PRUŽNOST A PEVNOST

1. přednáška

Úvod, základní pojmy. Prostý tah a tlak.

Prof. Ing. Zdeněk Kala, Ph.D.

Ústav stavební mechaniky, Veveří 95

Literatura a přístupy k pružnosti

Literatura

S. Šmiřák
Pružnost a plasticita I
https://www.fce.vutbr.cz/STM/kala.z/BDA002/Smirak.pdf

B. Hlavinková, M. Mrázková
Pružnost a pevnost I
Přehled teorie a příklady

R. Servít, E. Doležalová, M. Crha
Teorie pružnosti a plasticity I
Praha, 1981

Rozlišujeme

- **Matematická teorie**

  Diferenciální a matematická analýza.

- **Technická nauka**

  Zjednodušené modely pro praxi.

- **Experimentální nauka**

  Ověření zkouškami.

Úvod, základní pojmy

Teorie pružnosti studuje vztahy mezi deformacemi těles a vnějšími silami, které na tělesa působí.

Napětí	Intenzita vnitřních sil.
Deformace	Změny rozměrů a tvaru tělesa.
Stabilita	Schopnost zachovat rovnovážný stav.
Únosnost	Schopnost přenášet zatížení bez porušení.
Použitelnost	Schopnost plnit požadovanou funkci.
Bezpečnost	Ochrana před nepřípustnými následky poruchy.

Pružnost: po odlehčení se těleso vrací do původního tvaru a velikosti.

Základní předpoklady: materiál

- **1. Spojitost látky**

  Těleso modelujeme jako kontinuum. Napětí a deformace lze popsat spojitými funkcemi.

- **2. Homogenita a izotropie**

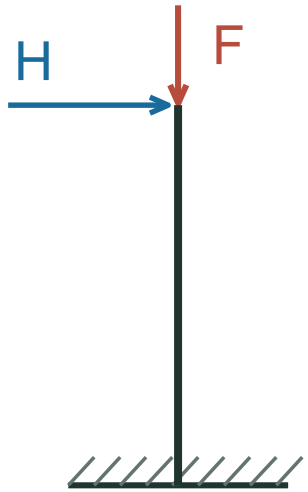
  Homogenní látka má stejné vlastnosti ve všech místech. Izotropní látka má stejné vlastnosti ve všech směrech.

- **3. Lineární pružnost**

  Po odlehčení nevznikají trvalé deformace. Platí přímá úměra mezi napětím a poměrnou deformací.

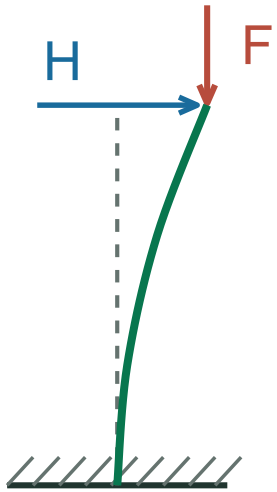
Malé deformace a geometrie výpočtu

4. Malé deformace: přetvoření, posuny a pootočení jsou dostatečně malé vzhledem k rozměrům konstrukce.



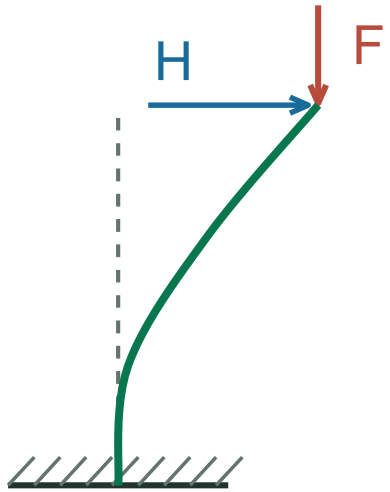
Teorie I. řádu

Rovnováha na nedeformované konstrukci.



Teorie II. řádu

Rovnováha na deformované konstrukci, malé rotace.



Konečné deformace

Zohlednění velkých posunů a pootočení.

Zatěžování a princip superpozice

- **5. Statické zatěžování**

  Vnější účinky narůstají pozvolna. Dynamické účinky zanedbáváme.

- **6. Nulová počáteční napjatost**

  Neuvažujeme napětí od výroby, válcování, rovnání, svařování nebo nerovnoměrného ochlazení.

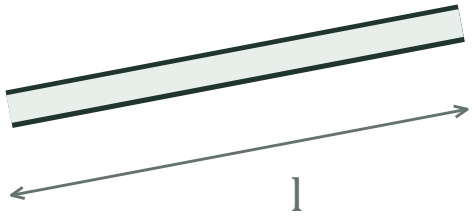
Princip superpozice

V lineární úloze lze účinky jednotlivých zatížení sčítat.

u: posun $$u(F_1+F_2)=u(F_1)+u(F_2)$$

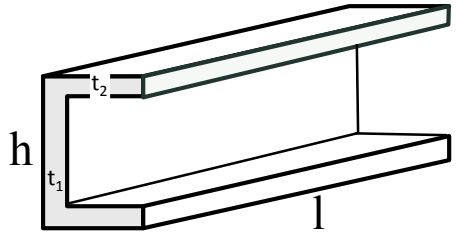
Typy těles

Prut



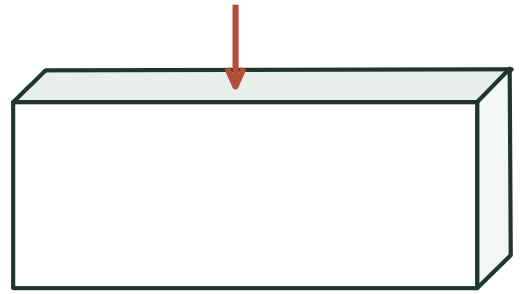
$d \ll l$

Tenkostěnný prut



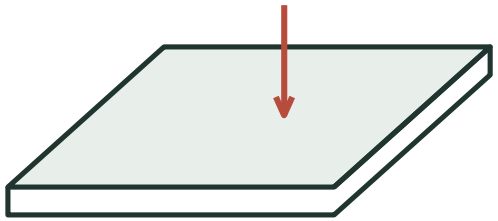
$t \ll h \ll l$

Stěna



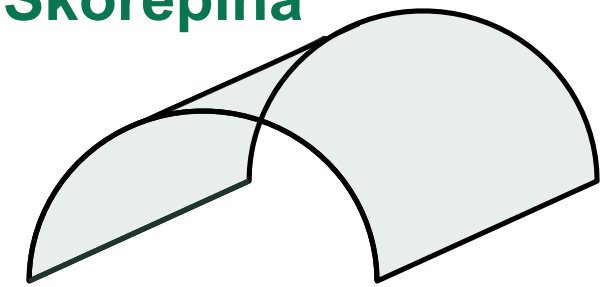
$t \ll h, l$

Deska



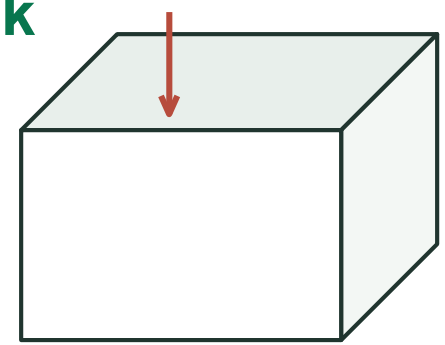
zatížení kolmo k rovině

Skořepina



zakřivená střednicová plocha

Blok



srovnatelné rozměry

Zatížení

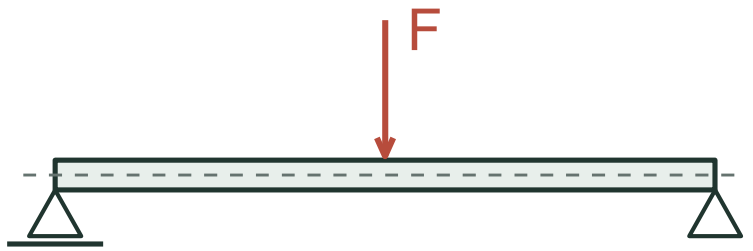
Podle způsobu působení

- Soustředěné síly: tlak kola na kolejnici
- Povrchové síly: tlak větru
- Objemové síly: vlastní tíha

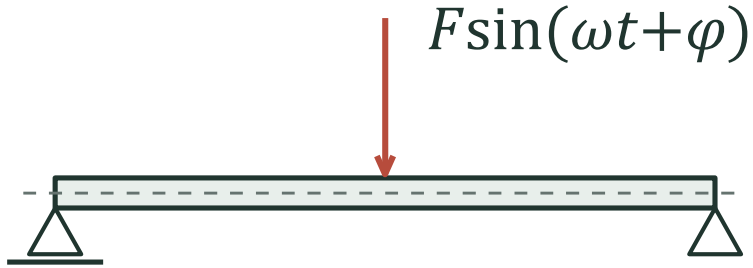
Podle doby působení

- Stálé: vlastní tíha konstrukce
- Nahodilé: vítr, sníh, doprava, zemětřesení

Podle změny v čase



Statické

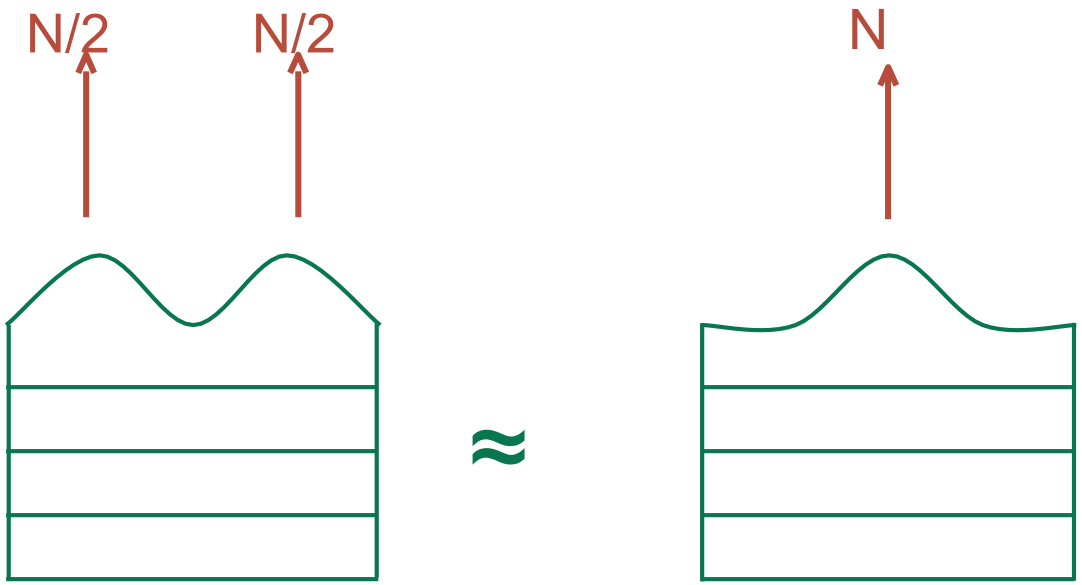


Dynamické

Zatížení je obecně náhodná veličina. Jeho hodnoty mají určitou pravděpodobnost výskytu.

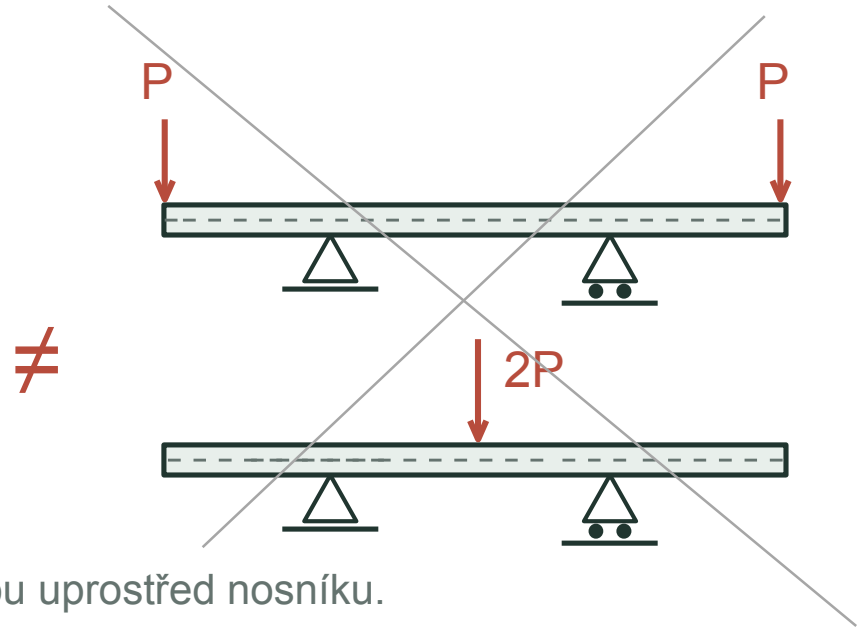
Saint-Venantův princip lokálnosti

Dostatečně daleko od místa působení zatížení závisí napětí a deformace především na jeho staticky ekvivalentní výslednici.



Shodné pole ve vzdálené oblasti

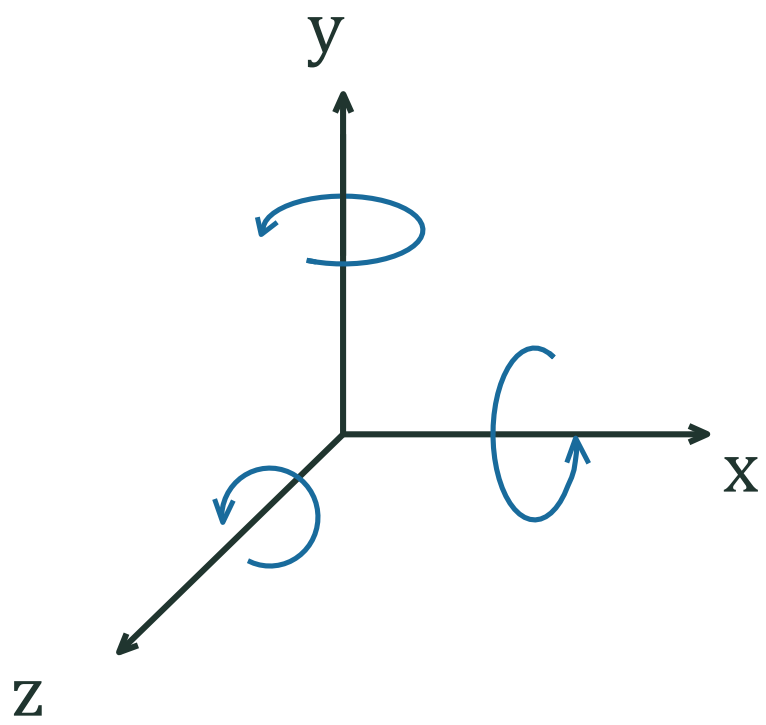
Náhrada musí být staticky ekvivalentní



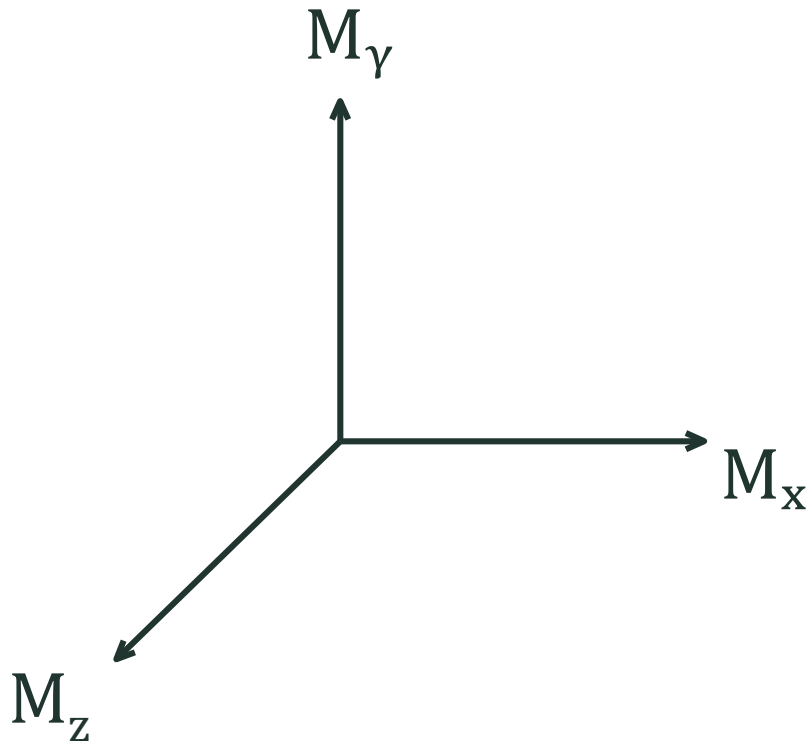
Příklad: Dvě síly na volných koncích nelze libovolně nahradit jednou silou uprostřed nosníku.

Pravotočivá soustava souřadnic

Směry sil a momentů vztahujeme k jednoznačně zvolené soustavě souřadnic.



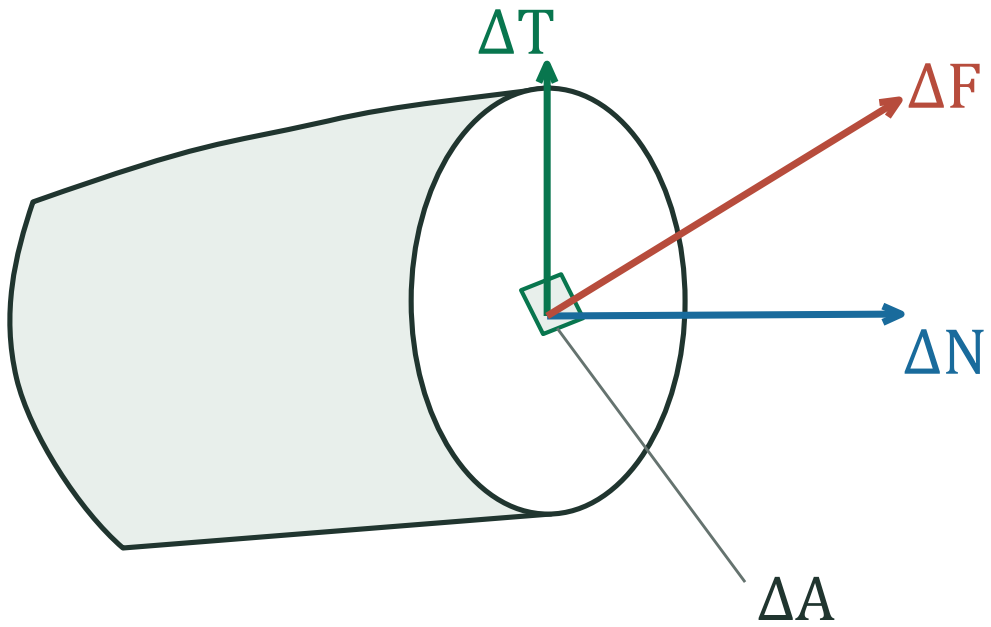
Souřadnicové osy



Kladné momenty

Vnitřní síly a napětí

Vnitřní síly jsou síly, kterými na sebe působí dvě části tělesa oddělené myšleným řezem. Platí princip akce a reakce.



myšlený řez

Normálová složka

ΔN je kolmá k ploše řezu.

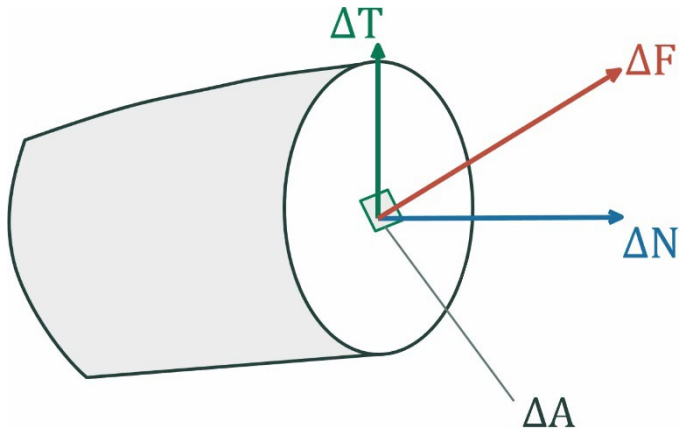
Smyková složka

ΔT leží v tečné rovině řezu.

Normálové a smykové napětí

Normálové napětí

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}A}$$



Smykové napětí

$$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}A}$$

Jednotky napětí

$$1\ \mathrm{Pa} = 1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

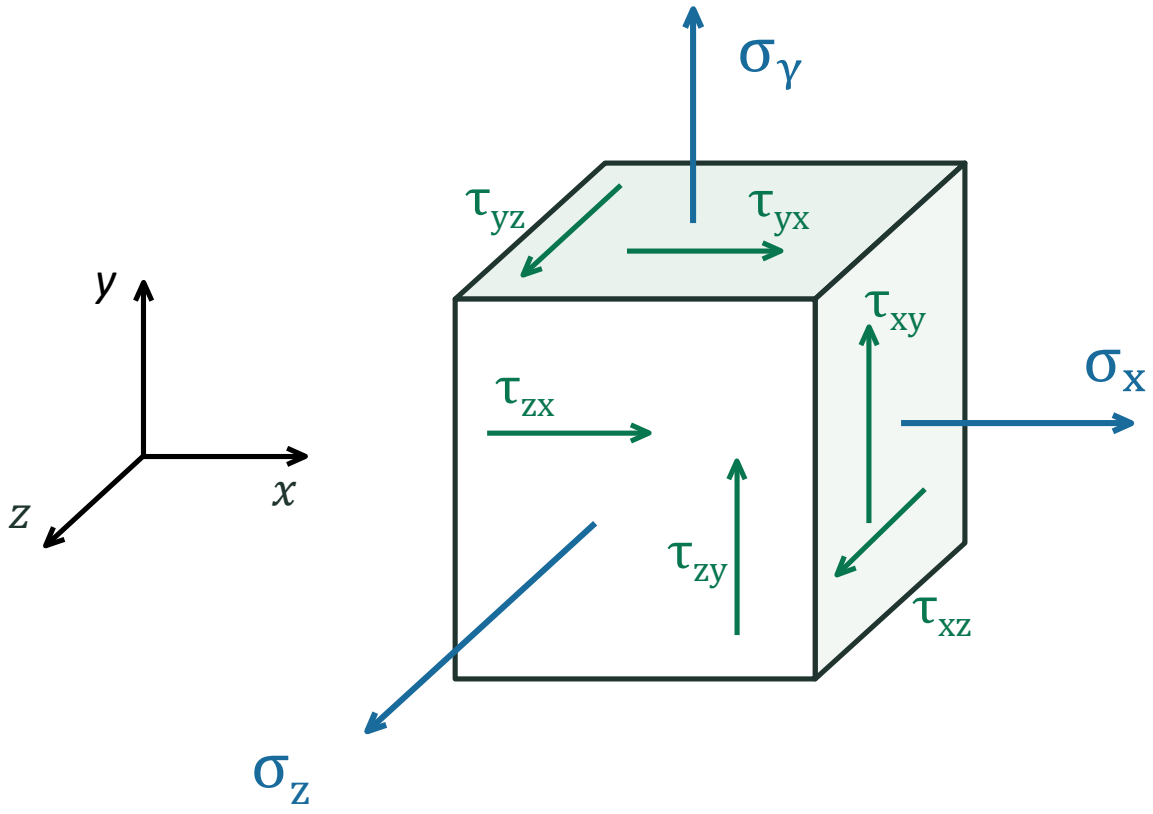
$$1\ \mathrm{MPa} = 10^6\ \mathrm{Pa} = 1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

ΔA: element plochy řezu. ΔN a ΔT: normálová a smyková složka síly na tomto elementu.

Popis napjatosti v bodě tělesa

Napjatost v bodě popíšeme složkami napětí na třech vzájemně kolmých plochách.

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}$$

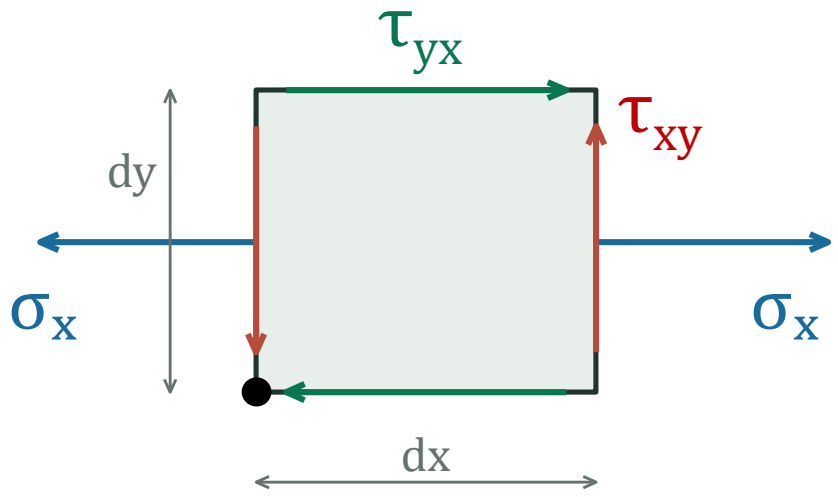


První index: normála plochy.
Druhý index: směr složky.

Kladná plocha řezu má vnější normálu ve směru kladné souřadnicové osy.

Vzájemnost smykových napětí

Kladné normálové napětí vyvolává tah. Na protějších plochách mají odpovídající složky napětí opačný směr.



Momentová rovnováha

$$\sum M_z = 0$$

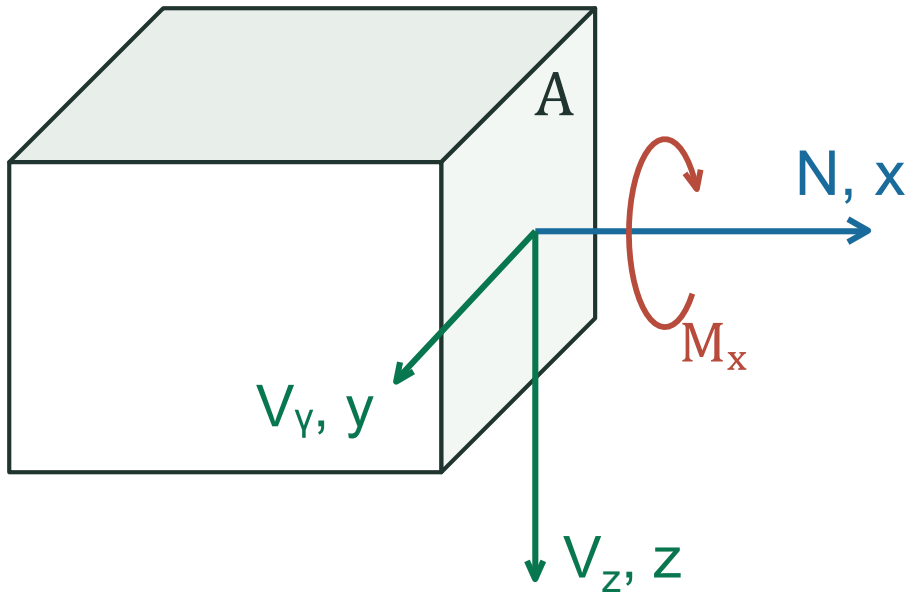
$$\tau_{xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - \tau_{yx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Obdobně platí $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ a $\tau_{zx} = \tau_{xz}$. Tenzor napětí je symetrický.

Vztah vnitřních sil a napětí

Vnitřní síly jsou výslednice napětí v průřezu prutu.



$$N = \int_A \sigma_x \, \mathrm{d}A$$

$$V_y = \int_A \tau_{xy} \, \mathrm{d}A$$

$$V_z = \int_A \tau_{xz} \, \mathrm{d}A$$

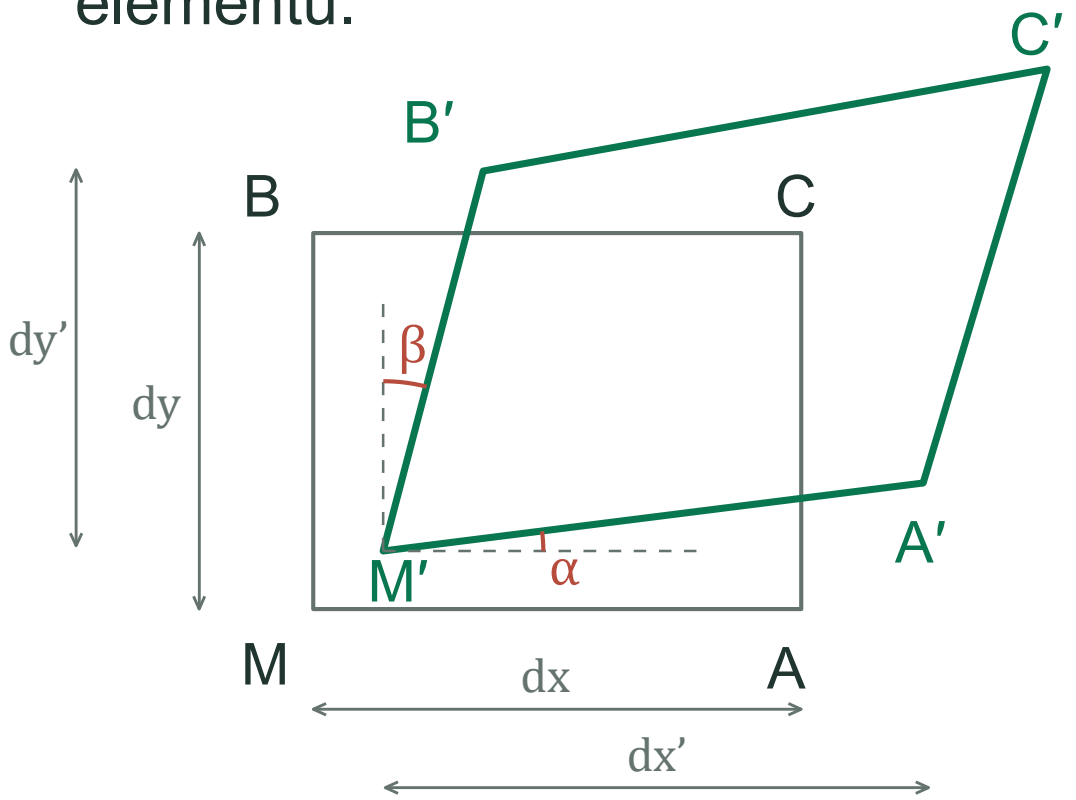
$$M_x = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) \, \mathrm{d}A$$

$$M_y = \int_A \sigma_x \, z \, \mathrm{d}A$$

$$M_z = -\int_A \sigma_x \, y \, \mathrm{d}A$$

Deformace a posuny

Poměrné délkové změny a změny pravých úhlů charakterizují deformaci elementu.



$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}x' - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\Delta \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\mathrm{d}y' - \mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = \frac{\Delta \mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta$$

Poměrné prodloužení a zkosení

Poměrné prodloužení



$$\Delta l = l' - l$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Zkosení

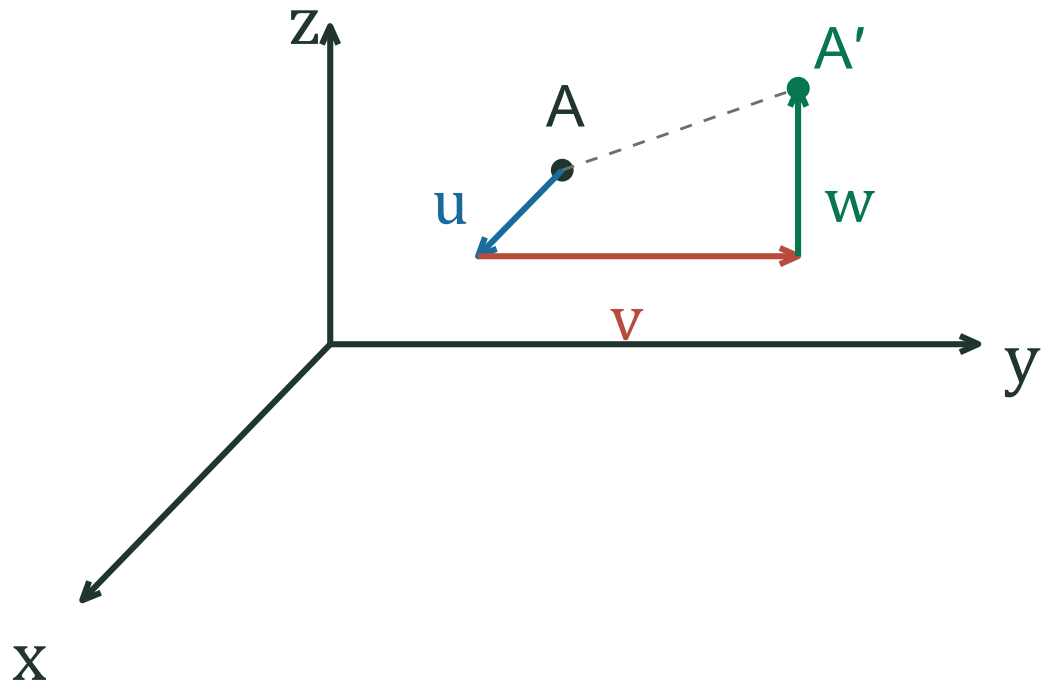


$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\Delta}{h}$$

$$\gamma \approx \frac{\Delta}{h}$$

Složky posunu bodu tělesa

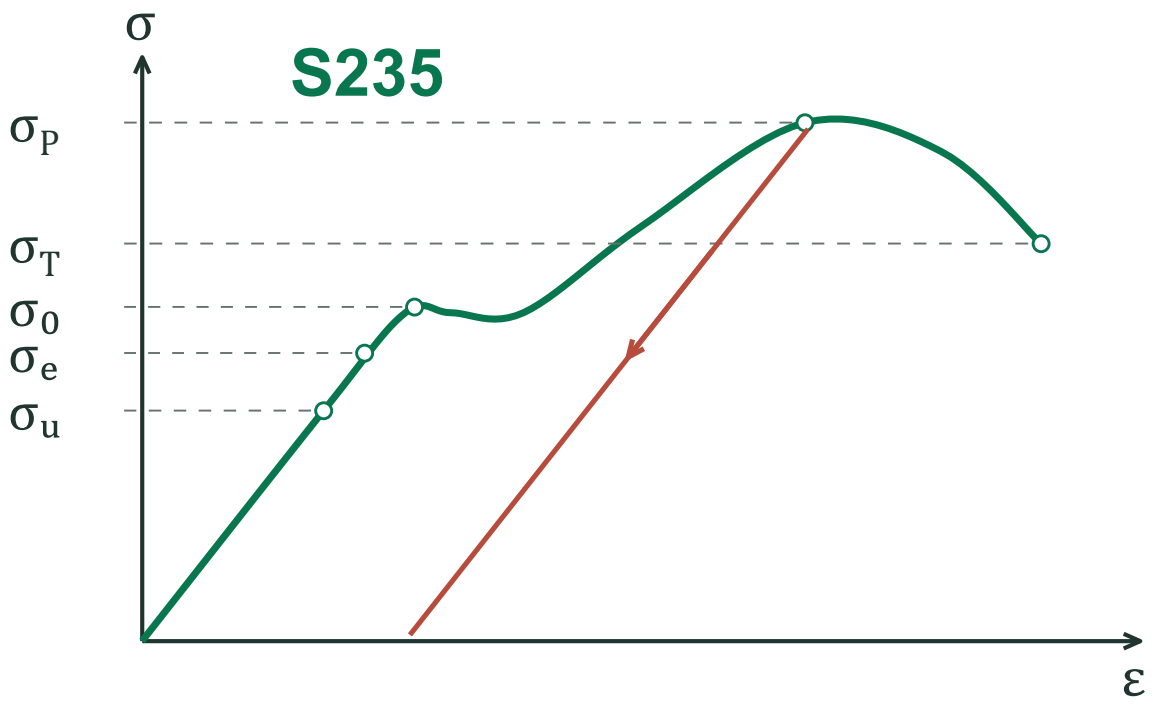
Deformovaný stav popíšeme posunem každého bodu a jeho složkami ve směrech souřadnicových os.



Složka posunu	Směr
u	x
v	y
w	z

Pracovní diagram nízkouhlíkové konstrukční oceli

Tahová zkouška na trhacím lisu (měkká nízkouhlíková ocel, např. S235)



σ_u mez úměrnosti

σ_e mez pružnosti

σ_0 mez kluzu (v EC3 f_y)

σ_P mez pevnosti

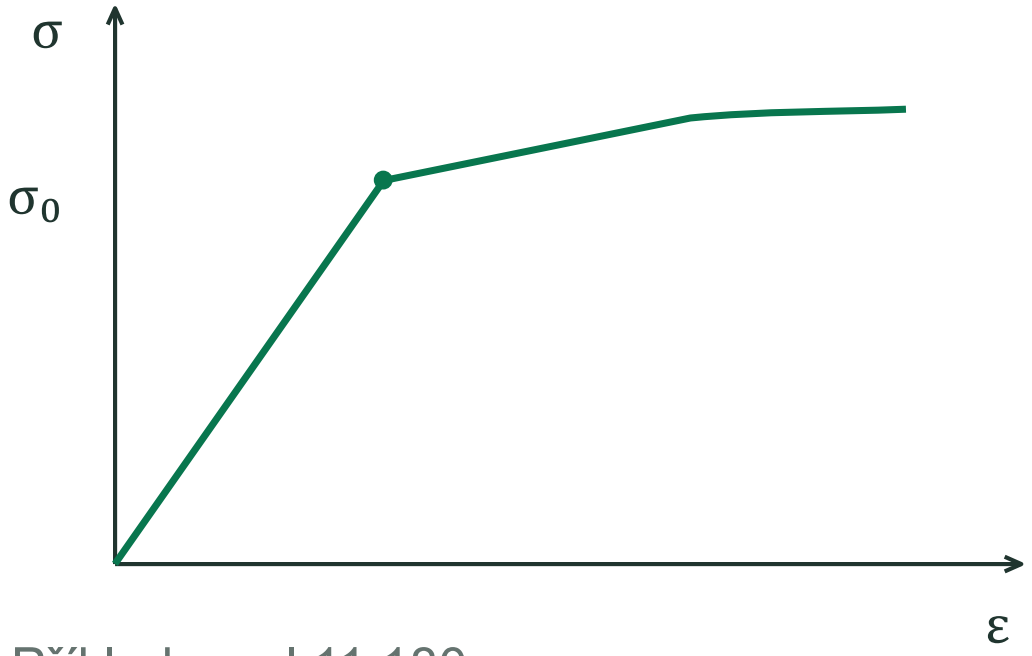
σ_T napětí při porušení

$$\sigma = \frac{F}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

A: původní průřezová plocha. l: původní měřená délka. F: tahová síla.

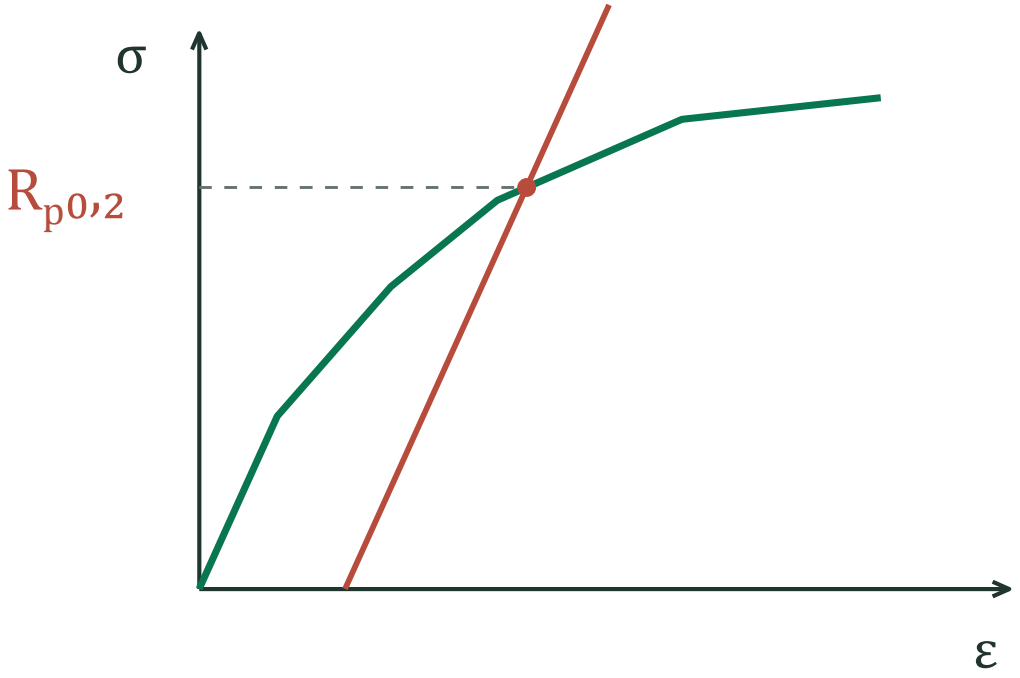
Pružinová ocel a materiál bez prodlevy

Pružinová ocel



Příklad: ocel 11 180
ČSN 42 5350, 1982

Drát



$\varepsilon^p = 0,002 = 0,2\ \%$

Tahová zkouška pružinové oceli

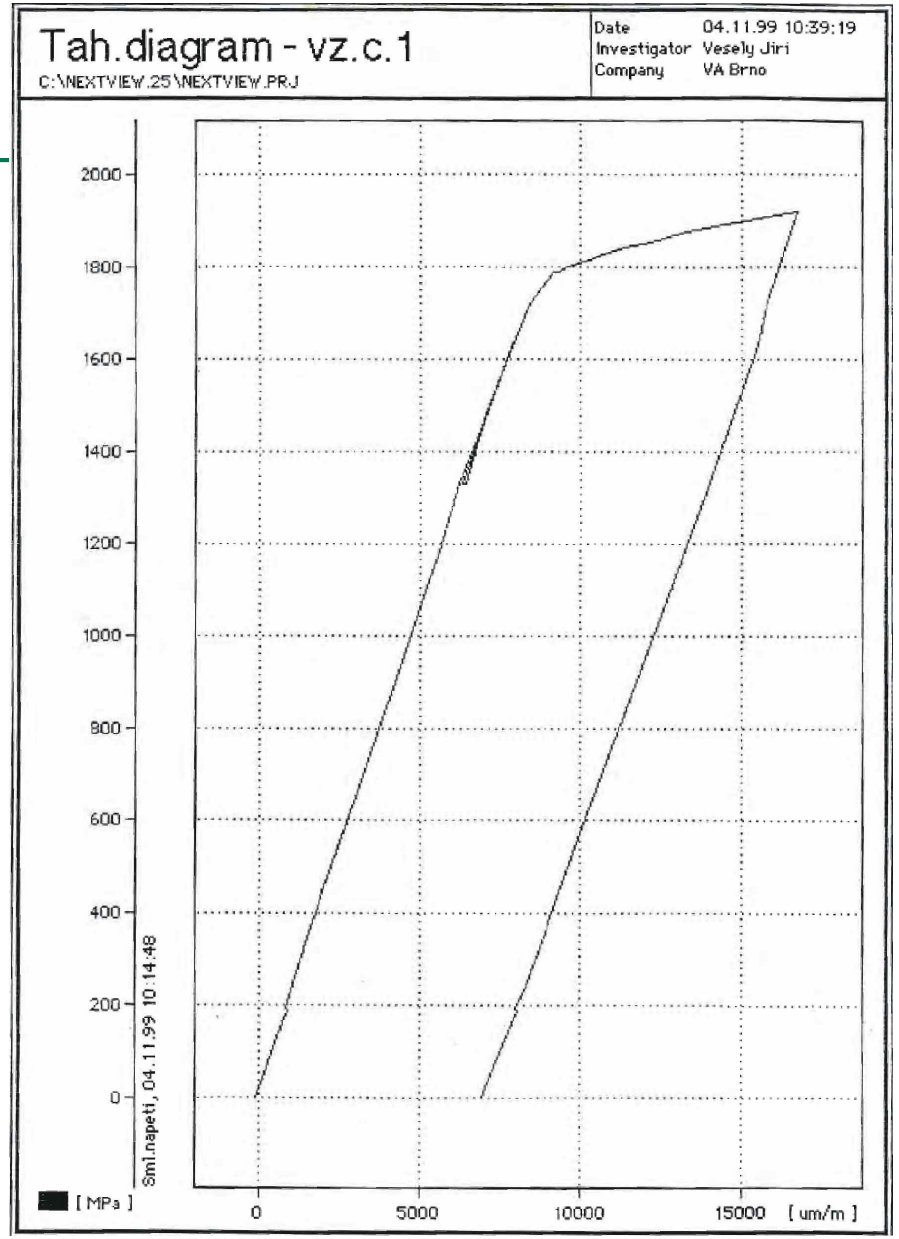
Ocel 12 071 • průřez 65 × 0,5 mm

Zatěžování

Nárůst síly a prodloužení vzorku.

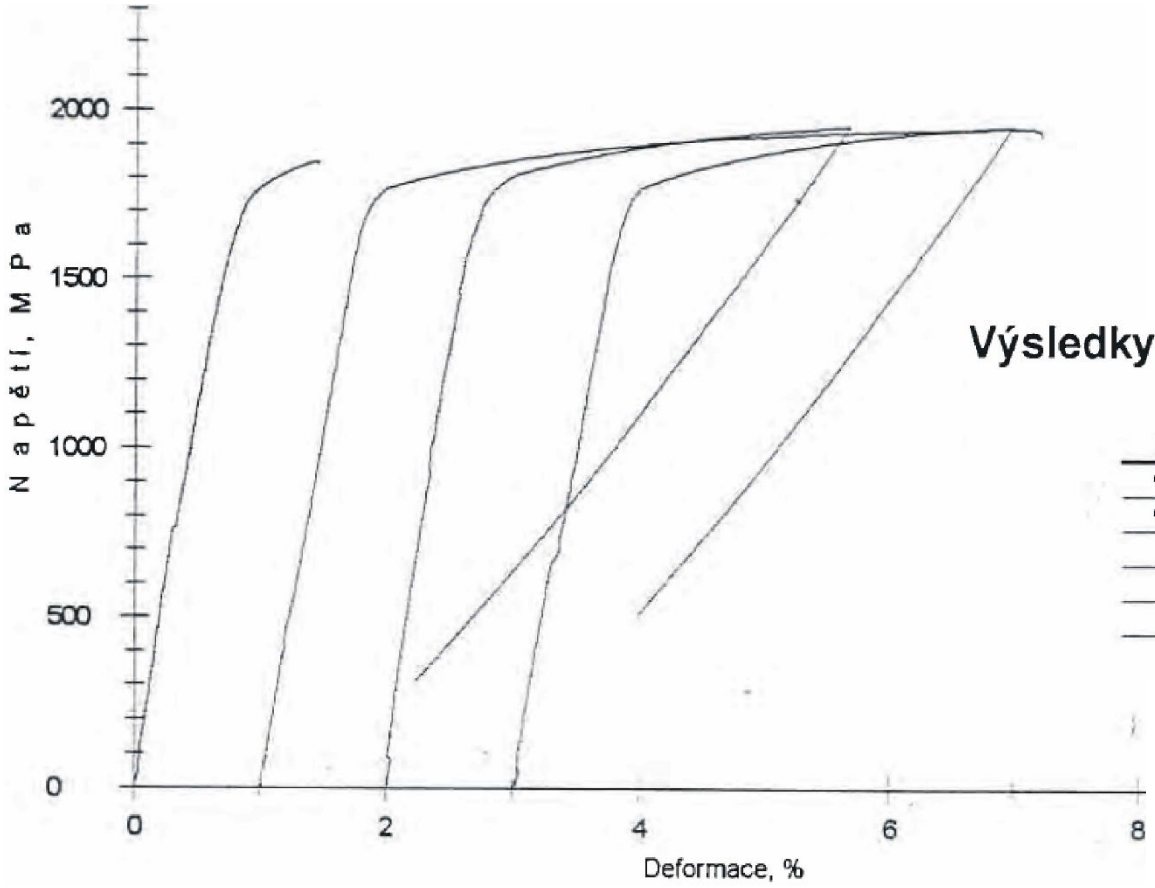
Odlehčování

Po odlehčení zůstává trvalé prodloužení.



Pružinová ocel: záznamy více zkoušek

Ocel 12 071 • záznam Zwick z 3. 11. 1999



Zkušební parametry:

Zadavatel : ONOM - Doc. Ptáček
Zkoušel : Michal Reinisch
Materiál : Pružina
Norma : Zkouška tahem

Snímač síly : GTM 20 kN
Průtahoměr : Multisens
Upínací čelisti: Samosvorné čelisti

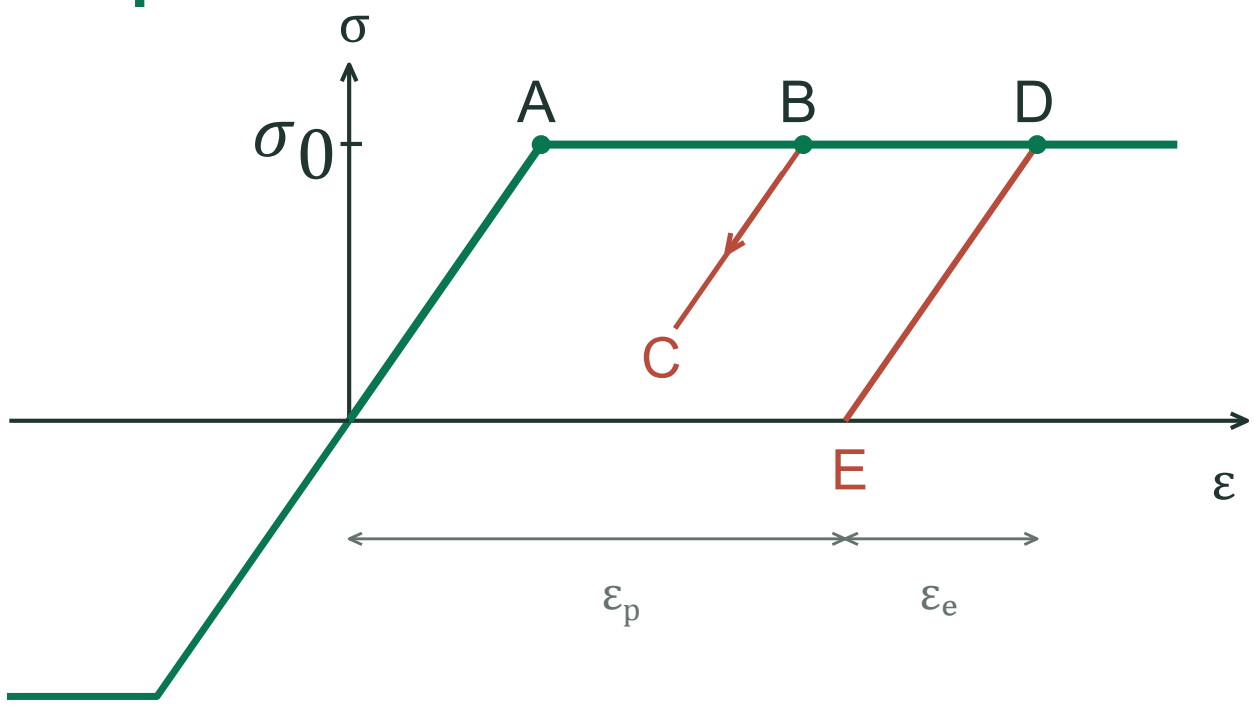
Výsledky zkoušek:

Nr	Vzorek	v-Test mm/min	L0 mm	b0 mm	a0 mm	E modul GPa	Rp 0.2 N/mm²	Rm N/mm²	ε Fmax. %	R fr N/mm²	ε fr %
✞1	1	1	20,00	19,78	0,54	173,47	-	553,56	0,54	553,56	0,54
✞2	2	1	20,00	19,3	0,54	-	-	959,01	-	-	-
3	3	3	20,00	19,06	0,53	255,71	1725,37	1847,17	1,41	1844,87	1,44
4	4	3	20,00	19,05	0,53	214,59	1772,93	1948,71	5,97	1923,67	6,22
5	5	3	20,00	19,05	0,53	265,78	1764,92	1954,17	10,34	-	-
6	6	3	20,00	19,04	0,53	234,73	1751,29	1955,28	3,98	-	-

Ideálně pružnoplastický materiál

Tvárné materiály se mohou trvale deformovat bez porušení.

Bez zpevnění



Ocel S235

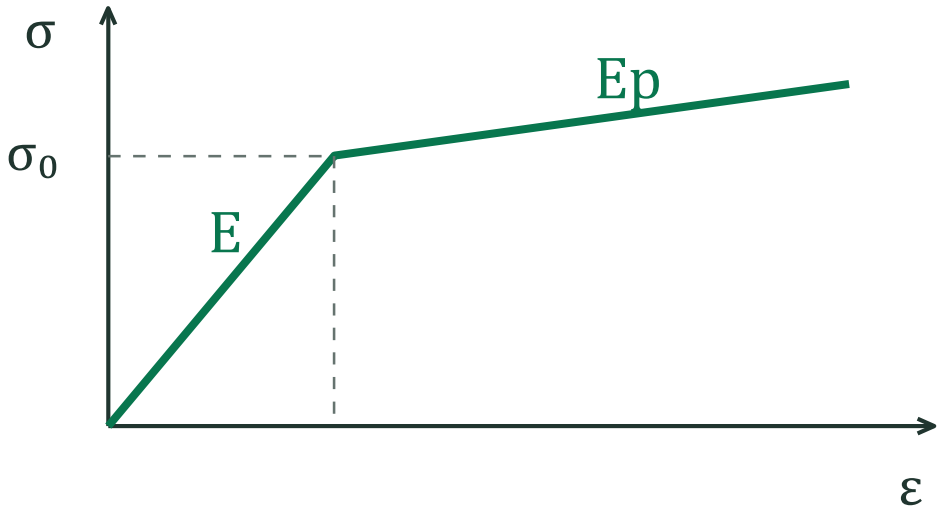
$\sigma_0 \approx 235\ \mathrm{MPa}$

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_0}{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

Zpevnění a další idealizace

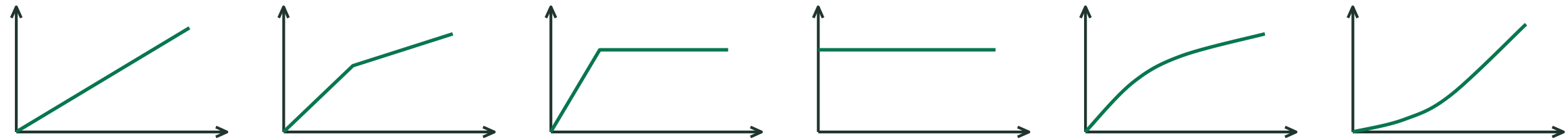
Pružnoplastický materiál se zpevněním



Na konci počáteční pružné větve

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_0}{E}$$

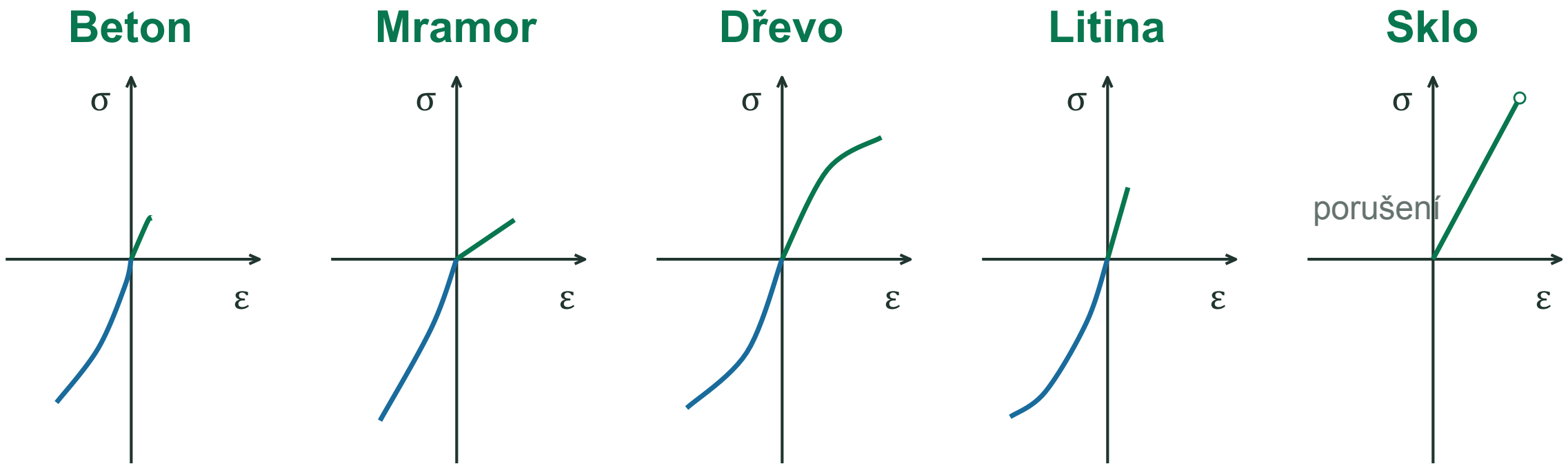
E: počáteční modul pružnosti
E_P: sklon zpevňující větve



Lineárně pružný | Částečně lineární | Pružně tvárný | Dokonale tvárný | Nelineárně pružný | Nadpružný

Pracovní diagramy dalších materiálů

Schematické porovnání chování v tahu a tlaku



Tvary diagramů jsou kvalitativní. Měřítka jednotlivých materiálů nejsou shodná.

Hookův zákon

V oboru lineární pružnosti

$$\sigma = E\varepsilon$$

E: modul pružnosti v tahu a tlaku

$$\tau = G\gamma$$

G: modul pružnosti ve smyku

Materiál	E [GPa]	G [GPa]
Ocel	210	81
Beton	20 až 40	≈ 0,42 E
Dřevo podél vláken	10	0,6
Dřevo napříč vlákny	0,3	
Sklo	70	

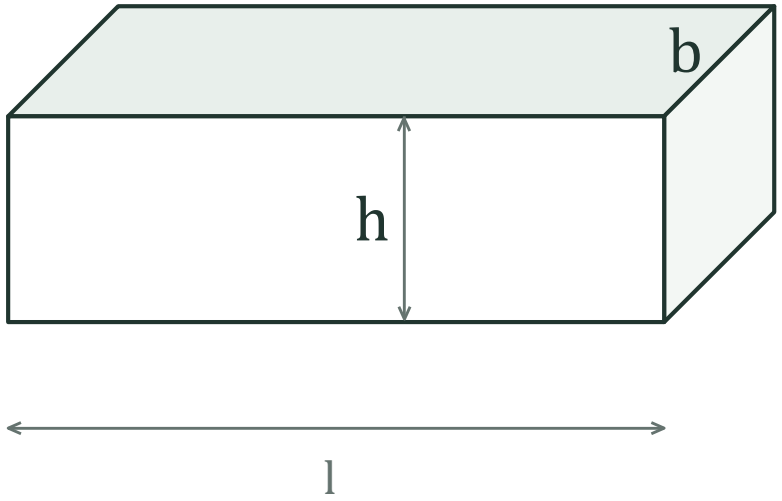


Robert Hooke

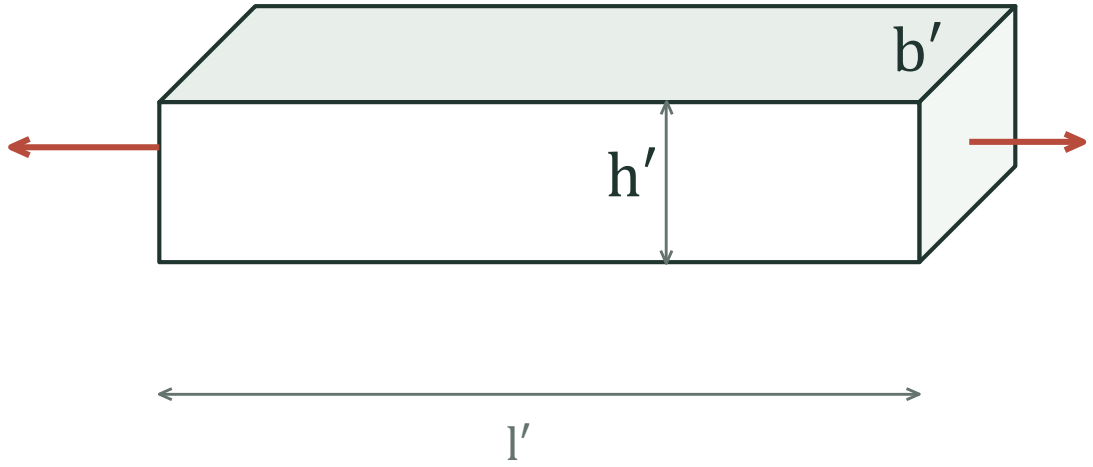
Příčné zkrácení při tahu

Při tahovém namáhání se prut prodlužuje v podélném směru a zkracuje v příčných směrech.

Před deformací



Po deformaci



$$l' > l \quad b' < b \quad h' < h$$

Poissonův součinitel

$$\varepsilon = \frac{l' - l}{l}$$

$$\varepsilon' = \frac{b' - b}{b} = \frac{h' - h}{h}$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon$$

Materiál	ν
Ocel	0,25 až 0,33
Beton	0,15 až 0,20
Korek	≈ 0
Pryž	≈ 0,5



Poisson

Nejčastější symbol pro Poissonův součinitel

- ν (ný) – mezinárodní standard, MKP, SW jako Ansys
- μ (mí) – tradiční značení v české a slovenské literatuře

Vztah mezi elastickými konstantami

Pro izotropní lineárně pružnou látku platí

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Ocel

$$E = 210\ \text{GPa} \quad \nu = 0,3$$

$$G = \frac{210}{2(1+0,3)} \approx 80,8\ \text{GPa} \approx 81\ \text{GPa}$$

Orientační hodnoty modulu pružnosti

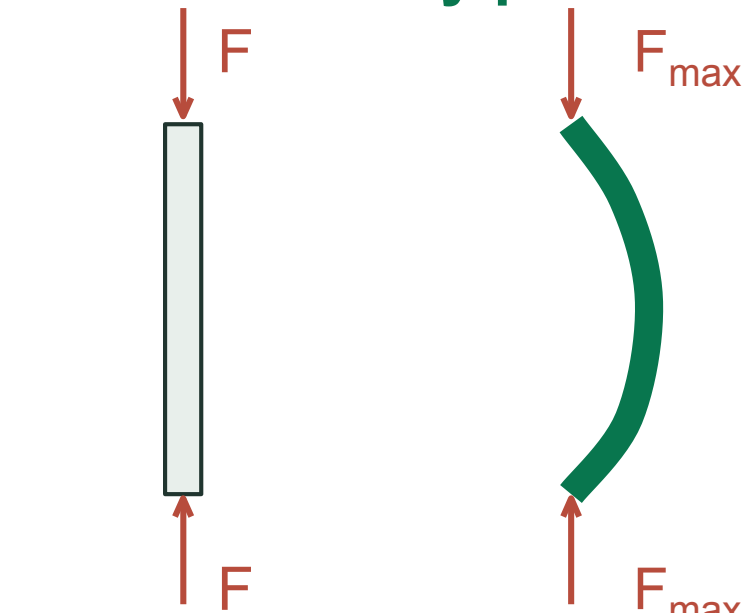
Materiál	E [GPa]	Materiál	E [GPa]
Ocel	210	Dřevo	7 až 18
Sklo	50 až 85	Sklený laminát	10 až 30
Hliník a lehké slitiny	65 až 73	Reaktoplasty	4 až 13
Beton obyčejný	20 až 40	Termoplasty hutné	0,1 až 4
Pórobeton	4 až 13	Termoplasty pěnové	0,002 až 0,030
Pálená cihla	8 až 12	Kaučuk	0,002 až 0,005

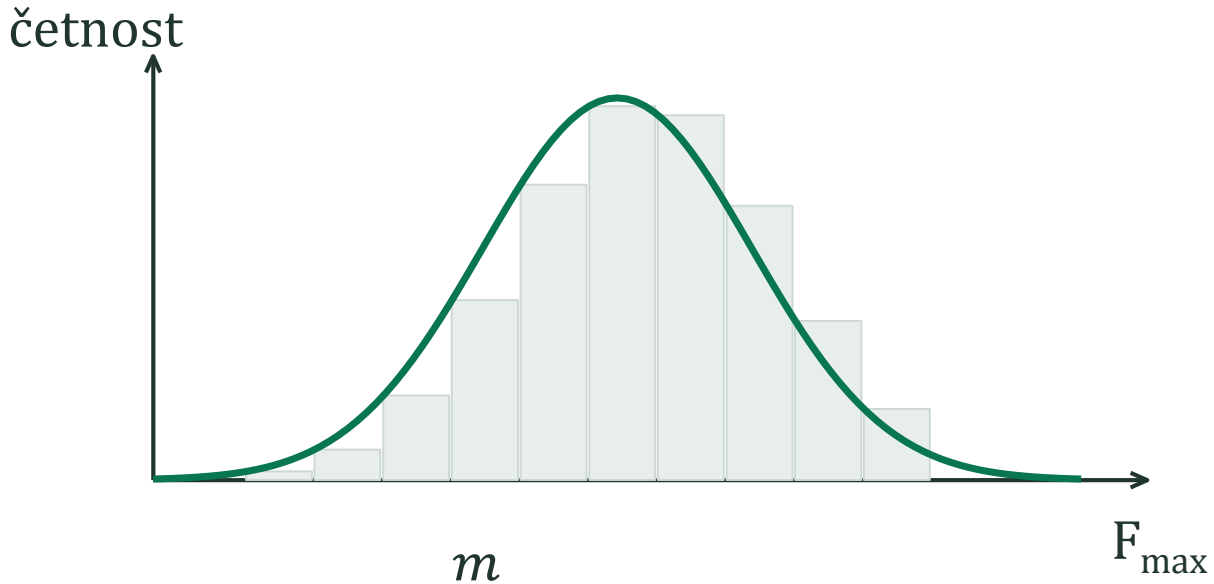
Orientační tabulka původní přednášky. Konkrétní hodnota závisí na materiálu a podmínkách.

Spolehlivost: únosnost je náhodná

Únosnost zjištěná opakováním statických zatěžovacích zkoušek není jediná pevná hodnota. Vykazuje náhodnou proměnlivost.

Příklad: tlačený prut

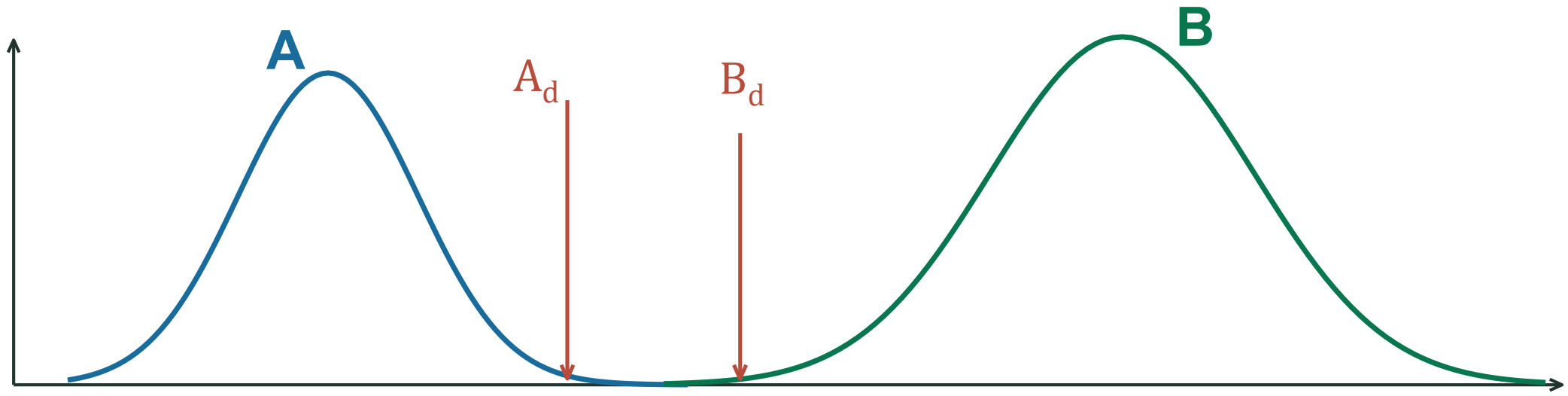




$$\overline{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} F_{\max,i}$$

Zatížení a únosnost

Také zatížení je náhodné. Účinek zatížení musí být s dostatečnou spolehlivostí menší než únosnost.



účinek zatížení **únosnost**

$$A_d \leq B_d$$

Charakteristické a návrhové hodnoty

Návrhové zatížení

$$F_d = \gamma_F F_k$$

F_k: charakteristická hodnota zatížení
γ_F: dílčí součinitel zatížení

Návrhová pevnost

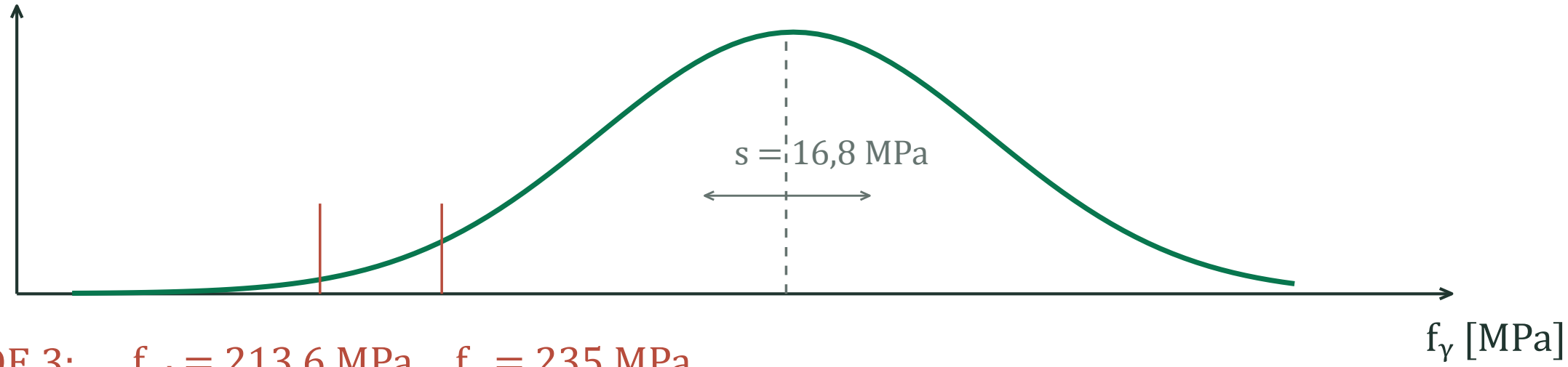
$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_M}$$

f_{yk}: charakteristická mez kluzu
γ_M: dílčí součinitel materiálu

U pevnosti se charakteristická hodnota obvykle vztahuje k dolnímu okraji rozdělení, v původním příkladu k 5% kvantilu.

Příklad rozdělení meze kluzu oceli

Hodnoty z původních podkladů EC3 (nyní $f_{yd}=f_y$)



EUROCODE 3: $f_{yd} = 213{,}6$ MPa $f_\gamma = 235$ MPa

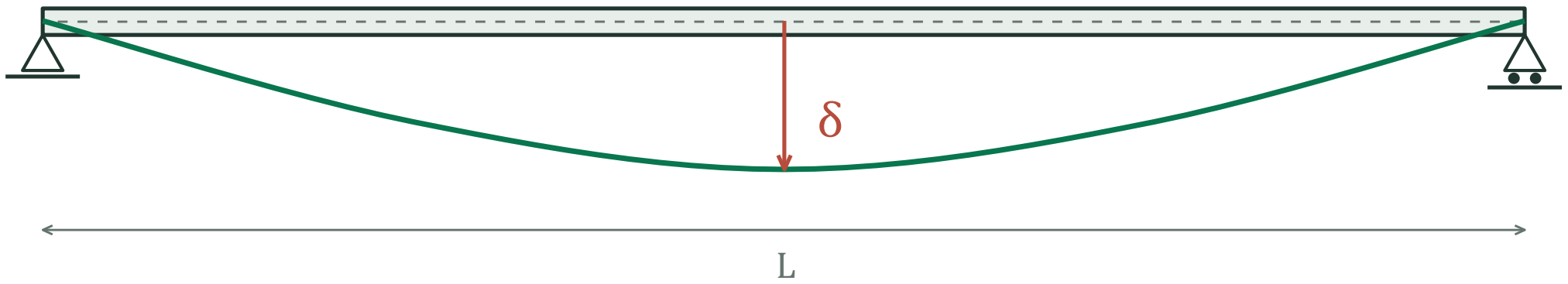
průměr 297,6 MPa

$$f_{yd} = \frac{235}{1,10} = 213,6 \text{ MPa}$$

Příklad s původním součinitelem 1,10 (nyní 1,00). Rozlišujeme průměrnou, charakteristickou a návrhovou hodnotu.

Mezní stav použitelnosti

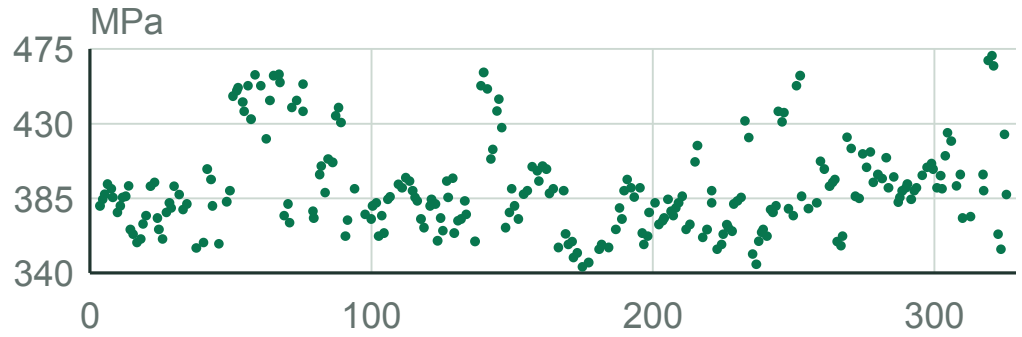
Konstrukce může vyhovět únosností, ale nevyhovět velikostí deformací.



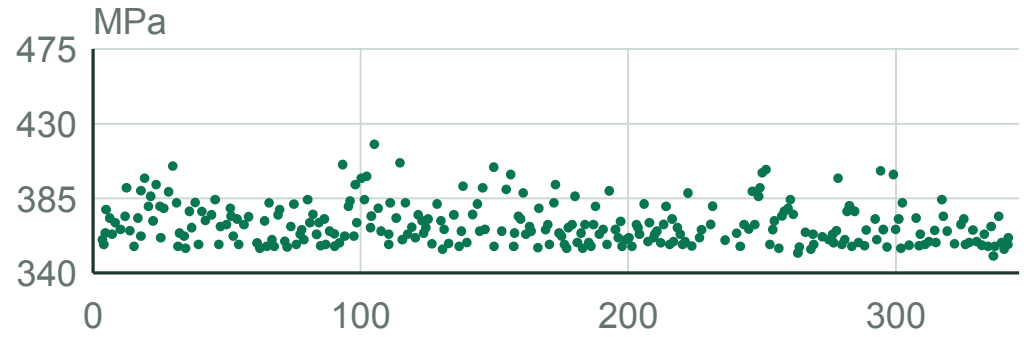
Příklady mezních průhybů v podkladech	δ_{max}
Střešní vaznice a průvlaky	L / 200
Střechy s častým výskytem osob	L / 250
Stropní průvlaky	L / 250
Nosníky stropů	L / 400

Proměnlivost vlastností oceli v měřeních

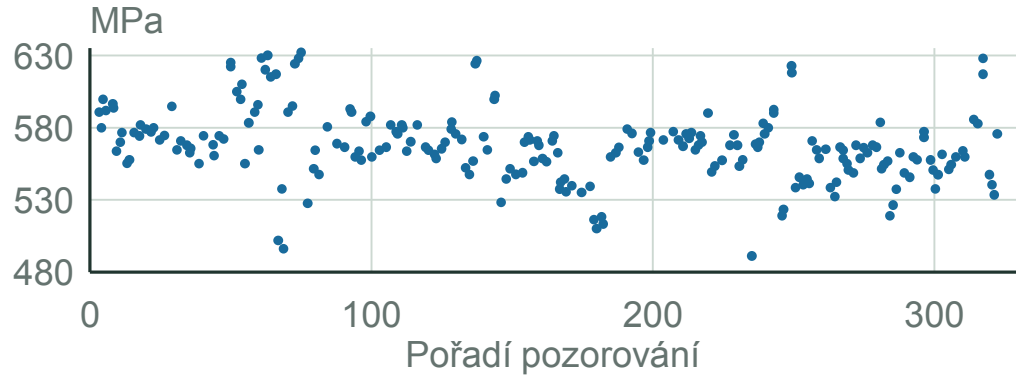
Mez kluzu • 2001



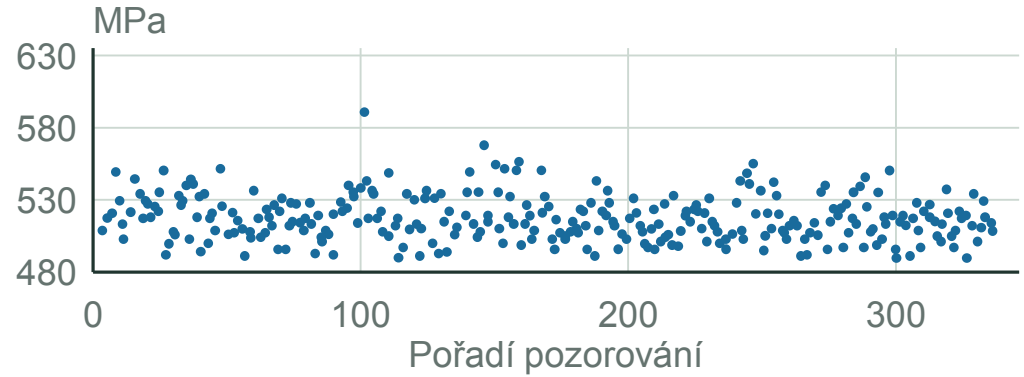
Mez kluzu • 2005



Mez pevnosti • 2001



Mez pevnosti • 2005

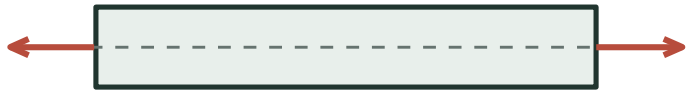


Body jsou opticky převzaty z JCSR 2004:

Melcher, J.; Kala, Z.; Holický, M.; Fajkus, M.; Rozlívka, L. Design Characteristics of Structural Steels Based on Statistical Analysis of Metallurgical Products. *Journal of Constructional Steel Research* **2004**, *60*(3-5), 795-808

Základní případy namáhání prutů

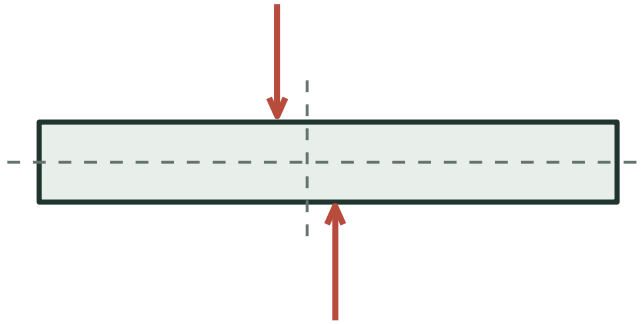
Prostý tah a tlak



Výslednice zatížení leží v ose prutu.

V průřezu působí pouze normálová síla N.

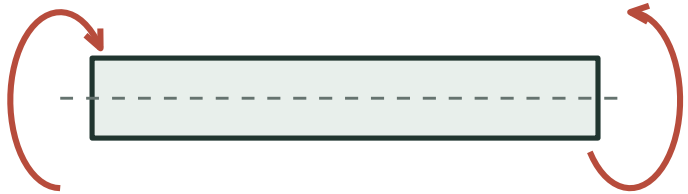
Prostý smyk



V blízkých rovnoběžných rovinách působí opačné síly.

Příklad: střih (nůžky).

Prostý ohyb

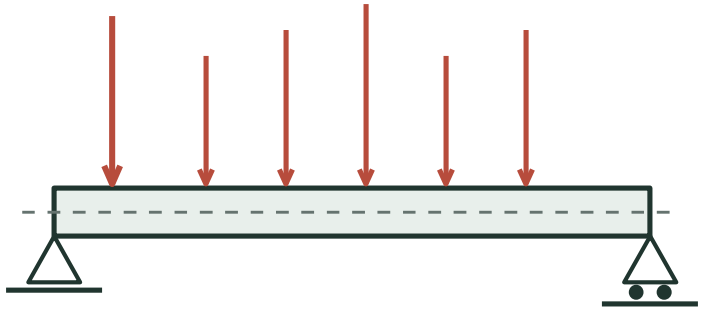


V průřezu působí pouze ohybový moment.

Posouvající síla je nulová.

Ohyb, kroucení a vzpěrný tlak

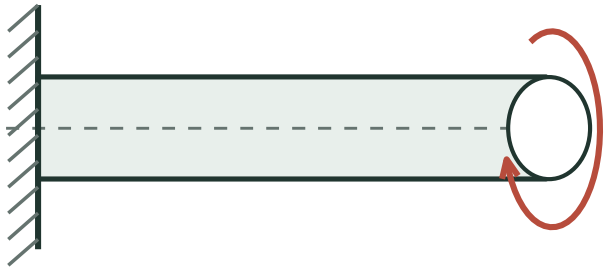
Příčný ohyb



Vyvolán příčným zatížením.

V průřezu působí ohybový moment a posouvající síla.

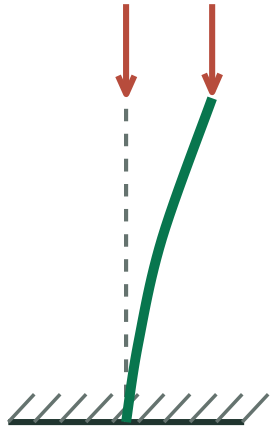
Prosté kroucení



V průřezu působí pouze krouticí moment.

U vázaného kroucení vzniká také bimoment.

Vzpěrný tlak

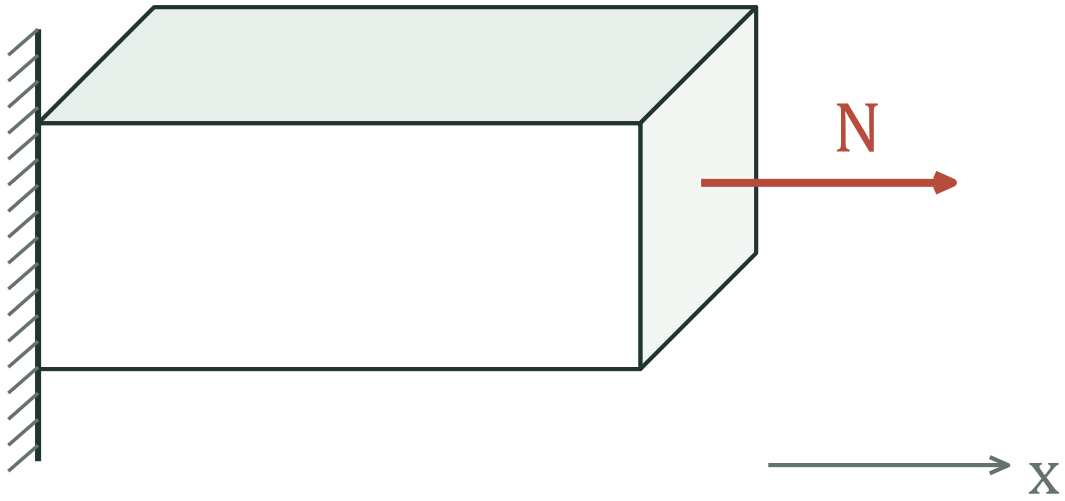


Vybočení tlačeného štíhlého prutu.

Významný problém stability.

Prostý tah a tlak

V příčném průřezu působí pouze normálová síla. Ostatní složky vnitřních sil jsou nulové.



$$N \neq 0$$

$$V_y = V_z = 0$$

$$M_x = M_y = M_z = 0$$

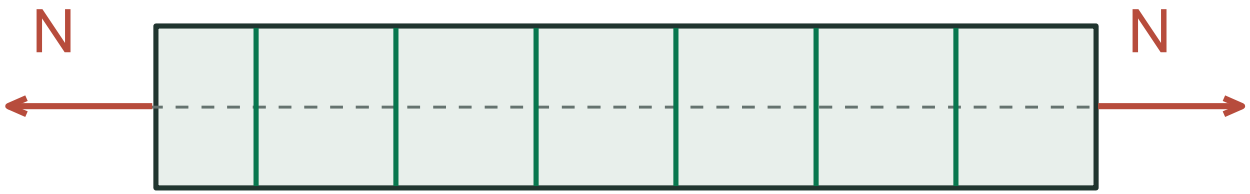
$N > 0$ tah

$N < 0$ tlak

Napětí v příčném průřezu

Bernoulliova hypotéza

Příčné průřezy zůstávají rovinné a kolmé k ose prutu i po deformaci.



$$\varepsilon_x = \text{konst.}$$

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x = \text{konst.}$$

Podélná vlákna na sebe vzájemně netlačí.

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$$

Odvození normálového napětí

$$N = \int_A \sigma_x \, \mathrm{d}A = \sigma_x \int_A \mathrm{d}\,A = \sigma_x A$$

$$M_y = \int_A \sigma_x \, z \, \mathrm{d}A = \sigma_x S_y = 0$$

$$M_z = -\int_A \sigma_x \, y \, \mathrm{d}A = -\sigma_x S_z = 0$$

K těžištním osám jsou statické momenty průřezu $S_Y = S_z = 0$.

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

Dimenzování taženého prutu

Podmínka návrhu

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \leq R_d$$

$$R_d = \frac{f_{yk}}{\gamma_M}$$

R_d: návrhová pevnost
f_y: charakteristická mez kluzu
γ_M: dílčí součinitel materiálu

Ocel S235

$$\frac{235}{1,15} = 204,3 \text{ MPa}$$

$$\frac{235}{1,10} = 213,6 \text{ MPa} \qquad \frac{235}{1,00} = 235 \text{ MPa}$$

Číselné součinitele 1,15 a 1,1 jsou zachovány z původních podkladů jako historické příklady, aktuální je γ_M=1,0.

Přetvoření taženého prutu

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{EA}$$

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon_x \ \mathrm{d}x = \int_0^l \frac{N(x)}{E(x)A(x)} \ \mathrm{d}x$$

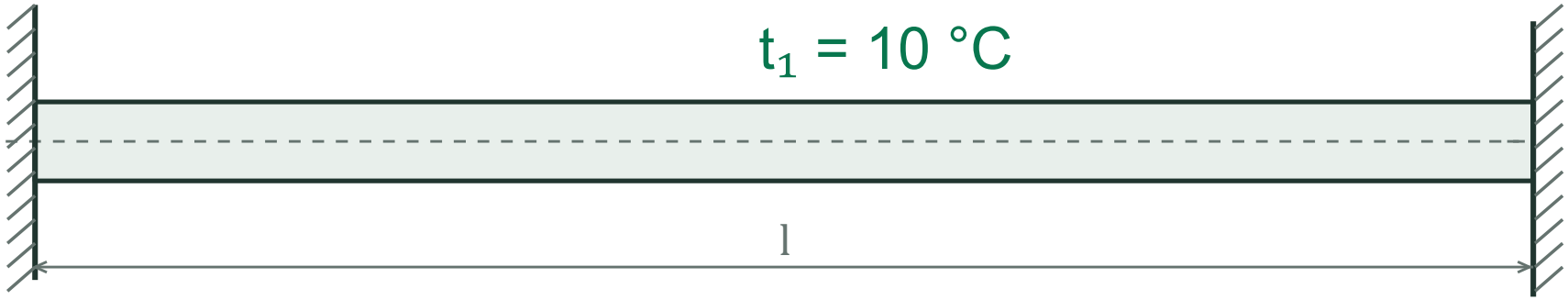
Prut stálého průřezu, konstantní E a N

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

Veličina	Význam
EA	tuhost průřezu
EA / l	tuhost prutu
l / EA	poddajnost prutu

Příklad: zahřátí ocelové tyče

Ocelová tyč je na obou koncích pevně upnuta. Při teplotě 10 °C je v nenapjatém stavu. Jaké napětí vznikne při zahřátí na 100 °C?



$t_1 = 10\ ^\circ\mathrm{C}\quad t_2 = 100\ ^\circ\mathrm{C}$

$E = 210\ \mathrm{GPa}\quad \alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$

Zabráněná teplotní roztažnost

Volné teplotní prodloužení

$$\Delta l_T = \alpha \Delta T \, l \qquad \varepsilon_T = \alpha \Delta T$$

Pevné konce: celkové prodloužení je nulové

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T = 0$$

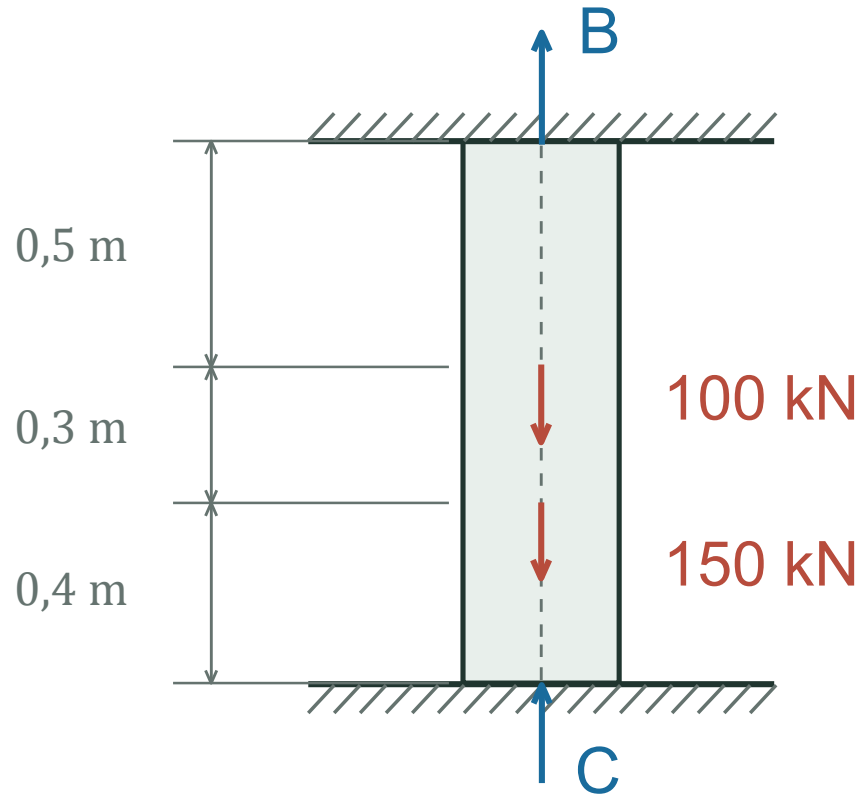
$$\sigma = E \, \varepsilon_T = -E \alpha \Delta T \qquad \sigma = -226{,}8 \text{ MPa}$$

Hookův zákon — Znaménko upraveno na mínus, protože tlak je záporný

ΔT = 100 − 10 = 90 K. V tyči vzniká tlakové napětí.

Příklad: prut vetknutý na obou koncích

Prut má stálou průřezovou plochu 10 cm² a je zatížen dvěma osovými silami. Určete napětí ve všech třech částech prutu.



A = 10 cm² = 0,001 m²

Materiál i průřez jsou po celé délce stejné.

Rovnováha + podmínka deformace

Řešení: rovnováha a deformace

Rovnováha sil

$$B+C-100-150=0$$

Pevné konce: Δl = 0

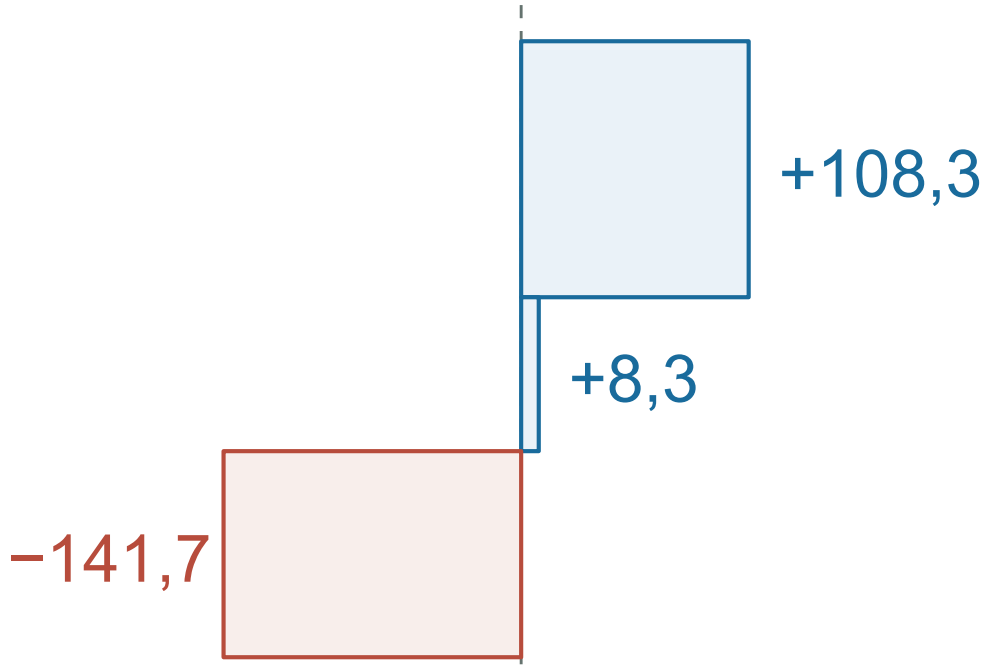
$$\frac{B\cdot 0,5}{EA}+\frac{(B-100)\cdot 0,3}{EA}+\frac{(B-250)\cdot 0,4}{EA}=0$$

$$1,2B-130=0 \qquad B=108,3\ \mathrm{kN} \qquad C=141,7\ \mathrm{kN}$$

V číselné rovnici jsou síly v kN a délky v m. Konstantní součin EA se vykrátí.

Výsledné normálové síly a napětí

Normálová síla N [kN]



$$\sigma_x = \frac{N}{A} \qquad A = 0,001\ \mathrm{m}^2$$

Napětí σ_x [MPa]

