \frac{0{,}2 \cdot 0{,}1^3}{12} = 2{,}41667 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^4$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = 7{,}23333 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2 = 7233{,}333\ \mathrm{mm}^2$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = 4{,}83333 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2 = 4833{,}333\ \mathrm{mm}^2$$



T průřez: spodní a šikmá mezní poloha

$i_y^2 = 7233{,}333\ \text{mm}^2, \qquad i_z^2 = 4833{,}333\ \text{mm}^2$

Spodní opěrná přímka n_1

$y_{n1} = \infty, \quad z_{n1} = 190\ \text{mm}$

$e_{y1} = 0, \quad e_{z1} = -\dfrac{7233{,}333}{190} = -38{,}070\ \text{mm}$

Šikmá opěrná přímka n_2

$z + 10 = \dfrac{190+10}{-50+150}(y+150) \quad \Rightarrow \quad z = 2y + 290$

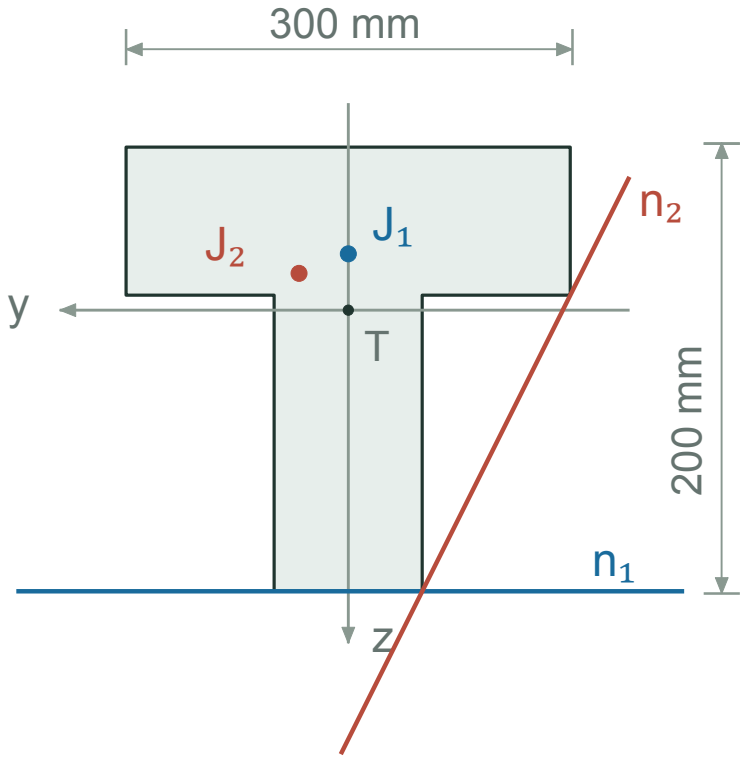
$y_{n2} = -145\ \text{mm}, \qquad z_{n2} = 290\ \text{mm}$

$e_{y2} = -\dfrac{4833{,}333}{-145} = +33{,}333\ \text{mm}$

$e_{z2} = -\dfrac{7233{,}333}{290} = -24{,}943\ \text{mm}$

$$e_{yj} = -\frac{i_z^2}{y_{nj}}$$

$$e_{zj} = -\frac{i_y^2}{z_{nj}}$$



Body pro n_2 [mm]

$(-150,-10), \quad (-50,190)$

T průřez: zbývající polohy a jádro

$i_y^2 = 7233{,}333\ \text{mm}^2, \qquad i_z^2 = 4833{,}333\ \text{mm}^2$

$J_1 : (0; -38{,}070), \qquad J_2 : (+33{,}333; -24{,}943) \quad [\text{mm}]$

Pravá svislá opěrná přímka n_3

$y_{n3} = -150\ \text{mm}, \qquad z_{n3} = \infty$

$e_{y3} = -\dfrac{4833{,}333}{-150} = +32{,}222\ \text{mm}, \qquad e_{z3} = 0$

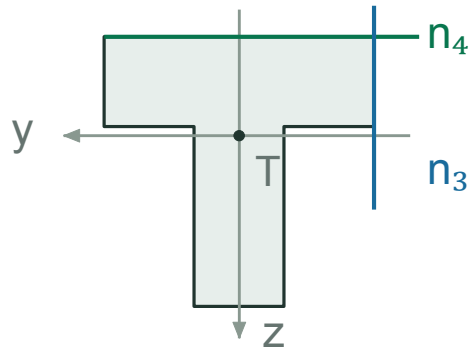
Horní opěrná přímka n_4

$z_{n4} = -110\ \text{mm}, \qquad y_{n4} = \infty$

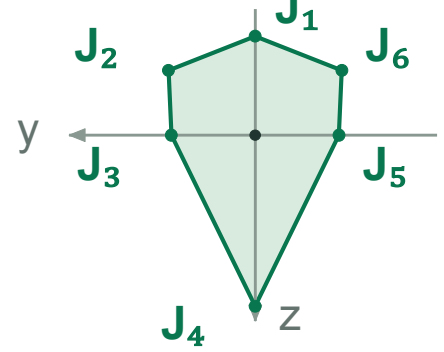
$e_{y4} = 0, \qquad e_{z4} = -\dfrac{7233{,}333}{-110} = +65{,}758\ \text{mm}$

$$e_{yj} = -\frac{i_z^2}{y_{nj}}$$

$$e_{zj} = -\frac{i_y^2}{z_{nj}}$$



Zvětšená jádrová čára



J_5 a J_6 doplníme souměrností.

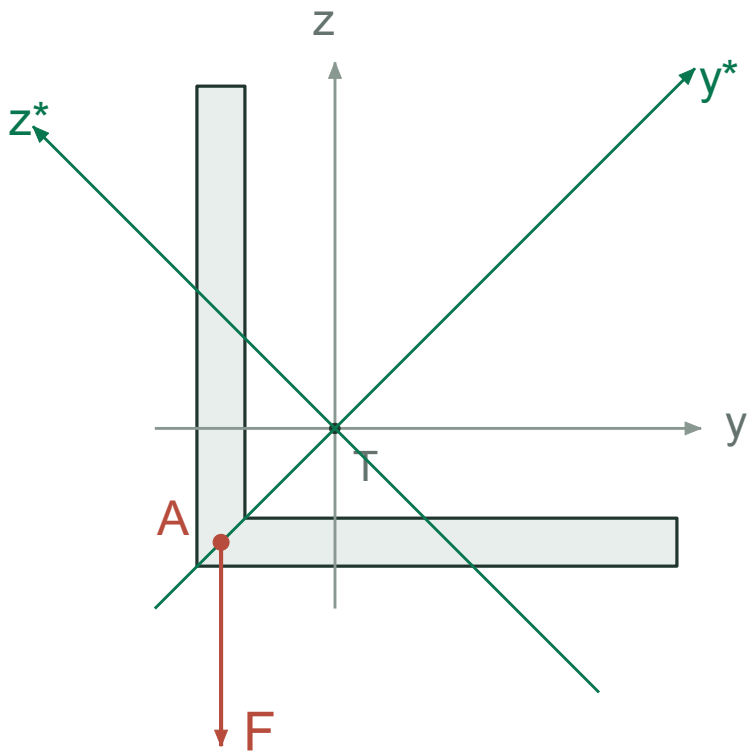
Šikmý ohyb

Zatížení leží v jedné rovině, která není hlavní rovinou prutu.

Ohybová čára obecně neleží v rovině zatížení. Při vyloučení kroucení leží v rovině kolmé k neutrální ose.

$$D_{yz} = \int_A yz \, \mathrm{d}A \neq 0$$

V hlavních centrálních osách je deviační moment nulový.



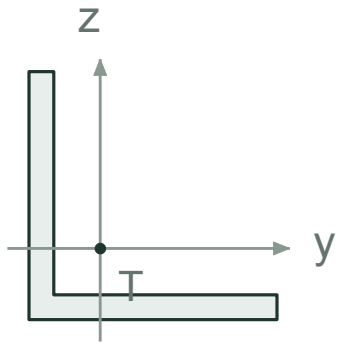
A: střed smyku

Ohyb v obecných těžištních osách

N=0. Osy y, z procházejí těžištěm, nemusí být hlavní.

$$D_{\mathrm{yz}} = \int_A \mathrm{yz}\,\mathrm{dA}$$

$$\sigma_x = -\frac{M_z I_y + M_y D_{\mathrm{yz}}}{I_y I_z - {D_{\mathrm{yz}}}^2} y + \frac{M_y I_z + M_z D_{\mathrm{yz}}}{I_y I_z - {D_{\mathrm{yz}}}^2} \mathrm{z}$$

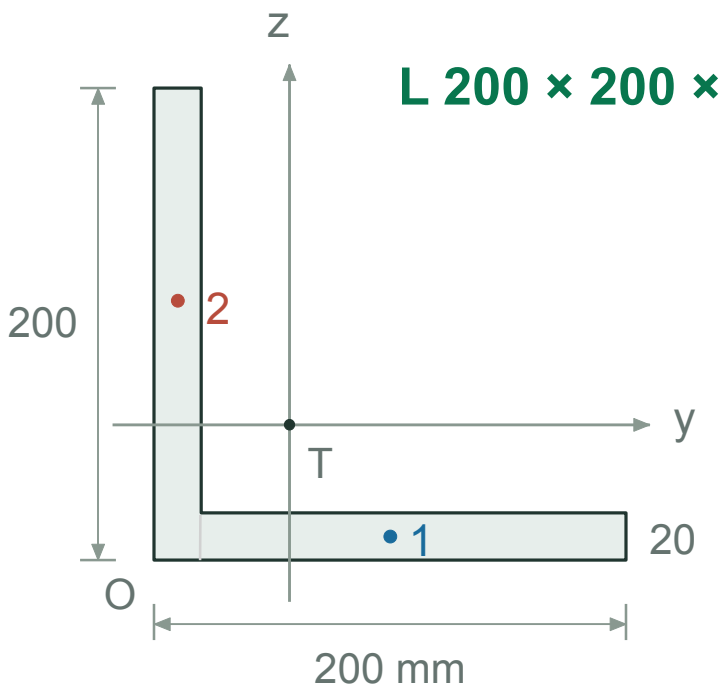


V hlavních centrálních osách

$$D_{\mathrm{yz}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_x = \frac{M_y}{I_y}\mathrm{z} - \frac{M_z}{I_z} y$$

Konzola z úhelníku: zatížení a těžiště





$$M_y = 10 \cdot 2 = 20 \text{ kN m}$$

$$M_z = 0, \qquad N = 0$$

$$A = 200 \cdot 20 + 180 \cdot 20 = 7600 \text{ mm}^2$$

$$y_T = \frac{4000 \cdot 100 + 3600 \cdot 10}{7600} = 57{,}368 \text{ mm}$$

$$z_T = \frac{4000 \cdot 10 + 3600 \cdot 110}{7600} = 57{,}368 \text{ mm}$$

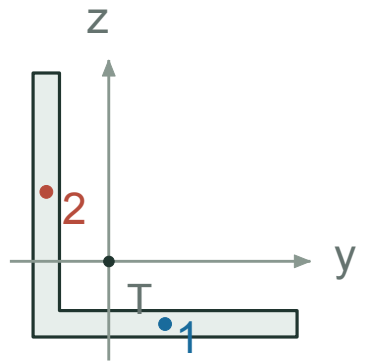
Síla prochází středem smyku.
Kroucení v příkladu neuvažujeme.

Úhelník: průřezové charakteristiky

$A = 7600\,\mathrm{mm}^2, \qquad y_T = z_T = 57{,}368\,\mathrm{mm}$

$$I_y = \frac{200 \cdot 20^3}{12} + 4000(57{,}368 - 10)^2 + \frac{20 \cdot 180^3}{12} + 3600(110 - 57{,}368)^2$$

$$I_y = I_z = 28{,}8007 \cdot 10^6\,\mathrm{mm}^4$$



$$D_{yz} = 4000(100 - 57{,}368)(10 - 57{,}368) + 3600(10 - 57{,}368)(110 - 57{,}368)$$

$$D_{yz} = -17{,}0526 \cdot 10^6\,\mathrm{mm}^4$$

Délky ve výpočtech jsou v mm.

Úhelník: rovnice normálového napětí

$I_y = I_z = 28{,}8007 \cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4, \qquad D_{yz} = -17{,}0526 \cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4$

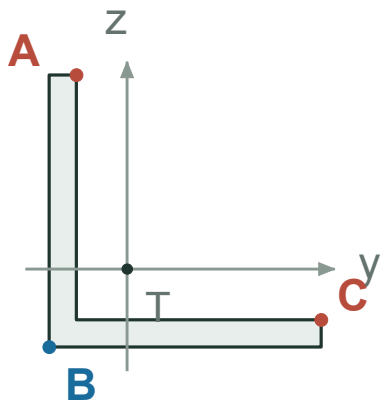
$M_y = 20 \cdot 10^6\ \mathrm{N\,mm}, \qquad M_z = 0$

$\Delta = I_y I_z - D_{yz}^2 = 5{,}38688 \cdot 10^{14}\ \mathrm{mm}^8$

$$\sigma_x = -\frac{M_y D_{yz}}{\Delta} y + \frac{M_y I_z}{\Delta} z$$

$$\sigma_x = -\frac{20 \cdot 10^6 (-17{,}0526 \cdot 10^6)}{5{,}38688 \cdot 10^{14}} y + \frac{20 \cdot 10^6 \cdot 28{,}8007 \cdot 10^6}{5{,}38688 \cdot 10^{14}} z$$

$$\sigma_x(y,z) = 0{,}633117 y + 1{,}069290 z$$



σ_x v MPa, těžištní souřadnice y a z v milimetrech.

Úhelník: krajní napětí a neutrální osa

$$\sigma_x = 0{,}633117\,y + 1{,}069290\,z \quad [\text{MPa}]$$

$$\sigma_A = 0{,}633117(-37{,}368) + 1{,}069290 \cdot 142{,}632 = 128{,}856\ \text{MPa}$$

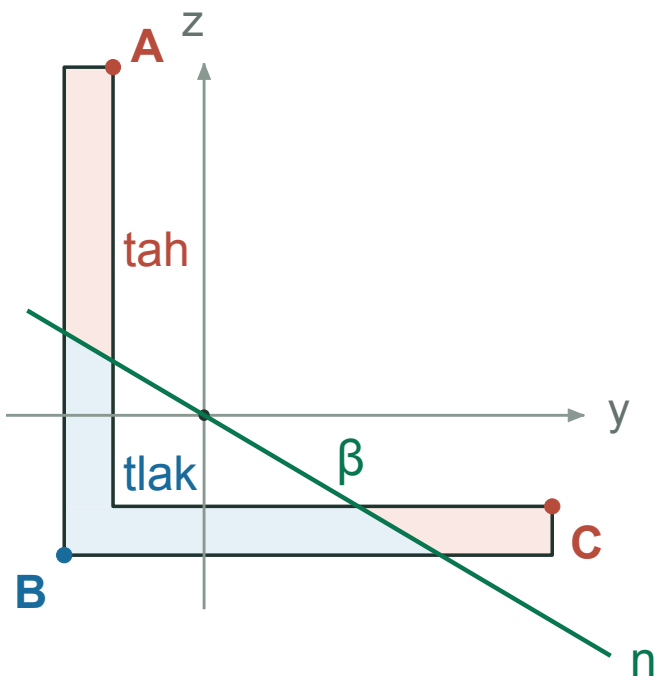
Bod	y [mm]	z [mm]	σ_x [MPa]
A	−37,368	+142,632	+128,856
B	−57,368	−57,368	−97,664
C	+142,632	−37,368	+50,345

$$|\sigma_x|_{\max} = 128{,}856 < 235\ \text{MPa}$$

Napětí vyhovuje.

$$\sigma_x = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{0{,}633117}{1{,}069290}\,y = -0{,}592093\,y$$

$$\beta = \arctan(-0{,}592093) = -30{,}63^\circ$$



Rozšířený vztah pro normálové napětí

Tenkostěnný prut otevřeného průřezu

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{B}{I_\omega}\omega + \frac{M_y I_z + M_z D_{yz}}{I_y I_z - D_{yz}^2} z - \frac{M_z I_y + M_y D_{yz}}{I_y I_z - D_{yz}^2} y$$

$\frac{B}{I_\omega}\omega$ Příspěvek vázaného kroucení k normálovému napětí

Nyní pouze informace o úplném vztahu.
Odvození a použití probereme při kroucení.

Rozšířený vztah v hlavních osách

Hlavní centrální osy $D_{yz}=0$

$$\sigma_x=\frac{N_x}{A}+\frac{B}{I_\omega}\omega+\frac{M_y}{I_y}z-\frac{M_z}{I_z}y$$

B	ohybově krouticí bimoment
I_ω	výsečový moment setrvačnosti
ω	výsečová souřadnice

Určení těchto veličin a jejich účinku probereme při kroucení.

Link na původní verzi této přednášky.