PRUŽNOST A PEVNOST

2. přednáška

Prostý ohyb, odvození výpočtového vztahu normálového napětí. Dimenzování.

Prof. Ing. Zdeněk Kala, Ph.D.

Ústav stavební mechaniky, Veveří 95

Rovinný a prostý ohyb

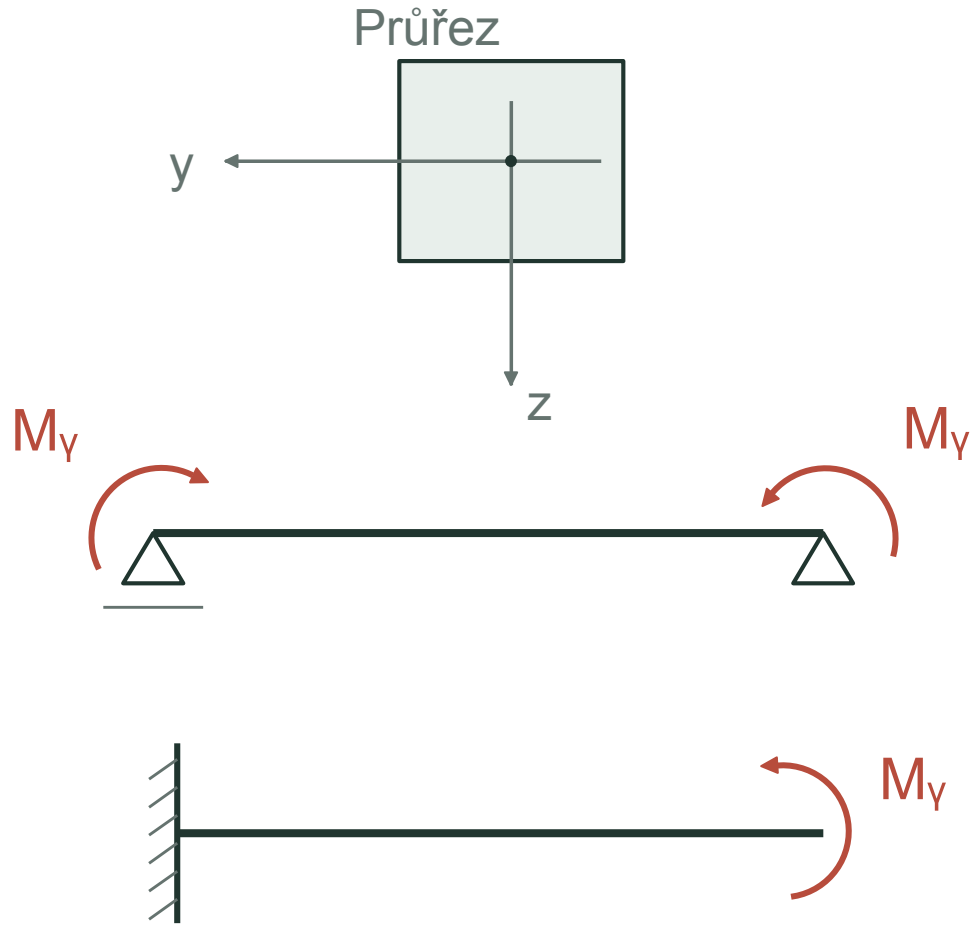
Rovinný ohyb

Vnější síly včetně reakcí leží v jedné z hlavních rovin prutu.

Prostý ohyb

Působí pouze ohybový moment.
Posouvající síla je nulová.

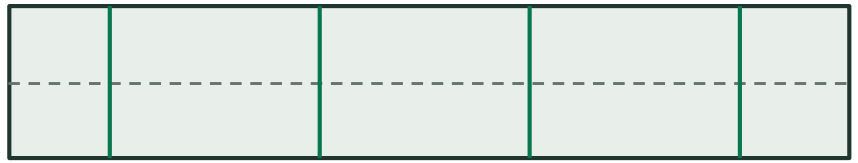
$$M_y \neq 0 \quad V_z = 0$$



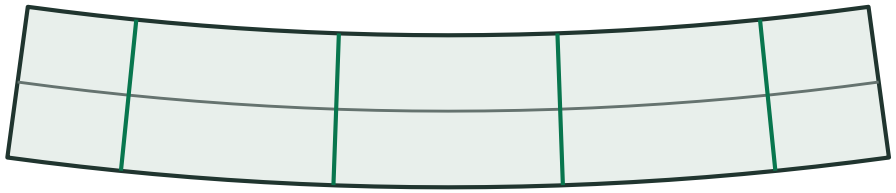
Základní předpoklady

Bernoulliova hypotéza

Příčné průřezy zůstávají rovinné a kolmé k deformované ose prutu.



Před deformací



Po deformaci

Podélná vlákna na sebe vzájemně netlačí.

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

Lineárně pružný homogenní materiál, malé deformace.

Odvození vztahu pro normálové napětí

Geometrické podmínky

Prodloužení vlákna

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{z}{\rho}$$

$$I_y = \int_A z^2 \,\mathrm{dA}$$

Moment setrvačnosti k těžištní ose y

Fyzikální podmínky

Hookův zákon

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x = \frac{E}{\rho} z$$

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M_y}{I_y}$$

Statické podmínky

Rovnováha momentů

$$M_y = \int_A z\sigma_x \,\mathrm{dA}$$

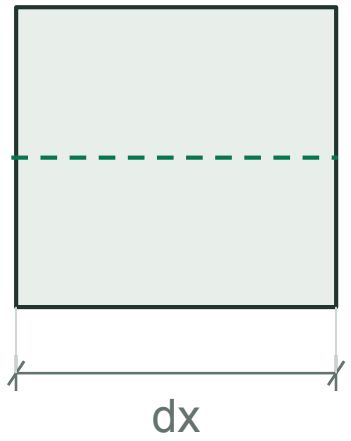
$$M_y = \frac{E}{\rho} \int_A z^2 \,\mathrm{dA}$$

$$\sigma_x(\mathrm{z}) = \frac{M_y}{I_y} z$$

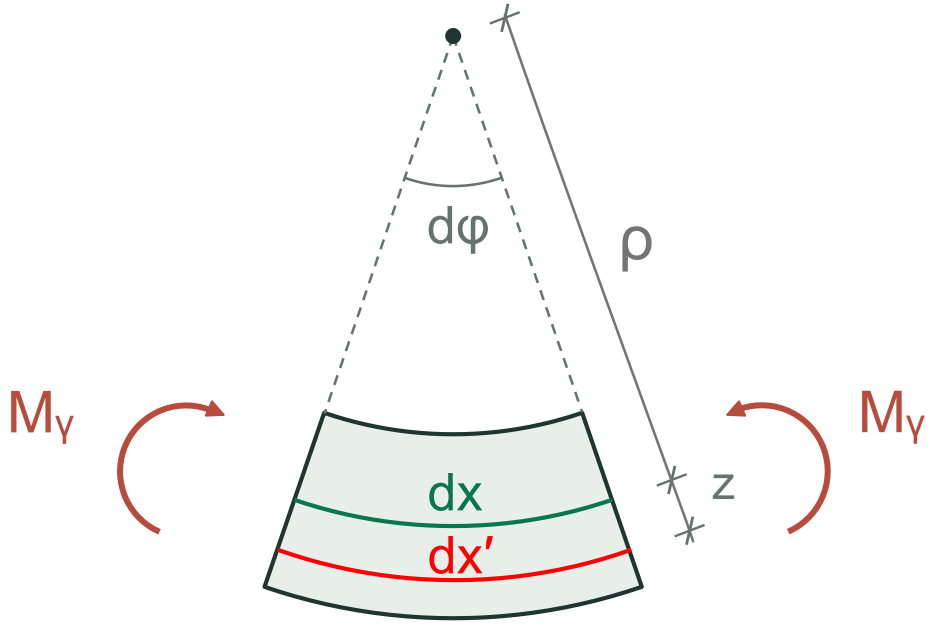
https://www.youtube.com/watch?v=BDb88k14BXA

Geometrické podmínky

Před deformací



Po deformaci



$$\mathrm{d}x = \rho\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}x' = (\rho + z)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\Delta\mathrm{d}x = z\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{z}{\rho}$$

Poměrné přetvoření se mění lineárně se vzdáleností z.

Fyzikální podmínky

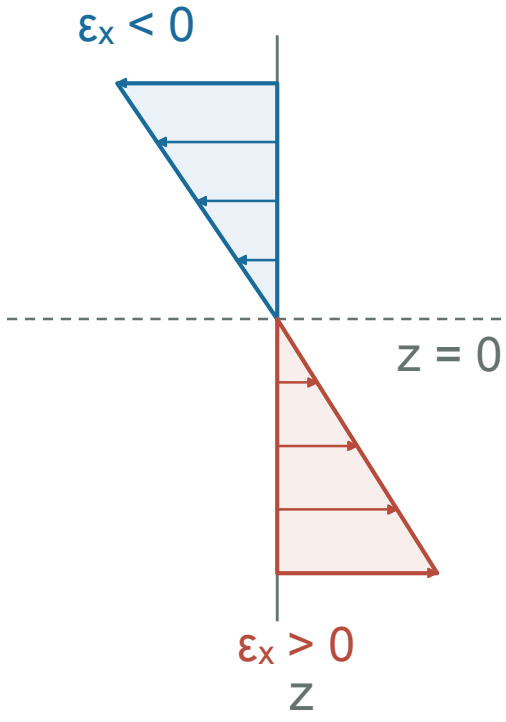
Hookův zákon

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x$$

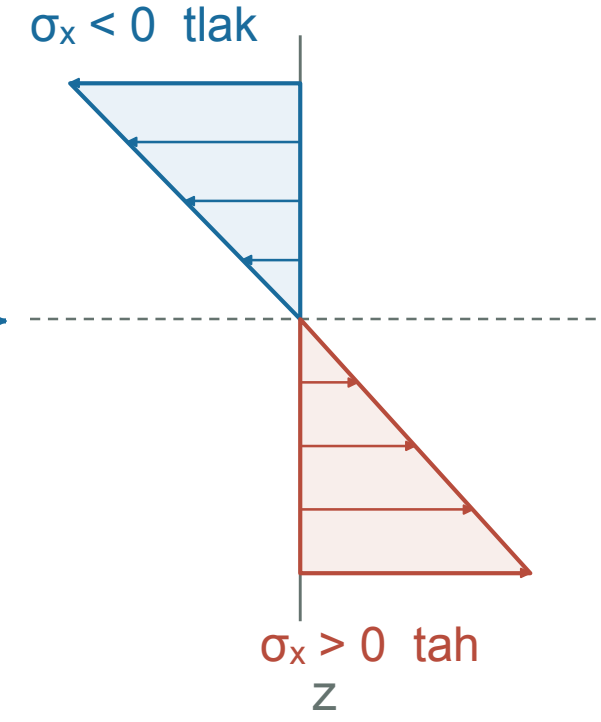
$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{\rho} z$$

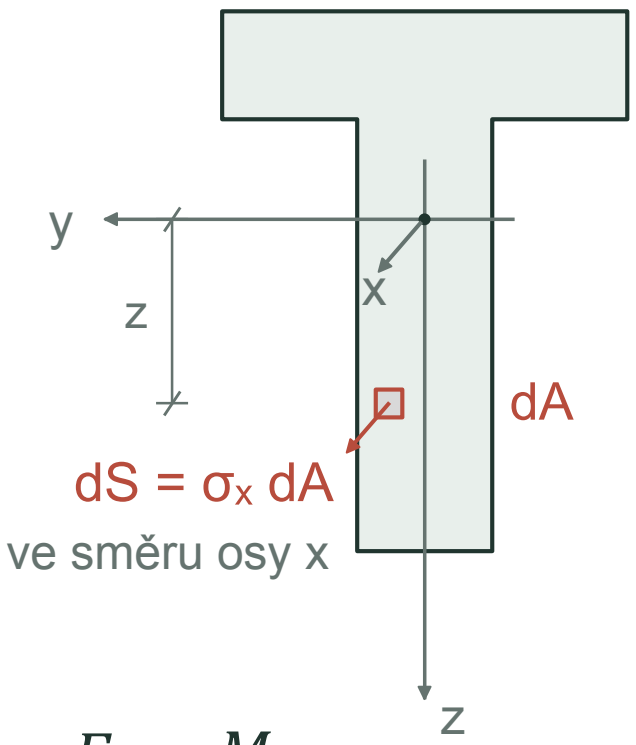
Poměrné přetvoření



Normálové napětí



Statické podmínky



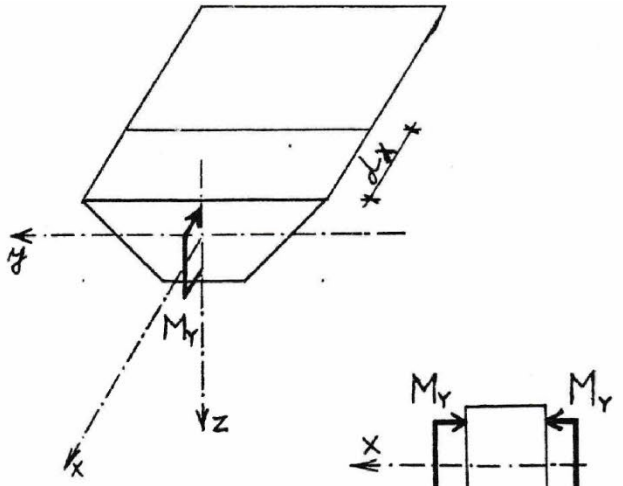
$$M_y = \int_A z \, \mathrm{dS} = \int_A z \, \sigma_x \, \mathrm{dA}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{\rho} z$$

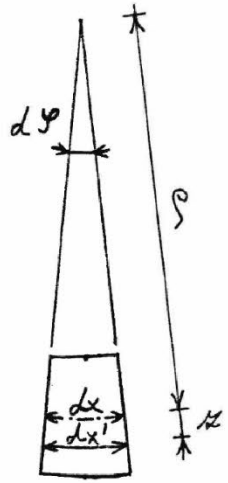
$$M_y = \frac{E}{\rho} \int_A z^2 \, \mathrm{dA} = \frac{E}{\rho} I_y$$

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M_y}{I_y} \longrightarrow \sigma_x(\mathrm{z}) = \frac{M_y}{I_y} z \qquad kde \quad I_y = \int_A z^2 \, \mathrm{dA}$$

Průběh normálového napětí



PŘED DEFORMACÍ



PO DEFORMACI

$$dx' = (\rho + z)\cdot d\varphi$$

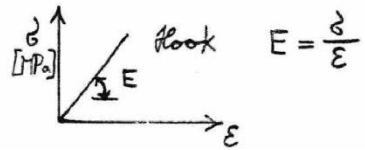
$$\Delta dx = dx' - dx = (\rho + z)\cdot d\varphi - \rho\cdot d\varphi = z\cdot d\varphi$$

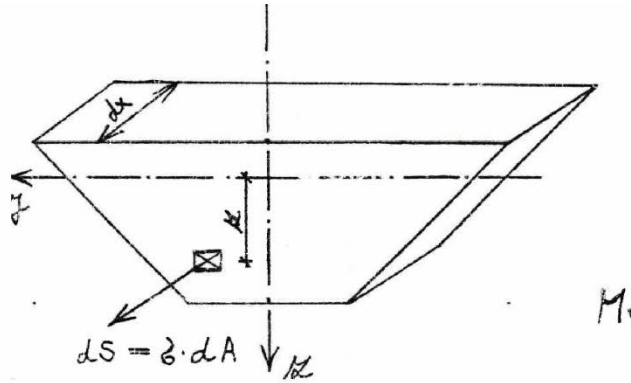
- geometrické podmínky

(1) $$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{z\, d\varphi}{\rho\, d\varphi} = \frac{z}{\rho}$$

- fyzikální podmínky

(2) $$\sigma = E\cdot\varepsilon = \frac{E\cdot z}{\rho}$$





- statické podmínky

$$\Sigma M_Y = 0$$

$$\int_A z\cdot dS - M_Y = 0$$

$$M_Y = \int_A z\cdot\sigma\cdot dA = \int_A \frac{E}{\rho}\cdot z^2\, dA$$

(3) $$M_Y = \frac{E}{\rho}\cdot\int_A z^2\, dA = \frac{E}{\rho}\cdot I_Y$$

$$M_Y = \frac{1}{\rho}\cdot E I_Y = \frac{\varepsilon}{z}\cdot E I_Y = \frac{\sigma}{z}\cdot I_Y$$

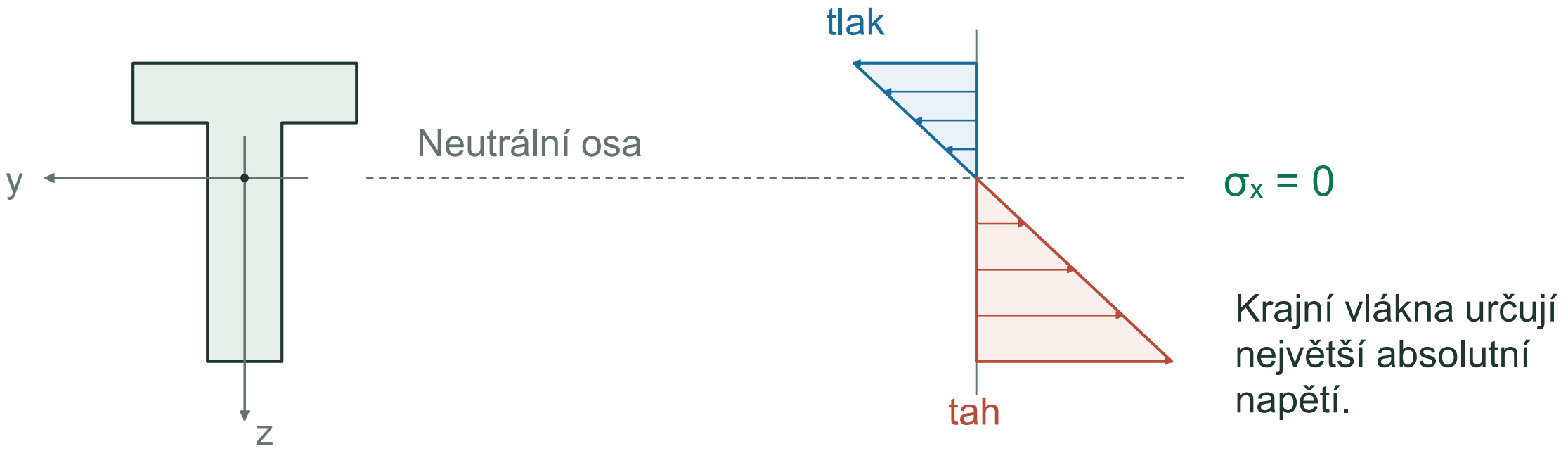
(4) $$\boxed{\sigma = \frac{M_Y}{I_Y}\cdot z}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_Y}{I_Y}\cdot z_{max} = \frac{M_Y}{W_{min}}$$

Průběh normálového napětí

$$\sigma_x(z) = \frac{M_y}{I_y} z$$

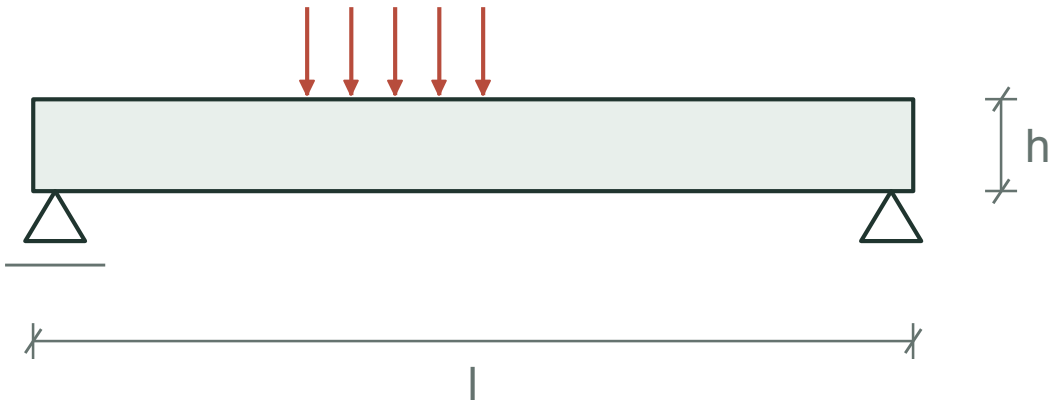
Napětí probíhá lineárně po výšce průřezu.



Krajní vlákna určují největší absolutní napětí.

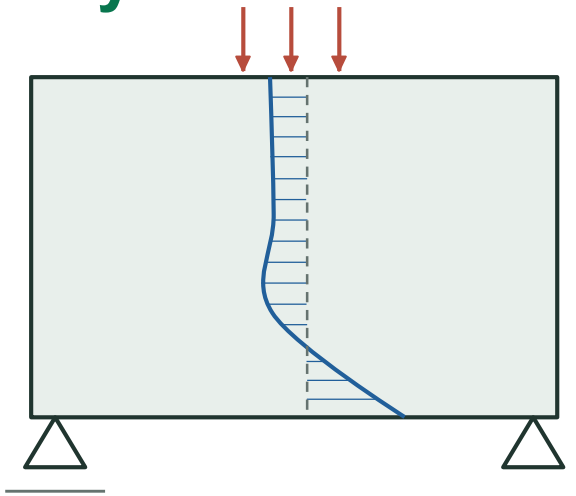
Platnost nosníkového řešení

Štíhlý nosník



Ilustrační poměr l : h ≈ 10 : 1

Stěnový nosník



Nelineární průběh σ_x

Při příčném zatížení platí odvozený vztah přibližně.
Smyková napětí způsobují deplanaci (ztrátu rovinnosti) průřezu.

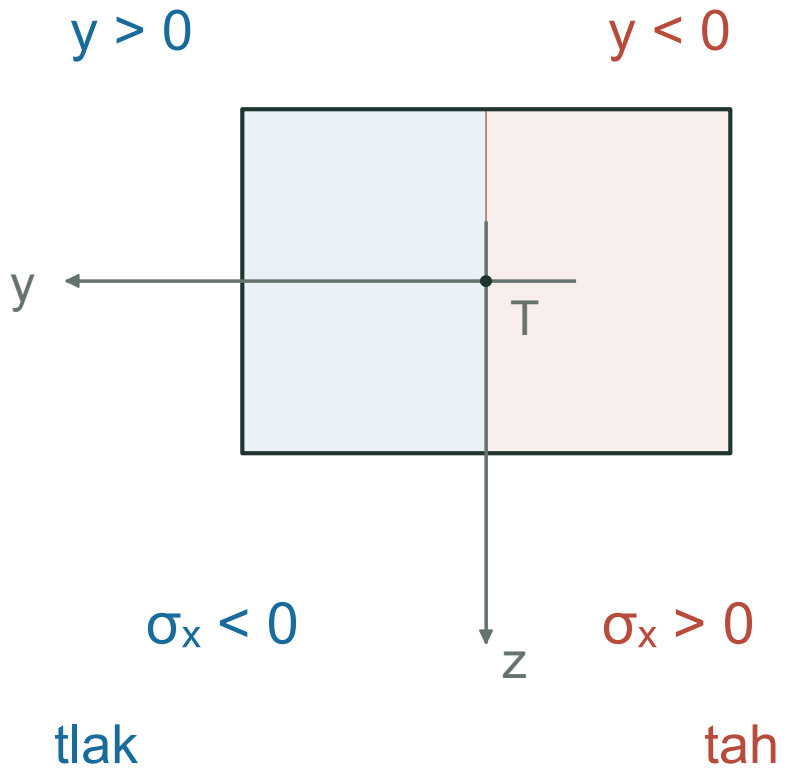
Ohyb v rovině xy

$$\sigma_x(y) = -\frac{M_z}{I_z} y$$

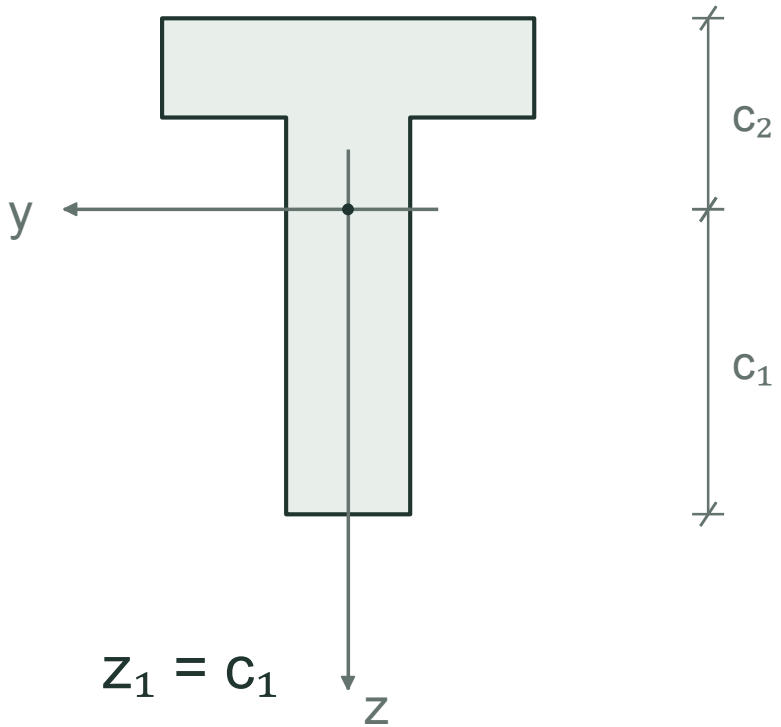
Kladný moment Mz vyvolá:

- tah pro y < 0
- tlak pro y > 0

$$I_z = \int_A y^2 \, dA$$



Krajní vlákna a průřezové moduly



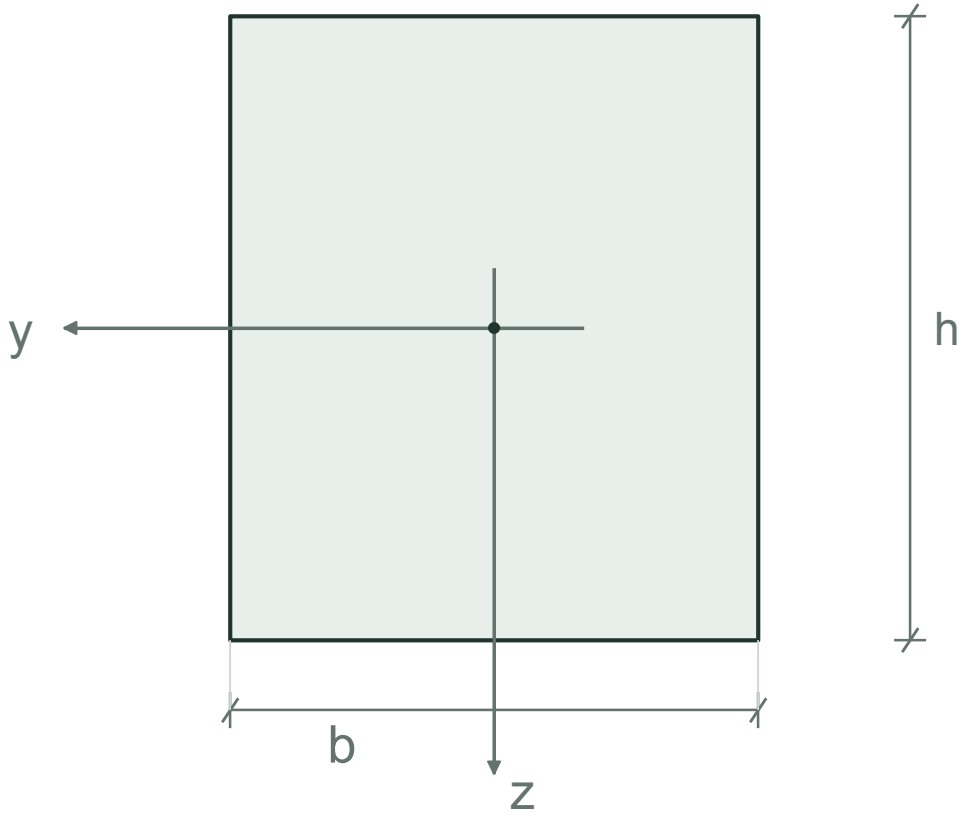
$$W_{y1} = \frac{I_y}{c_1} \qquad W_{y2} = \frac{I_y}{c_2}$$

$$\sigma_{x1} = \frac{M_y}{W_{y1}}$$

$$\sigma_{x2} = -\frac{M_y}{W_{y2}}$$

Průřezový modul W má jednotku m³ nebo mm³.

Obdélníkový průřez



Ohyb kolem osy y

$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

$$W_y = \frac{I_y}{\mathrm{h}/2} = \frac{bh^2}{6}$$

Ohyb kolem osy z

$$W_z = \frac{hb^2}{6}$$

Návrh a posouzení v pružném oboru

Posouzení průřezu

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_y|}{W_{\mathrm{y,min}}} \leq R_d$$

$$W_{\mathrm{y,min}} = \min(W_{\mathrm{y1}}, W_{\mathrm{y2}})$$

Návrh průřezu

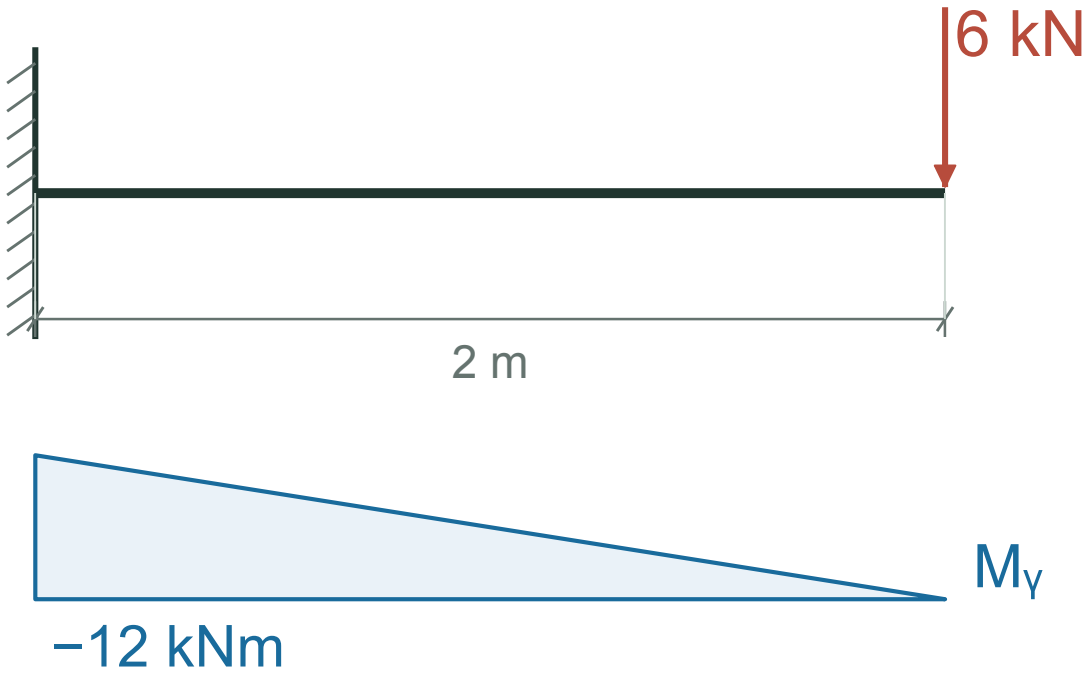
$$W_{\mathrm{y,min}} \geq \frac{|M_y|}{R_d}$$

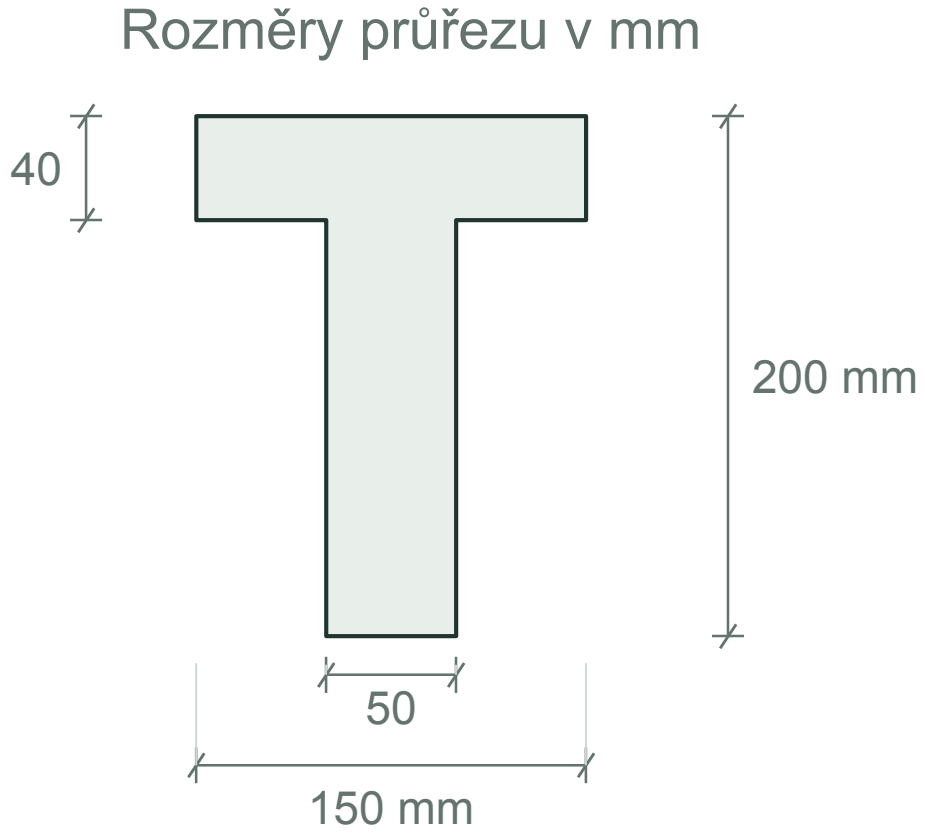
Rozhoduje menší průřezový modul.

Rd je návrhová pevnost materiálu.
Při rozdílné pevnosti v tahu a tlaku posuzujeme oba okraje zvlášť.

Příklad: konzola s T průřezem

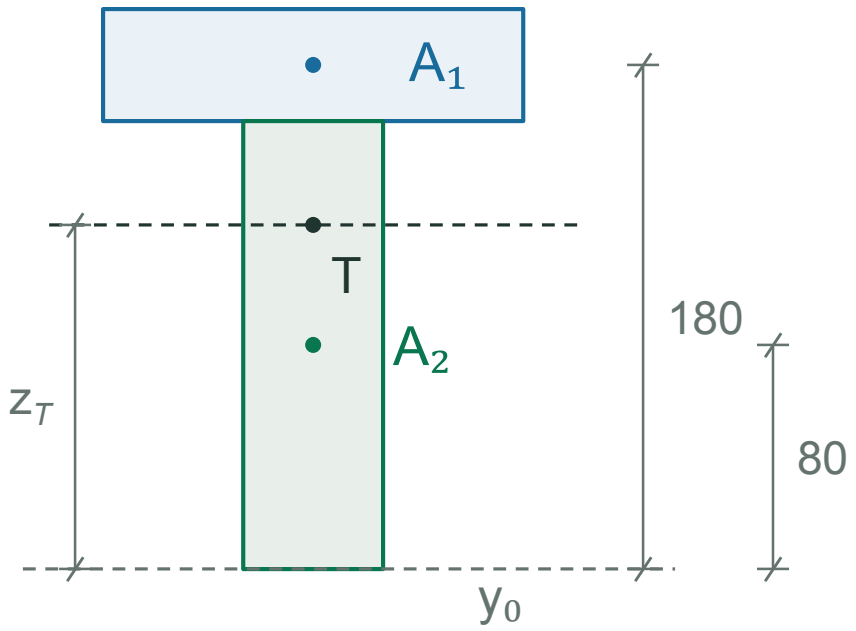
Určete maximální absolutní normálové napětí.





Rozhoduje průřez ve vetknutí.

Příklad: poloha těžiště



$$A_1 = 150 \cdot 40 = 6\,000\ \text{mm}^2$$

$$A_2 = 50 \cdot 160 = 8\,000\ \text{mm}^2$$

$$z_T = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2}{A_1 + A_2}$$

$$z_T = \frac{6\,000 \cdot 180 + 8\,000 \cdot 80}{14\,000}$$

$$z_T = 122{,}86\ \text{mm}$$

Příklad: moment setrvačnosti

Steinerova věta

$$I_y = I_{\mathrm{y1,c}} + A_1 {d_1}^2 + I_{\mathrm{y2,c}} + A_2 {d_2}^2$$

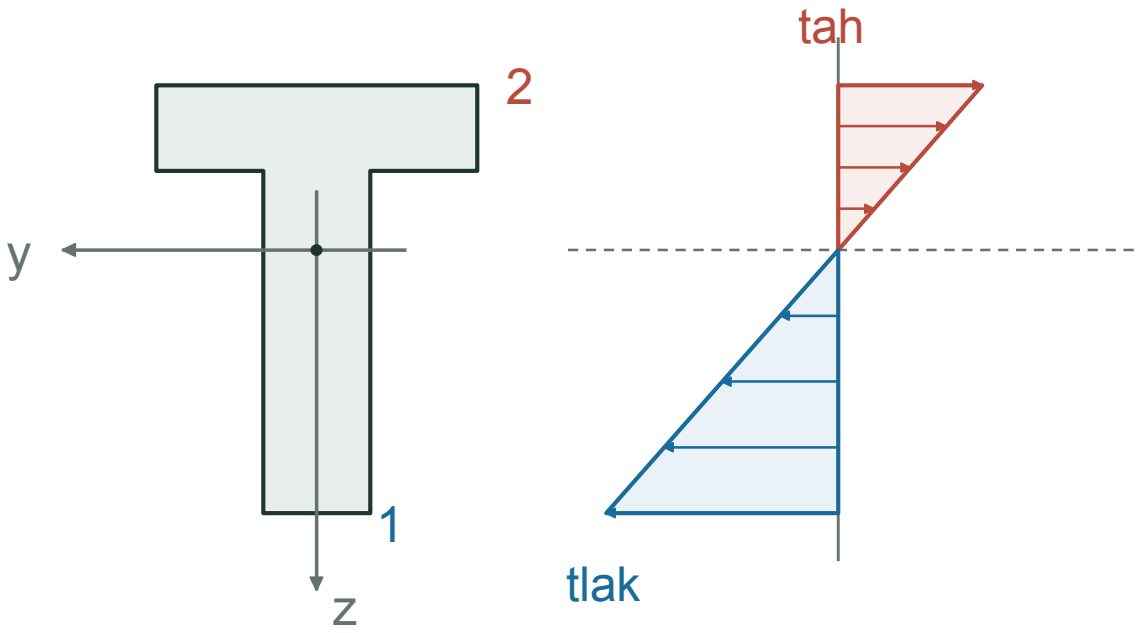
$$I_y = \frac{150 \cdot 40^3}{12} + 150 \cdot 40 \cdot (180 - 122{,}86)^2$$

$$+ \frac{50 \cdot 160^3}{12} + 50 \cdot 160 \cdot (80 - 122{,}86)^2$$

$$I_y = 52{,}152 \cdot 10^6 \ \mathrm{mm}^4 = 52{,}152 \cdot 10^{-6} \ \mathrm{m}^4$$

Příklad: normálové napětí ve vetknutí

$$M_y = -6 \cdot 2 = -12 \text{ kNm}$$



$$\sigma_{x1} = \frac{-12 \cdot 10^6}{52{,}152 \cdot 10^6} \cdot 122{,}86$$

$$\sigma_{x1} = -28{,}27 \text{ MPa}$$

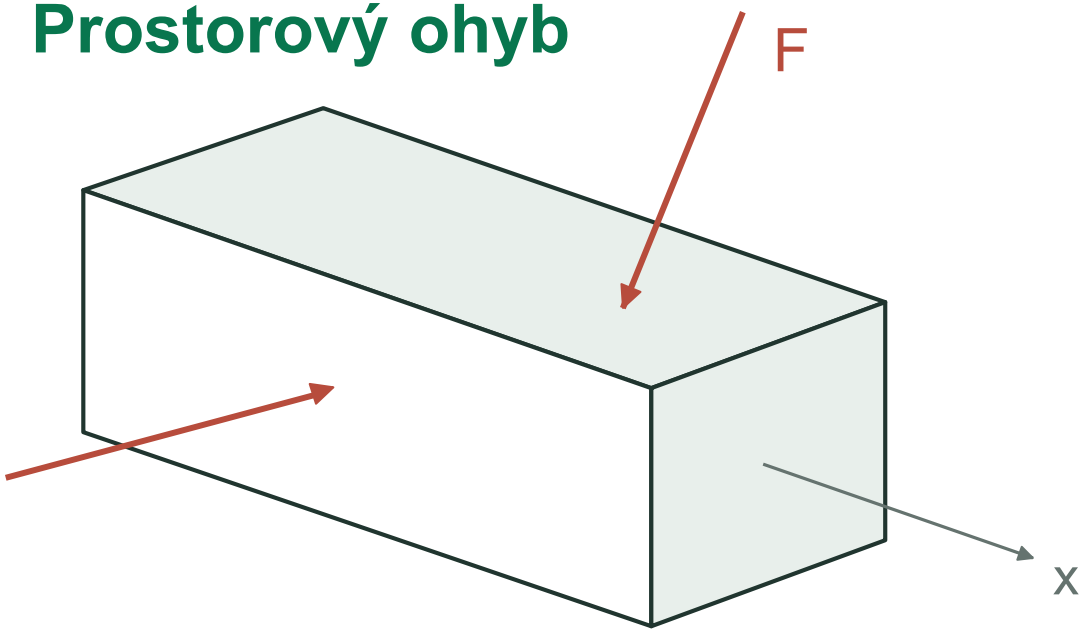
$$\sigma_{x2} = \frac{-12 \cdot 10^6}{52{,}152 \cdot 10^6} \cdot (-77{,}14)$$

$$\sigma_{x2} = +17{,}75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{max} = \max(|\sigma_{x1}|, |\sigma_{x2}|) = 28{,}27 \text{ MPa}$$

Složené případy namáhání

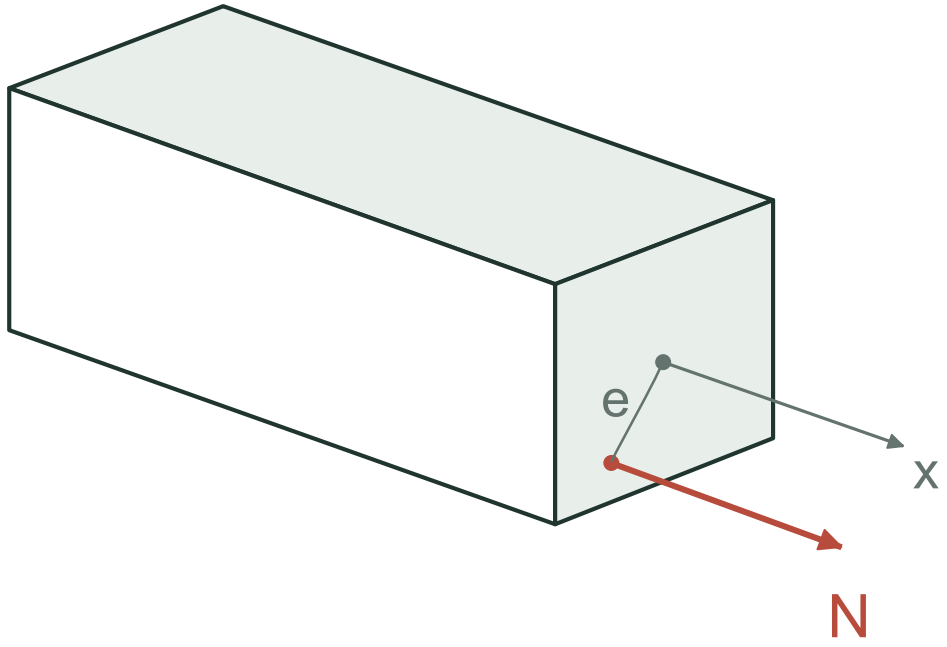
Prostorový ohyb



$V_y, V_z \quad M_y, M_z$

$N = 0 \quad M_x = 0$

Mimostředný tah a tlak



Normálová síla působí mimo těžiště průřezu.

Prostorový ohyb

Zatížení neleží v hlavní rovině prutu.
Souřadnice y, z volíme v hlavních centrálních osách.

Příspěvek momentu My

$$\sigma_{\mathrm{x,My}} = \frac{M_y}{I_y} z$$

Příspěvek momentu Mz

$$\sigma_{\mathrm{x,Mz}} = -\frac{M_z}{I_z} y$$

Výsledné normálové napětí

$$\sigma_x(\mathrm{y,z}) = \frac{M_y}{I_y} \mathrm{z} - \frac{M_z}{I_z} y$$

Neutrální osa při prostorovém ohybu

$$\sigma_x = 0$$

$$\frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = 0$$

Neutrální osa prochází těžištěm.

Obecně nesplývá s žádnou
z hlavních centrálních os.

