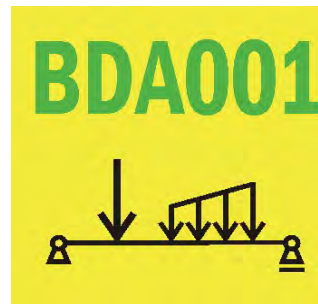


ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY



1. ročník Bc: Stavební inženýrství, letní semestr 2020/21

Zdeněk Kala

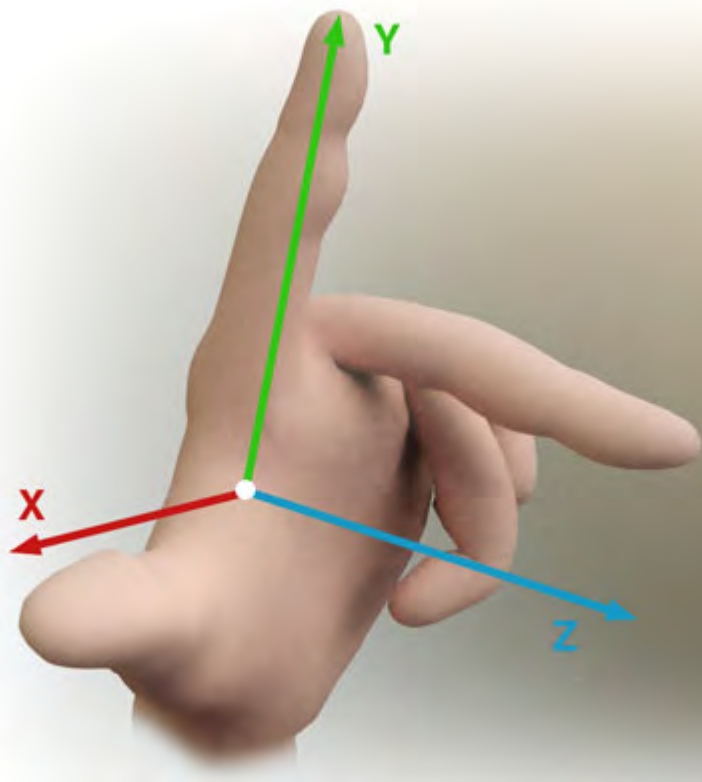
ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY

BDA001

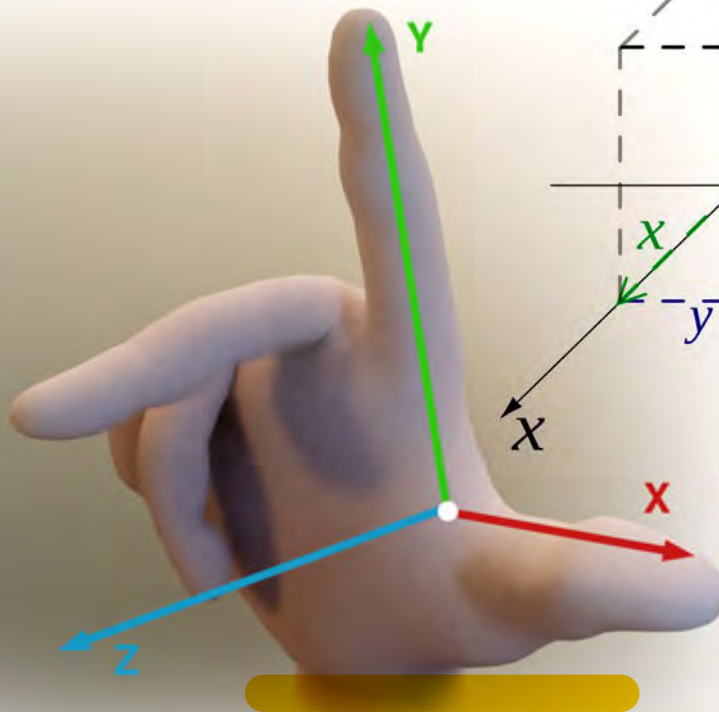
Základní pojmy a axiomy statiky. Rovinný svazek sil, výslednice, ekvivalence, rovnováha. Moment síly k bodu, dvojice sil. Soustava rovnoběžných sil v rovině a její statický střed.

Zdeněk Kala

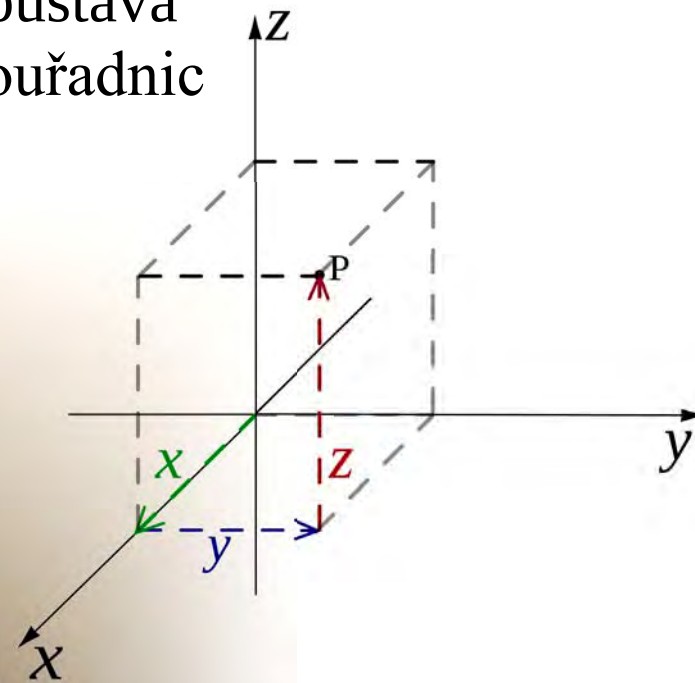
Pravotočivá a levotočivá soustava
prostorových kartézských souřadnic



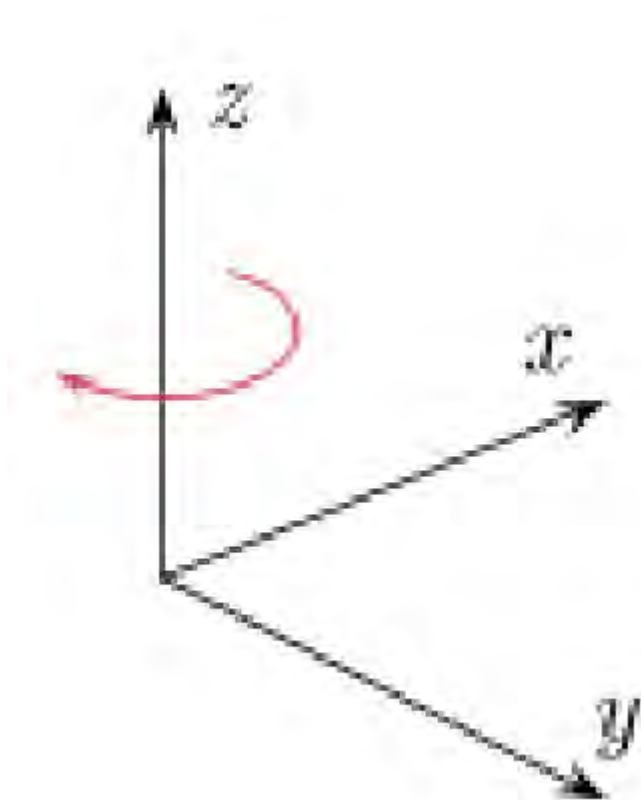
Levotočivá



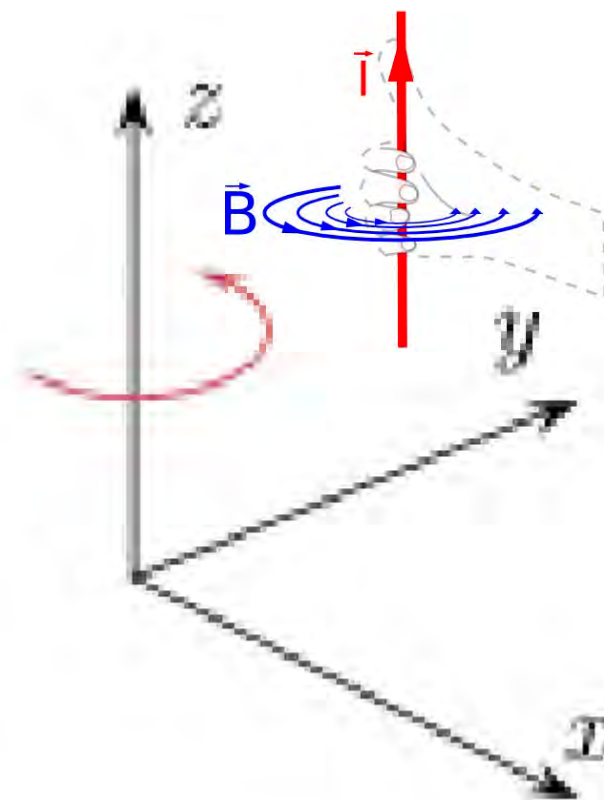
Pravotočivá



Pravotočivá a levotočivá soustava
prostorových kartézských souřadnic



Levotočivá

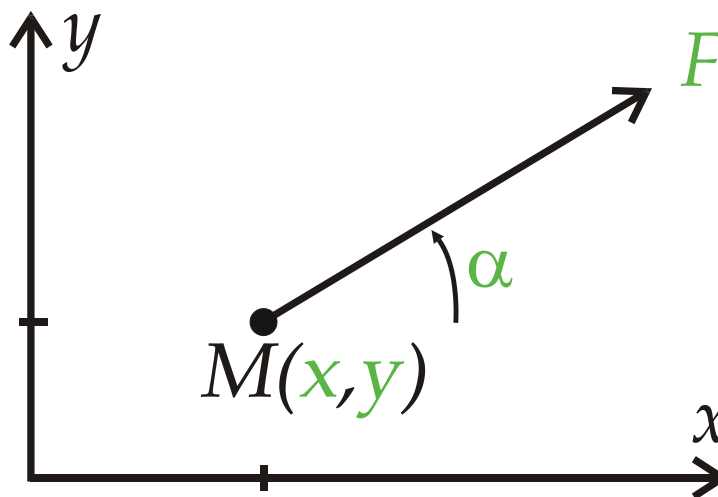
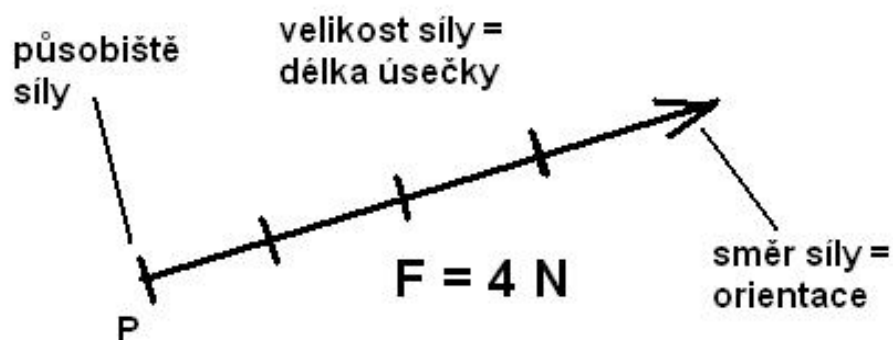


Pravotočivá

SÍLA

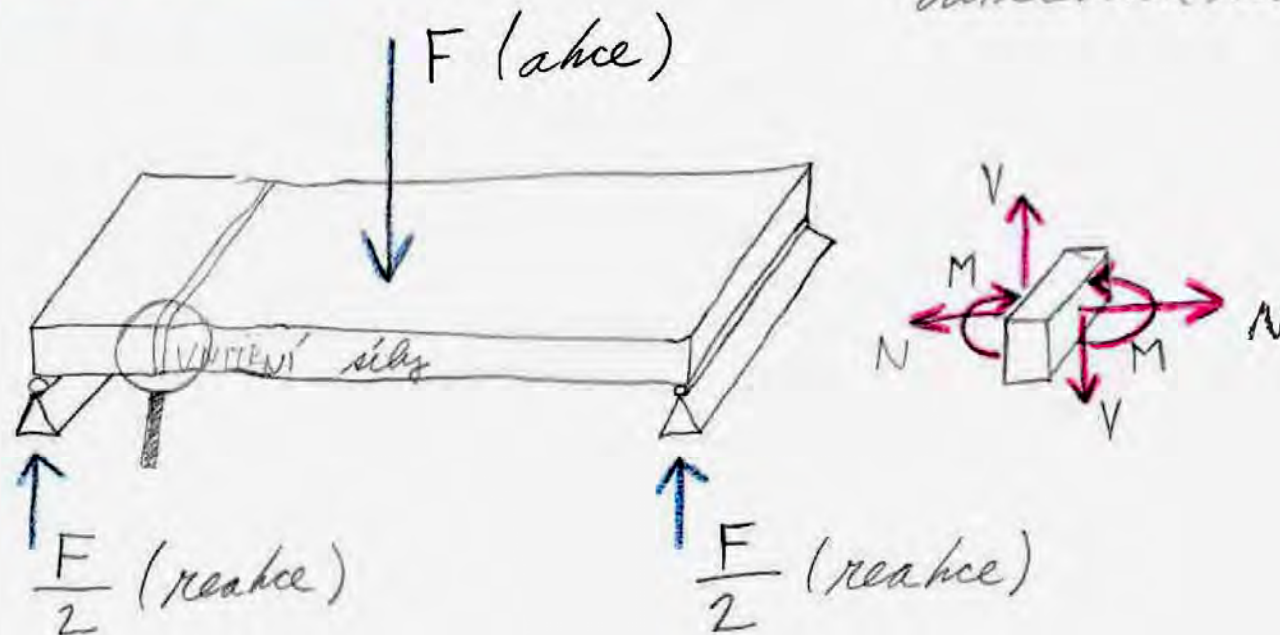
Síla je vektorová veličina, která je jednoznačně určena

- velikostí [N]
- směrem a smyslem [°]
- působištěm



SÍLA – VNITŘNÍ A VNĚJŠÍ

mějící síla (působí na těleso zvenčí) – akce
vnitřní síla (vzniká uvnitř tělesa působením v důsledku namáhání) – reakce



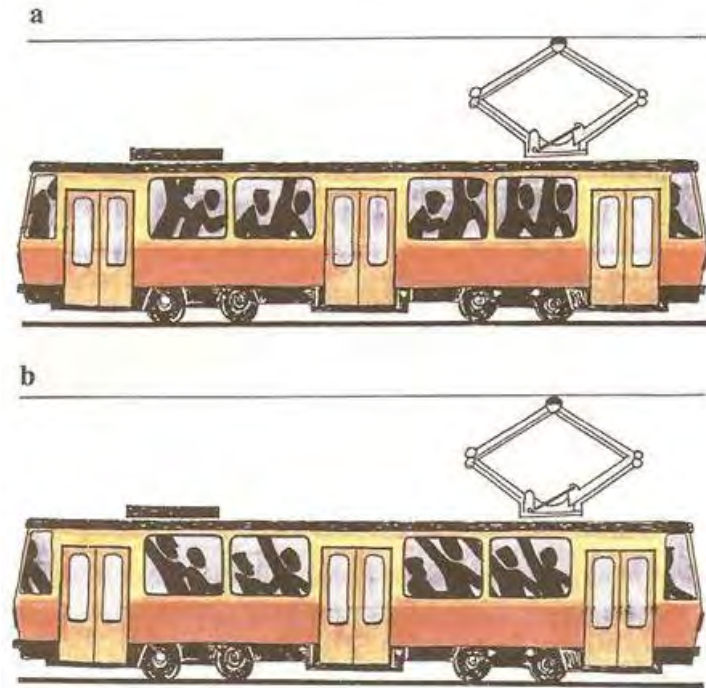
NEWTONOVY POHYBOVÉ ZÁKONY

1. ZÁKON SETRVAČNOSTI

Těleso zůstává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, pokud na něj nepůsobí žádné vnější síly (nebo jsou tyto síly v rovnováze)

Příklady projevů zákona setrvačnosti

- Letící šíp
- Setrvačná síla v brzdící tramvaji



NEWTONOVY POHYBOVÉ ZÁKONY

2. ZÁKON SÍLY

Působí-li na těleso síla, která není s jinou silou v rovnováze, pohybuje se těleso rovnoměrně zrychleným pohybem (zrychluje nebo zpomaluje).

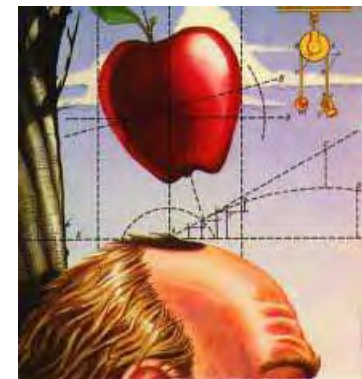
Velikost zrychlení je přímo úměrná působící síle (kolikrát bude větší síla, tolikrát bude větší velikost zrychlení tělesa).

Velikost zrychlení (a) je nepřímo úměrná hmotnosti tělesa (kolikrát bude větší hmotnost tělesa, tolikrát bude velikost zrychlení tělesa menší).

$$a = \frac{F}{m}$$

$$F = m \cdot a$$

1 N je síla, kterou Země působí na těleso o hmotnosti 0,1 kg:



NEWTONOVY POHYBOVÉ ZÁKONY

3. ZÁKON AKCE A REAKCE (zákon vzájemného působení sil)

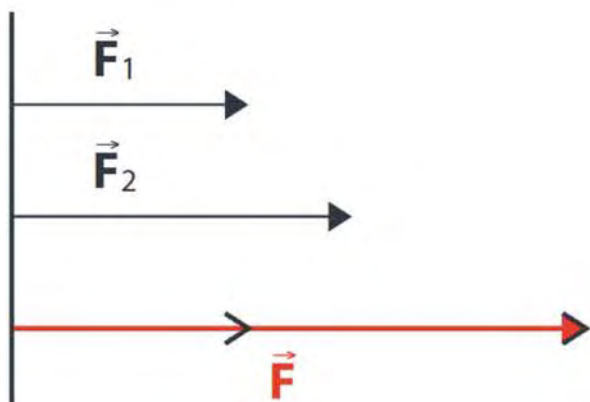
- Působí-li jedno těleso na druhé silou (akce), působí druhé na první stejně velkou silou opačného směru (reakce).
- Síly vzájemného působení současně vznikají a současně zanikají.
- Vzájemné působení sil (akce a reakce) je něco jiného než rovnováha sil. U rovnováhy sil působí dvě stejně velké síly opačného směru na jedno jediné těleso. V případě akce a reakce působí každá síla na jiné těleso.



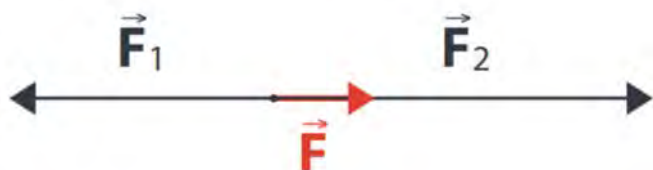
SKLÁDÁNÍ SIL

Síla, která má na těleso stejný účinek jako několik současně působících sil, se nazývá výslednice těchto sil. Nalezení výslednice sil se nazývá **skládání sil**.

Výslednice sil **stejného směru** na jedné přímce má se silami stejný směr a její velikost se rovná součtu velikostí všech sil. Pohybový účinek síly na pevné těleso se nezmění, posune-li se její působíště do jiného bodu tělesa po přímce, ve které síly působí.

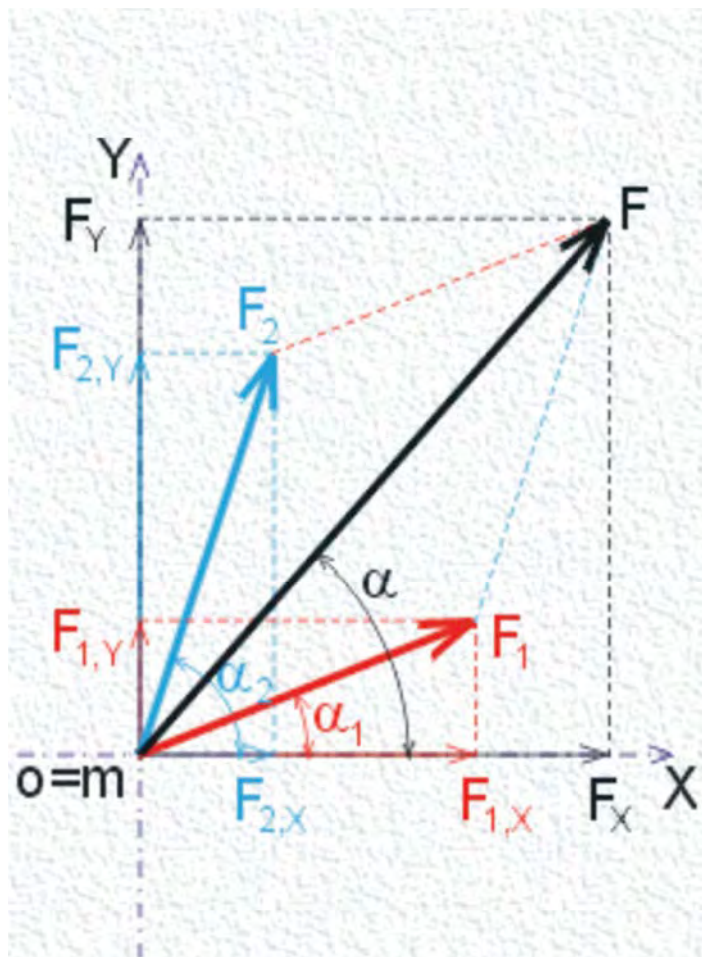


Výslednice dvou sil opačného směru má stejný směr jako větší síla a její velikost se rovná rozdílu velikosti obou sil.



SKLÁDÁNÍ SIL

U dvou sil **různého směru** se **společným působištěm** získáme výslednici doplněním na rovnoběžník



$$F_{1,x} = F_1 \cos \alpha_1$$

$$F_{2,x} = F_2 \cos \alpha_2$$

a do složek $F_{1,y}$ a $F_{2,y}$ rovnoběžných s osou y :

$$F_{1,y} = F_1 \sin \alpha_1$$

$$F_{2,y} = F_2 \sin \alpha_2$$

Potom vodorovnou a svislou složku síly F dostaneme ze vztahů :

$$F_x = F_{1,x} + F_{2,x}$$

$$F_y = F_{1,y} + F_{2,y}$$

Výslednou velikost síly F pak dostaneme ze vztahu :

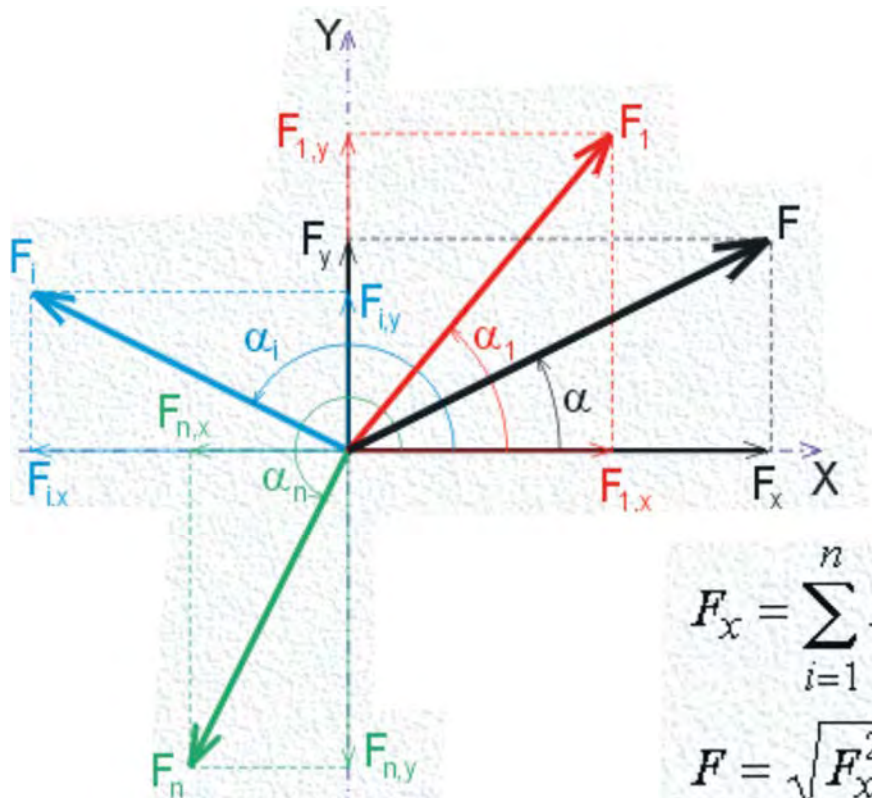
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Úhel α a síly F dostaneme ze vztahů :

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} \quad \sin \alpha = \frac{F_y}{F}$$

SKLÁDÁNÍ SIL

U dvou nebo více sil **různého směru** se **společným působištěm** získáme výslednici obdobně, tj. rozkladem každé síly do vodorovného a vertikálního směru:



$$F_x = \sum_{i=1}^n F_{i,x} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i$$

$$F_y = \sum_{i=1}^n F_{i,y} = \sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha_i$$

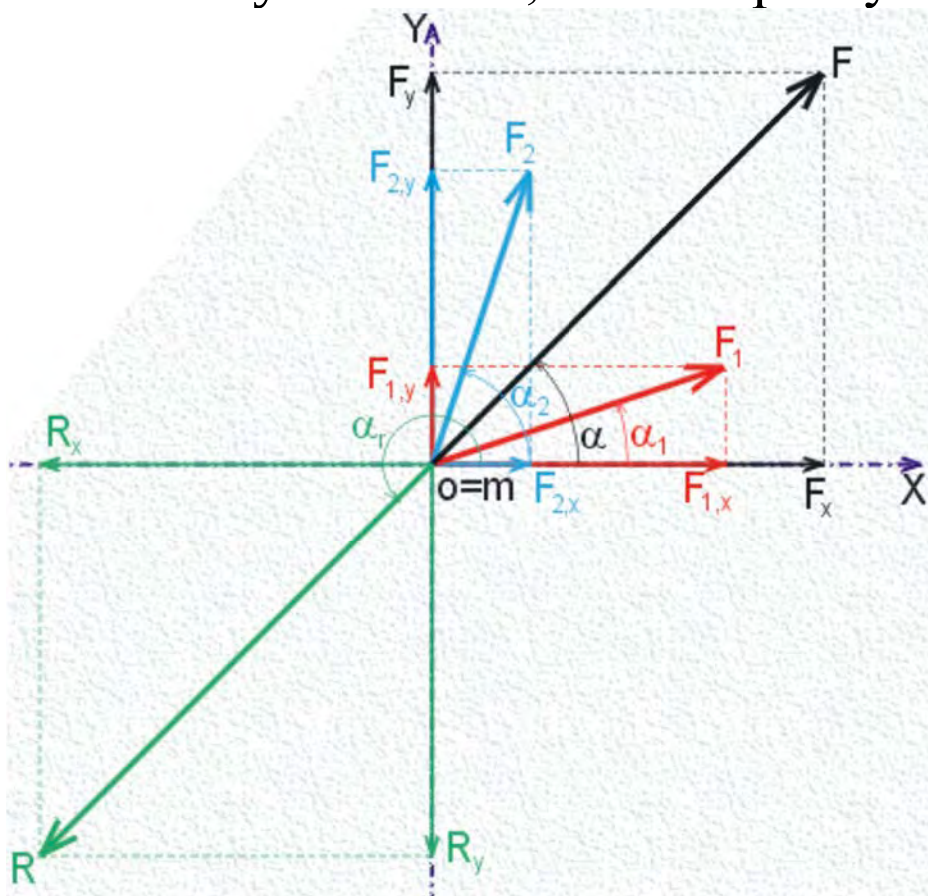
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} \quad \sin \alpha = \frac{F_y}{F}$$

VÝSLEDNICE A ROVNOVÁŽNÁ SÍLA

Výslednice je síla, kterou nahrazujeme účinek soustavy sil. Tedy statický účinek soustavy sil je stejný jako statický účinek výslednice.

Rovnovážná síla je síla, která vyrovnává účinek soustavy sil tak, že výsledný statický účinek soustavy sil a rovnovážné síly je nulový. Velikost rovnovážné síly R je shodná s velikostí výslednice F , ale má opačný směr.



Výslednice soustavy sil F_i je síla F , jejíž velikost určíme ze vztahů :

$$F_x = \sum_{i=1}^n F_{i,x} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i$$

$$F_y = \sum_{i=1}^n F_{i,y} = \sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha_i$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} \quad \sin \alpha = \frac{F_y}{F}$$

Rovnovážnou sílu R k soustavě sil F_i určíme ze vztahů :

$$R_x + \sum_{i=1}^n F_{i,x} = 0$$

$$R_y + \sum_{i=1}^n F_{i,y} = 0$$

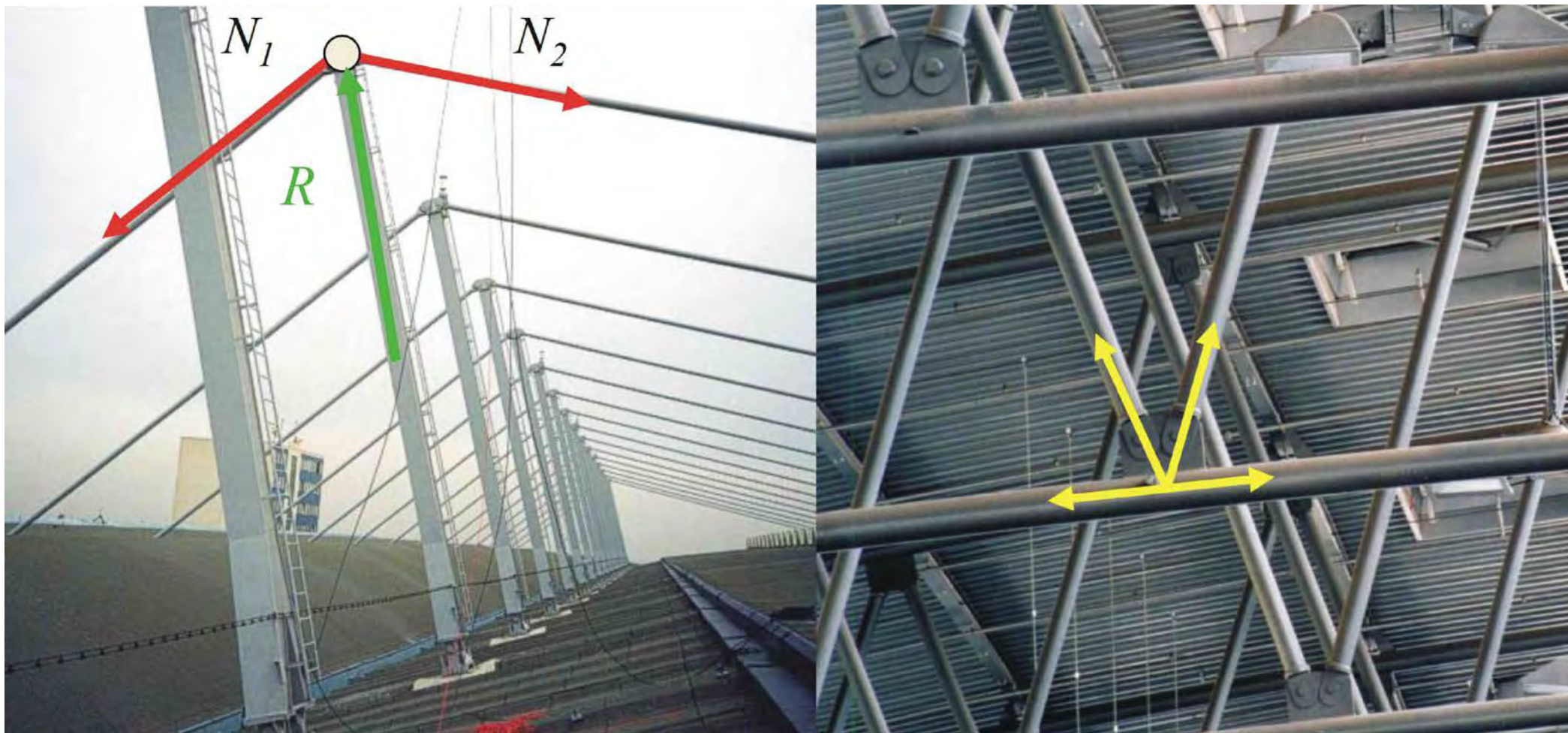
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\cos \alpha_r = \frac{R_x}{R} \quad \sin \alpha_r = \frac{R_y}{R}$$

Po přidání síly R jsou splněny silové podmínky rovnováhy ve směru x a y .

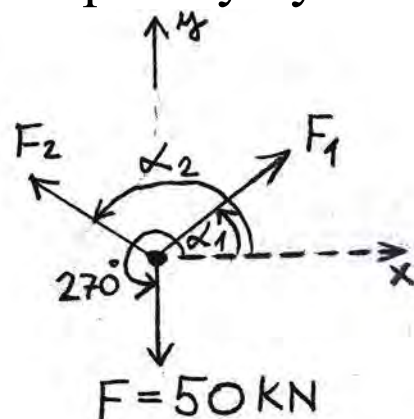
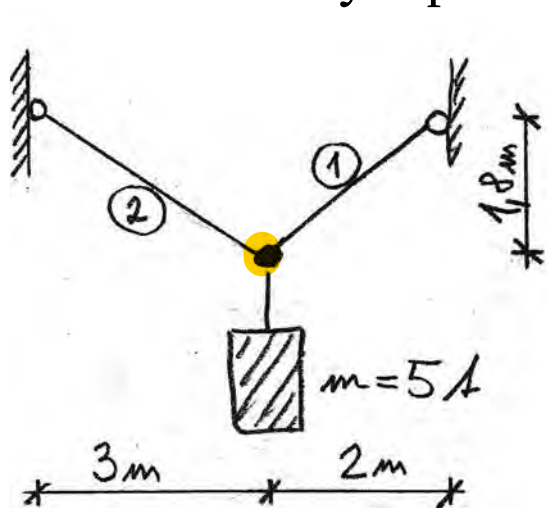
ROVNOVÁHA VE STYČNÍKU

Rovnovážná soustava sil- výslednice je nulová.



ROVNOVÁHA VE STYČNÍKU

Vypočtete osově síly v prutech 1 a 2. Správný výsledek má dobře jednotku a znaménko!



$$F = m \cdot g$$

$$F = 5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$F = 50 \cdot 10^3 \text{ N} = 50 \text{ kN}$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{1.8}{3} \Rightarrow \alpha_1 = 31^\circ$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{1.8}{2} \Rightarrow \alpha_2 = 42^\circ$$

$$\alpha_2 = 180^\circ - 31^\circ = 149^\circ$$

2 podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_1 \cdot \cos \alpha_1 + F_2 \cdot \cos \alpha_2 + F \cdot \cos 270^\circ = 0$$

$$F_1 \cdot \sin \alpha_1 + F_2 \cdot \sin \alpha_2 + F \cdot \sin 270^\circ = 0$$

$$F_1 \cdot \cos 42^\circ + F_2 \cdot \cos 149^\circ + 50 \text{ kN} \cdot \cos 270^\circ = 0$$

$$F_1 \cdot \sin 42^\circ + F_2 \cdot \sin 149^\circ + 50 \text{ kN} \cdot \sin 270^\circ = 0$$

$$F_1 \cdot 0.743 - F_2 \cdot 0.857 = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 \cdot \frac{0.857}{0.743}$$

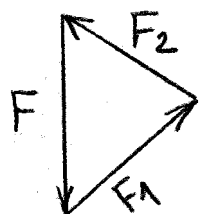
$$F_1 \cdot 0.669 + F_2 \cdot 0.514 - 50 \text{ kN} = 0$$

$$F_2 \cdot \frac{0.857}{0.743} \cdot 0.669 + F_2 \cdot 0.514 - 50 \text{ kN} = 0$$

$$F_2 \cdot 1.286 = 50 \text{ kN} \Rightarrow F_2 = 38.873 \text{ kN}$$

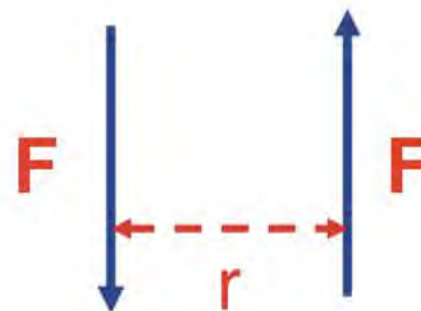
$$F_2 = 38.873 \text{ kN}$$

$$F_1 = 44.837 \text{ kN}$$



STATICKÝ MOMENT DVOJICE SIL

- **dvojice sil**
 - rovnoběžné
 - opačně orientované
 - stejně velké



Moment dvojice sil:

$$M = F \cdot r \quad [\text{kNm}]$$

moment je ke všem bodům v rovině stejný



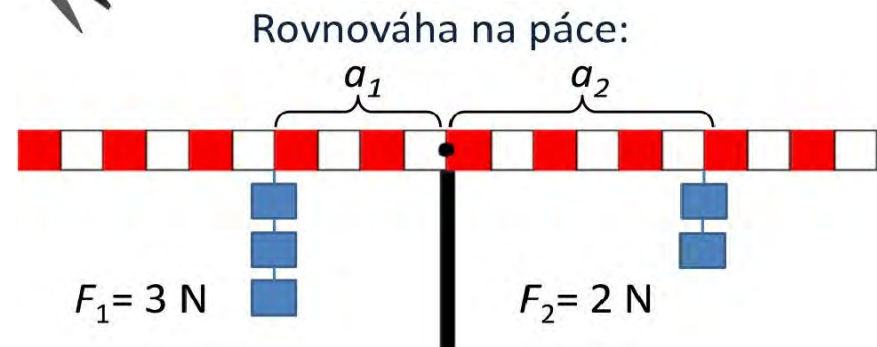
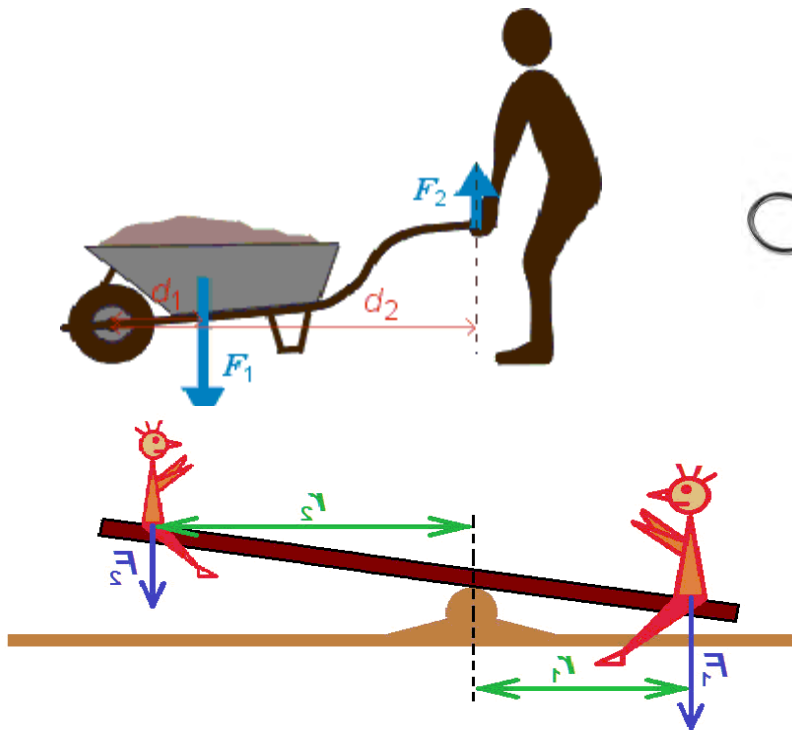
STATICKÝ MOMENT SÍLY K BODU



STATICKÝ MOMENT SÍLY

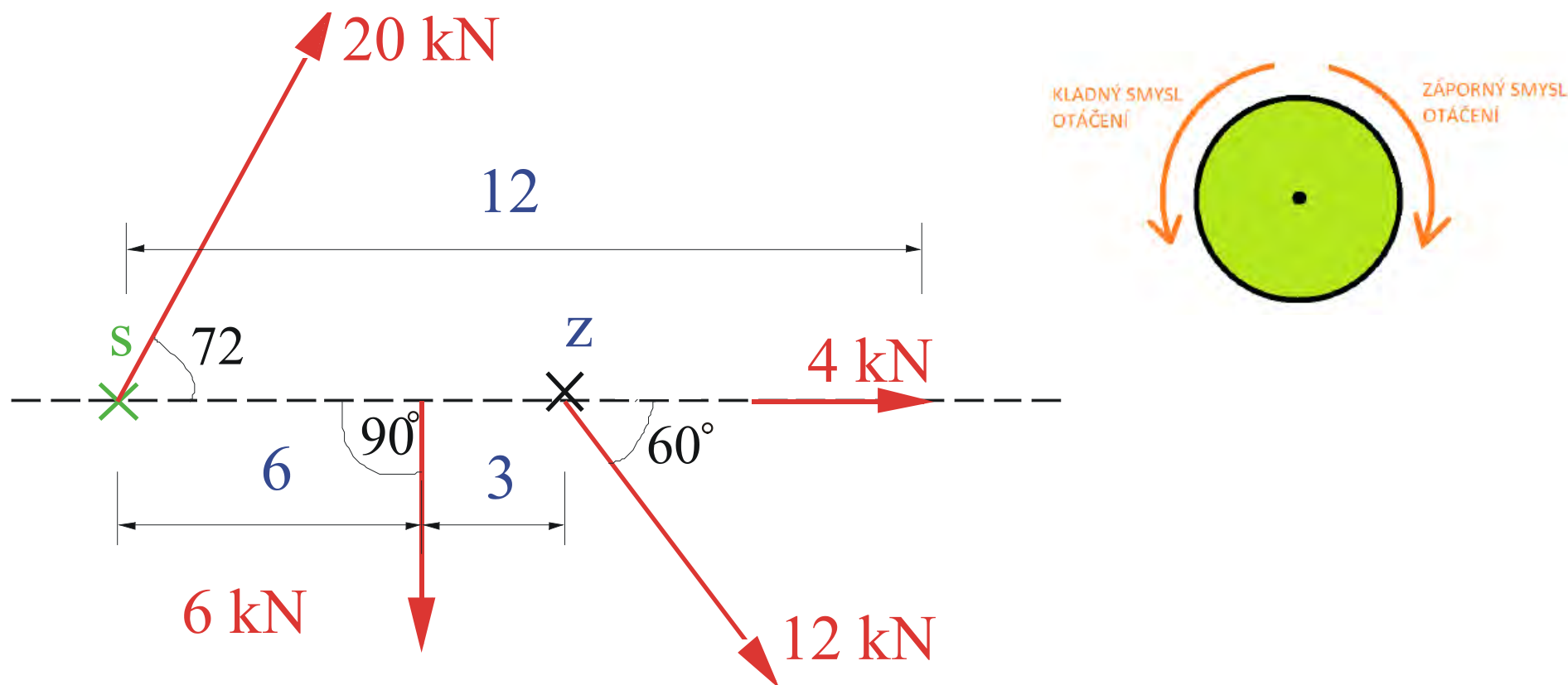
- Moment síly je fyzikální veličina, kterou označujeme M
- Jednotka momentu síly je $\text{N} \cdot \text{m}$ (newtonmetr)
- Moment síly je veličina, která popisuje otáčivý pohyb tělesa
- Vztah (vzoreček) pro výpočet momentu síly:

$$M = F \cdot r \quad [\text{kNm}]$$



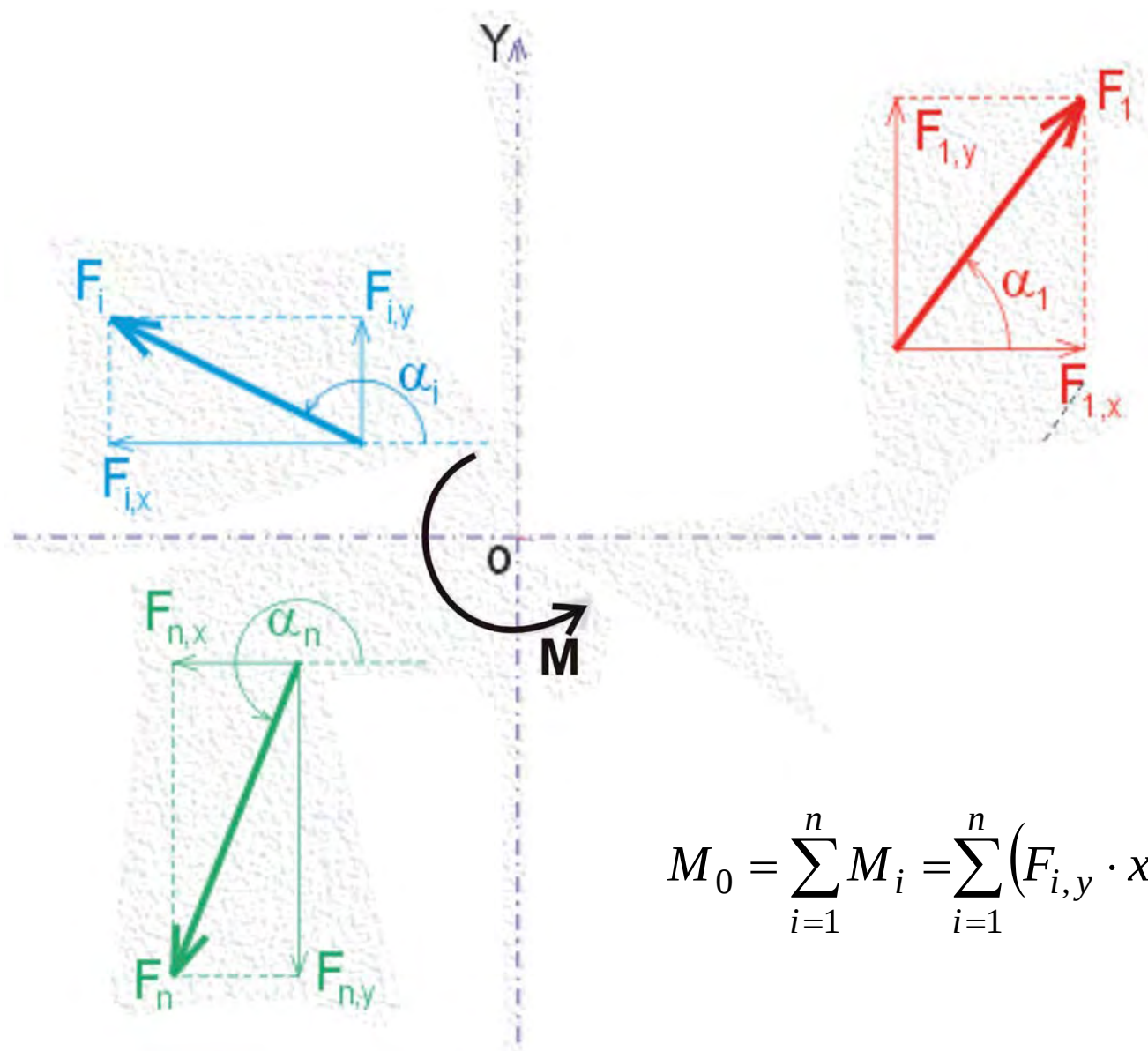
STATICKÝ MOMENT SIL K BODU

Stanovte výsledný moment sil k bodu **S**.



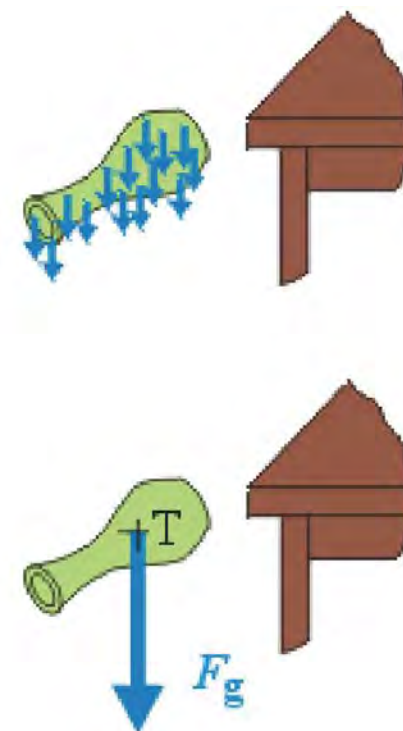
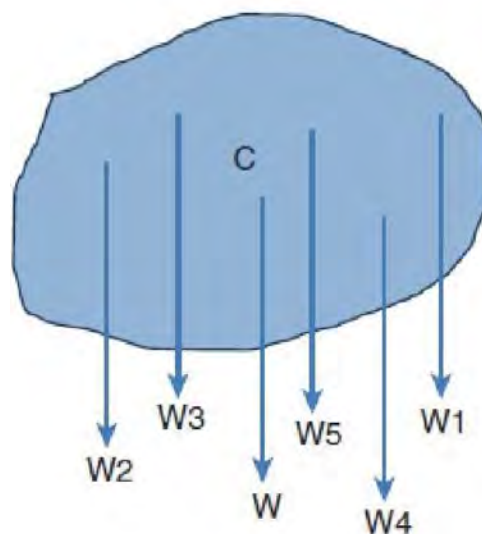
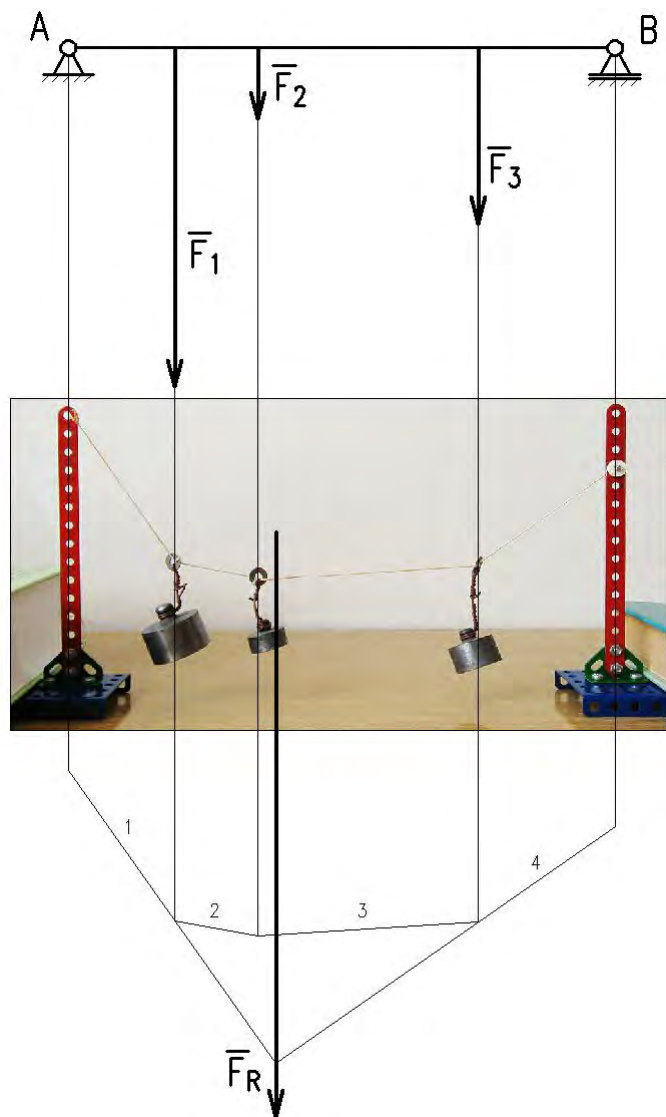
$$M_S = -6 \text{ kN} \cdot 6 \text{ m} - 12 \text{ kN} \cdot \sin(60^\circ) \cdot 9 \text{ m} = -129,53 \text{ kNm}$$

STATICKÝ MOMENT SIL K BODU

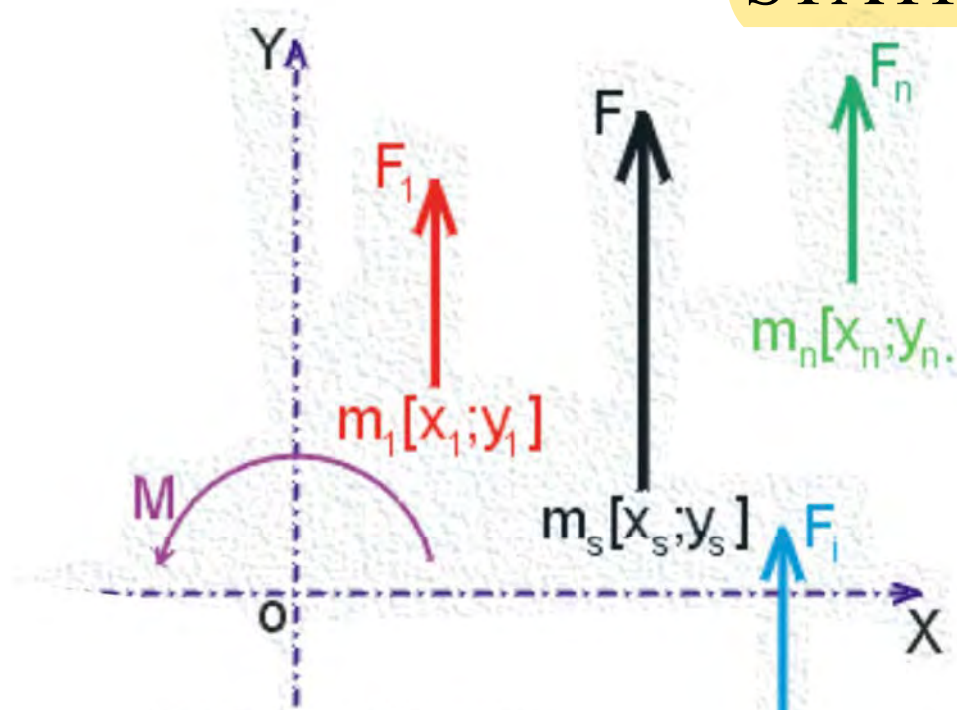


$$M_0 = \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n (F_{i,y} \cdot x_i - F_{i,x} \cdot y_i)$$

SOUSTAVA ROVNOBĚŽNÝCH SIL V ROVINĚ A JEJÍ STATICKÝ STŘED



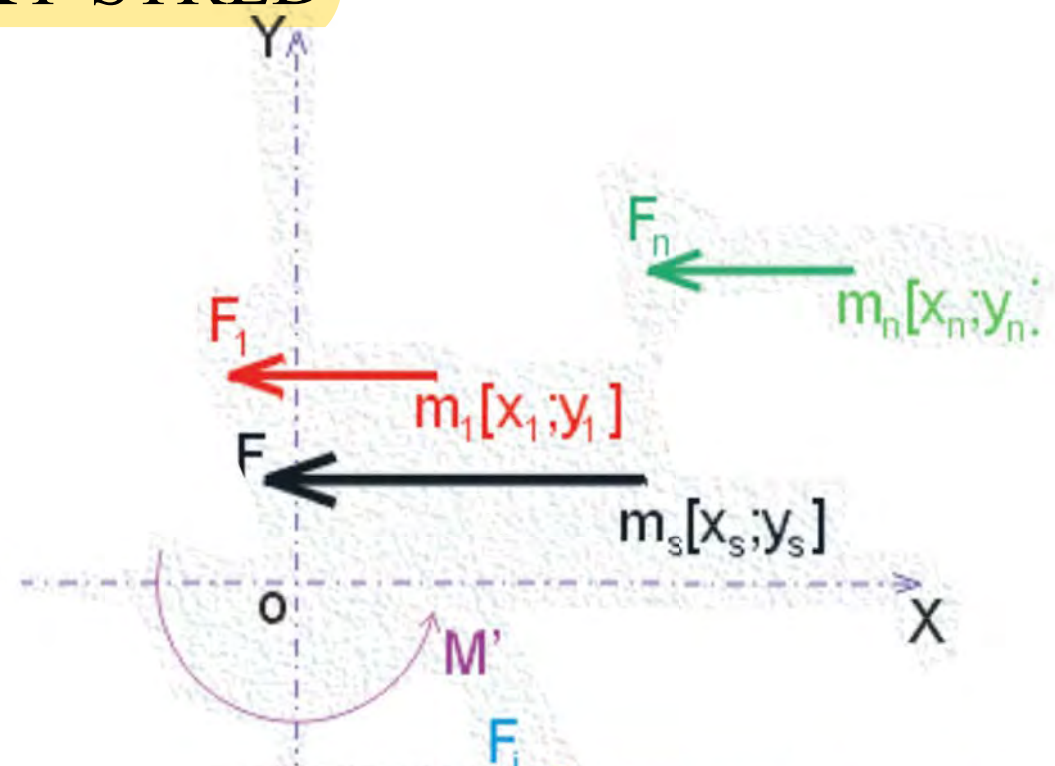
SOUSTAVA ROVNOBĚŽNÝCH SIL V ROVINĚ A JEJÍ STATICKÝ STŘED



$$F \cdot x_s = \sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i$$

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

$$F = \sum_{i=1}^n F_i$$



$$F \cdot y_s = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i$$

$$y_s = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY

BDA001

Obecná rovinná soustava sil. Statické modely rovinných konstrukcí, vazby a podepření v rovině, zatížení. Výpočet reakcí ve vazbách.

Zdeněk Kala

OBEČNÁ ROVINNÁ SOUSTAVA SIL - VÝSLEDNICE

Rozložíme každou sílu F_i do pravoúhlých složek F_{ix} , F_{iy} o velikostech

$$F_{ix} = F_i \cos \alpha_i, \quad F_{iy} = F_i \sin \alpha_i. \quad (1)$$

Složky F_{ix} , F_{iy} přeložíme do souřadnicových os x , y a do počátku o , tj. přidáme moment M_{io} (2), nebo dvě dvojice sil o velikosti výsledného momentu

$$M_{io} = F_{iy} x_i - F_{ix} y_i = F_i (x_i \sin \alpha_i - y_i \cos \alpha_i). \quad (2)$$

Pro všechny síly soustavy se původní soustava ekvivalentně nahradí třemi silovými soustavami, a to

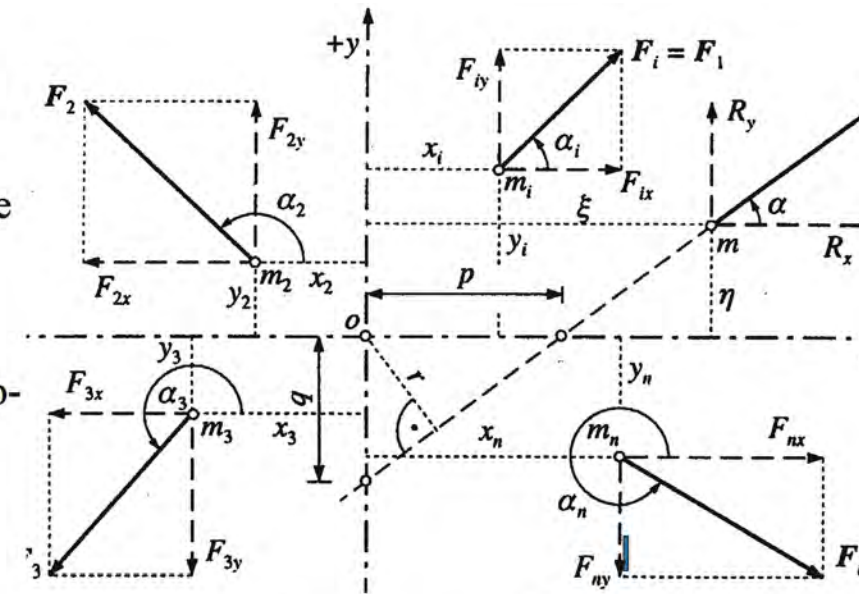
- soustavou sil F_{ix} v ose x (výslednice R_x),
- soustavou sil F_{iy} v ose y (výslednice R_y),
- soustavou silových dvojic M_{io} (výsledný moment M_o)

a platí **tři podmínky ekvivalence**

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i = R \cos \alpha,$$

$$M_o = \sum_{i=1}^n M_{io} = \sum_{i=1}^n F_i (x_i \sin \alpha_i - y_i \cos \alpha_i).$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = \sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha_i = R \sin \alpha,$$



$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad \cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \sin \alpha = \frac{R_y}{R}.$$

Výsledný účinek obecné rovinné soustavy sil určují tři parametry:

- síla R procházející počátkem (R , α) a
- dvojice sil o momentu M_o rovném statickému momentu soustavy k počátku o .

Vektory R , M_o lze nahradit silou posunutou o vzdálenost $r = M_o / R$.

OBEČNÁ ROVINNÁ SOUSTAVA SIL - ROVNOVÁHA

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad \cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \sin \alpha = \frac{R_y}{R}. \quad (4)$$

Výsledný účinek obecné rovinné soustavy sil určují tři parametry:

- síla $\mathbf{R}$ procházející počátkem (R, α) a
- dvojice sil o momentu $\mathbf{M}_o$ rovném statickému momentu soustavy sil k počátku o .

Vektory $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_o$ lze nahradit silou posunutou o vzdálenost $r = M_o / R$.

Obecná rovinná soustava sil je v rovnováze, platí-li tři podmínky, u nichž tři složky jsou rovny nule. Varianty využití **podmínek rovnováhy** jsou tři:

- **dvě silové a jedna momentová** podmínka, využitelné pro výpočet složek reakcí *konzoly*, jsou

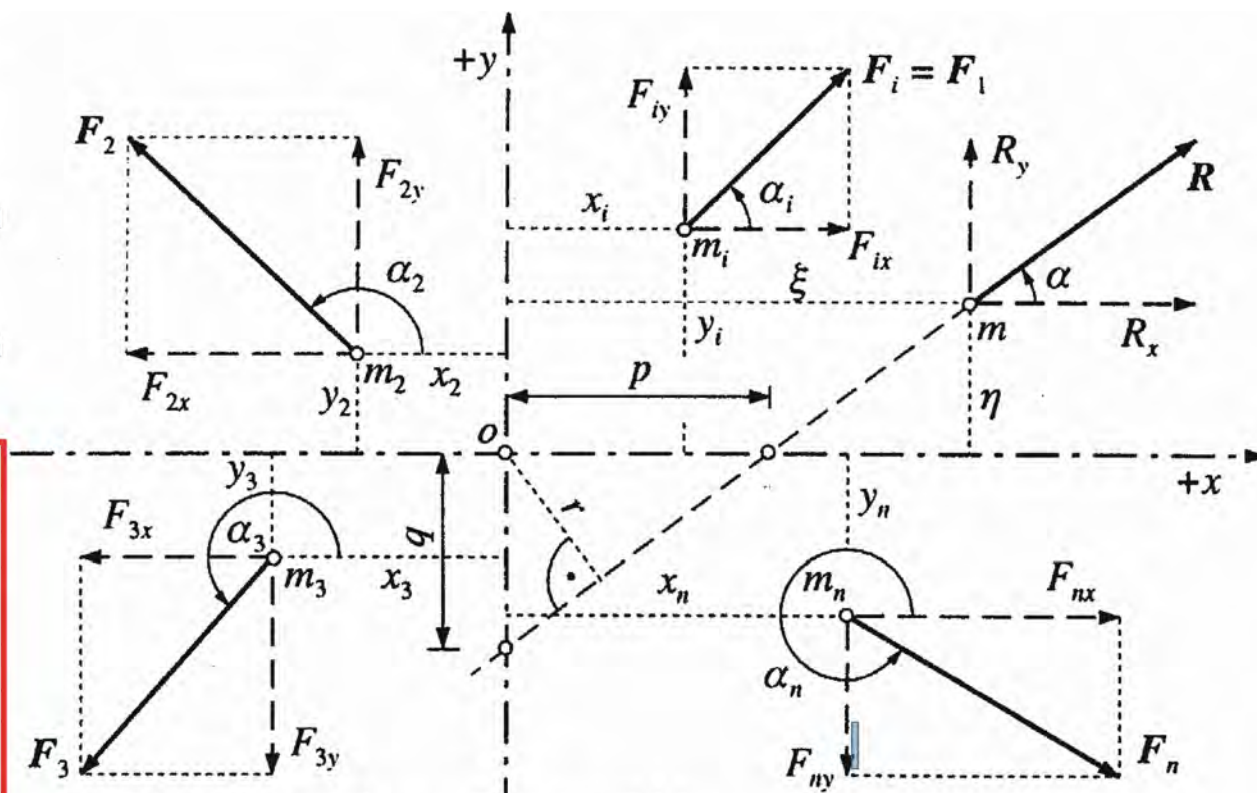
$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad M_o = \sum_{i=1}^n M_{io} = 0; \quad (5)$$

- **dvě momentové a jedna silová** podmínka (předepsaná pro směr ne-
kolmý na spojnici momentových středů $a-b$), využitelné pro výpočet
složek reakcí *prostého nosníku*, jsou

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad M_a = \sum_{i=1}^n M_{ia} = 0, \quad M_b = \sum_{i=1}^n M_{ib} = 0; \quad (6)$$

- **tři momentové** podmínky (momentové středy a, b, c neleží na jedné
přímce), využitelné pro výpočet složek reakcí *nosníku podepřeného ve
třech bodech*, mají tvar

$$M_a = \sum_{i=1}^n M_{ia} = 0, \quad M_b = \sum_{i=1}^n M_{ib} = 0, \quad M_c = \sum_{i=1}^n M_{ic} = 0 \quad (7)$$



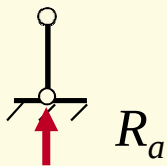
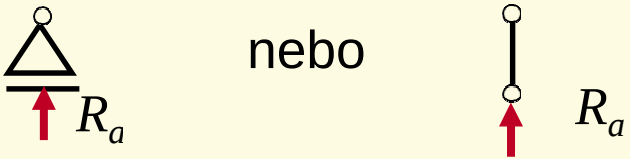
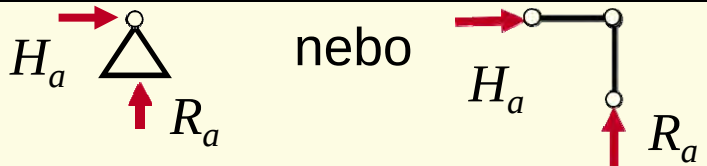
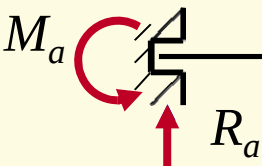
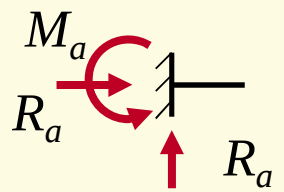
Speciální případy podmínek rovnováhy nastanou, když:

- je splněna jen podmínka $\sum F_{iy} = 0$, pak $\mathbf{R}$ je kolmá k ose y nebo jde o dvojici sil,
- jsou splněny jen podmínky $\sum F_{ix} = 0$, $\sum F_{iy} = 0$, pak výslednicí je dvojice sil,
- je splněna jen podmínka $\sum M_{io} = 0$ pro o_1 , pak paprsek výslednice prochází o_1 , výslednicí nemůže být dvojice sil,
- jsou splněny jen podmínky $\sum M_{io} = 0$ pro o_1, o_2 , pak paprsek výslednice je určen body o_1, o_2 .

Příklady jednoduchých vazeb tuhého prutu v rovině

Vnější vazby reakcemi odebírají nosníku stupně volnosti.

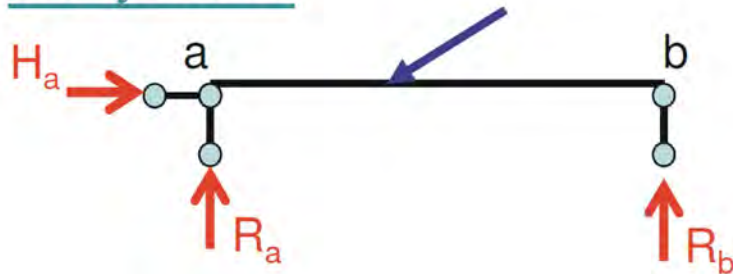
n –násobná vazba ruší objektu **n stupňů volnosti**.

Název vazby	Násobnost vazby	Označení vazby a reakce
Kyvný prut	1	
Posuvná kloubová podpora	1	
Pevný kloubová podpora	2	
Posuvné vetknutí	2	
Dokonalé vetknutí	3	

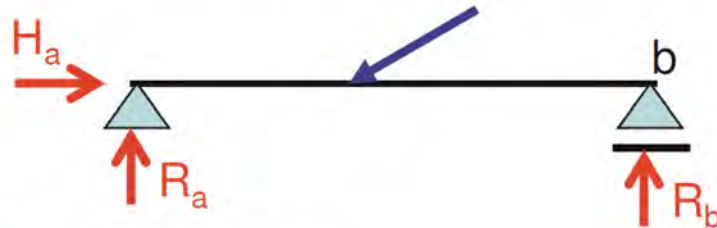
Staticky určité podepření

- staticky určité podepřený nosník – vazbami jsou zrušeny právě jeho 3 stupně volnosti a zatížený nosník je v rovnováze
- vazby (jsou v nich reakce) jsou jednoznačně dány typem podpory a místem, kde podpírají nosník

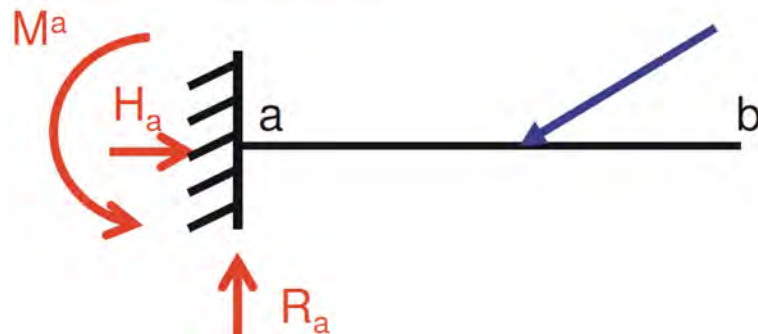
Prostý nosník



Totožné podepření, jiný model podpor:



Konzolový nosník



Výpočet reakcí:

- odhadnout směr reakcí podle zatížení a zakreslit je do obrázku
- sestavit 3 podmínky rovnováhy (v každé rovnici jen jedna neznámá reakce)
- Sestavit u prostého nosníku 4. kontrolní rovnici (u konzoly není většinou zapotřebí)

PODEPŘENÍ, VNĚJŠÍ VAZBY



PODEPŘENÍ, VNĚJŠÍ VAZBY



Úlohy kinematiky v oboru stavební mechaniky:

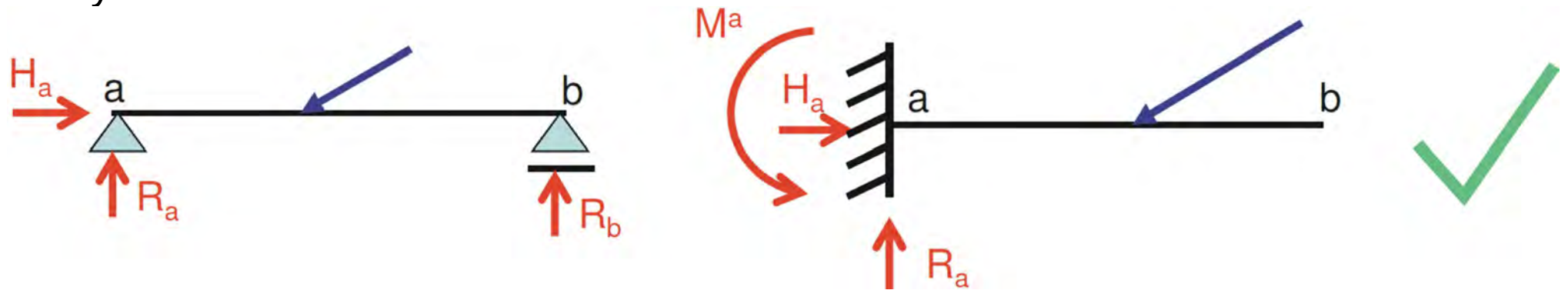
- a) určit nejmenší nezbytně nutný počet vnějších i vnitřních (u soustav) vazeb pro zajištění dokonalé nehybnosti konstrukce
- b) připojit tyto vazby k tělesu (tělesům) konstrukce způsobem zajišťujícím dokonalou nehybnost (nebezpečí nevhodného umístění)

Typy konstrukcí z hlediska kinematiky:

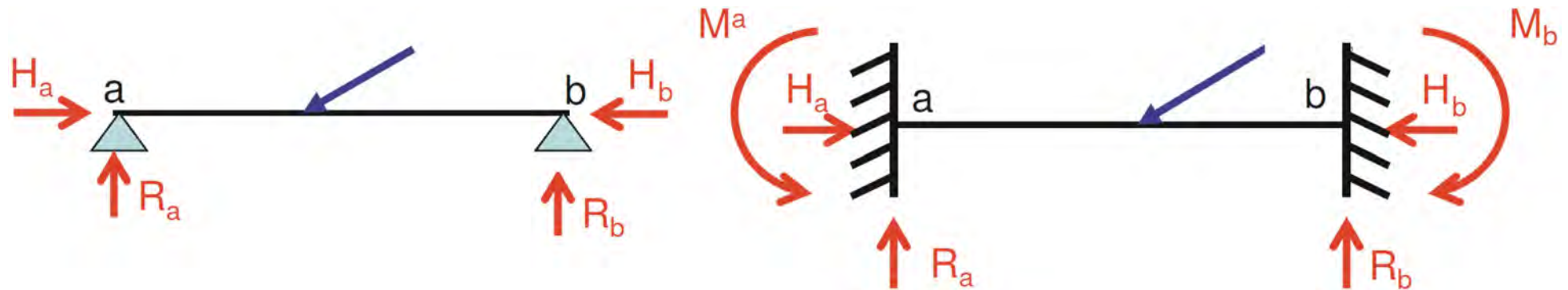
- a) **Kinematicky určité**: konstrukce podepřené nejmenším nezbytně nutným počtem správně umístěných vazeb, nehybnost konstrukcí zajištěna, zabývá se obor stavební statika.
- b) **Kinematicky přeúčité**: konstrukce podepřené větším počtem správně umístěných vazeb, nehybnost konstrukcí zajištěna, nelze řešit pro dokonale tuhá tělesa, pouze za předpokladu reálně deformovatelných těles, zabývají se obory pružnost a plasticita, statika stavebních konstrukcí.
- c) **Kinematicky neurčité**: málo vazeb, nehybnost konstrukcí nezajištěna

Typy konstrukcí z hlediska kinematiky:

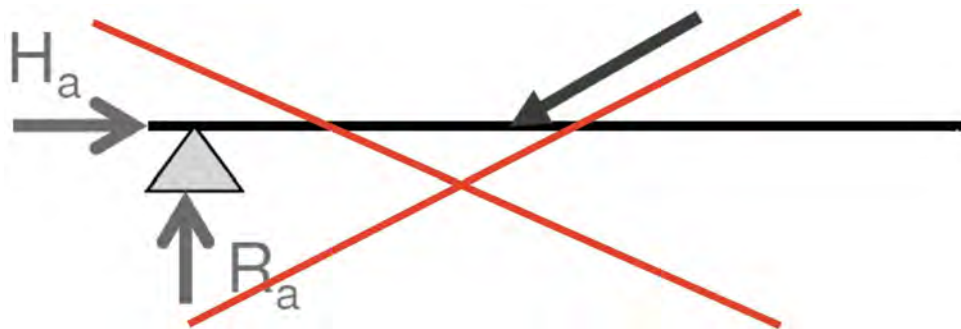
a) **Kinematicky určité**: konstrukce podepřená nejmenším nezbytně nutným počtem správně umístěných vazeb, nehybnost konstrukcí zajištěna, zabývá se obor stavební statika.



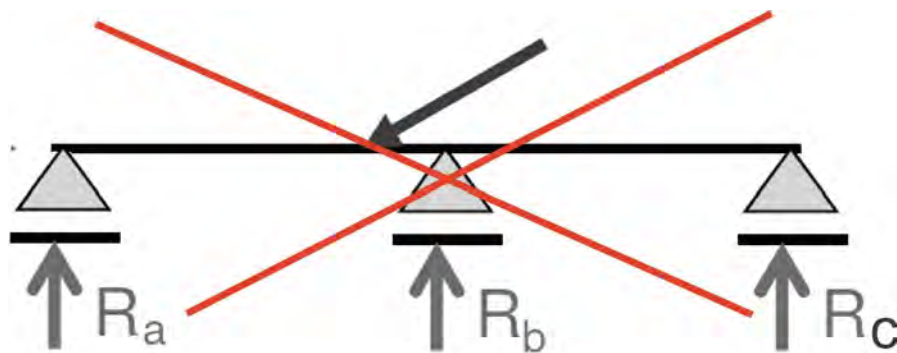
b) **Kinematicky přeúčité**: konstrukce podepřená větším počtem správně umístěných vazeb, nehybnost konstrukcí zajištěna, nelze řešit pro dokonale tuhá tělesa, pouze za předpokladu reálně neformovatelných těles, zabývají se obory pružnost a plasticita, statika stavebních konstrukcí.



c) **Kinematicky neurčitý:** málo vazeb, nehybnost konstrukcí nezajištěna



d) **Výjimkové případy:** vazeb dost, ale jsou nevhodně uspořádané



ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY

BDA001

Rovinné příhradové nosníky, statická a kinematická určitost.

Výpočet osových sil v prutech obecnou a zjednodušenou styčnickovou metodou, metodou průsečnou a její Ritterovou úpravou.

Přístup k řešení mimostyčnickového zatížení prutů rovinných příhradových konstrukcí.

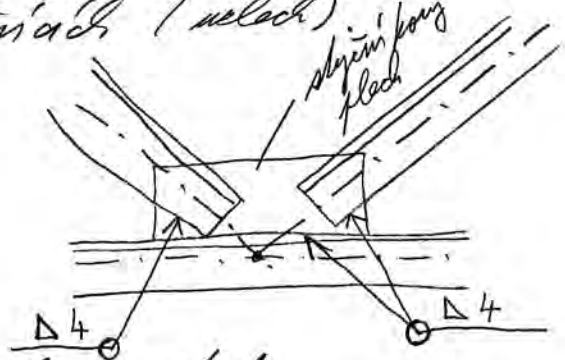
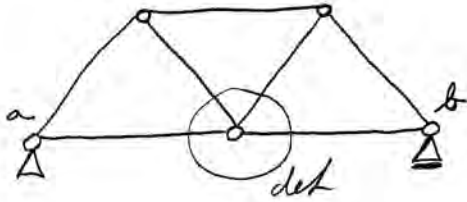
Zdeněk Kala

Obec Lužná v okrese Vsetín ve Zlínském kraji



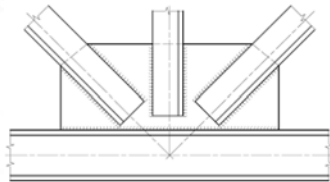
Rovinné kloubové prutové soustavy - příhradové nosníky

Příhradový nosník sestává z jednoduchých prutů vzájemně spojených ve styčných bodech (uzelch)

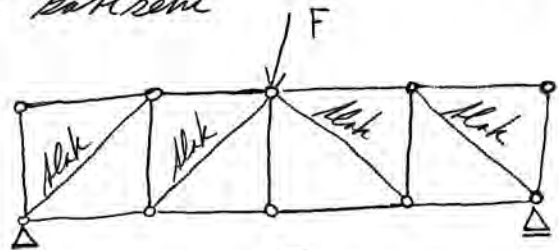
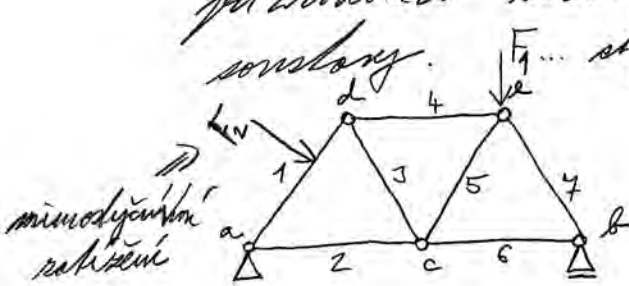


Ukrytí lze idealizovat kloubem pokud

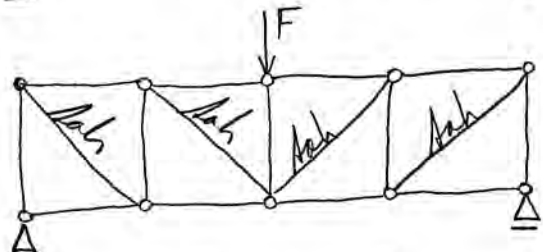
- osy spojujících prutů se protínají v jednom bodu
- skutečná kulost styčnicku odpovídá přibližně kloubu konstrukční lze interpretovat např. - dříve malé styčnické plochy?
- shodné uspořádání prutů apod.



Dokážeme-li je jednoduše vyjádřit model příhradového nosníku se tvarem kloubové prutové soustavy.



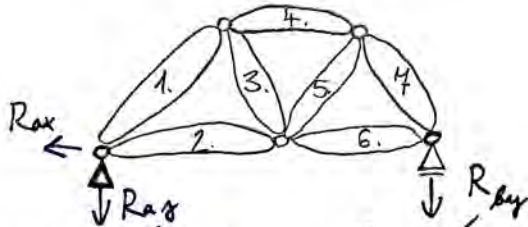
→ v mostním stříkání...



Pruty ideální prutové kloubové soustavy jsou namáhány pouze normálními osovými silami

Ukádka prvkové soustavy

- a) Soustava je tvořena z kulových desek v rovině
Tento model se nepoužívá moc často.



počet stupňů volnosti $v = 2b + 3d = 3 \cdot 4 = 21$
reakce vnějších, vnitř. vazeb $a = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 2 \sum_{m=3}^4 (m-1)k_m$

$$d = 4$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3$$

$$a_3 = 0$$

$$k_3 = 2$$

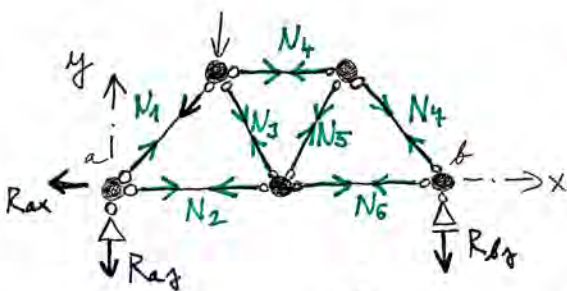
$$k_4 = 1$$

$$v = 3 \cdot 4 = 21$$

$$a = 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot (3-1) \cdot 2 + 2 \cdot (4-1) \cdot 1 = 21$$

$$v = a \dots \text{SU}$$

- b) Soustava je tvořena z lineárních bodů spojených
hybnými prvky



z složenky $\rightarrow$ hmotný bod se 2° volnosti
+ vnitřních prvků s 1° volnosti

a_1 - měřících jednorázových vazeb
($\triangle$!)

a_2 ($\triangle$)

$a = a_1 + 2a_2 \dots$ počet
složek reakcí měřících
vazeb

Pro SU soustavu musí platit

$$2b = f + a$$

(a_1)

$$b = 5$$

$$f = 4$$

$$a = 1 + 2 = 3$$

$$2 \cdot 5 = 4 + 3$$

$$10 = 10$$

složkové
podmínky
rovnováhy

složky reakcí
vnitřních a vnějších
vazeb

Determinant soustavy musí být různý od nuly
jinak se jedná o vyjímkový případ.

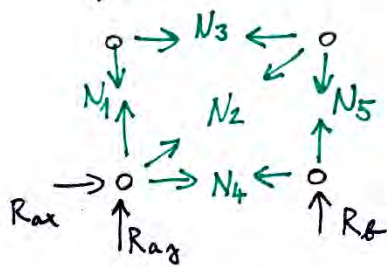
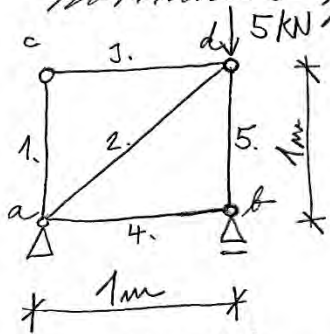
Reakce mějistých vazeb lze určit

- inerciálně na vnitřních reakcích pokud $a = 3$
- pro $a > 3$ nutno řešit součinníkovou metodou

Obyčnou součinníkovou metodou

- každý prut nahradíme dvěma silami opačného smyslu, kterými působí na příslušné součinníky
- v každém součinníku napíšeme 2 statické podmínky rovnováhy pro součet sil

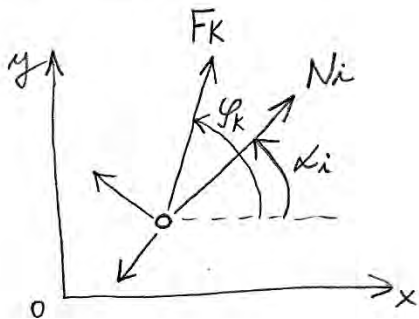
Pr: Obyčnou součinníkovou metodou řešte rovinnou prutovou přetvářecí konstrukci



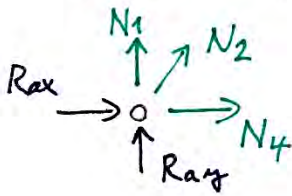
v každém součinníku c musí platit $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$.

$$\sum N_i \cos \alpha_i + \sum_c F_k \cos \gamma_k = 0$$

$$\sum N_i \sin \alpha_i + \sum F_k \sin \gamma_k = 0$$



- stýčnik a



$$\sum F_x = 0$$

$$N_1 \cdot \cos 90^\circ + N_2 \cdot \cos 45^\circ + N_4 \cdot \cos 0^\circ + R_{ax} \cdot \cos 0^\circ + R_{ay} \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$N_2 \cdot \cos 45^\circ + N_4 + R_{ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N_1 \cdot \sin 90^\circ + N_2 \cdot \sin 45^\circ + N_4 \cdot \sin 0^\circ + R_{ax} \cdot \sin 0^\circ + R_{ay} \cdot \sin 90^\circ = 0$$

$$N_1 + N_2 \cdot \sin 45^\circ + R_{ay} = 0$$

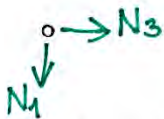
- stýčnik b



$$\sum F_x = 0 \quad N_4 \cdot \cos 180^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N_5 + R_b = 0$$

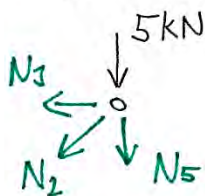
- stýčnik c



$$\sum F_x = 0 \quad N_3 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N_1 = 0$$

- stýčnik d



$$\sum F_x = 0$$

$$N_2 \cdot \cos 225^\circ + N_3 \cdot \cos 180^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N_2 \cdot \sin 225^\circ + N_5 \cdot \sin 270^\circ + 5 \text{ kN} \cdot \sin 270^\circ = 0$$

a
b
c
d

$$\begin{bmatrix} 0 & 0,707 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0,707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,707 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,707 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{bx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = 0$$

$$N_2 = 0$$

$$N_3 = 0$$

$$N_4 = 0$$

$$N_5 = -5$$

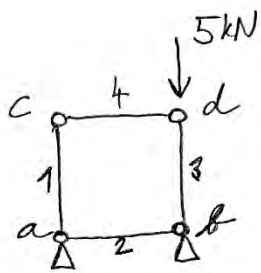
$$R_{ax} = 0$$

$$R_{ay} = 0$$

$$R_{bx} = 5$$

det = 0,707 ≠ 0 nem' vyjímáme' níže

Příklad: Řešení soustavy lineárních rovnic
pro zjištění konstrukce



$$b = 4$$

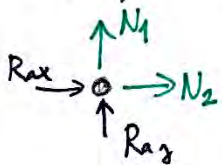
$$f = 4$$

$$a = 4$$

$$2 \cdot 4 = 4 + 4$$

$s = 8 \dots$ podmínka splněna

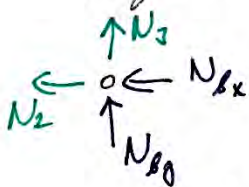
- členík a



$$\sum F_x = 0 \quad N_2 - R_{ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N_1 - R_{ay} = 0$$

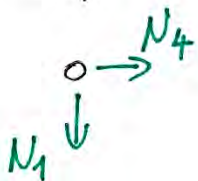
- členík b



$$\sum F_x = 0 \quad -N_2 - N_{bx} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N_3 + N_{by} = 0$$

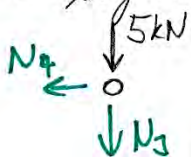
- členík c



$$\sum F_x = 0 \quad N_4 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -N_1 = 0$$

- členík d



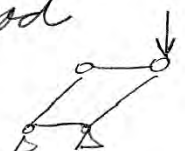
$$\sum F_x = 0 \quad -N_4 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -N_3 - 5 = 0$$

0	1	0	0	-1	0	0	0
1				-1			
	-1				-1		
		1				1	
			1				
-1							
			-1				
		-1					

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{bx} \\ R_{by} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det = 0$ jedná se o vyjímkový případ
 soustava je buďto neurčitá.

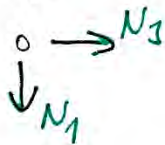


Lze zjednodušena 'stýčnicková' metoda

Z předchozího příkladu je známo, že proměnné N_3 , N_1 , N_4 bylo možno stanovit přímo aniž bychom řešili soustavu rovnic.

Potud je soustava statických rovnic řešitelná bez problémů s řešením osvojte si se dvojnásobným stýčnickem, a nemě se sblíží pouze 2 prvky.

- stýčnick c

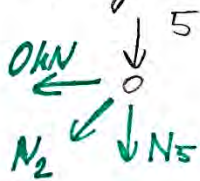


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_3 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 = 0$$

Postupujeme do stýčnicku se kterým budeme mít opět 2 podmínky rovnováhy pro 2 neznámé

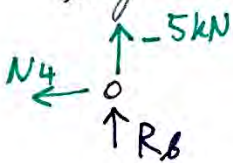
- stýčnick d



$$\sum F_x = 0 \quad N_2 \cdot \cos 225^\circ = 0 \Rightarrow N_2 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N_5 \cdot \sin 270^\circ + 5 \text{ kN} \cdot \sin 270^\circ = 0$$
$$N_5 = -5 \text{ kN}$$

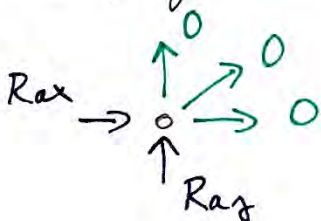
- stýčnick b



$$\sum F_x = 0 \quad N_4 \cdot \cos 180^\circ = 0 \Rightarrow N_4 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -5 + R_b = 0 \Rightarrow R_b = 5 \text{ kN}$$

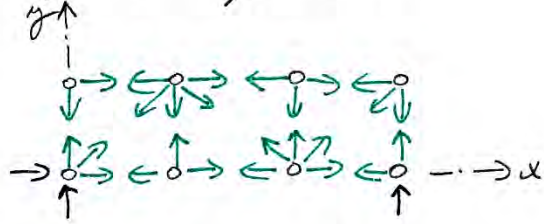
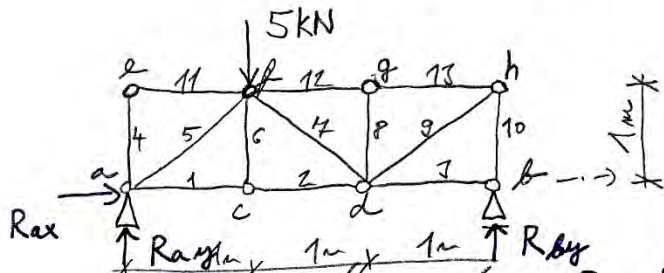
- stýčnick a



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{ay} = 0$$

Příklad: Spodnodušeno stejnicové metodu
stanovit osové síly v prutech



1) Vnější reakce R_{ax}, R_{ay}, R_{bx}

$$\sum F_{ix} = 0 \Rightarrow R_{ax} = 0$$

$$\sum M_a = 0 \quad -5 \cdot 1 + R_{bx} \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_{bx} = \frac{5}{2} \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad R_{ay} + \frac{5}{2} - 5 = 0 \Rightarrow R_{ay} = \frac{15}{2} - \frac{5}{2} = \frac{10}{2} \text{ kN}$$

2) Trusla má dva dvojné podporečné body e, b
stejně tak. Všechny podmínky rovnováhy do x, y
Osově síly prutů
 $N_{11} = 0$
 $N_4 = 0$
 $N_{11} = 0$
 $N_4 = 0$

a

$$N_1 + N_5 \cdot \cos 45^\circ + 0 = 0$$

$$N_4 + N_5 \cdot \sin 45^\circ + \frac{10}{2} = 0$$

$$N_1 = 3,333 \text{ kN}$$

$$N_5 = -4,414 \text{ kN}$$

c

$$N_2 - N_1 = 0$$

$$N_6 = 0$$

$$N_2 = N_1 = 3,333 \text{ kN}$$

$$N_6 = 0$$

f

$$N_{12} + N_4 \cdot \cos 315^\circ - N_{11} + N_5 \cdot \cos 225^\circ = 0$$

$$-N_6 + N_5 \cdot \sin 225^\circ + N_4 \cdot \sin 315^\circ - 5 = 0$$

$$N_{12} = 1,66 \text{ kN}$$

$$N_4 = -2,76 \text{ kN}$$

g

$$N_{13} - N_{12} = 0$$

$$N_8 = 0$$

$$N_{13} = 1,66 \text{ kN}$$

$$N_8 = 0$$

d

$$N_3 + N_9 \cdot \cos 45^\circ + N_4 \cdot \cos 135^\circ - N_2 = 0 \Rightarrow N_3 = 0$$

$$N_8 + N_9 \cdot \sin 45^\circ + N_4 \cdot \sin 135^\circ = 0$$

$$N_9 = 2,76 \text{ kN}$$

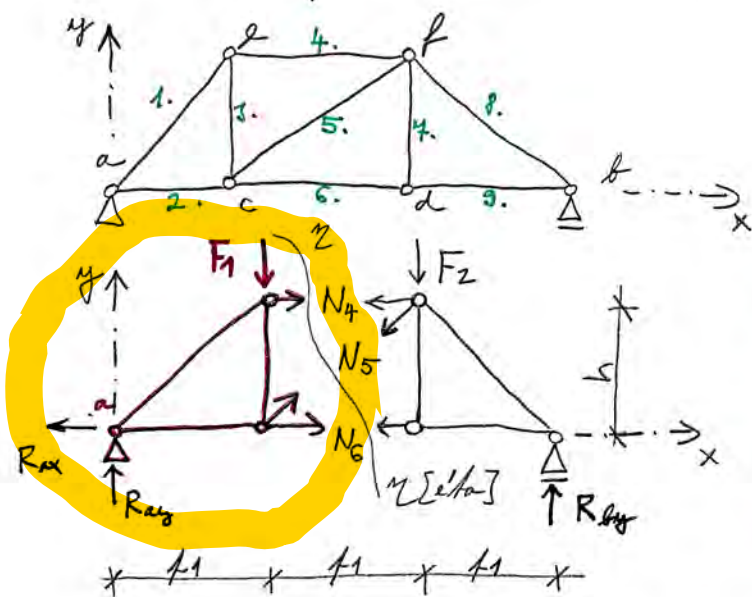
h

$$-N_{13} - N_9 \cdot \cos 225^\circ = 0 \leftarrow \text{nemí potřeba}$$

$$-N_{10} + N_9 \cdot \sin 225^\circ = 0$$

$$N_{10} = -1,66 \text{ kN}$$

Průsečná metoda



$$1) \sum F_{ix} = 0: N_4 + N_5 \cdot \cos \alpha_5 + N_6 - R_{ax} = 0$$

$$2) \sum F_{iy} = 0: N_5 \cdot \sin \alpha_5 + R_{ayg} - F_1 = 0$$

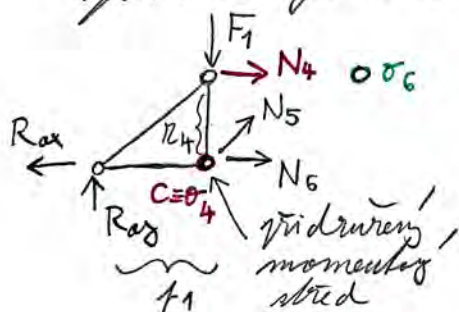
$$3) \sum M_{ia} = 0: -N_4 \cdot h + N_5 \cdot \sin \alpha_5 \cdot l_1 - F_1 \cdot l_1 = 0$$

Ze tří rovnic stanovíme velikost vnitřních sil N_4, N_5, N_6 .

⊖ síla známena' tlak ⊕ tah.

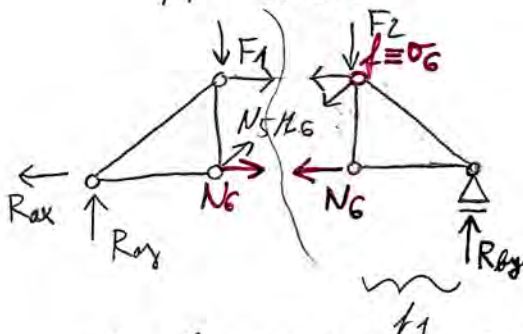
Proložení řešení soustavy 3 rovnic je zvlášť je možno provést tzv. Ritterovou úpravou.

Momentová podmínka rovnováhy se řeší k tzv. předtvarovanému momentovému středu, který je tvořen přísečíkem os dvou příslušných prvků proložených řezy $\pi - \pi$. [éta]



$$\sum M_{io4} = 0: -N_4 \cdot l_4 - R_{axg} \cdot l_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_4 = - \frac{R_{axg} \cdot l_1}{l_4} \text{ (tlak)}$$



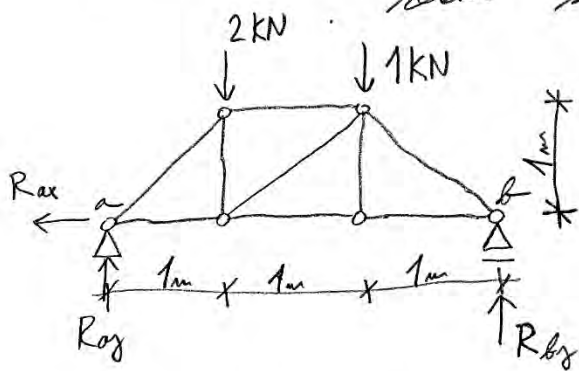
$$\sum M_{io6} = 0: N_6 \cdot l_6 - R_{axg} \cdot 2 \cdot l_1 - R_{ax} \cdot h + F_1 \cdot l_1 = 0$$

$$N_6 = \frac{1}{l_6} [R_{axg} \cdot 2 \cdot l_1 + R_{ax} \cdot h - F_1 \cdot l_1]$$

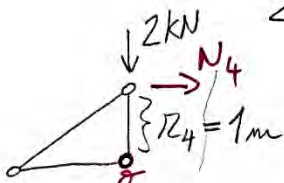
Proložení $F_4 \parallel F_6$ řeší momentový střed sil N_5 v ∞ .
Uhl N_5 lze stanovit ze silové podm. x.

$$\sum F_{iy} = 0: N_5 \cdot \sin \alpha_5 + R_{ayg} - F_1 = 0 \Rightarrow N_5 = \frac{F_1 - R_{ayg}}{\sin \alpha_5}$$

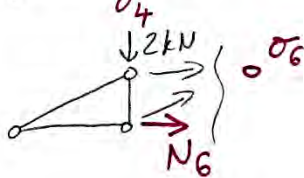
Příklad: Průřeznou metodou v Ritterově úpravě řešte síly v prutech.



- Reakce $\sum M_a = 0$: $R_{bx} \cdot 3 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_{bx} = \frac{4}{3} \text{ kN}$
 $\sum M_b = 0$: $-R_{ay} \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow R_{ay} = \frac{5}{3} \text{ kN}$

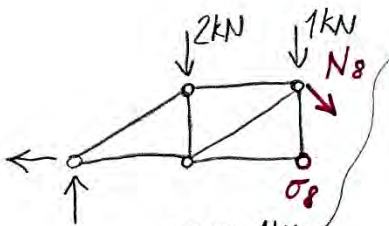


$$N_4 = -\frac{(5/3) \cdot 1}{1} = -\frac{5}{3}$$



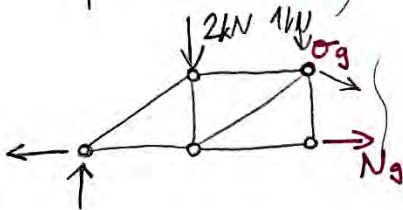
$$N_6 = \frac{1}{1} \left[\frac{5}{3} \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \right] = \frac{4}{3} \text{ kN}$$

$$N_5 = \frac{2 - 5/3}{\sin 45^\circ} = 0,4714 \text{ kN}$$



$$-N_8 \cdot \cos 315^\circ + 2 \cdot 1 - R_{bx} \cdot 2 = 0$$

$$N_8 = -1,886 \text{ kN}$$



$$N_9 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - R_{ay} \cdot 2 = 0$$

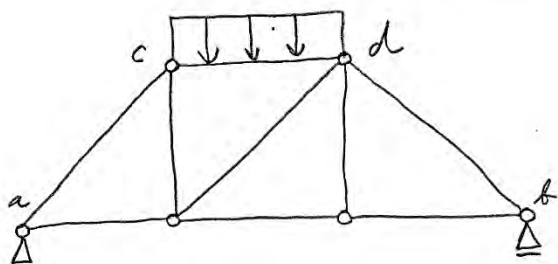
$$N_9 = 1,333 \text{ kN}$$

Výhody a nevýhody průřezné metody

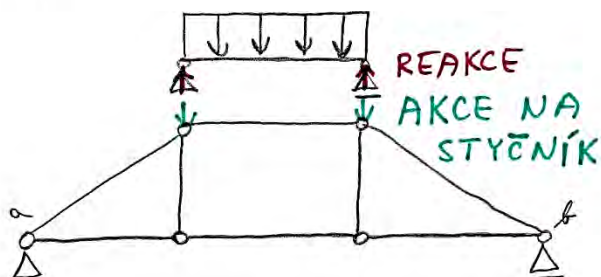
- Výhody a) Každou neznámou sílu můžeme určit z jedné rovnice
b) K výpočtu nepotřebujeme znát síly jiných prutů

Nevýhody: Tam kde potřebujeme znát osové síly jen některých prutů.

Mimostýčné natížení

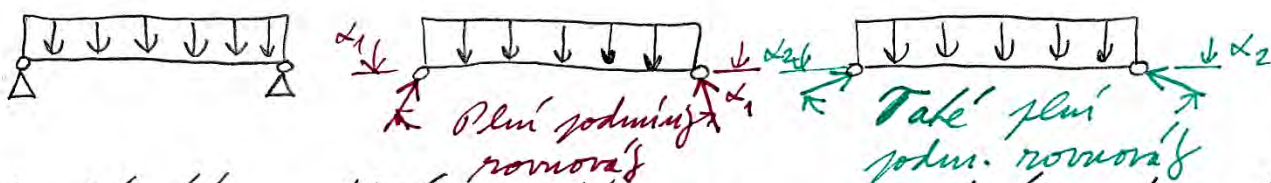


Pri riešení prevedieme na sústavu natíženou pouze v styčnicách.



- V příčné natíženéto pruhu předpokládáme, že
- 1) jde o jako kloubové upevň nosník
 - 2) je součástí kloubové pruhové soustavy natížené jen v styčnicích

Problematika natížení mimostýčným natížením je jako samostatný alek 1+ staticky neurčitý je možno reakce stanovit o mnoha způsoby.

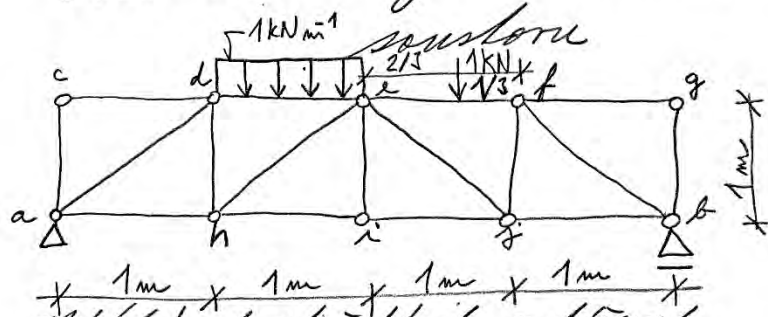


V příčnéto natížení nosíku jsou primární vzhledem složky reakcí nulové a proto lze nosník

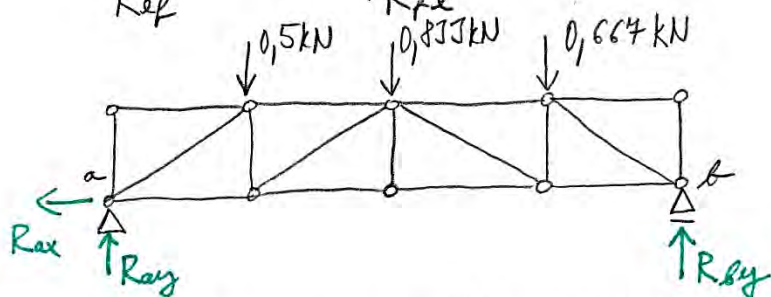
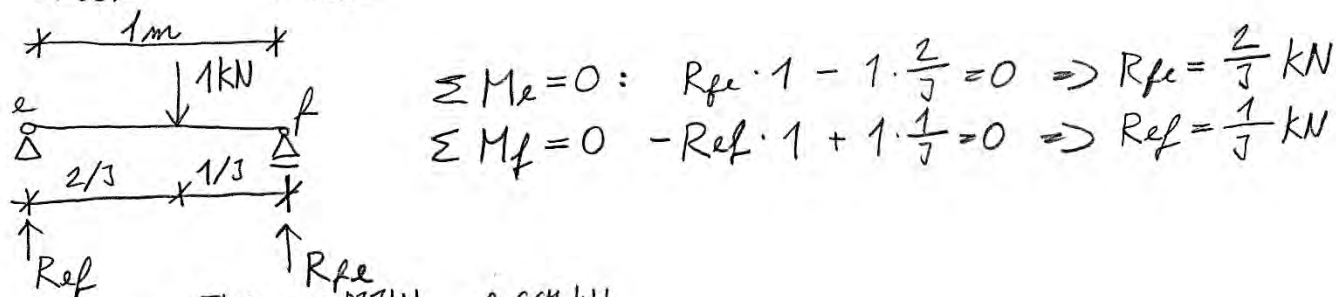
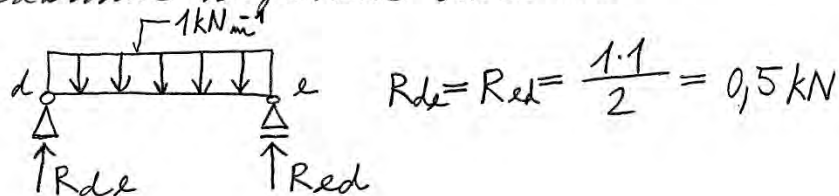


jinak je nutno postupovat jinými metodami, viz 2. ročník.

Příklad: Vyřešte danou kloubovou prutovou



- Náhradní styčkové zatížení



- reakce vnějších vazeb

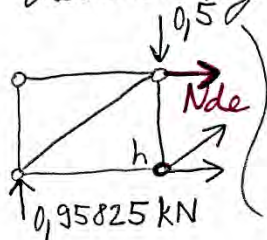
$$\sum M_a = 0: -0,5 \cdot 1 - 0,833 \cdot 2 - 0,667 \cdot 3 + R_{by} \cdot 4 = 0$$

$$R_{by} = 1,04175 \text{ kN}$$

$$\sum M_b = 0: 0,667 \cdot 1 + 0,833 \cdot 2 + 0,5 \cdot 3 - R_{ay} \cdot 4 = 0$$

$$R_{ay} = 0,95825 \text{ kN}$$

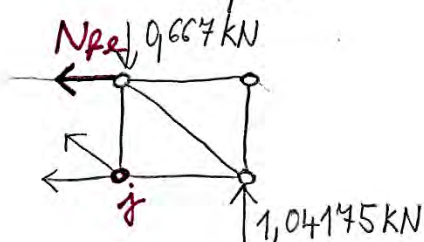
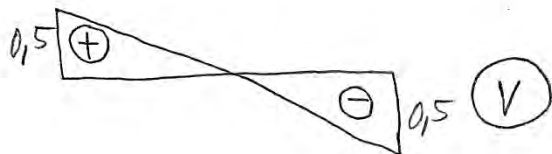
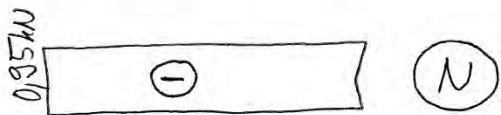
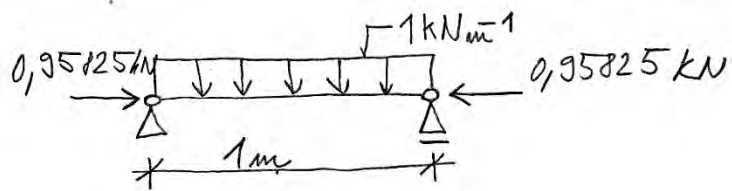
- Řešení vybraných prutů příčnou metodou s Ritterovou úpravou



$$\sum M_h = 0$$

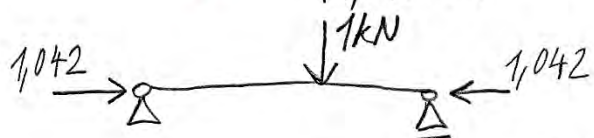
$$-N_{de} \cdot 1 - 0,95825 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{de} = -0,95825 \text{ kN}$$

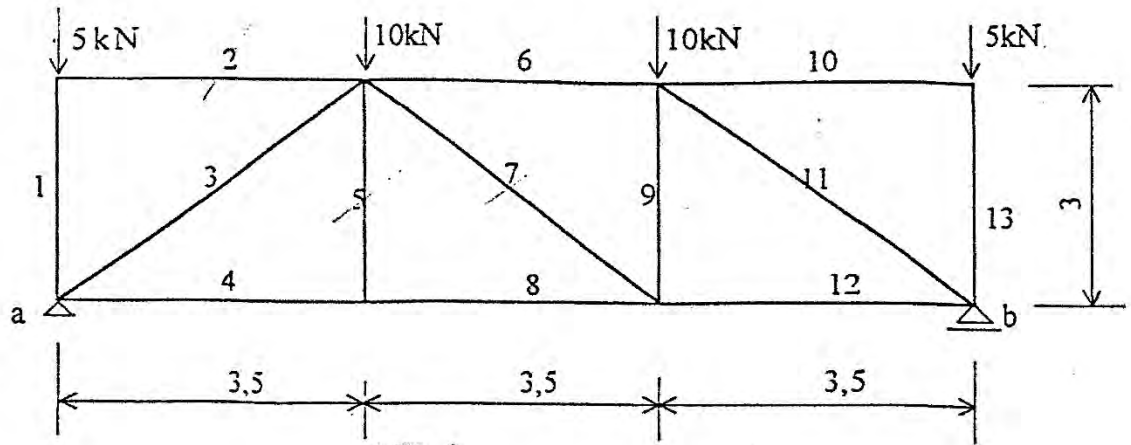


$$\sum M_j = 0: 1.04175 \cdot 1 + N_{fe} \cdot 1 = 0$$

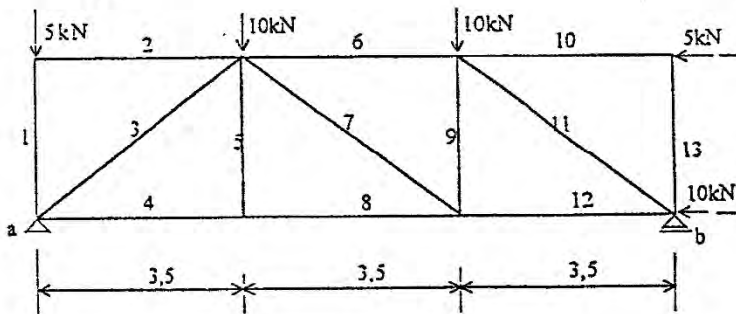
$$N_{fe} = -1.04175 \text{ kN}$$



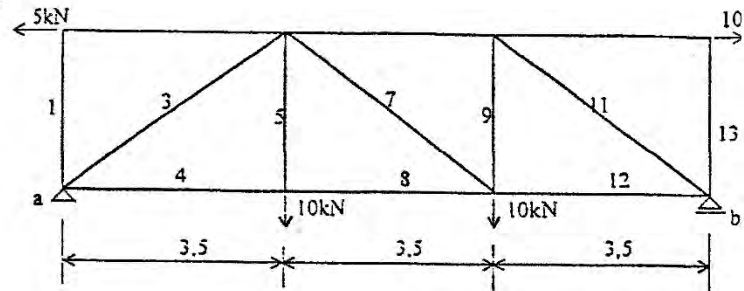
3a



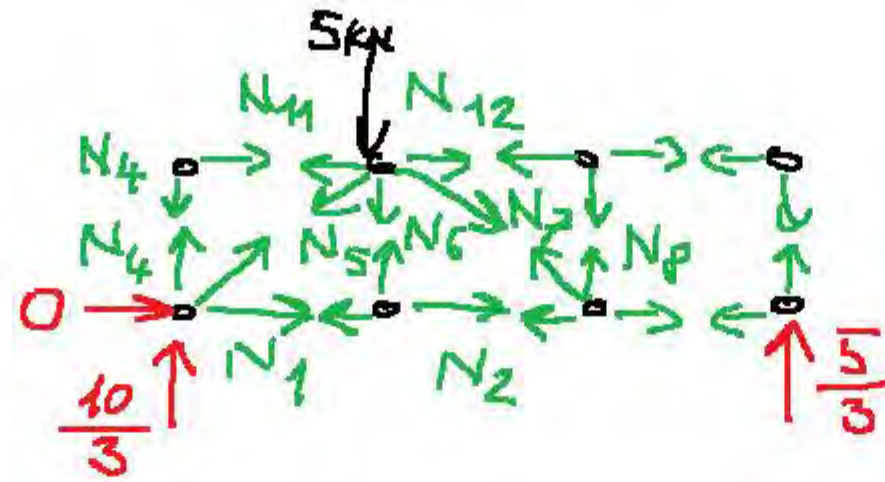
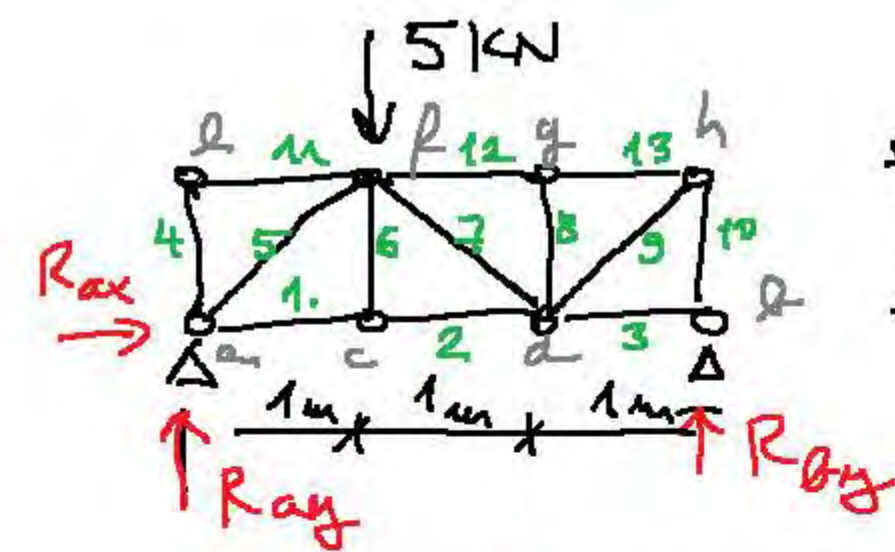
3b



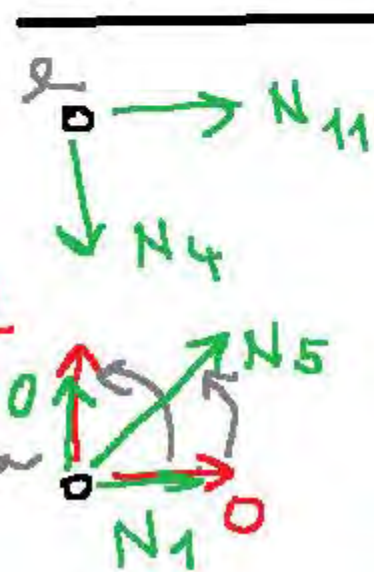
3c



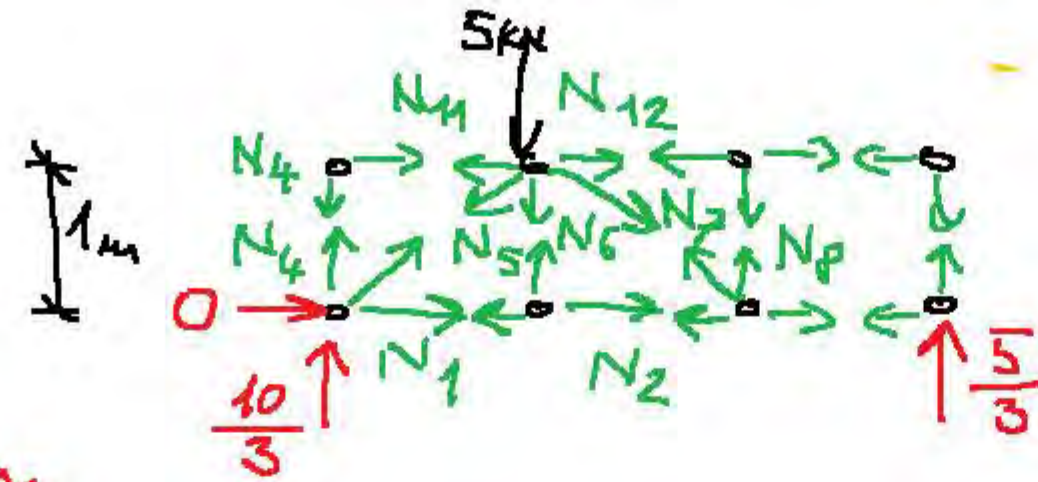
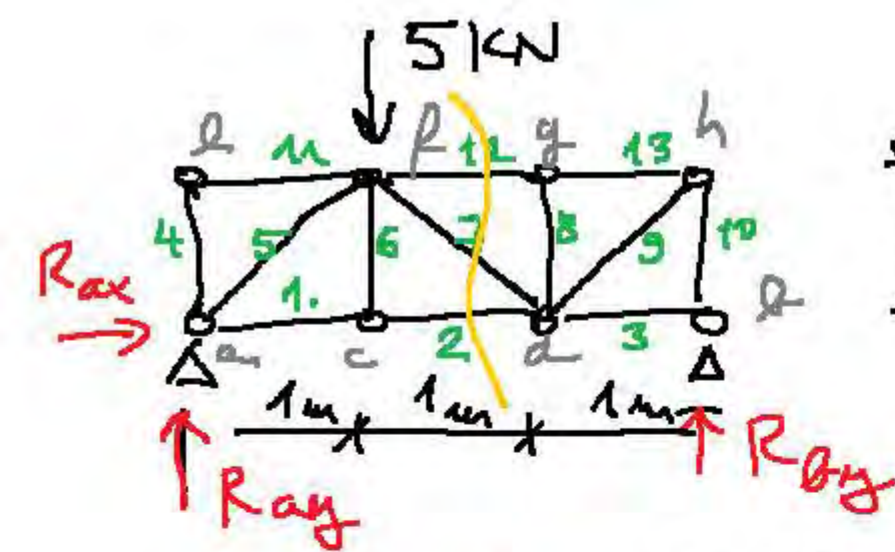
ZAT. STAV:		a	b	c
REAKCE	V_a	15,0	16,429	8,571
	H_a	0	15,0	-5,0
	V_b	15,0	8,571	11,429
OSOVE' SÍLY N_i (kN) v PRUTU i	1	-5,0	-5,0	0
	2	0	0	5,0
	3	-15,366	-17,561	-13,171
	4	11,667	-1,667	15,0
	5	0	0	10,0
	6	-11,667	-15,0	-3,333
	7	0	2,195	-2,195
	8	11,667	-1,667	15,0
	9	0	-1,429	11,429
	10	0	-5,0	10,0
	11	-15,366	-13,171	-17,561
	12	11,667	0	13,333
	13	-5,0	0	0



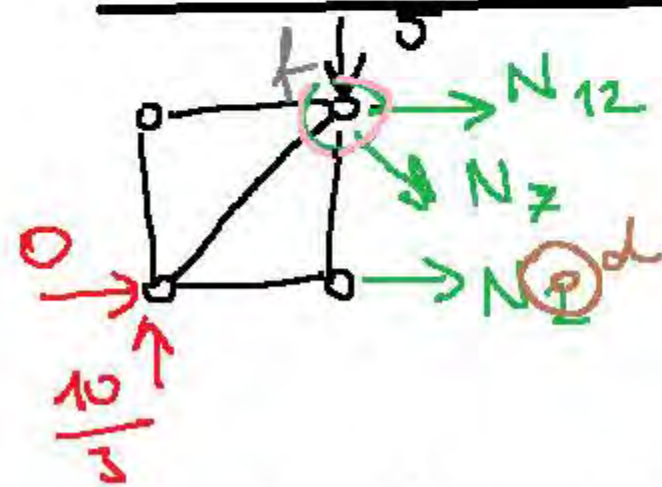
$$\begin{aligned} \sum M_a = 0 & \quad R_{by} \cdot 3 - 5 \cdot 1 + R_{ax} \cdot 0 + R_{ay} \cdot 0 = 0 \Rightarrow R_{by} = \frac{5}{3} \text{ kN} \\ \sum M_b = 0 & \quad -R_{ay} \cdot 3 + 5 \cdot 2 + R_{ax} \cdot 0 + R_{by} \cdot 0 = 0 \Rightarrow R_{ay} = \frac{10}{3} \text{ kN} \\ \sum F_y = 0 & \quad \frac{10}{3} - 5 + \frac{5}{3} = 0 \quad \checkmark \\ \sum F_x = 0 & \Rightarrow R_{ax} = 0 \text{ kN} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad N_{11} \cdot \cos 0^\circ + N_4 \cdot \cos 270^\circ = 0 \Rightarrow N_{11} = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad N_{11} \cdot \sin 0^\circ + N_4 \cdot \sin 270^\circ = 0 \Rightarrow N_4 = 0 \\ \sum F_x = 0 & \quad N_1 \cdot \cos 0^\circ + 0 \cdot \cos 0^\circ + N_5 \cdot \cos 45^\circ + 0 \cdot \cos 90^\circ + \frac{10}{3} \cdot \cos 90^\circ = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad N_1 \cdot \sin 0^\circ + 0 \cdot \sin 0^\circ + N_5 \cdot \sin 45^\circ + 0 \cdot \sin 90^\circ + \frac{10}{3} \cdot \sin 90^\circ = 0 \\ N_1 &= \frac{10}{3} = 3.33 \text{ kN} \quad N_5 = -4.714 \text{ kN} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum M_a = 0 & \quad R_{by} \cdot 3 - 5 \cdot 1 + R_{ax} \cdot 0 + R_{ay} \cdot 0 = 0 \Rightarrow R_{by} = \frac{5}{3} \text{ kN} \\ \sum M_b = 0 & \quad -R_{ay} \cdot 3 + 5 \cdot 2 + R_{ax} \cdot 0 + R_{by} \cdot 0 = 0 \Rightarrow R_{ay} = \frac{10}{3} \text{ kN} \\ \sum F_y = 0 & \quad \frac{10}{3} - 5 + \frac{5}{3} = 0 \quad \checkmark \\ \sum F_x = 0 & \Rightarrow R_{ax} = 0 \text{ kN} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum M_f = 0 & \quad -\frac{10}{3} \cdot 1 + 5 \cdot 0 + N_{12} \cdot 0 + N_7 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + N_2 \cdot 1 = 0 \\ N_2 &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

PRÜFUNGSMETHODE

$$\begin{aligned} \sum M_d = 0 & \quad -\frac{10}{3} \cdot 2 + 0 \cdot 0 + N_7 \cdot 0 + N_2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 - N_{12} \cdot 1 = 0 \\ N_{12} &= -\frac{20}{3} + 5 = -\frac{20}{3} + \frac{15}{3} = -\frac{5}{3} \text{ kN} = -1,66 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{10}{3} - 5 + N_7 \cdot \sin 315^\circ = 0 \Rightarrow N_7 = -2,36 \text{ kN}$$

ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY

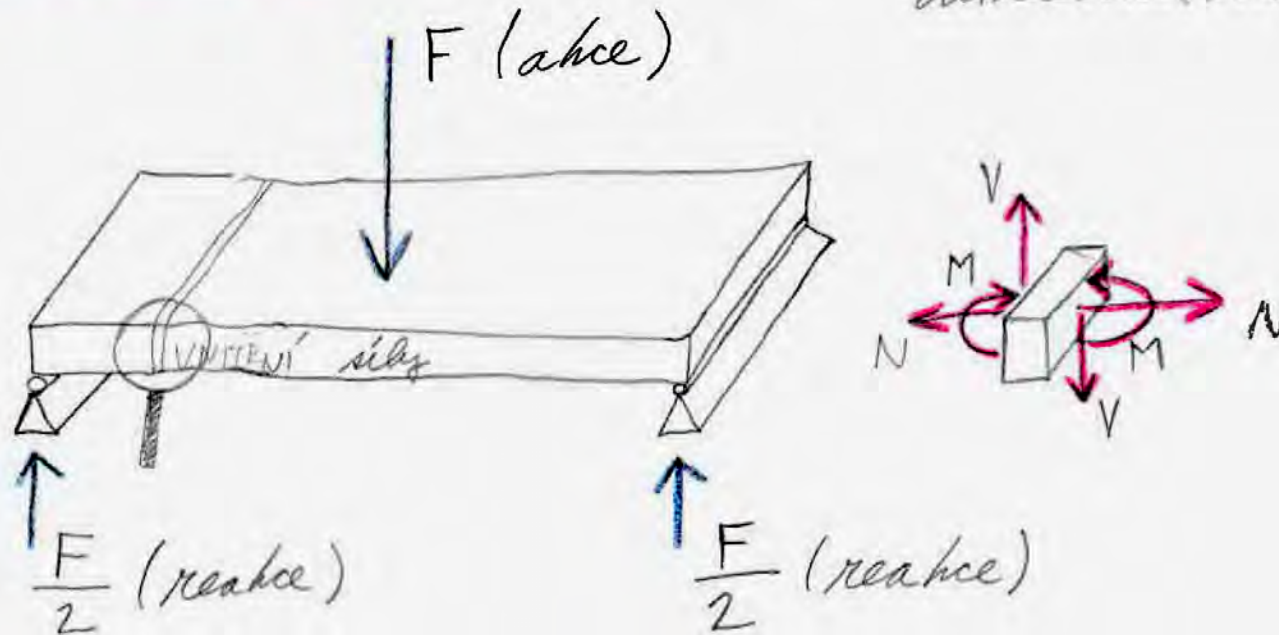
BDA001

Složky výslednice vnitřních sil (N , V , M) přímého rovině namáhaného prutu. Přímé rovinné staticky určité nosníky a konzoly, zatížení, reakce ve vazbách, výpočet reakcí a vnitřních sil a momentů, diagramy vnitřních sil a momentů.

Zdeněk Kala

SÍLA – VNITŘNÍ A VNĚJŠÍ

mějří síla (působí na těleso zvenčí) – akce
vnitřní síla (vzniká uvnitř tělesa působením v důsledku namáhání) – reakce





Rovinný nosník a jeho výpočtový model

Jednoduchý rovinný nosník rozumíme nosný prvek, u kterého jeden delší rozměr l (délka nosníku) směřně přechází nad slyřajícími rozměry příčnými d, h ; kde platí $l : d = 10 : 1$; $l : h = 10 : 1$.

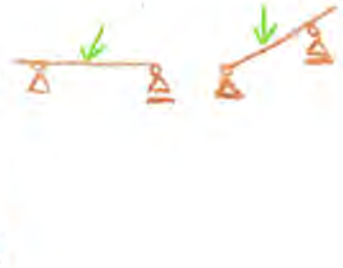
Podle tvaru a polohy střednice dělíme rovinné nosníky na:

a) přímé (svislé nebo šikmé)

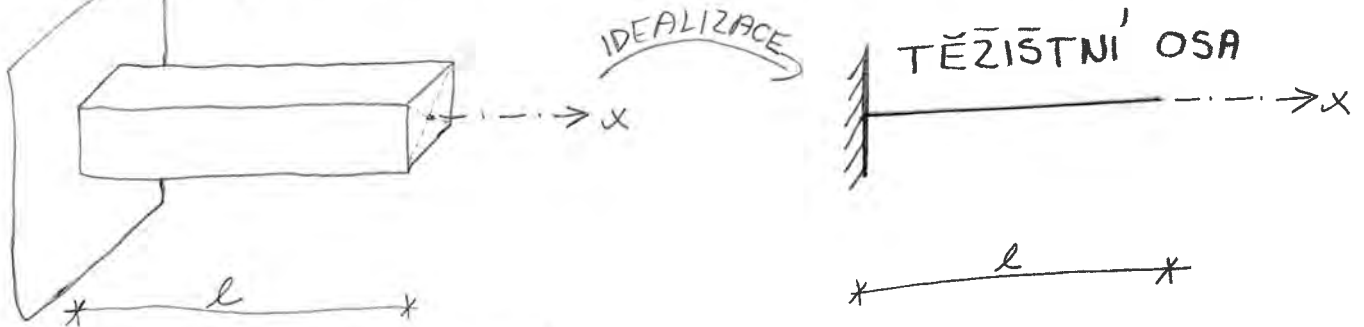
b) lomené (rám)

c) zakřivené či křivé

d) složené prvky



Výpočtový model je tvořen střednicí a idealizovanými největšími vztahy a zatížením.



Podpěření nosníku

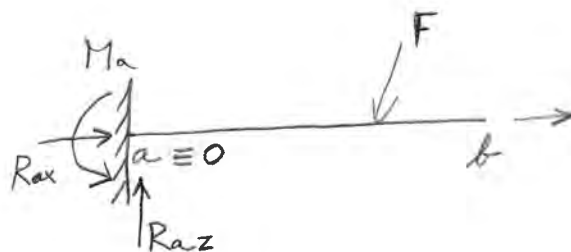
Jednoduchý rovinný nosník bez vnějších kloubů má tři stupně volnosti. Pro jeho podpěření používáme 5 základních typů vnějších vazeb.

	Název vazby	Číslo volností	Značení vazby se složkami reakcí
1.	Kryvný prvek	1	$R_A = N_A = R_1$
2.	Posuvný kloub	1	R_A
3.	Neposuvný, pevný kloub	2	R_{Ax}, R_{Az}
4.	Posuvné upevnění	2	R_{Ax}, R_{Az}
5.	Dokonalé upevnění	3	R_{Ax}, R_{Az}, M_A

Výpočet reakcí vazeb

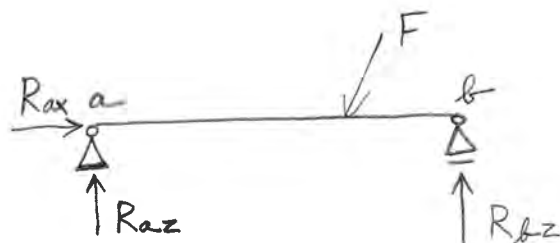
Kancelový nosník

- 1) $\sum F_{ix} = 0 \dots R_{ax}$
- 2) $\sum F_{iz} = 0 \dots R_{az}$
- 3) $\sum M_{ia} = 0 \dots M_a$



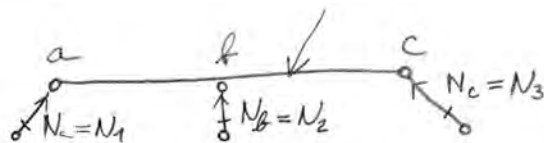
Prostý nosník

- 1) $\sum F_{ix} = 0 \dots R_{ax}$
- 2) $\sum M_{ia} = 0 \dots R_{bz}$
- 3) $\sum M_{ib} = 0 \dots R_{az}$



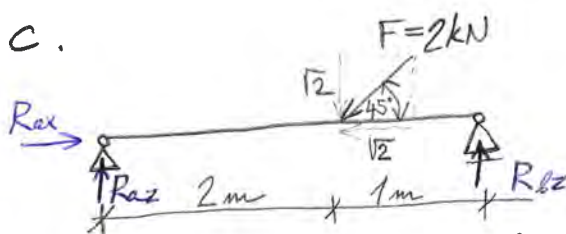
Nosník podepřený v třech bodech

- 1) $\sum M_{ia1} = 0 \dots N_a = N_1$
- 2) $\sum M_{ia2} = 0 \dots N_b = N_2$
- 3) $\sum M_{ia3} = 0 \dots N_c = N_3$



Příklad: Vypočítejte reakce prostého nosníku nabitého silou F v bodu c .

$$1) \sum F_{ix} = 0 \dots R_{ax} - F_x = 0$$
$$R_{ax} = 1,4142 \text{ kN}$$



$$2) \sum M_{ia} = 0 \dots R_{bz} \cdot 3 - F_z \cdot 2 = 0$$

$$R_{bz} = \frac{1,4142 \cdot 2}{3} = 0,9428 \text{ kN}$$

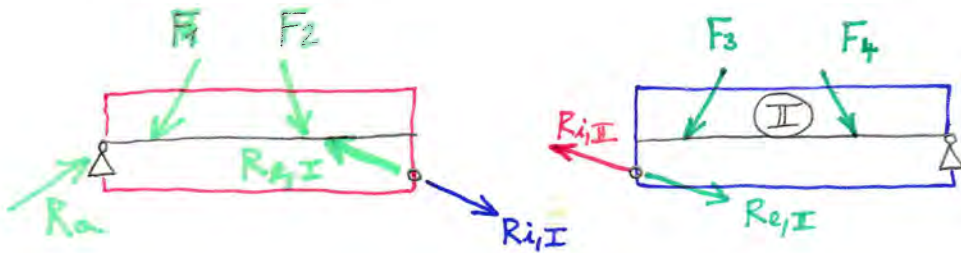
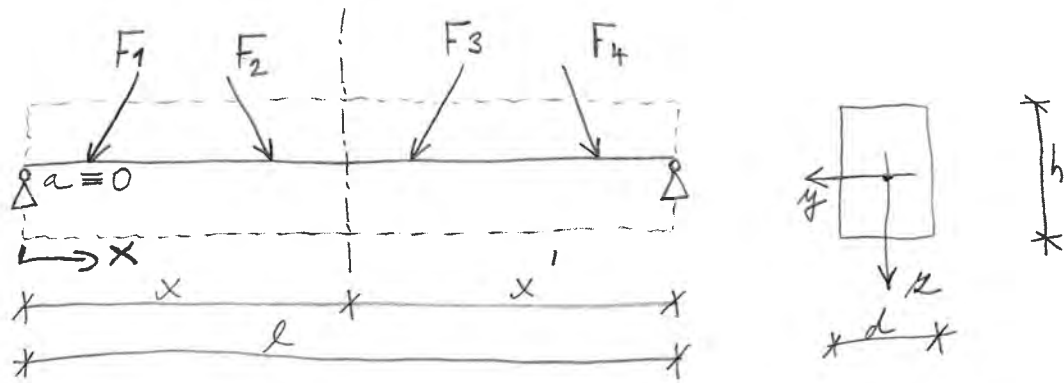
$$F_x = F \cdot \cos 45^\circ = 1,4142 \text{ kN}$$

$$F_z = F \cdot \sin 45^\circ = 1,4142 \text{ kN}$$

$$3) \sum M_{ib} = 0 \dots -R_{az} \cdot 3 + F_z \cdot 1 = 0 \Rightarrow R_{az} = + \frac{F_z \cdot 1}{3} = +0,4714 \text{ kN}$$

Analýza vnitřních sil na rovinných nosnicích

Výslednice vnitřních sil



$R_{i,I}$... účinek části levé na část pravou, výslednice vnitřních (interních) sil.

$R_{e,I}$... výslednice vnějších (externích) sil primárních F_3, F_4 i sekundárních R_b .

$R_{i,I}$... účinek části pravé na část levou, výslednice vnitřních (interních) sil.

$R_{e,I}$... výslednice vnějších (externích) sil primárních F_1, F_2 i sekundárních R_a .

jde o síly rovnovážné: $R_{i,I} = -R_{e,I}$

$$R_{i,I} = -R_{e,I}$$

Podle zákona akce a reakce:

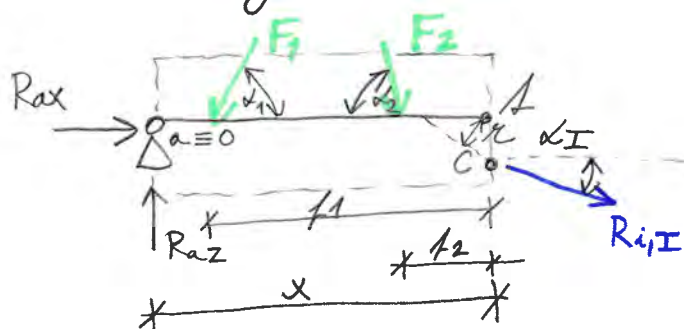
$$R_{i,I} = -R_{i,I} \Rightarrow$$

$$R_{i,I} = R_{e,I}$$

$$R_{i,I} = R_{e,I}$$

$$R_{e,I} = -R_{e,I}$$

Velikost, směr a působíště, např. výslednice
 vnitřních sil $R_{i,I}$ číslí I lze stanovit
 ze tří statických podmínek rovnováhy rovinné
 soustavy sil $F_1; F_2; R_{ax}; R_{az}; R_{i,I}$



$$R = R_{i,I}$$

$$\begin{aligned} 1) \sum F_{ix} = 0 & \quad R_{ax} - F_1 \cdot \cos \alpha_1 + F_2 \cdot \cos \alpha_2 + R_{i,I} \cdot \cos \alpha_I = 0 \\ 2) \sum F_{iz} = 0 & \quad -R_{az} + F_1 \cdot \sin \alpha_1 + F_2 \cdot \sin \alpha_2 + R_{i,I} \cdot \sin \alpha_I = 0 \\ 3) \sum M_{iA} = 0 & \quad -R_{az} \cdot x + F_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot f_1 + F_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot f_2 + R_{i,I} \cdot r = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 1) \Rightarrow R_x = R_{i,I} \cdot \cos \alpha_I = -R_{ax} + F_1 \cdot \cos \alpha_1 - F_2 \cdot \cos \alpha_2$$

$$\Leftrightarrow 2) \Rightarrow R_z = R_{i,I} \cdot \sin \alpha_I = R_{az} - F_1 \cdot \sin \alpha_1 - F_2 \cdot \sin \alpha_2$$

$$\Leftrightarrow 3) \Rightarrow M_A = R_{i,I} \cdot r = R_{az} \cdot x - F_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot f_1 - F_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot f_2$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_z^2}$$

$$\cos \alpha_I = \frac{R_x}{R}$$

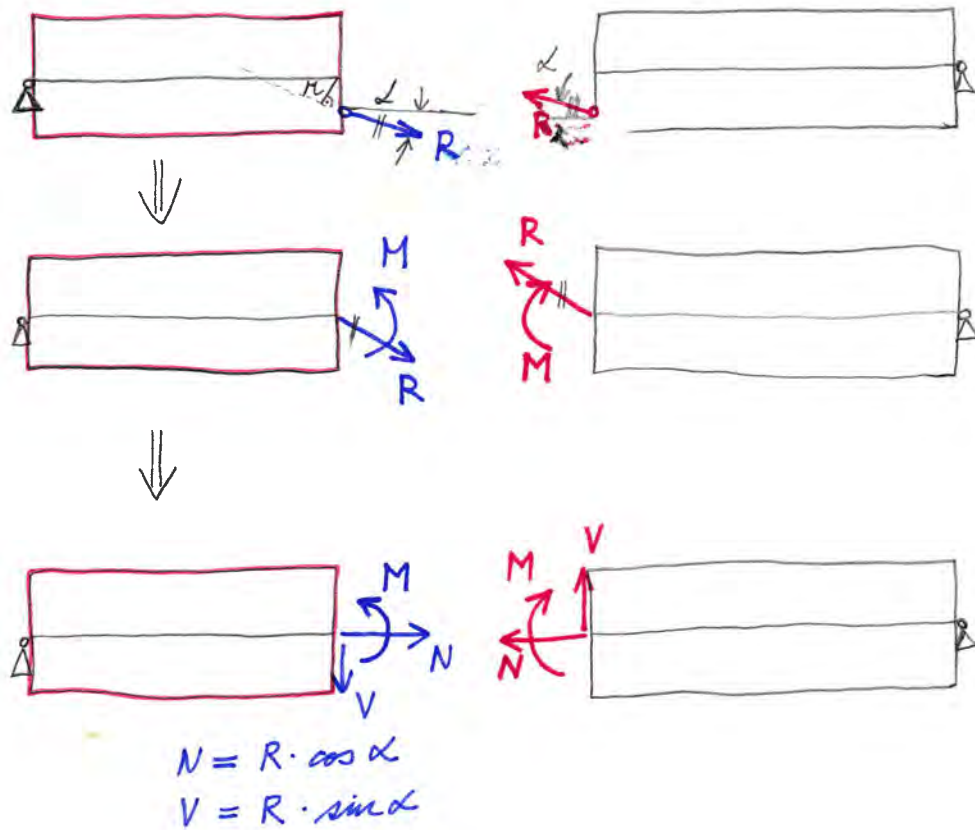
$$\sin \alpha_I = \frac{R_z}{R}$$

rameno $r = \frac{M_A}{R}$

Učíme jsme velikost a směr výslednice
 vnitřních sil R.

6.5.2. Výsledky výslednice vnitřních sil N, V, M

Posuneme výslednici $R_{I,I} = R$ křivky I z
 působiště c do těžiště t vzhledem k průřezu
 $m = x$ a doplníme momentem $M = R \cdot x$.



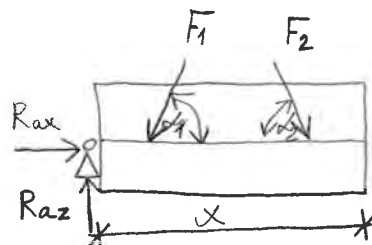
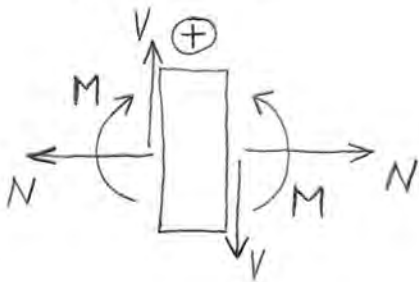
Výslednici vnitřních sil jsme našli:

- normálovou sílu N ,
- posouvající sílu V ,
- ohybový moment M .

U nakloněných nosníků rozkládáme sílu R
 v těžišti průřezu x na složku N působící
 ve směru tečny ke střednici nosníku (podélná
 složka) a na složku V působící ve směru
 normály ke střednici (příčná složka).

Definice a znaménková soustava složek výslednice vnitřních sil

Normálová síla N v libovolném průřezu x nosníku je rovna algebraickému součtu průmětů všech vnějších sil, působících na levou nebo pravou část nosníku od průřezu x , do směru osy nosníku.



$$N(x) = -R_{ax} + F_1 \cdot \cos \alpha_1 - F_2 \cdot \cos \alpha_2$$

a nebo sprava

$$N(x) = F_4 \cdot \cos \alpha_4 - F_3 \cdot \cos \alpha_3$$

Posouvající síla V v libovolném průřezu x nosníku je rovna algebraickému součtu průmětů všech mějších sil, působících na levou nebo pravou část nosníku od průřezu x , do směru kolmého na osu nosníku.



leva

$$V(x) = R_{az} - F_1 \cdot \sin \alpha_1 - F_2 \cdot \sin \alpha_2$$

prava

$$V(x) = -R_{az} + F_4 \cdot \sin \alpha_4 + F_3 \cdot \sin \alpha_3$$

Ohybový moment M v libovolném průřezu x nosníku je roven algebraickému součtu složkových momentů všech vnějších sil (včetně reakcí), působících na levou nebo pravou část nosníku od průřezu x , k težišti L průřezu x .

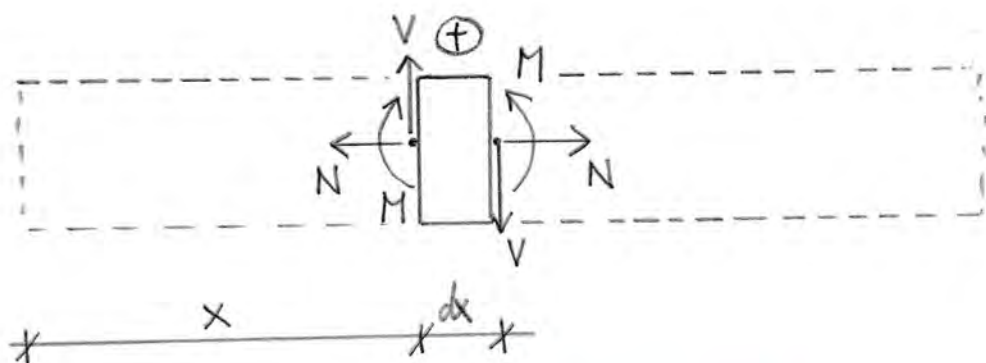
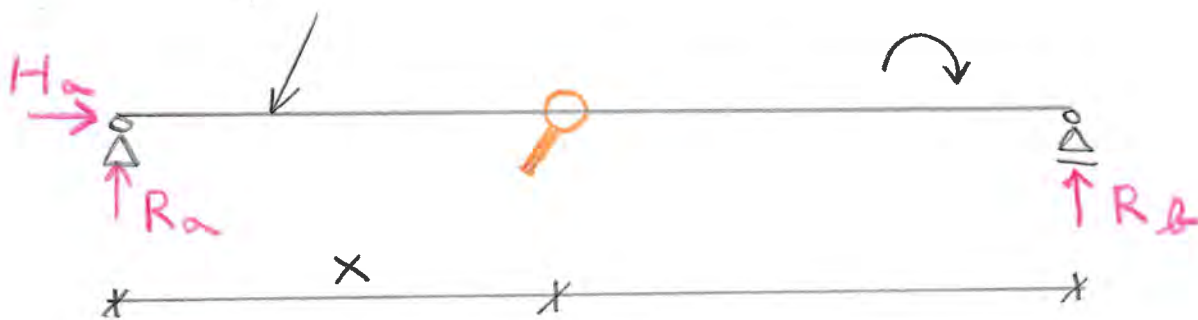
Kladný moment sahne spodní slátna.



leva $M(x) = R_{az} \cdot x - F_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot l_2$

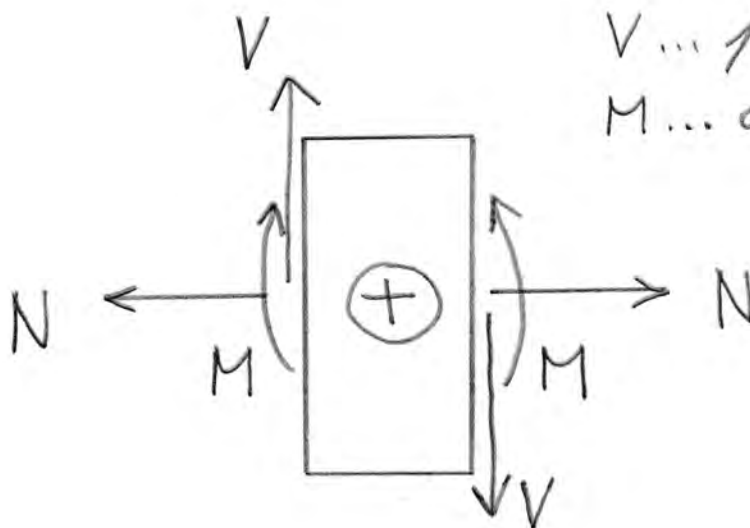
prava $M(x) = R_{az} \cdot x' - F_4 \cdot \sin \alpha_4 \cdot l_4 - F_3 \cdot \sin \alpha_3 \cdot l_3$

VNITŘNÍ SÍLY PROSTÉHO NOSNÍKU



N, V, M jsou **vnitřní síly** na nosníku

N ... normálová (osová) síla
 V ... posouvající síla
 M ... ohybový moment



- Normálová síla N je dána algebraickým součtem průmětů všech vnějších sil, působících na levou nebo pravou část prutu od průřezu, do směru osy prutu.
- Posouvající síla V je dána algebraickým součtem průmětů všech vnějších sil, působících na levou nebo pravou část prutu od průřezu, do směru kolmého k ose prutu.
- Ohybový moment M je určen algebraickým součtem statických momentů všech vnějších sil (včetně reakcí), působících na levou nebo pravou část prutu od průřezu, k těžišti průřezu.

ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY

BDA001

Diferenciální závislosti mezi zatížením, posouvajícími silami a ohybovými momenty, diferenciální podmínky rovnováhy.

Zdeněk Kala

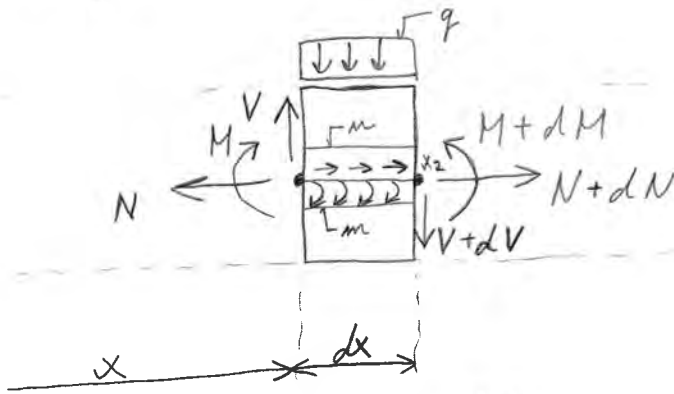
Diagramy a obráce N, V, M

Kladné N, V vynášime nad a záporné pod súčasnú stranu.

Ohybový moment kreslíme vždy na stranu záporného vlákna.

Diferenciálne podmienky rovnováhy

Volný element nosníku:



3 podmienky rovnováhy:

$$1) \sum F_{ix} = 0: -N + (N + dN) + m \cdot dx = 0$$

$$2) \sum F_{iz} = 0: -V + (V + dV) + q \cdot dx = 0$$

$$3) \sum M_{ixz} = 0: -M + (M + dM) - V \cdot dx + q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - m \cdot dx = 0$$

Po úprave

$$\frac{dN}{dx} = -m$$

$$\frac{dV}{dx} = -q$$

$$\frac{dM}{dx} = V + m$$

diferenciálne podmienky rovnováhy

Často pre $m = 0$

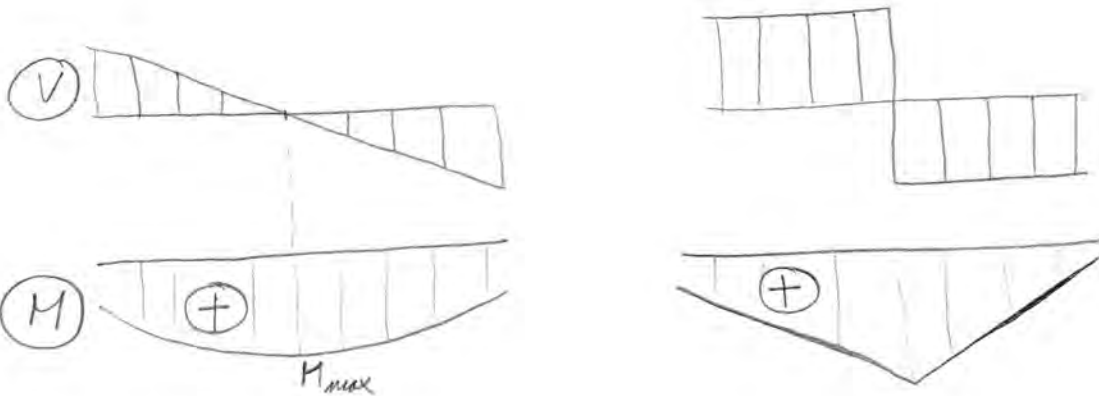
$$\frac{dM}{dx} = V$$

Schmedlerova veta:

Derivace ohybového momentu podle nerovinné proměnné x je rovna posuvující síle.

Extrém normálové síly N nebo posouvající síly V nastane v průřezu, v němž je intenzita spojitého osvětlo m resp. průčného q rovinně rovna nule.

$$\frac{dM}{dx} = V = 0$$



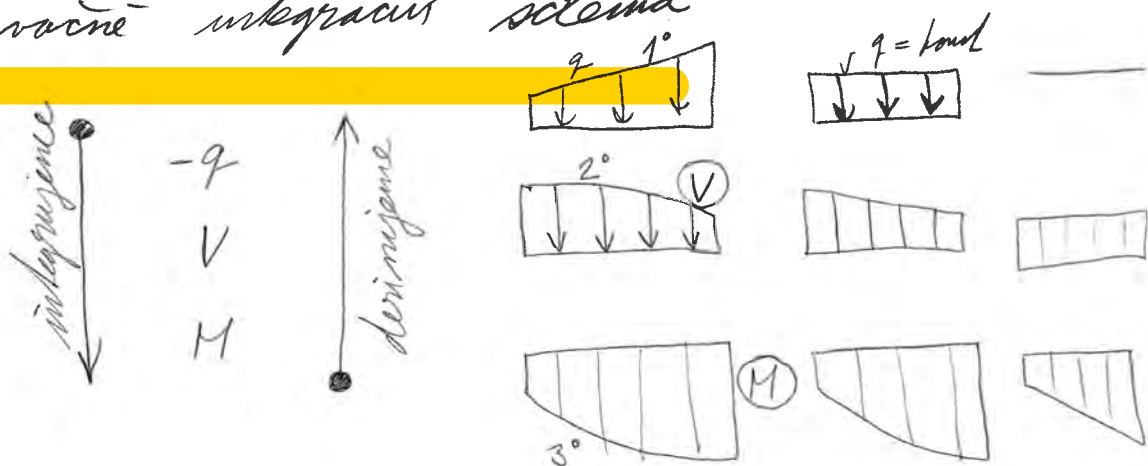
8. počínáme integrujeme

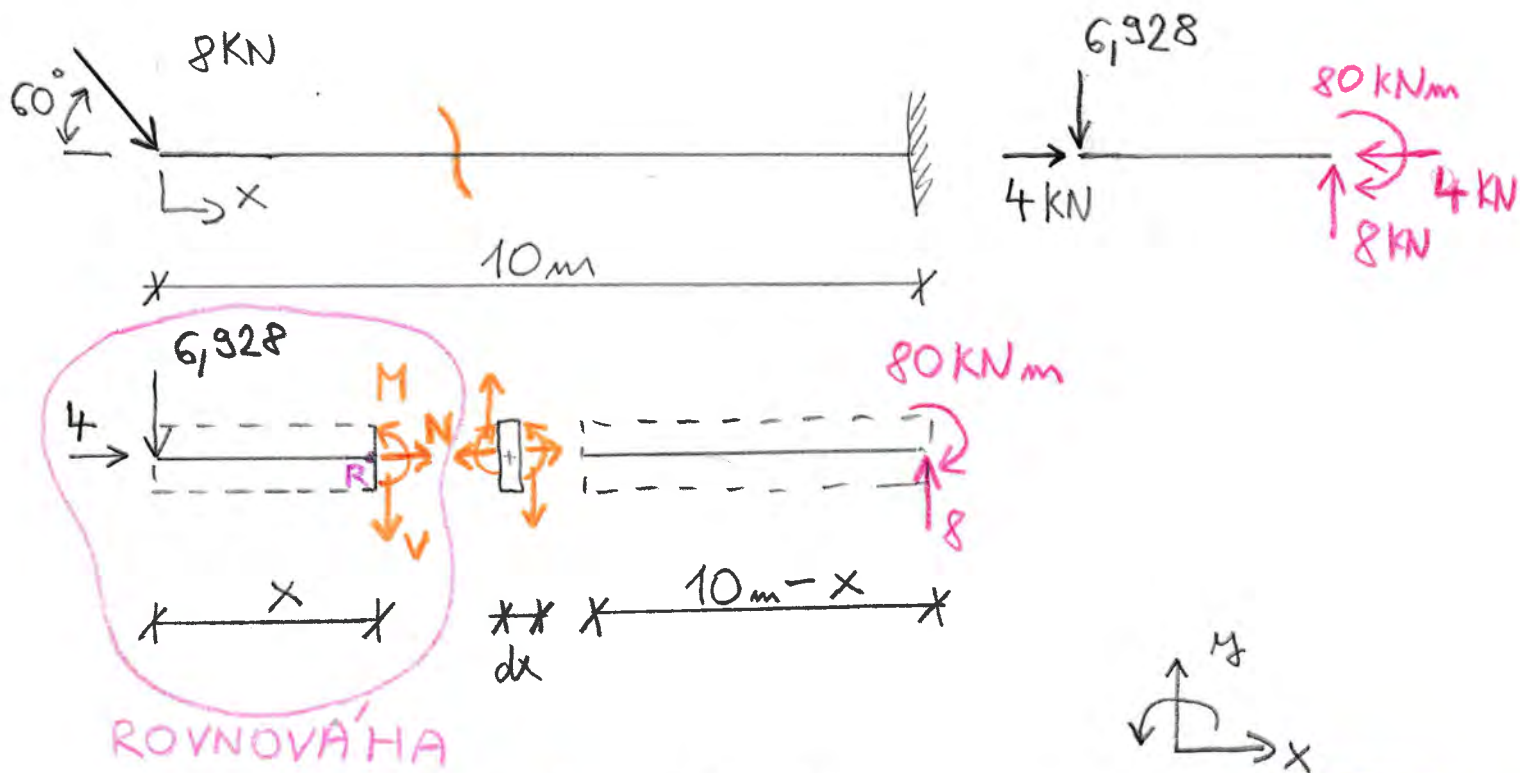
$$N(x) = - \int m(x) dx + C_1$$

$$V(x) = - \int q(x) dx + C_2$$

$$M(x) = \int V(x) dx + C_3 \quad (\text{pokud } m(x) = 0)$$

Derivačně integrační schéma





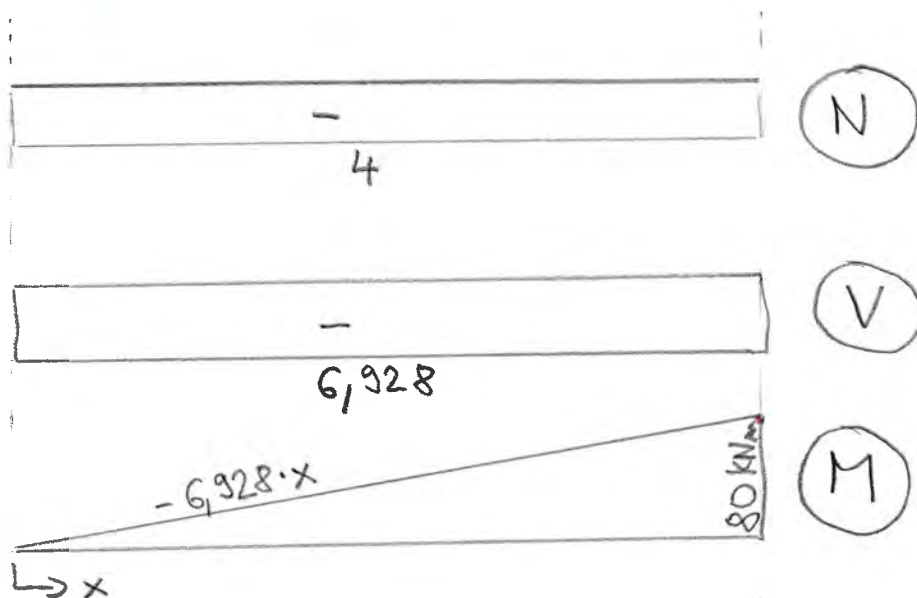
ROVNOVÁHA

$$\sum F_x = 0 \quad 4 + N = 0 \Rightarrow N = -4$$

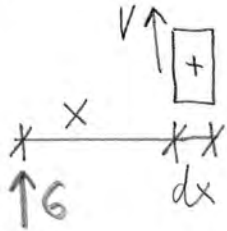
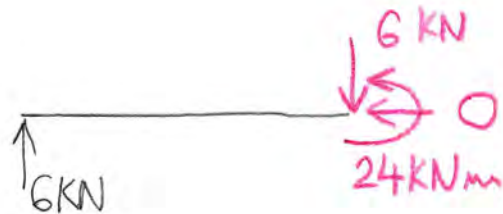
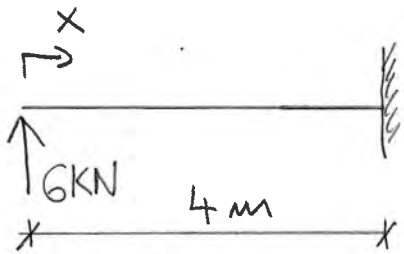
$$\sum F_y = 0 \quad -6.928 - V = 0 \Rightarrow V = -6.928$$

$$\sum M_R = 0 \quad 6.928 \cdot x + M = 0 \Rightarrow M = -6.928 \cdot x$$

$$V = \frac{dM}{dx}$$



- **Normálová síla N** je dána algebraickým součtem průmětů všech vnějších sil, působících na levou nebo pravou část prutu od průřezu, do směru osy prutu.
- **Posouvající síla V** je dána algebraickým součtem průmětů všech vnějších sil, působících na levou nebo pravou část prutu od průřezu, do směru kolmého k ose prutu.
- **Ohybový moment M** je určen algebraickým součtem statických momentů všech vnějších sil (včetně reakcí), působících na levou nebo pravou část prutu od průřezu, k těžišti průřezu.



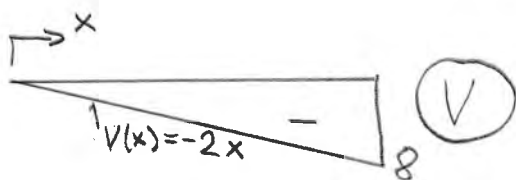
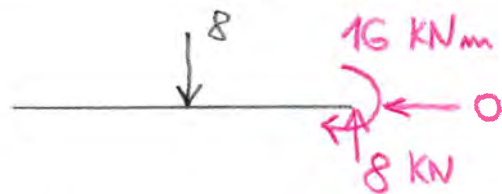
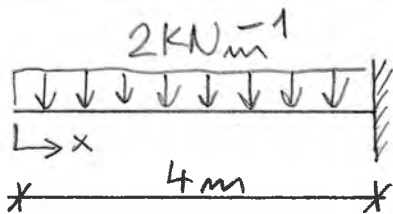
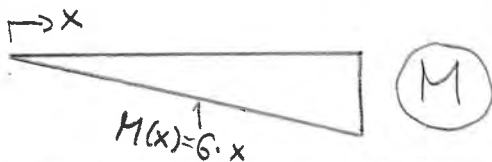
$$V(x) = 6 \text{ [kN]}$$



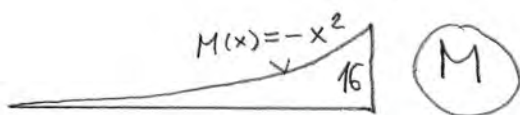
$$M(x) = 6 \cdot x \text{ [kNm]}$$



$$V(x) = \frac{dM}{dx} = 6 \text{ kN}$$

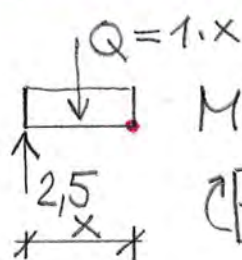
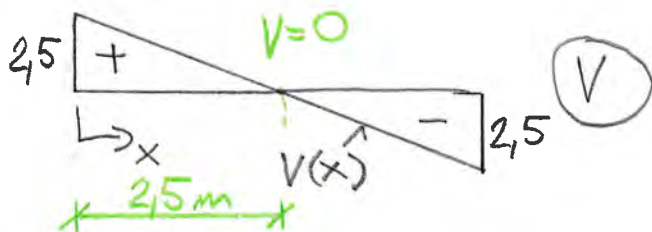
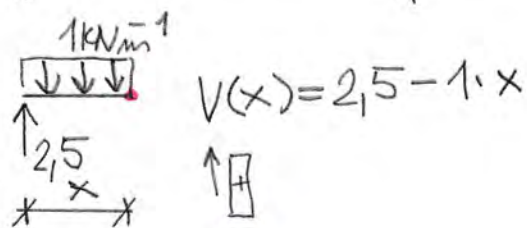
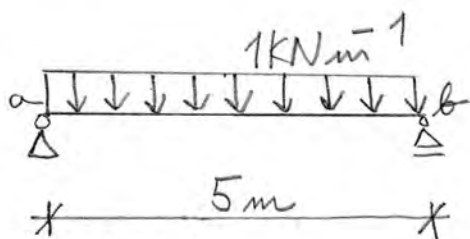


$$V(x) = -2 \cdot x \text{ [kN]}$$



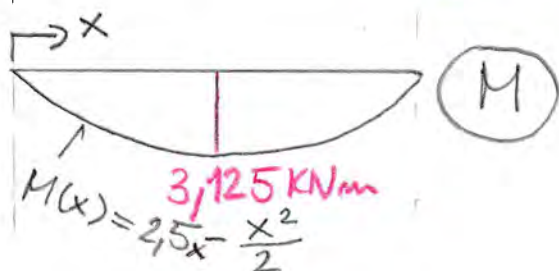
$$M(x) = -Q \cdot \frac{x}{2} = -2 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -x^2$$

$$V(x) = \frac{dM}{dx} = \frac{d(-x^2)}{dx} = -2x$$

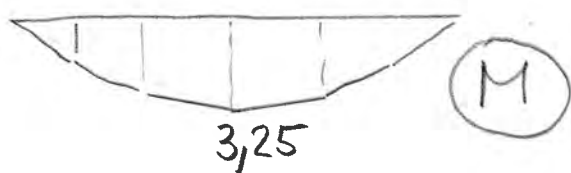
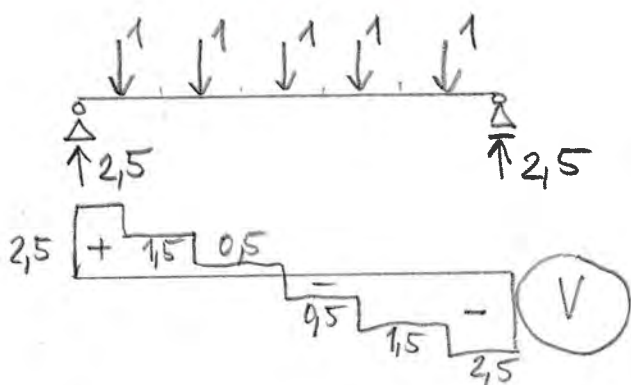


$$M(x) = 2,5 \cdot x - Q \cdot \frac{x}{2} = 2,5 \cdot x - 1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 2,5 \cdot x - \frac{x^2}{2}$$

$\max M = M(2,5) = 2,5 \cdot 2,5 - \frac{2,5^2}{2} = 3,125 \text{ kNm}$
 EXTRÉM MOMENTU KDE $V(x) = 0$



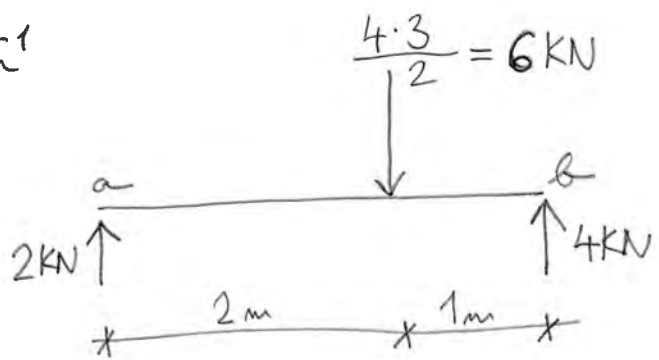
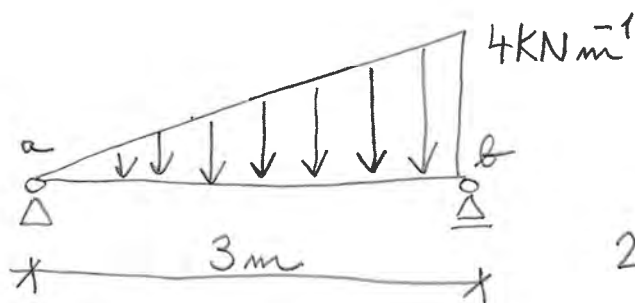
$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \frac{d(2,5 \cdot x - \frac{x^2}{2})}{dx} = 2,5 - x$$



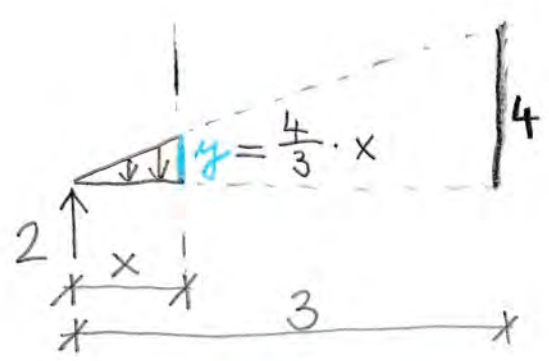
PŘÍBLIŽNÝ MODEL
 ZAHUŠŤOVÁNÍM BŘEMENY
 DOSÁHNEME APROXIMACI
 SPOJITÉHO PRŮBĚHU

1.5 = 5 kN

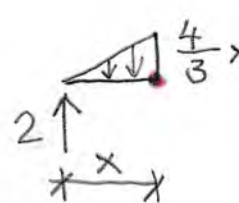
$$\begin{aligned} \sum M_a = 0 & \quad R_b \cdot 5 - 5 \cdot 2,5 = 0 \\ & \quad R_b = 2,5 \text{ kN} \\ \sum M_b = 0 & \quad -R_a \cdot 5 + 5 \cdot 2,5 = 0 \\ & \quad R_a = 2,5 \text{ kN} \\ \sum F_y = 0 & \quad 2,5 - 5 + 2,5 = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum M_a &= 0 & -6 \cdot 2 + R_b \cdot 3 &= 0 \\ R_b &= 4 \text{ kN} \\ \sum M_b &= 0 & -R_a \cdot 3 + 6 \cdot 1 &= 0 \\ R_a &= 2 \text{ kN} \\ \sum F_y &= 0 & 2 - 6 + 4 &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

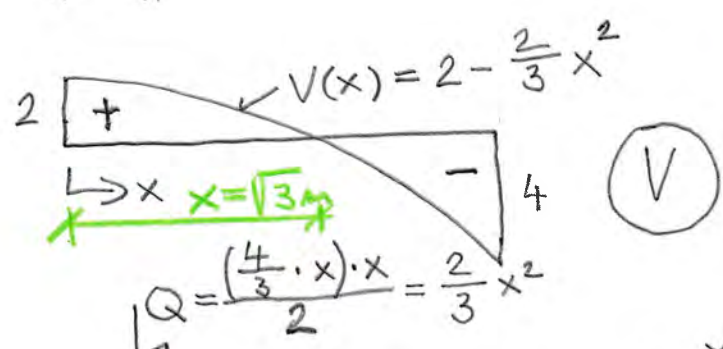


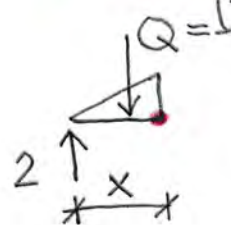
$$\frac{4}{3} = \frac{q}{x} \Rightarrow q = \frac{4}{3} \cdot x$$



$$V(x) = 2 - \frac{\left(\frac{4}{3} \cdot x\right) \cdot x}{2} = 2 - \frac{2}{3} x^2$$

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 \\ 2 - \frac{2}{3} x^2 &= 0 \\ \frac{2}{3} x^2 &= 2 \Rightarrow x = \sqrt{3} \text{ m} \end{aligned}$$



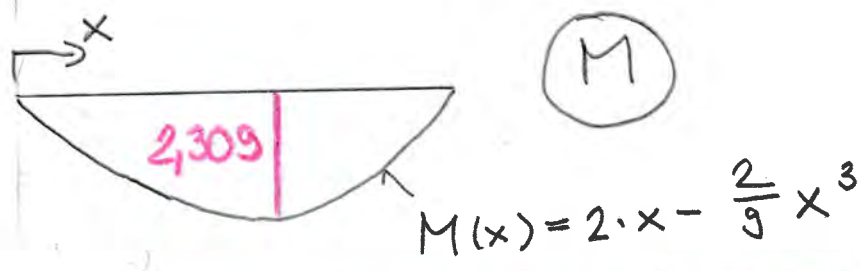


$$Q = \frac{\left(\frac{4}{3} \cdot x\right) \cdot x}{2} = \frac{2}{3} x^2$$

$$M(x) = 2 \cdot x - Q \cdot \frac{x}{3} = 2 \cdot x - \frac{2}{3} x^2 \cdot \frac{x}{3}$$

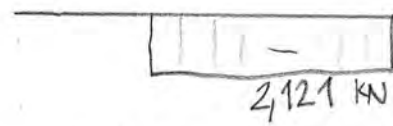
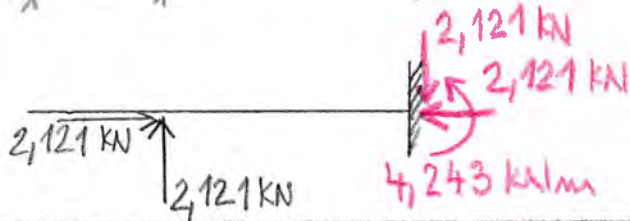
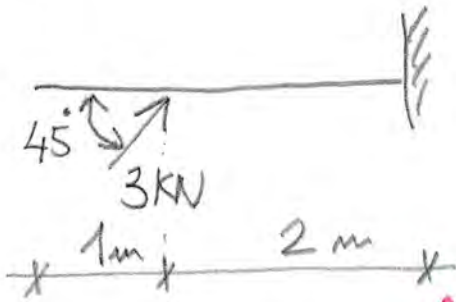
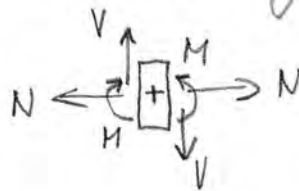
$$M(x) = 2 \cdot x - \frac{2}{9} x^3$$

$$V(x) = \frac{dM}{dx} = 2 - \frac{2}{3} x^2$$

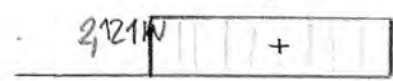


$$\max M = M(\sqrt{3}) = 2 \cdot \sqrt{3} - \frac{2}{9} (\sqrt{3})^3 = \underline{\underline{2,309 \text{ kNm}}}$$

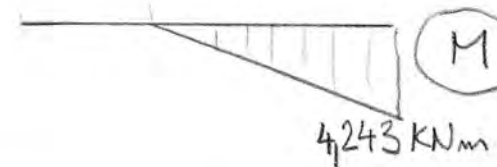
Vypočítejte reakce a vykreslete N, V, M



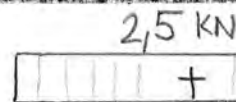
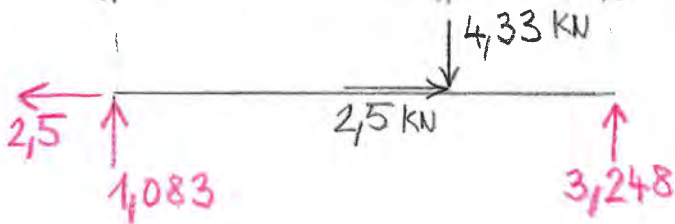
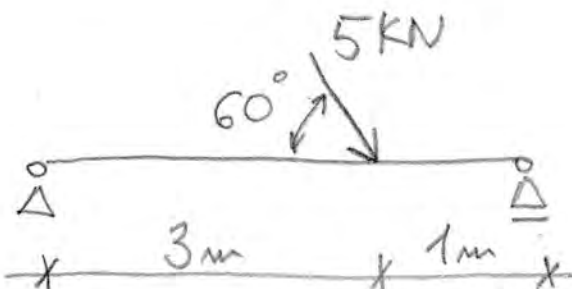
(N)



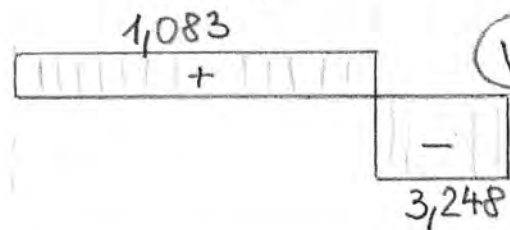
(V)



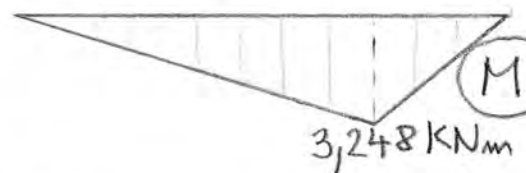
(M)



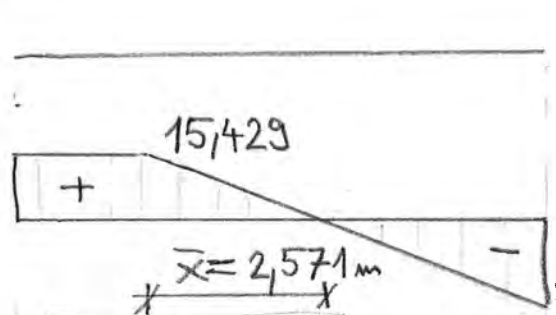
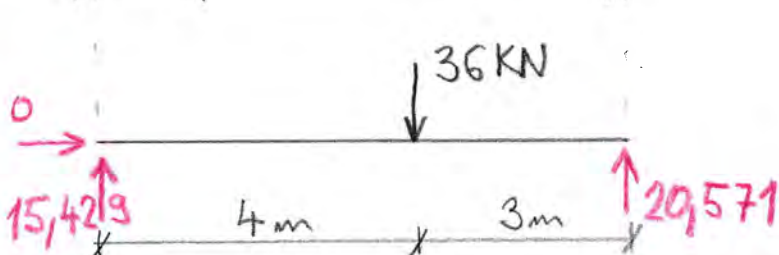
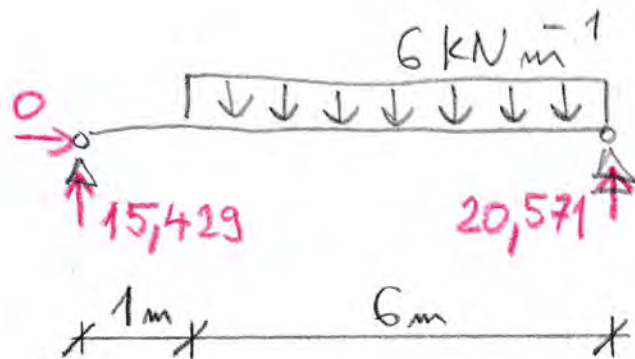
(N)



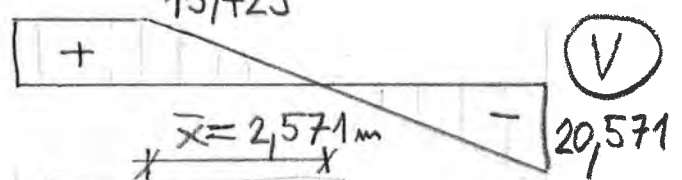
(V)



(M)



(N)



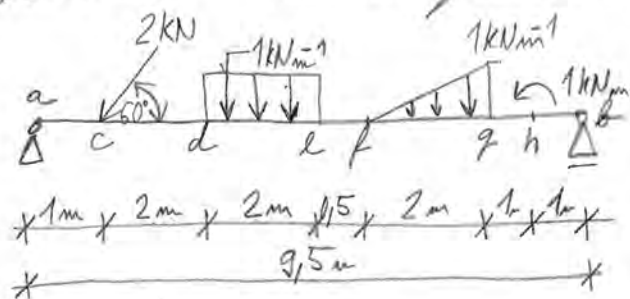
(V)



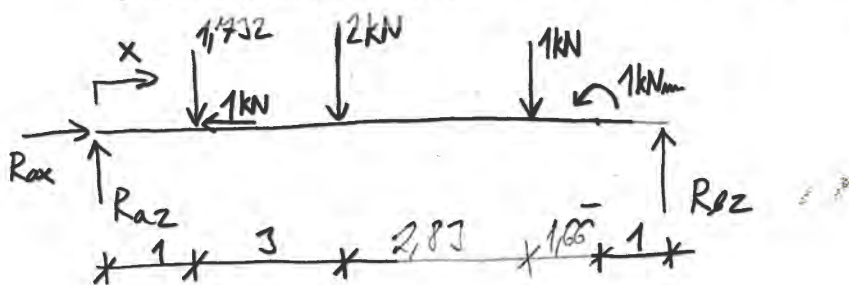
(M)

$$M_{\max} = 15,429 \cdot 3,571 - 6 \cdot 2,571 \cdot \frac{2,571}{2} = 35,265 \text{ kNm}$$

Příklad: Vypočítejte vnitřní síly na nosníku



- reakce
nosník rozdělíme z možných řezů a ^{upřesně} vypočítáme
náhodně náhodnými břemeny



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{ax} = 1 \text{ kN}$$

$$\sum M_a = 0 \Rightarrow R_{bz} \cdot 9,5 - 1,732 \cdot 1 - 2 \cdot 4 - 1 \cdot 6,83 + 1 = 0 \Rightarrow R_{bz} = 1,638 \text{ kN}$$

$$\sum M_h = 0 \Rightarrow -R_{az} \cdot 9,5 + 1,732 \cdot 8,5 + 2 \cdot 5,5 + 1 \cdot 2,666 + 1 = 0 \Rightarrow R_{az} = 3,0935 \text{ kN}$$

Kontrola: $1,638 + 3,0935 - 1,732 - 2 - 1 = 0$

- vnitřní síly

$$N_{ac} = 1 \text{ kN}$$

$$M_{ab} = 0$$

$$M_c = 3,0935 \cdot 1 = 3,0935 \text{ kNm} \quad M_d = 3,0935 \cdot 3 - 1,732 \cdot 2 = 5,814 \text{ kNm}$$

$$M_e = 3,0935 \cdot 5 - 1,732 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 6,5395 \text{ kNm}$$

$$M_f = 3,0935 \cdot 5,5 - 1,732 \cdot 4,5 - 2 \cdot 1,5 = 6,22 \text{ kNm}$$

$$M_g = 3,0935 \cdot 7,5 - 1,732 \cdot 6,5 - 2 \cdot 3,5 - 1 \cdot 1,666 = 4,244 \text{ kNm}$$

$$M_h = 3,0935 \cdot 8,5 - 1,732 \cdot 7,5 - 2 \cdot 4,5 - 1 \cdot 1,666 - 1 = 1,638 \text{ kNm}$$

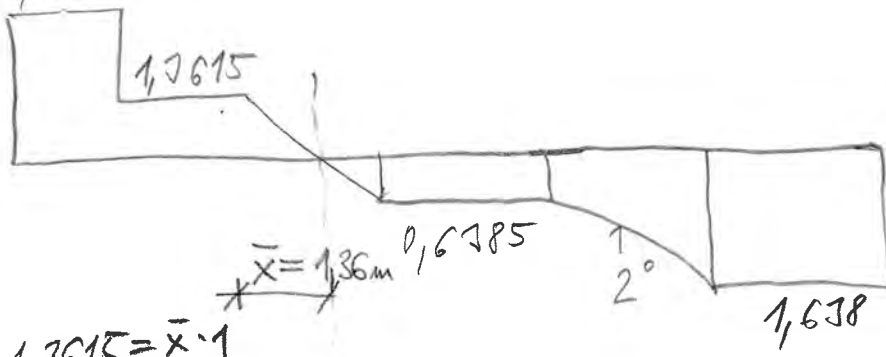
$$V_a = 3,0935 \text{ kN} \quad V_{cd} = V_a - 1,732 = 1,3615$$

$$V_{de} = V_a - 1,732 - 1 \cdot (x - 3)$$

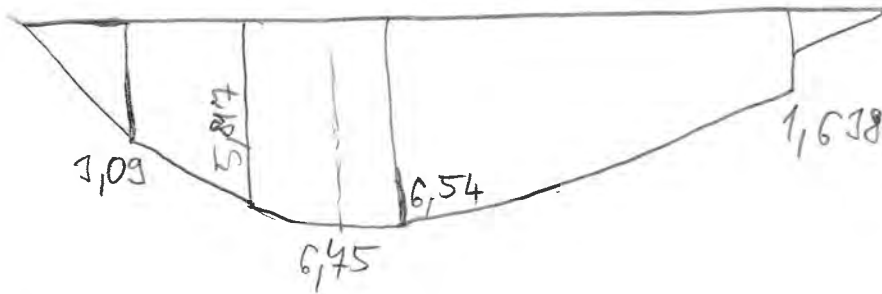
$$V_{ef} = V_a - 1,732 - 1 \cdot 2 = -0,6385 \text{ kN}$$

$$V_{fg} = V_a - 1,732 - 1 \cdot 2 - \frac{1 \text{ kNm}^{-1}}{2} \cdot (x - 5,5) \cdot \frac{(x - 5,5)}{2}$$

3,0935



V



M

-
1

N

ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY

BDA001

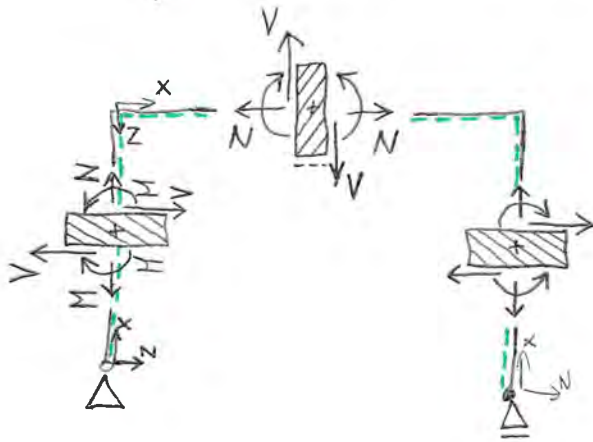
Rovinné pravoúhle lomené nosníky a konzoly, výpočet reakcí ve vazbách,
diagramy vnitřních sil.

Zdeněk Kala

Rovinný rám

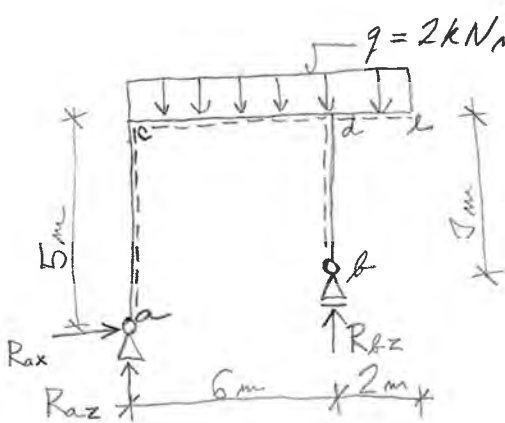


Jednoduchý rovinný lomený nosník pravoúhlý



- spodní částka ... rovináme
nosník do úsečky.
U složitějších nosníků
volíme libovolně.

Příklad: Máme příbeh ovládnutí sil na nosníku.



- reakce

$$\sum M_a = 0$$

$$-2 \cdot 8 \cdot 4 + R_{bz} \cdot 6 = 0 \Rightarrow R_{bz} = 10,6 \text{ kN} \approx 10,67 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$2 \cdot 8 = R_{az} + R_{bz} \Rightarrow R_{az} = 5,33 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{ax} = 0$$

$$N \quad N_{ac} = -R_{az} \\ N_{cd} = R_{ax} = 0$$

$$N_{de} = 0 \\ -N_{bd} = R_{bz} = 10,67 \text{ kN}$$

$$V \quad V_{ac} = R_{ax} = 0 \\ V_{cd} = R_{az} - 2 \cdot x$$

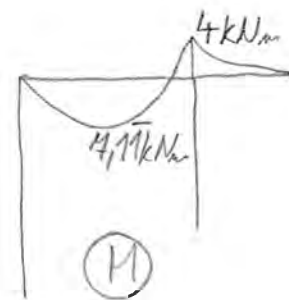
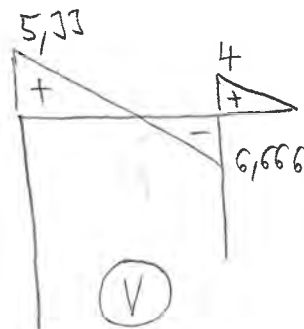
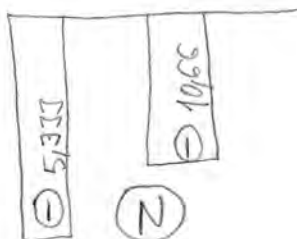
$$V_{de} = R_{az} - 2 \cdot 6 + R_{bz} - 2 \cdot x$$

$$V_{bd} = 0$$

$$M \quad M_{ac} = 0 \\ M_{cd} = R_{az} \cdot x - 2 \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$M_{bd} = -2 \cdot \frac{x^2}{2}$$

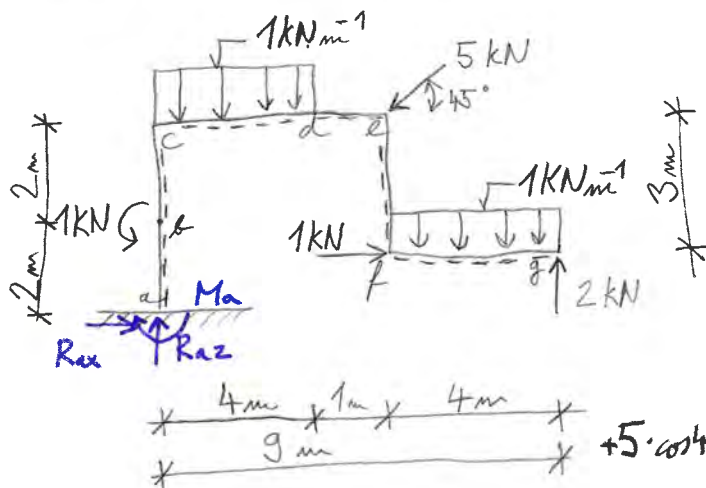
$$M_{de} = 0$$



$$M_{\max} = 5,3 \cdot 2,6 - 2 \cdot 2,6^2 = 7,11 \text{ kNm}$$

$$x = \frac{5,33}{2} = 2,66 \text{ m}$$

Prüfung: Statik N, V, M



$$\sum F_z = 0$$

$$1.4 + 5 \cdot \cos 45^\circ + 1.4 - 2 - R_{az} = 0$$

$$R_{az} = 9,535 \text{ kN}$$

$$\sum M_a = 0$$

$$2 \cdot 9 - 1.4 \cdot 4 - 1.1 - 5 \cdot \sin 45^\circ \cdot 5 +$$

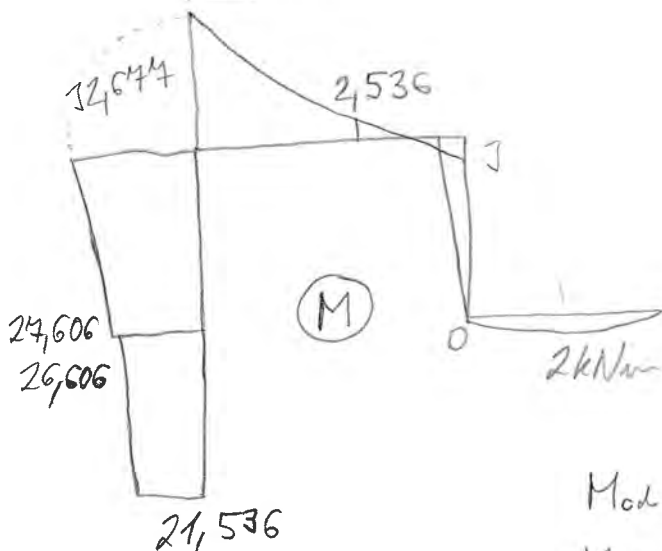
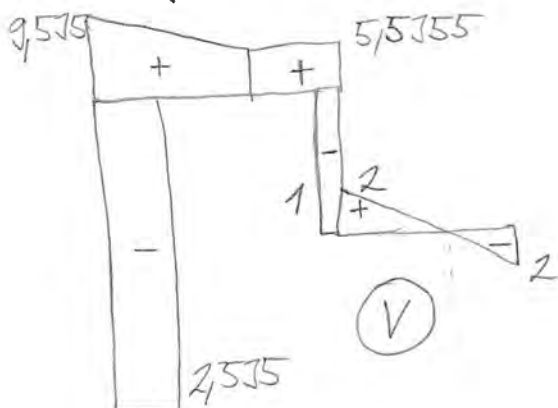
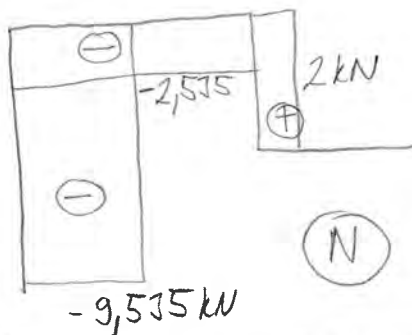
$$+ 5 \cdot \cos 45^\circ \cdot 4 - 1.4 \cdot 2 + 1 - M_a = 0$$

$$M_a = -21,536 \text{ kNm}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$R_{ax} + 1 - 5 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$R_{ax} = 2,5355 \text{ kNm}$$



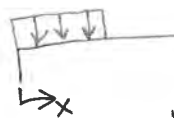
$$N_{ab} = N_{bc} = -R_{az} = -9,535 \text{ kN}$$

$$N_{cd} = N_{de} = -R_{ax} = -2,5355 \text{ kN}$$

$$N_{ef} = 1.4 - 2 = 2 \text{ kN} \quad N_g = 0$$

$$V_{ab} = V_{bc} = -R_{ax} = -2,535 \text{ kN}$$

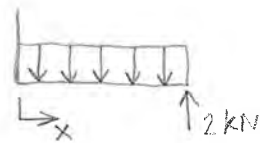
$$V_{cd} = R_{az} - 1 \cdot x$$



$$V_{de} = R_{az} - 1.4 = 5,535 \text{ kN}$$

$$V_{ef} = -1 \text{ kN (uprava)}$$

$$V_{fg} = V_{de} - 5 \cdot \sin 45^\circ - 1 \cdot x$$



$$M_{ab}^1 = M_a - R_{ax} \cdot 2 \text{ m} = -26,604 \text{ kNm}$$

$$M_{bc}^2 = M_a - R_{ax} \cdot 2 - 1 = -27,604 \text{ kNm}$$

$$M_c = M_a - R_{ax} \cdot 4 - 1 = -32,604 \text{ kNm}$$

$$M_{cd} = M_a - R_{ax} \cdot 4 - 1 + R_{az} \cdot x - 1 \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$M_d = M_a - R_{ax} \cdot 4 - 1 + R_{az} \cdot x - 1.4(x-2) \rightarrow x$$

$$M_e = M_a - R_{ax} \cdot 4 - 1 + 9,53 \cdot 5 - 1.4 \cdot 3 = 3 \text{ kNm}$$

$$M_f = 2 \cdot 4 - 1.4 \cdot 2 = 0 \text{ (uprava)}$$

ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY

BDA001

Rovinný šikmý nosník, spojitě zatížení šikmého prutu, rozklad šikmého spojitěho zatížení, rovinný lomený nosník se šikmými pruty, reakce a diagramy vnitřních sil a momentů. Aplikace na mimostyčnicková zatížení rovinných příhradových konstrukcí.

Zdeněk Kala

Šikmý nosník

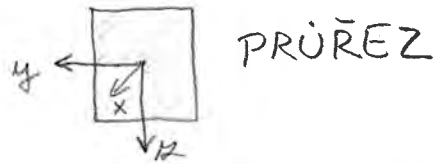
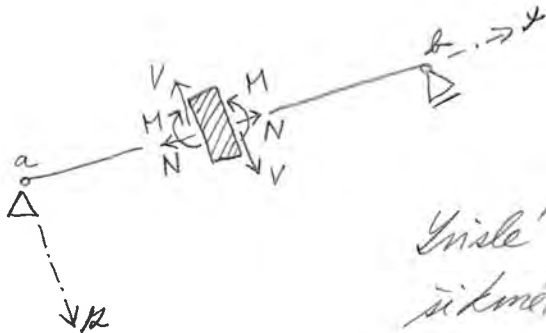


<https://onlineschool.cz/statika/vnitri-sily-v-sikmych-nosnicich/>
http://fast10.vsb.cz/michalcova/Statika13/prr_06_13_sikmy.pdf
http://www.zbynekvlk.cz/vyuka/rocnik1/priklady/p8_1/p8_1.html
<http://www.kitnarf.cz/education/zidekrostitlav/index.php>

Úkloný nosník

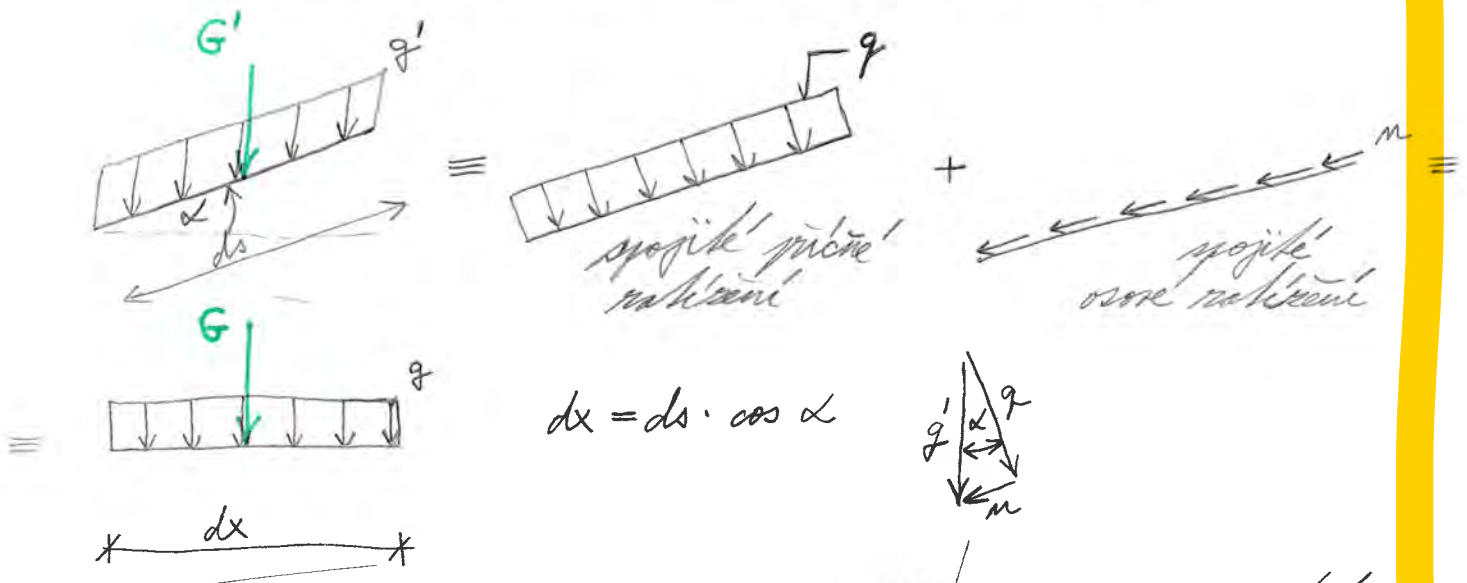


Úkloný nosníkem rozumíme nosník, jehož střednice je odkloněna od vodorovné osy o úhel α .



Úsile' spojité' zatížení můžeme být u úkloného nosníku zadáno dvěma způsoby

- podél střednice o intenzitě q' (oblastí tlá) (oblastí tlá)
- po vodorovném průměru o intenzitě q (vnitřní zatížení, působení větru apod.)



$$G = G'$$

$$(1) \quad q \cdot dx = q' \cdot ds$$

$$(2) \quad q \cdot dx = q' \cdot ds \cdot \cos \alpha$$

$$q' \cdot ds = q \cdot ds \cdot \cos \alpha$$

$$q = \frac{q'}{\cos \alpha}$$

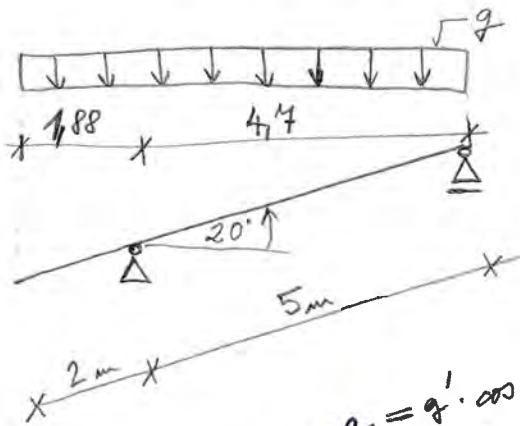
z (1) a (2)
(proč strana)

Příklad: úsile' spojité'lo zatížení q' do složky přičné q a osové n

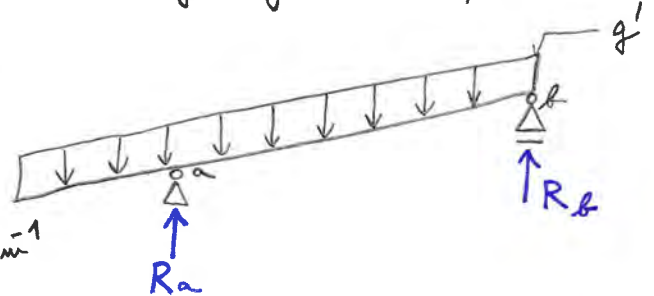
$$q = q' \cdot \cos \alpha = q \cdot \cos^2 \alpha$$

$$n = q' \cdot \sin \alpha = q \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$$

Příklad: Vraťte prvek umístěný sil N, V, M
na šikmém prostém nosníku s konstantní
přímou koncem a šikmým sklonem $\alpha = 20^\circ$
pro spojitě rovnoměrné svislé zatížení
 $g = 212 \text{ kN m}^{-1}$



$$g' = g \cdot \cos \alpha = 212 \cdot \cos 20^\circ = 200 \text{ kN m}^{-1}$$



Reakce:

$$\sum M_{iB} = 0$$

$$-R_a \cdot 4.7 + 2 \cdot 4.0 \cdot \frac{6.58}{2} = 0$$

$$R_a = 3.8 \text{ kN}$$

$$\sum M_{iA} = 0$$

$$R_b \cdot 4.7 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1.88}{2} - 2 \cdot 5 \cdot \frac{4.7}{2} = 0$$

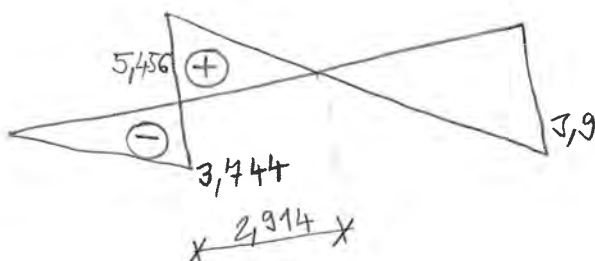
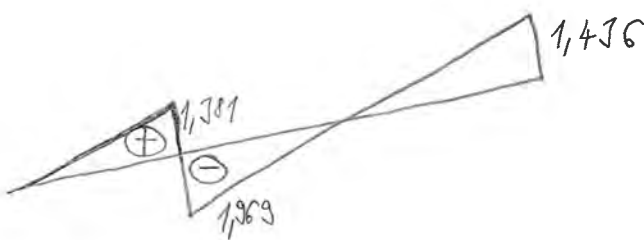
$$R_b = 4.2 \text{ kN}$$

$$R_{ax} = R_a \cdot \sin \alpha = 3.35 \text{ kN}$$

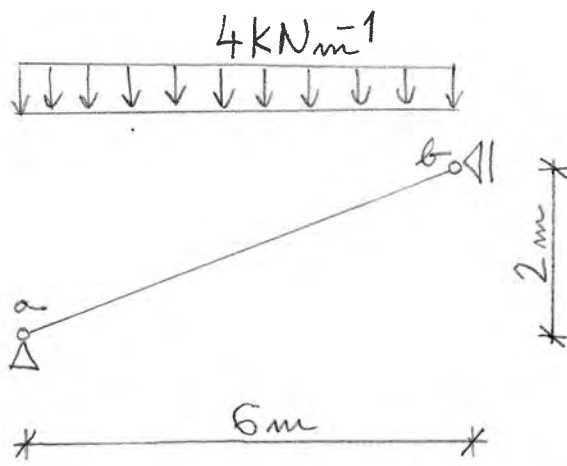
$$R_{az} = R_a \cdot \cos \alpha = 3.2 \text{ kN}$$

$$R_{bx} = R_b \cdot \sin \alpha = 1.436 \text{ kN}$$

$$R_{bz} = R_b \cdot \cos \alpha = 3.9464 \text{ kN}$$



$$M_{max} = 4.16 \text{ kNm}$$



$$\sum M_a = 0: -4 \cdot 6 \cdot 3 + R_b \cdot 2 = 0$$

$$R_b = 36 \text{ kN}$$

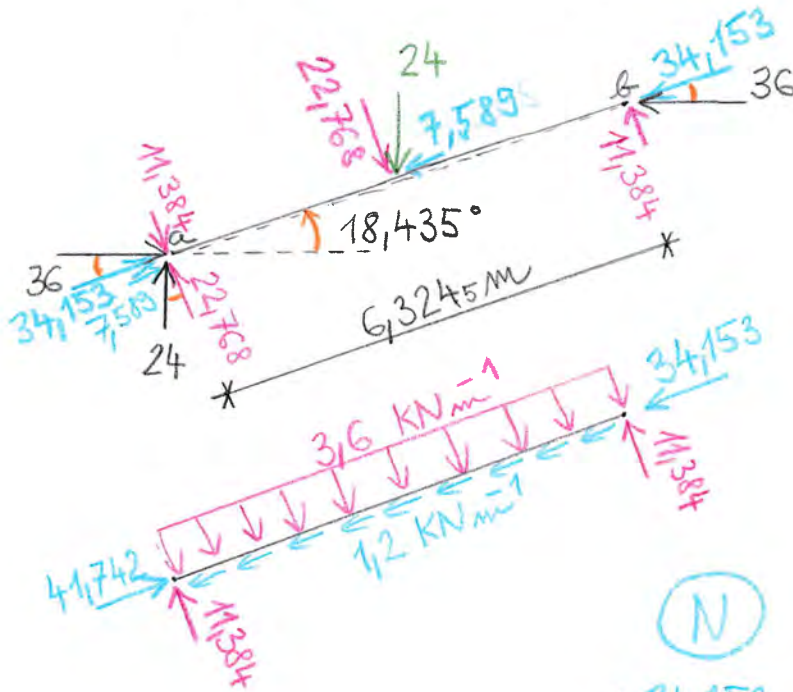
$$\sum F_x = 0: H_a - R_b = 0$$

$$H_a = 36 \text{ kN}$$

$$\sum M_b = 0: -R_a \cdot 6 + 36 \cdot 2 + 4 \cdot 6 \cdot 3 = 0$$

$$R_a = 24 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: 24 - 4 \cdot 6 = 0 \checkmark$$



$$4 \cdot 6 = 24$$

$$24 \cdot \cos 18,435^\circ = 22,768$$

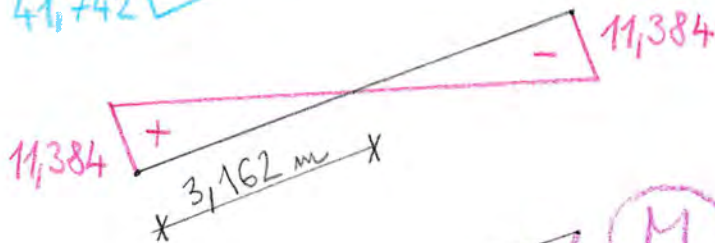
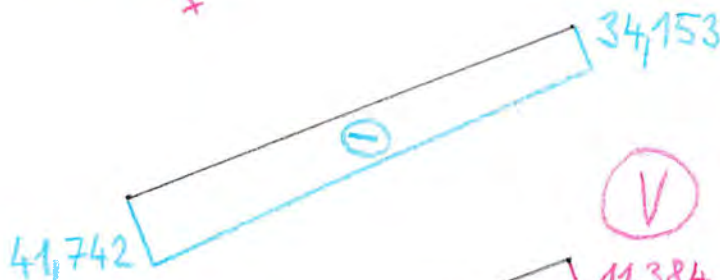
$$36 \cdot \sin 18,435^\circ = 11,384$$

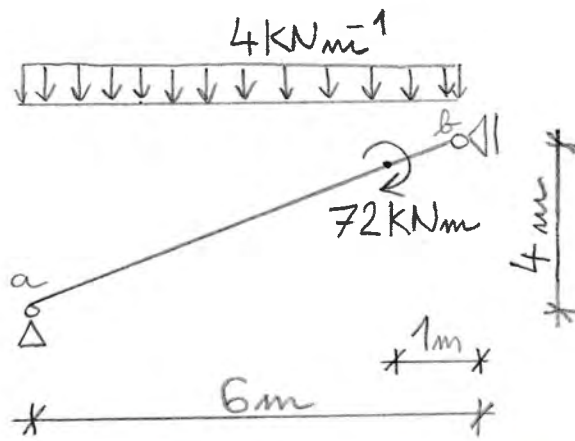
$$24 \cdot \sin 18,435^\circ = 7,589$$

$$36 \cdot \cos 18,435^\circ = 34,153$$

$$\frac{22,768 \text{ kN}}{6,324 \text{ m}} = 3,6 \text{ kN/m}$$

$$\frac{7,589 \text{ kN}}{6,324 \text{ m}} = 1,2 \text{ kN/m}$$





$$\sum M_a = 0: -4 \cdot 6 \cdot 3 - 72 + R_b \cdot 4 = 0$$

$$R_b = 36$$

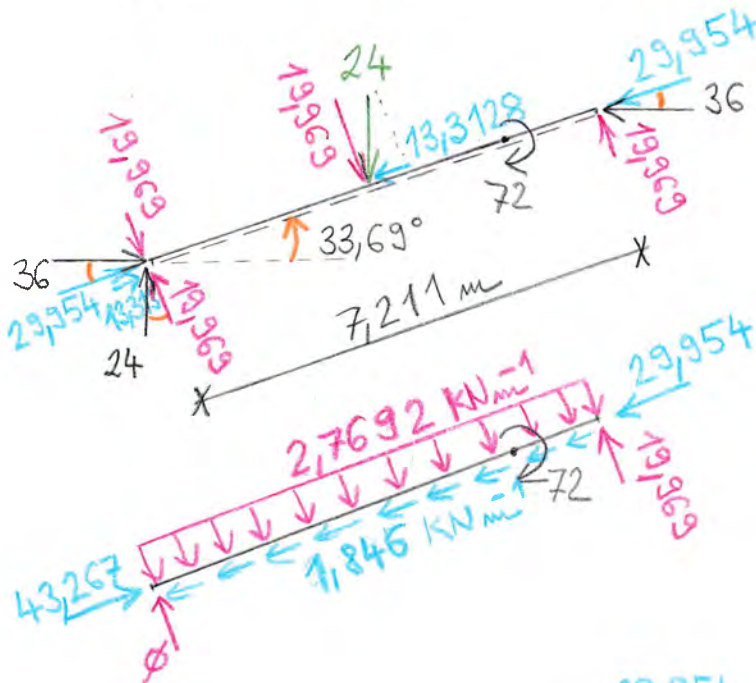
$$\sum F_x = 0: H_a - R_b = 0$$

$$H_a = 36 \text{ kN}$$

$$\sum M_b = 0: -R_a \cdot 6 + 36 \cdot 4 + 4 \cdot 6 \cdot 3 - 72 = 0$$

$$R_a = 24$$

$$\sum F_y = 0: 24 - 4 \cdot 6 = 0 \checkmark$$



$$4 \cdot 6 = 24$$

$$24 \cdot \cos 33.69^\circ = 19.969$$

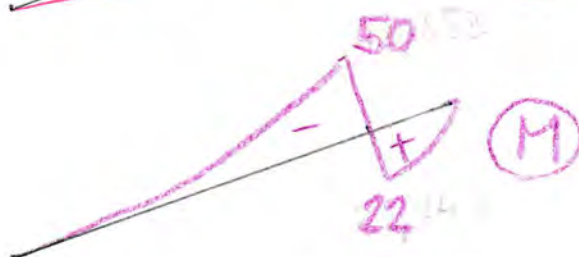
$$36 \cdot \sin 33.69^\circ = 19.969$$

$$24 \cdot \sin 33.69^\circ = 13.313$$

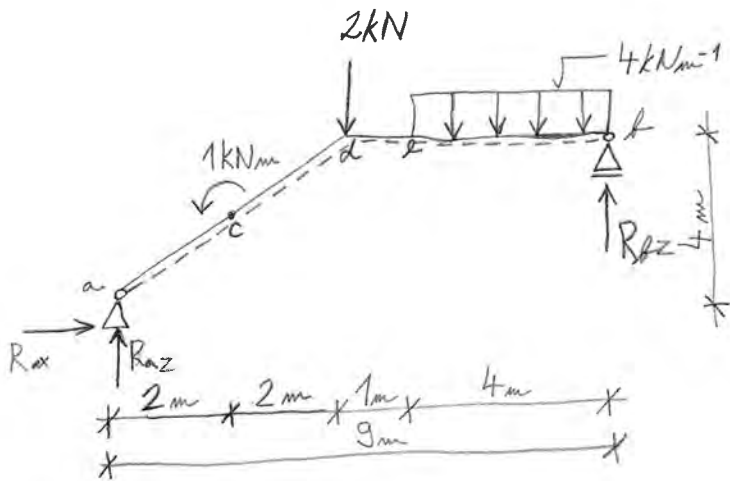
$$36 \cdot \cos 33.69^\circ = 29.954$$

$$\frac{19.969 \text{ kN}}{7.211} = 2.7694 \text{ kN/m}$$

$$\frac{13.3128 \text{ kN}}{7.211} = 1.846 \text{ kN/m}$$



Příklad: Stanovte průběhy N, V, M na prostém lomeném nosníku se šikmým prvkem o sklonu $\alpha = 45^\circ$



$$\sum M_a = 0$$

$$R_b \cdot 9 - 4 \cdot 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 + 1 = 0$$

$$R_{bz} = 13,22 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$2 + 4 \cdot 4 = R_{az} + R_{bz} \Rightarrow R_{az} = 4,44 \text{ kN}$$

$$\sum M_b = 0$$

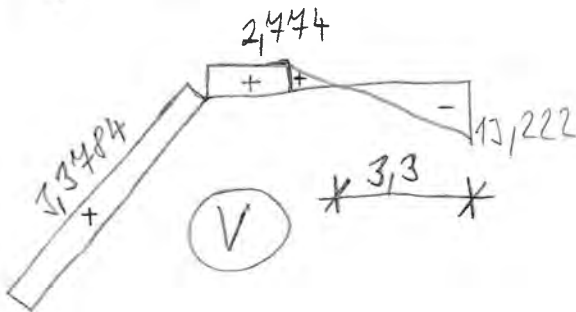
$$R_{ax} \cdot 4 + 1 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \cdot 2 - R_{az} \cdot 9 = 0$$

$$R_{ax} = -0,0 \text{ kN}$$



$$N_{ac} = N_{cd} = R_{az} \cdot \sin 45^\circ = 3,3429 \text{ kN}$$

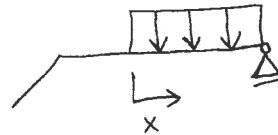
$$N_{de} = N_{eb} = 0$$



$$V_{ac} = V_{cd} = R_{az} \cdot \cos 45^\circ = 3,3429 \text{ kN}$$

$$V_{de} = R_{az} - 2 \text{ kN} = 2,444 \text{ kN}$$

$$V_{eg} = R_{az} - 2 \text{ kN} - 4 \cdot x$$



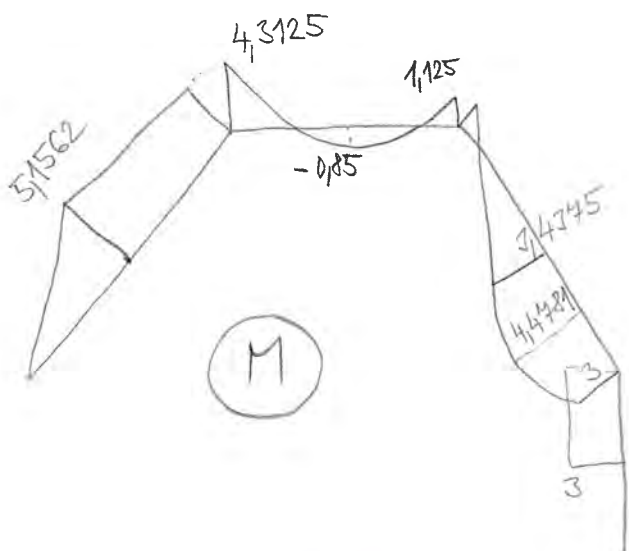
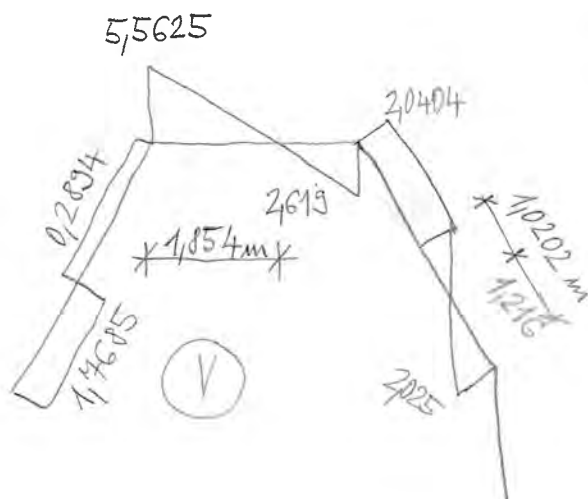
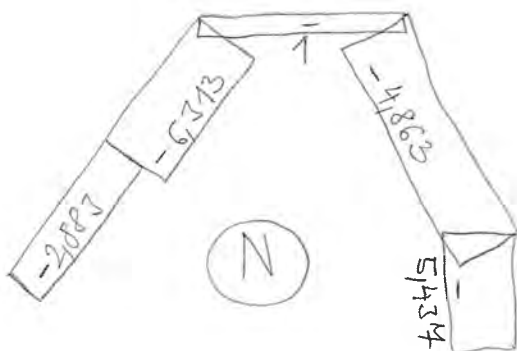
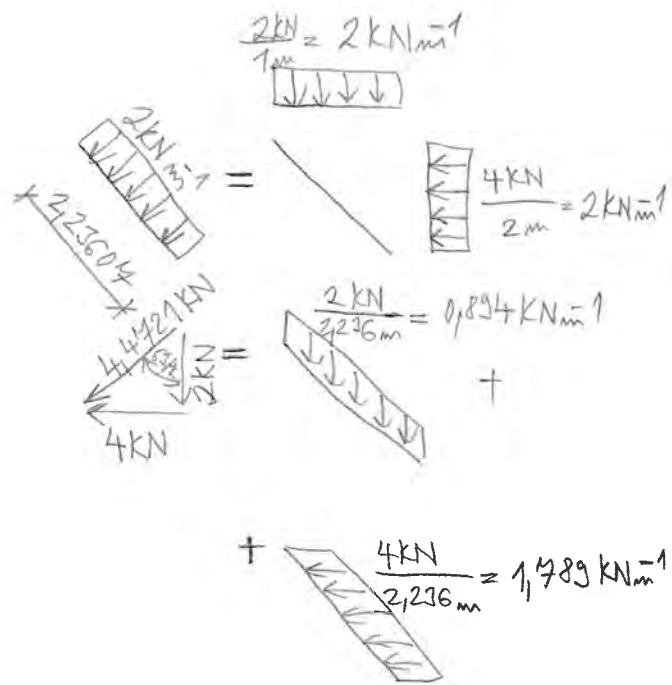
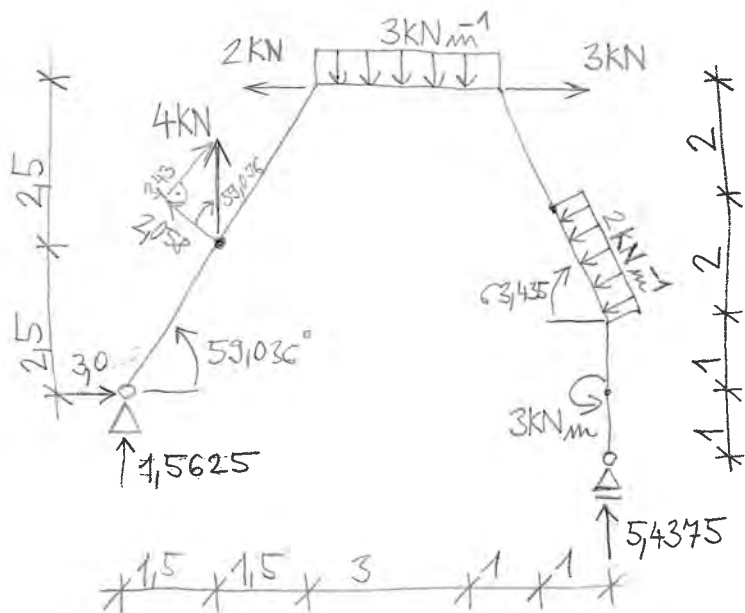
$$^L M_c = R_{az} \cdot \cos 45^\circ \cdot 2,828 = 9,555 \text{ kNm}$$

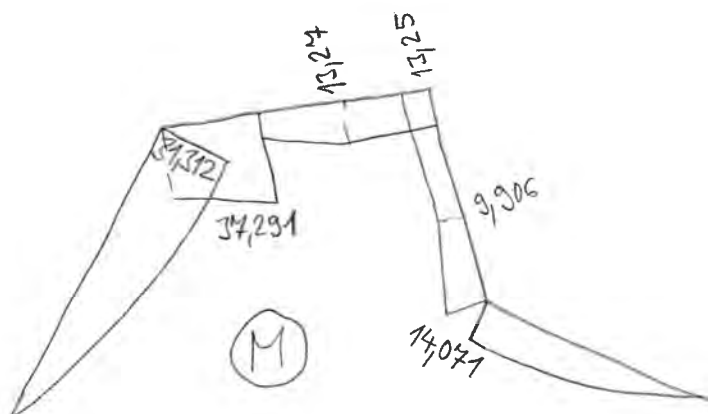
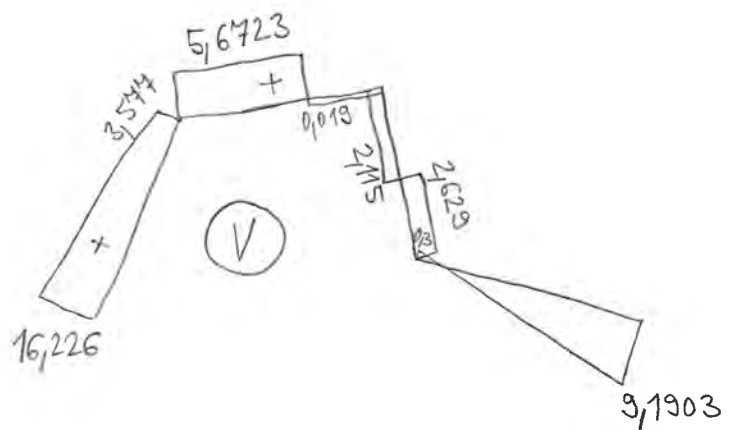
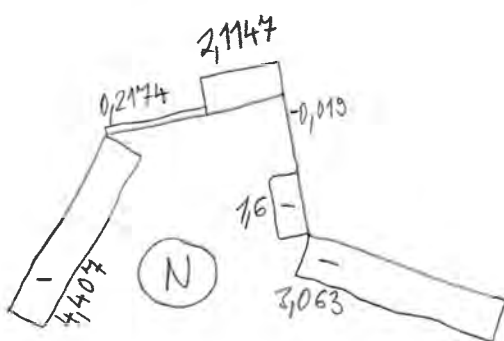
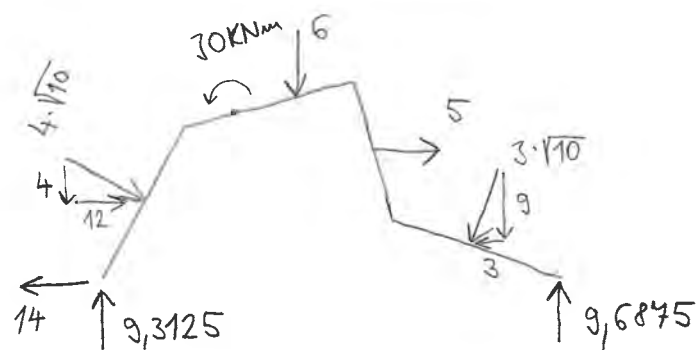
$$^P M_c = ^L M_c - 1 = 8,555 \text{ kNm}$$

$$M_d = R_{az} \cdot \cos 45^\circ \cdot 5,656 - 1 = 18,11 \text{ kNm}$$

$$M_e = 4,44 \cdot 5 - 1 - 2 \cdot 1 = 20,85 \text{ kNm}$$

$$M_{max} = 4,44 \cdot 5,7 - 1 - 2 \cdot 1,7 - 4 \cdot 0,7 \cdot \frac{0,7}{2} = 21,81 \text{ kNm}$$





ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY

BDA001

Statika rovinných soustav těles složených z hmotných bodů a tuhých desek, statická a kinematická určitost (rovněž u příhradové konstrukce z druhé přednášky). Obecná metoda řešení rovinných soustav těles rozkladem na dílčí tělesa, reakce a vnitřní síly. Trojkloubový lomený nosník.

Zdeněk Kala

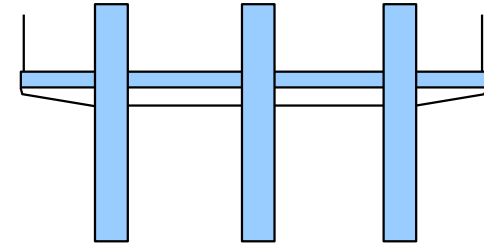
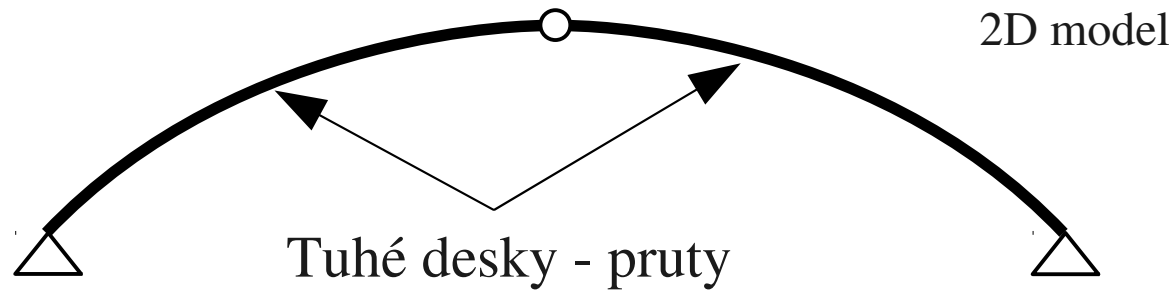
Maloměřický most s mezilehlou mostovkou, Brno

tři paralelní trojkloubové oblouky, rozpětí 33 m, 1928

https://drive.google.com/file/d/1Qe9k7Wcf_bDaP3xhmOTDG3WePe2TbqqC/view?usp=sharing

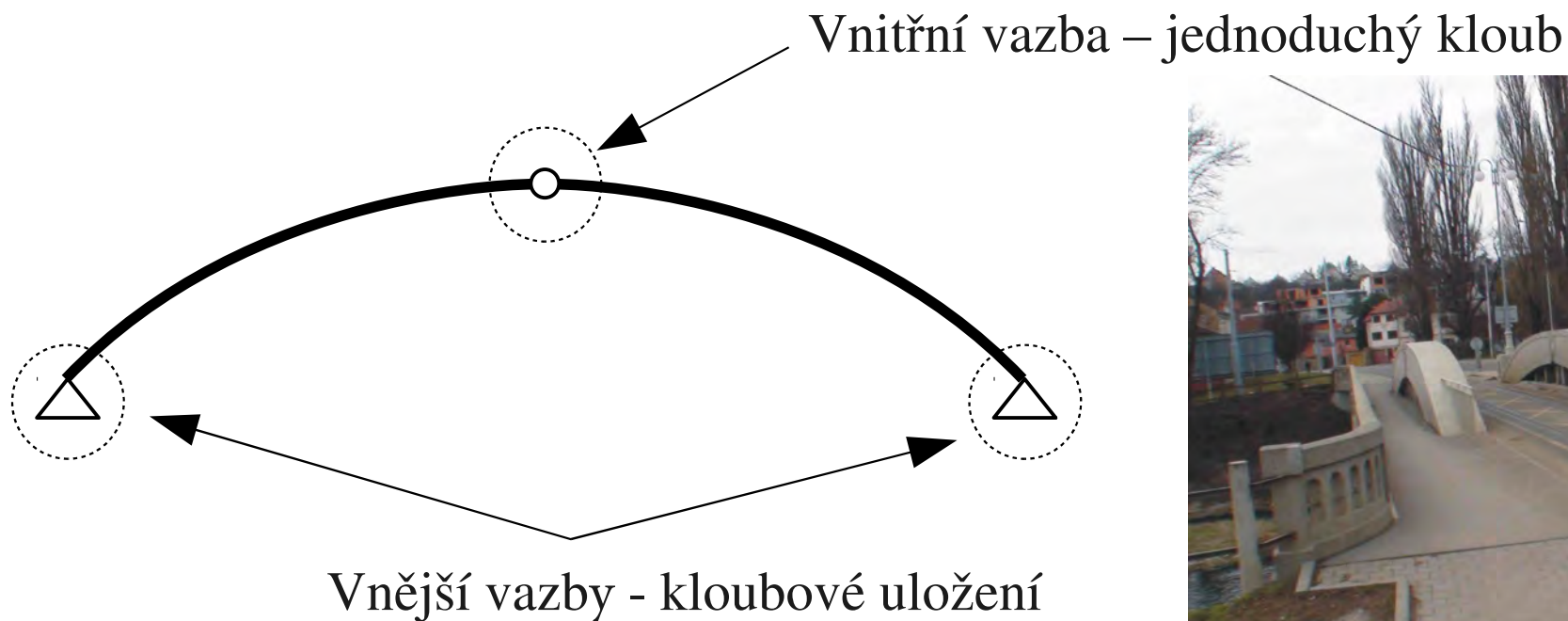


Trojkloubový nosník



Vnější vazby – spojují soustavu s podkladem

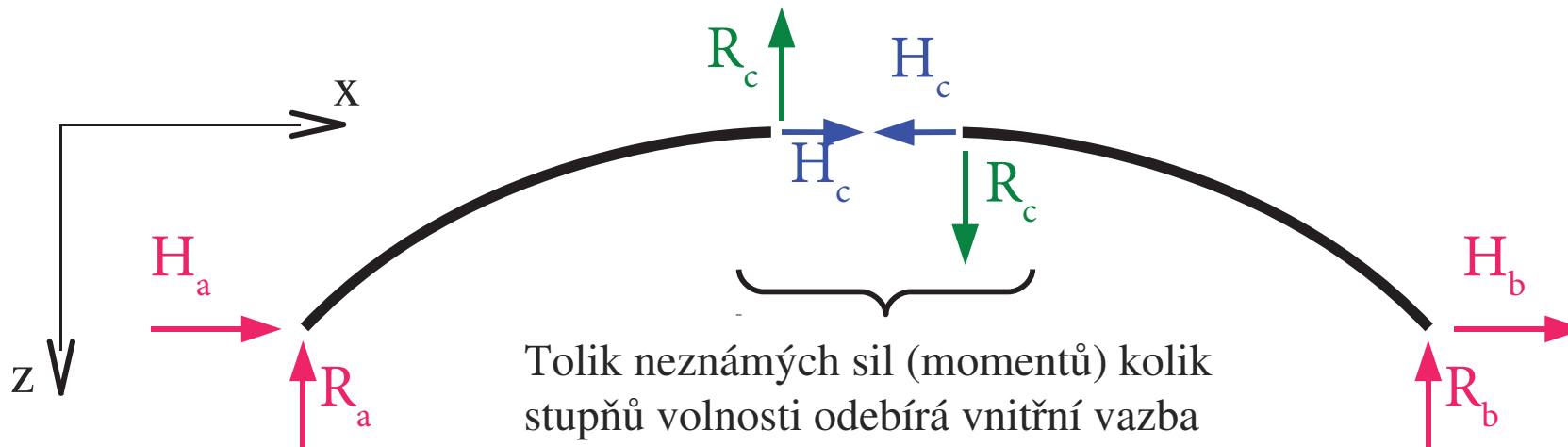
Vnitřní vazby – spojují jednotlivé prvky navzájem (klouby, kyvné pruty, táhla...)



Výpočet reakcí složených soustav

Uvolníme všechny vnitřní a vnější vazby a účinky vazeb nahradíme příslušnými silami (momenty).

Složená soustava se tak rozpadne na jednotlivé části, u vnitřních vazeb platí princip akce a reakce (jsou v rovnováze).



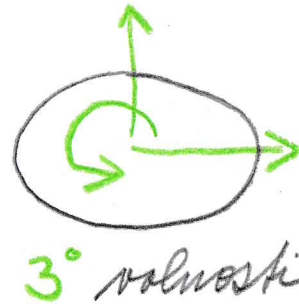
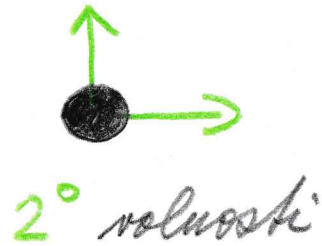
Konstrukce je ve statické rovnováze tehdy, když je v rovnováze každá její část.

Statické podmínky lze použít na jednotlivých částech i na celé konstrukci.

Počet nezávislých statických podmínek rovnováhy je $3+3=6$.

Statika rovinných soustav těles složených z hmotných bodů a tuhých desek

Hmotný bod

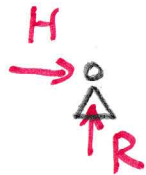


Tuhá deska

VNĚJŠÍ VAZBY



Odebírá
1° volnosti

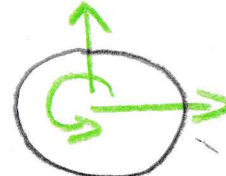
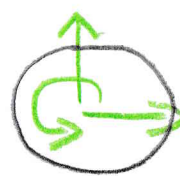


2° volnosti



3° volnosti

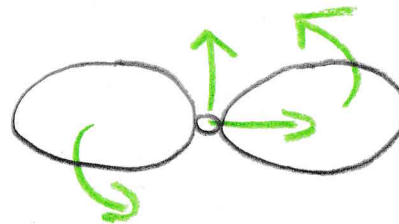
VNITŘNÍ VAZBY SYSTÉMU



Má
6°

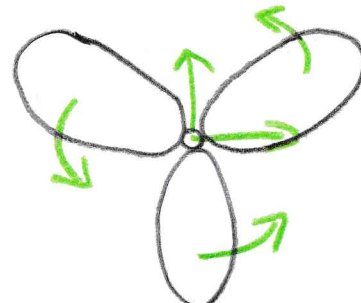
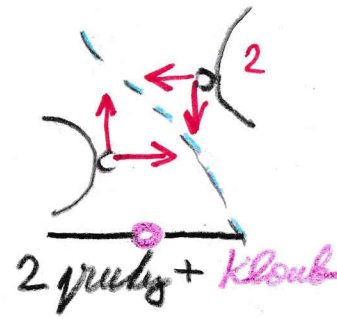
Odebírá
0°

VNITŘNÍ
KLOUB



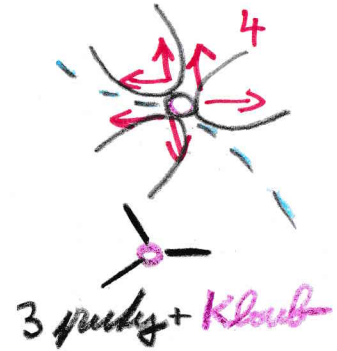
4°

2°



5°
 $9 - 4 = 5^\circ$

4°



Statika rovinných soustav těles složených z hmotných bodů a tuhých desek

Složená rovinná soustava je jako celek v rovnováze, když je v rovnováze každá její část.

Akce a reakce (zatížení) každého hmotného bodu a každé tuhé desky (prutu) složené soustavy musí tvořit rovnovážnou soustavu sil.

Stupně volnosti: $\nu = 2b + 3d$

Vazby

$$a = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 2 \cdot \sum_{m=3,4..} (m-1) \cdot k_m$$

Soustava je staticky a kinematicky určitá (nehybná) když počet stupňů volnosti soustavy je roven počtu stupňů volnosti zrušených vnějšími a vnitřními vazbami:

STATICKY URČITÁ:

$$\nu = a$$

b ... počet hmotných bodů

d ... počet desek (prutů)

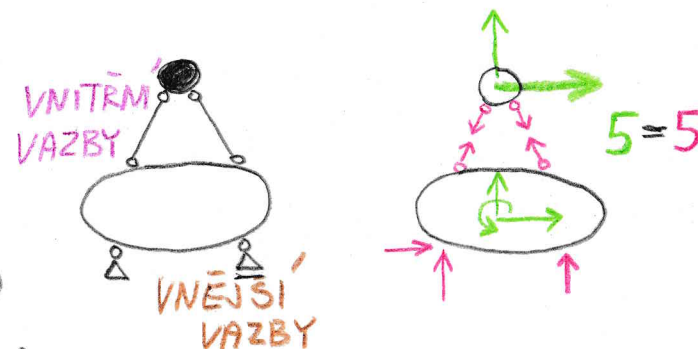
a_1 ... počet jednonásobných vazeb (1)

a_2 ... počet dvojnásobných vazeb (2)

a_3 ... počet trojnásobných vazeb (3)

k_m ... počet vnitřních kloubů spojujících $m \geq 2$ desek (prutů)
(s každým přídavným prutem + 2 vnitřní vazby)

Podmínka: determinant soustavy $D \neq 0$



VNITŘNÍ KLOUBY

$V < a$ staticky neurčitá a kinematičes přeurčitá soustava

~~$V > a$ kinematicky neurčitá (pohyblivá) soustava nebo~~

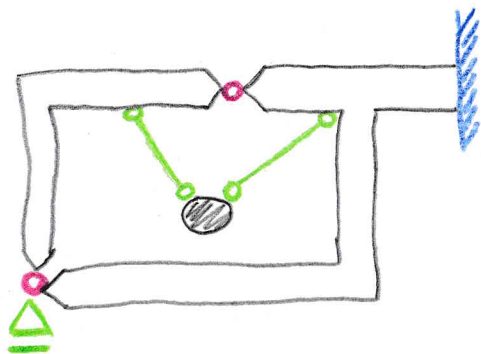
—○— dvojnásobná $m=2$; $k_m=1$; $V=2 \cdot (2-1) \cdot 1=2$

—○— třínásobná $m=3$; $k_m=1$ $V=2 \cdot (3-1) \cdot 1=4$

—○— šestinásobná $m=4$; $k_m=1$ $V=2 \cdot (4-1) \cdot 1=6$

—○— dvojnásobná $m=2$; $k_m=1$ $V=2 \cdot (2-1) \cdot 1=2$

Příklad:



$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 < 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 0$$

$$8 < 10$$

2SN ... staticky neurčitá a kinematičes přeurčitá soustava (systém)

Statika hmotných objektů a složený soustav

Podkladní pojmy

Volný hmotný objekt - není se s ním polybu omezen.

Vázané nebo vedené objekty - polyb je omezen nebo veden.

Polyb je měřeno omezen nebo ^{ne} ~~snemožnit~~ vedením nebo vazbami, které působí na objekt určitými silami, prv. reakcemi.

Vázaný hmotný objekt je v rovnováze jen tehdy, když vnější síly (vážení - akce) jsou v rovnováze s druhodržnými silami (prv. reakcemi).

Stupňů volnosti - možnost objektu pohnout se v daném směru nebo potáhnout se kolem dané osy.

Volný objekt má tolik stupňů volnosti

- kolika vzájemně nezávislými polyby (translace, rotace) lze přemístit objekt do předem dané polohy v prostoru.
- kolika vzájemně nezávislými parametry je určena jeho poloha v prostoru (v rovině)

Pro výpočet reakcí je nutno objekt uvolnit z vazeb, což znamená odstranit všechny vazby a jejich účinek na objekt nahradit příslušnými reakcemi.

Pro vzniklou rovnovážnou soustavu se lze v náležitosti na typy silové soustavy pát v statických podmínkách rovnováhy. Neznámé veličnosti složek reakcí a je možno jednoznačně určit z v statických podmínkách rovnováhy jen když:

$$N = a$$

(1)

a determinant příslušné soustavy rovnic je $D \neq 0$. V takovém případě je podepřen objektu staticky určitě (SU), neboť počet neznámých složek reakcí razeb je roven počtu neznámých statických podmínek rovnováhy. Rovnice (1) je rovnicí statické určitosti a kinematické určitosti objektu.

$N < a$... staticky neurčitě podepřen, ^(SN) kde je počet reakcí větší než počet rovnic rovnováhy. Těleso je pároven kinematicky přeuvřitě (KP).

Stupň statické neurčitosti je dán vztahem

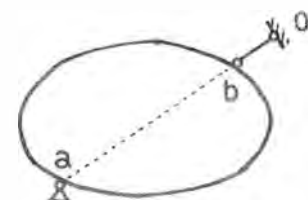
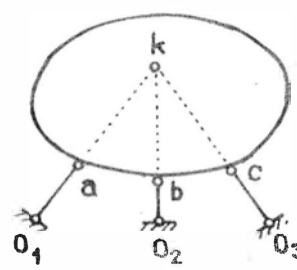
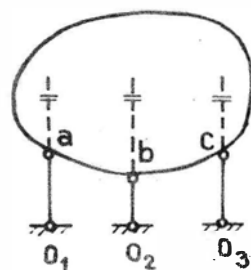
$$S = a - N$$

$N > a$... staticky přeuvřitě podepřen, ^(SP) počet složek rovnováhy je větší než počet neznámých složek reakcí. Objekt je kinematicky neurčitě (KN) - jedná se o mechanismus.

VÝJIMKOVÉ PŘÍPADY PODEPŘENÍ TUHÉ DESKY V ROVINĚ

Nepodaří-li se nám podporovými vazbami v počtu, který při vhodném uspořádání stačí k pevnému podepření tuhé desky v rovině, zrušit všechny stupně volnosti v šetřované desky, pak dochází k pohybům desky, ať už virtuálním nebo konečným veličinám. Je tomu zejména u tuhé desky v rovině podepřené:

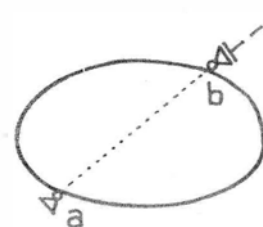
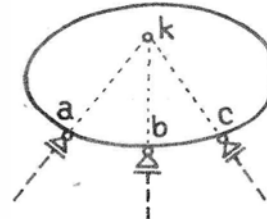
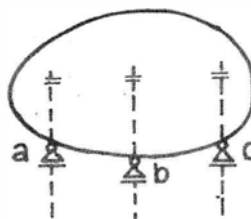
- třemi jednonásobnými vazbami, např. třemi kyvnými pruty (obr. 145), resp. třemi suvnými klouby (obr. 146), jejichž osy resp. paprsky reakcí se protínají v jednom bodě;
- jednou vazbou dvojnásobnou a jednonásobnou, např. pevným kloubem a kyvným prutem (obr. 147) resp. pevným a posuvným kloubem (obr. 148), jestliže osa kyvného prutu resp. paprsek reakce posuvného kloubu prochází pevným kloubem.



Obr. 147

k ... virtuální kloub

Obr. 145



Obr. 148

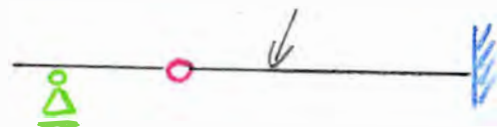
Obr. 146

Takové případy podepření nazýváme výjimečnými a jsou ve stavební praxi nežádoucí, neboť reakce vazeb vycházejí u nich buď nekonečně velké, a nebo se nedají jednoznačně určit. Při analytickém řešení reakcí vazeb se výjimečnost podepření projeví tím, že determinant soustavy tří lineárních rovnic – statických podmínek rovnováhy (64) nebo (65) pro určení složek reakcí vazeb je roven nule.



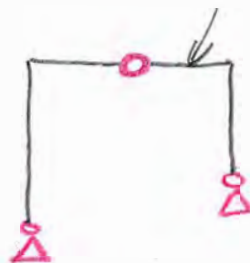
$$3 \cdot 1 \neq 1 + 3 \cdot 1$$

$$3 < 4 \quad \underline{\underline{1SN}}$$



$$3 \cdot 2 = 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1$$

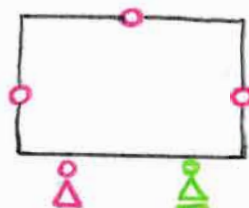
$$6 = 6 \quad \underline{\underline{SU}}$$



$$3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$$

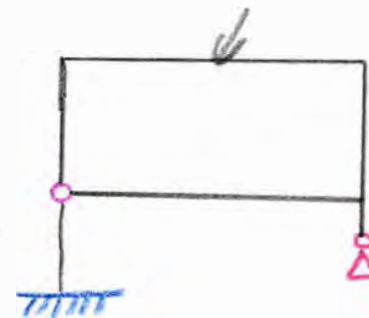
$$6 = 6 \quad \underline{\underline{SU}}$$

STATICKY A
KINEMATICKY URČITÝ



$$3 \cdot 3 = 1 + 2 \cdot 4$$

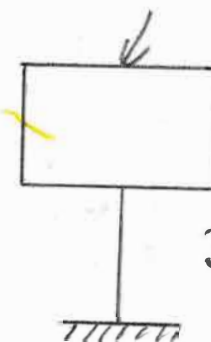
$$9 = 9 \quad \underline{\underline{SU}}$$



$$3 \cdot 2 \neq 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (3 - 1)$$

$$6 < 9$$

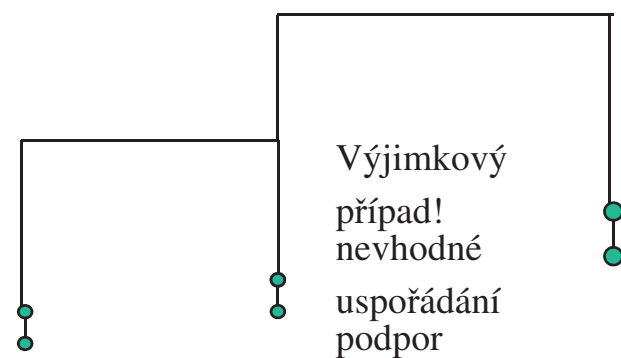
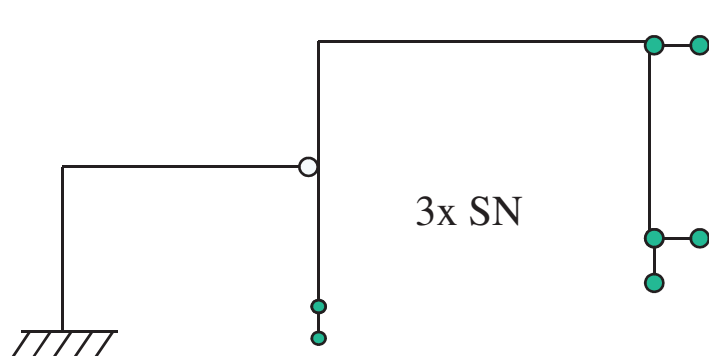
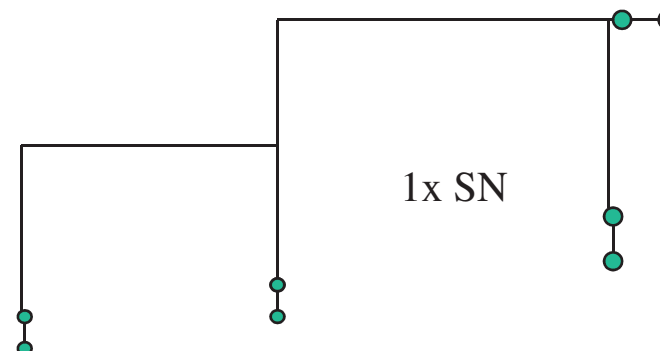
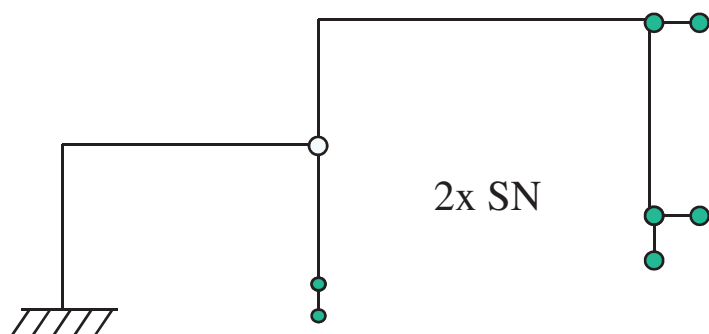
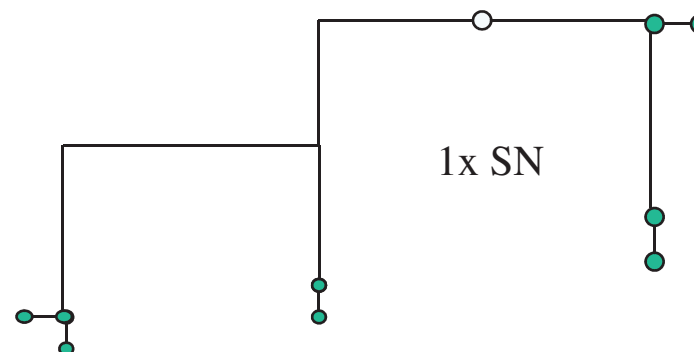
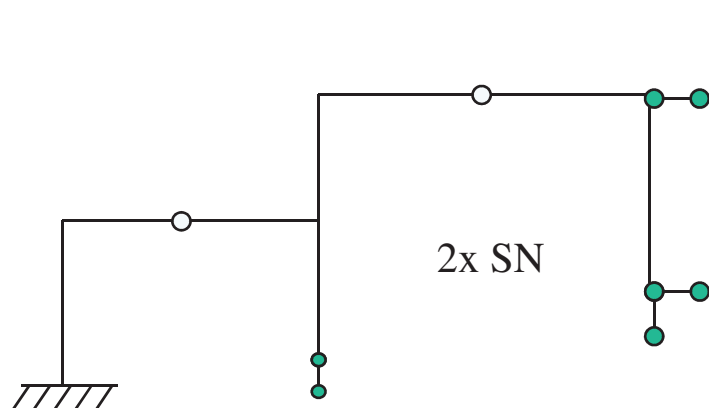
RAM JE 3SN - Z TOHO
2x ZEVNĚ A 1x VNITŘNĚ



VIZ STATIKA II

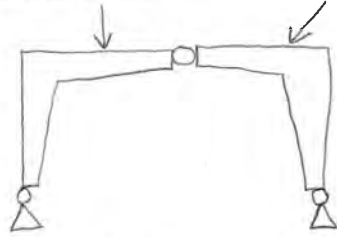
3SN

Další příklady

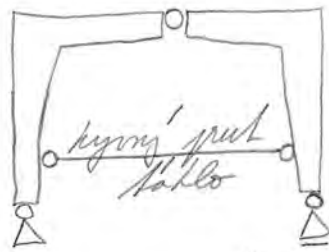


Základní typy složených rovinných soustav

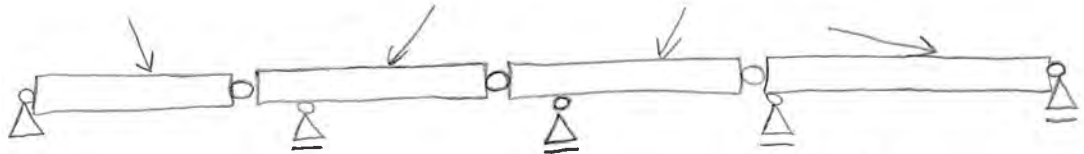
a) trojúhelníková desková soustava (bez táhla)



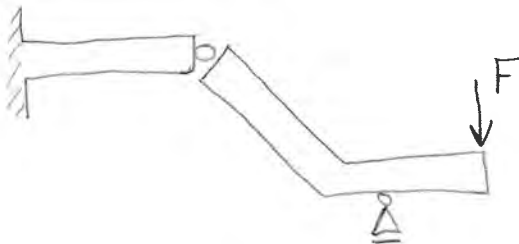
b) trojúhelníková desková soustava s táhlem



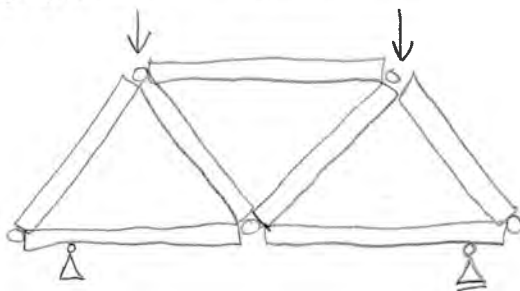
c) Gerberův nosník (složená desková soustava s vnitřními klouby v jedné přímce)



d) otečená složená desková soustava



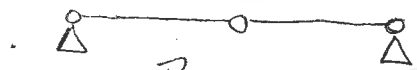
e) rovinná kloubová desková soustava



Trojklaukový nosník

Je to složená rovinná soustava složená z dvou nebo více desek libovolného tvaru navzájem spojených kloubem.

Nemá-li nosník výjimkou případ podepření nesmí klouby ležet na jedné přímce.



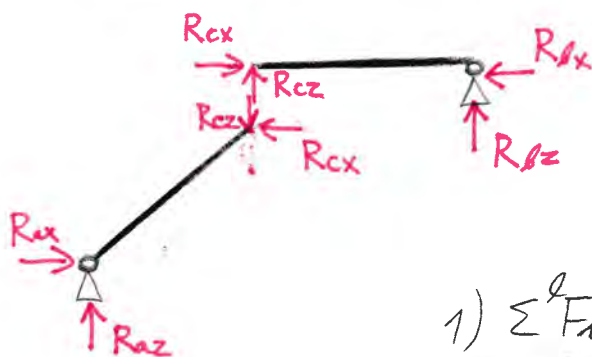
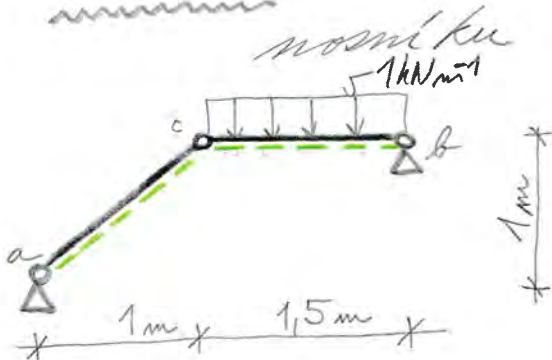
NEVHODNÉ USPOŘÁDÁNÍ
VAZEB, KLOUBY LEŽÍ
NA JEDNÉ PŘÍMCE!



Př: Trojklaukový oblouk je staticky
a kinematically určitý, protože

$$3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \quad \checkmark$$

Příklad: Vypočítejte N , V , M trojklaukového lomeného



- reakce

Máme 6 neznámých složek
reakcí, R_{ax} , R_{az} , R_{bx} , R_{bz} pro
vnější klouby a R_{cx} , R_{cz} pro
vnitřní kloub.

Napišeme pro levou a pravou
část nosníku poláhek podmínek
rovnováhy tedy $2 \times 3 = 6$
podmínek.

$$1) \sum F_{ix} = 0 \quad 2) \sum F_{iz} = 0 \quad 3) \sum M_{ia} = 0$$

$$2) \sum F_{ix} = 0 \quad 2) \sum F_{iz} = 0 \quad 3) \sum M_{ib} = 0$$

Každá rovnice má 2 neznámé, proto
rozdělíme podle ní následující postup

$$1) \sum M_{ib} = 0 \quad 2) \sum M_{ia} = 0 \quad 3) \sum M_{ic} = 0 \quad 4) \sum M_{ic} = 0$$

Z těchto rovnic stanovíme všechny vnější
reakce.

$$\sum M_c = 0: -1 \cdot 1,5 \cdot \frac{1,5}{2} + R_{B2} \cdot 1,5 = 0 \Rightarrow R_{B2} = 0,75 \text{ kN}$$

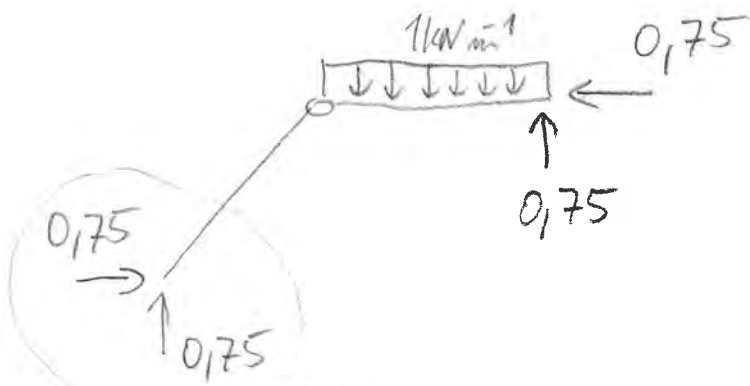
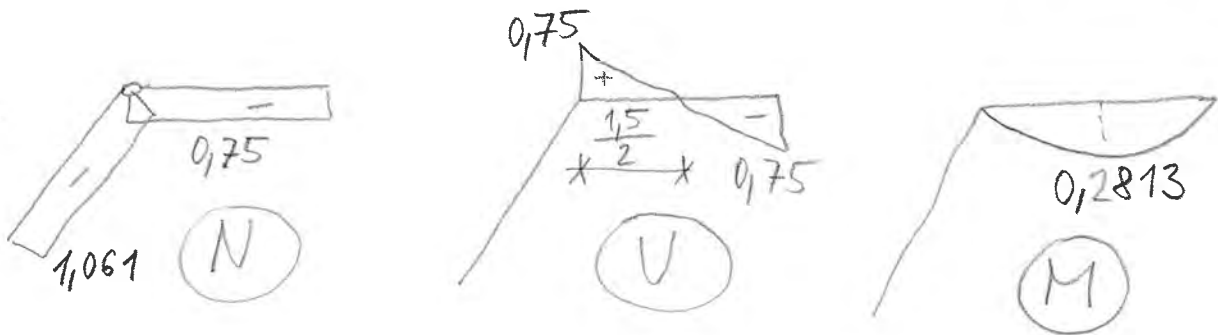
$$\sum M_a = 0: -1 \cdot 1,5 \cdot 1,75 + 0,75 \cdot 2,5 + R_{Bx} \cdot 1 = 0 \Rightarrow R_{Bx} = 0,75 \text{ kN}$$

$$\sum M_c = 0: R_{ax} \cdot 1 - R_{az} \cdot 1 = 0 \Rightarrow R_{ax} = R_{az}$$

$$\sum M_B = 0: -R_{az} \cdot 2,5 + R_{ax} \cdot 1 + 1 \cdot 1,5 \cdot \frac{1,5}{2} = 0$$

$$-R_{az} \cdot 1,5 + \frac{1,5^2}{2} = 0 \Rightarrow R_{az} = 0,75 \text{ kN}$$

$$R_{ax} = R_{az} = 0,75 \text{ kN}$$

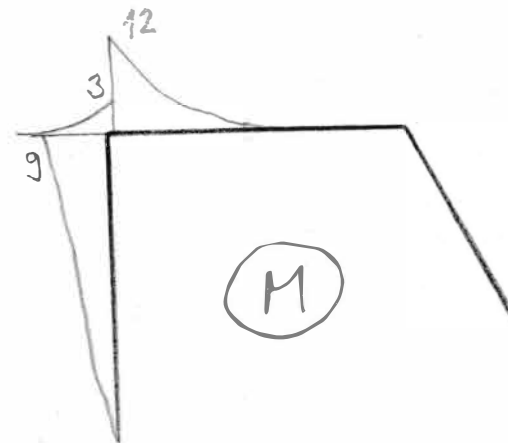
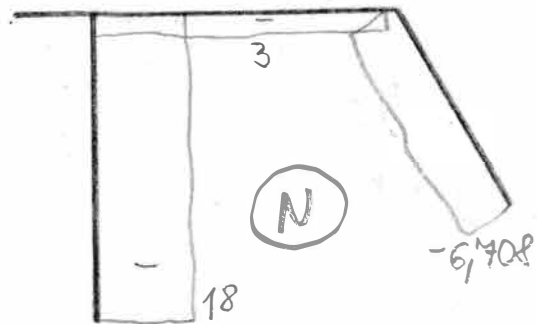
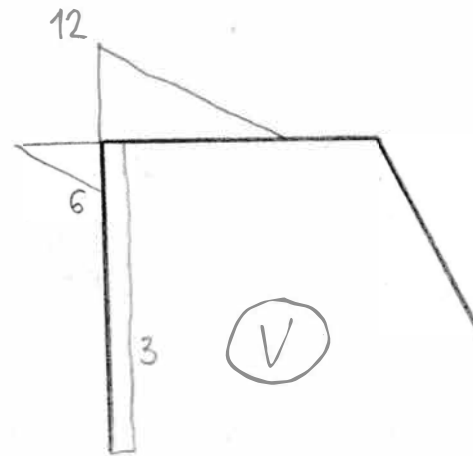
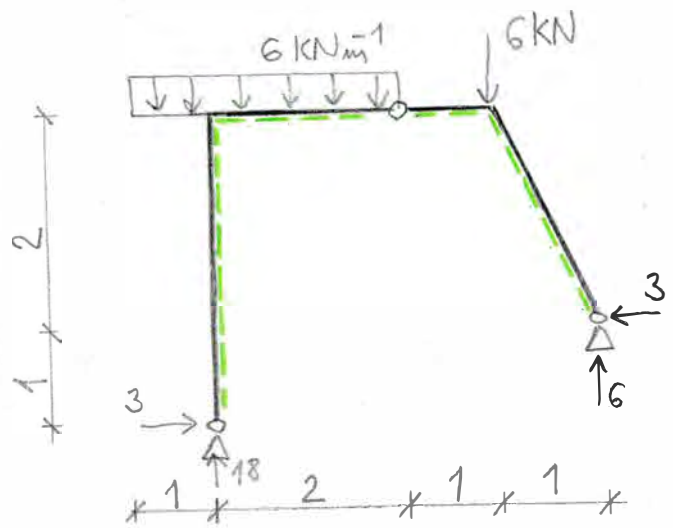


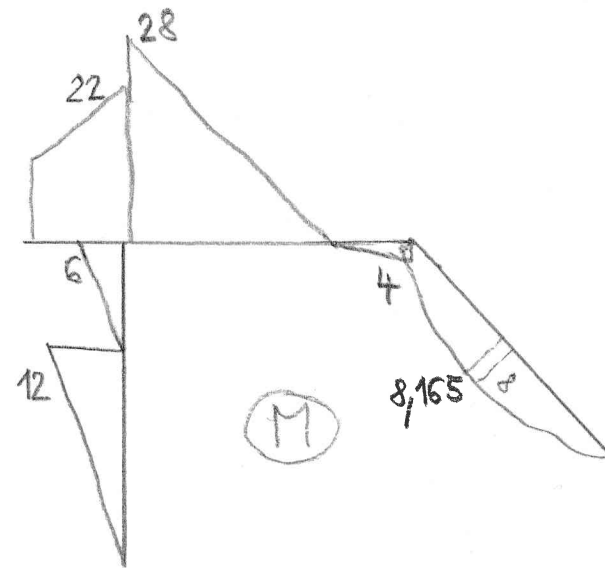
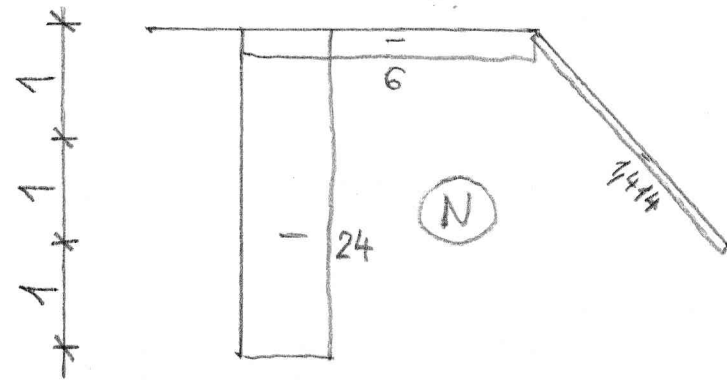
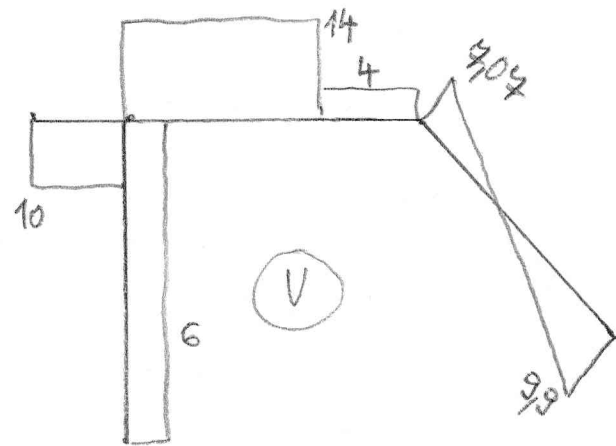
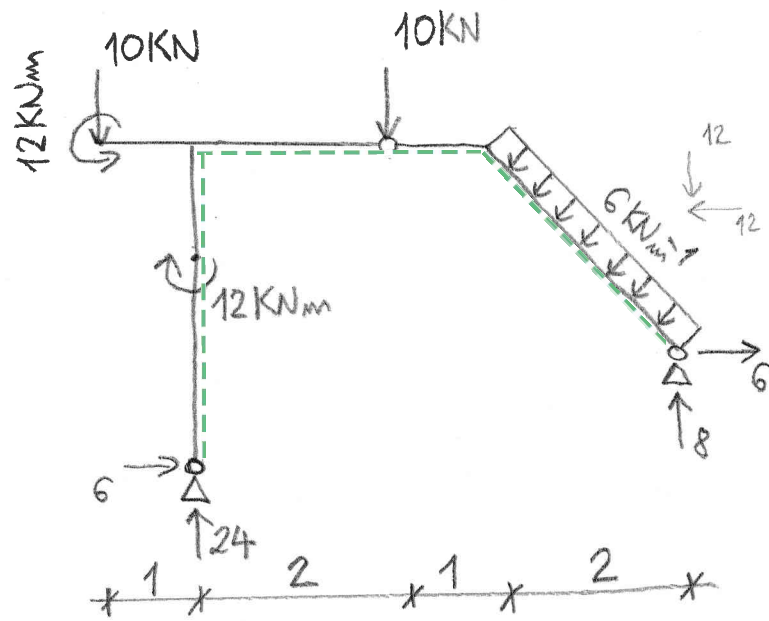
VÝSLEDNICE

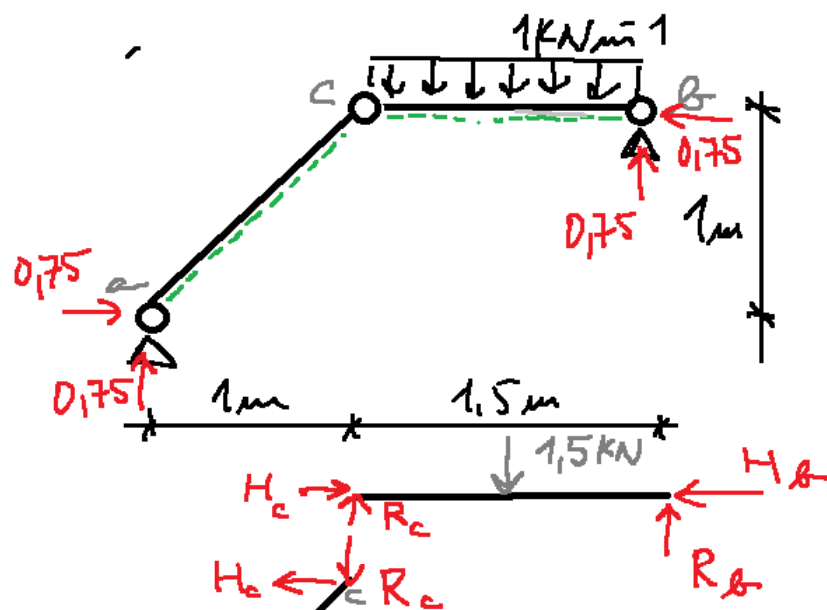
$$\sqrt{0,75^2 + 0,75^2} = 1,061 \text{ kN}$$



NECHÁM JAK JE
DOBŘE PRO VYKRESLOVÁNÍ

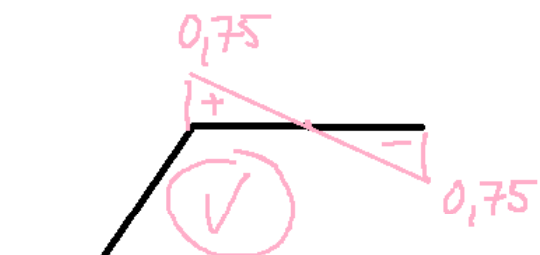
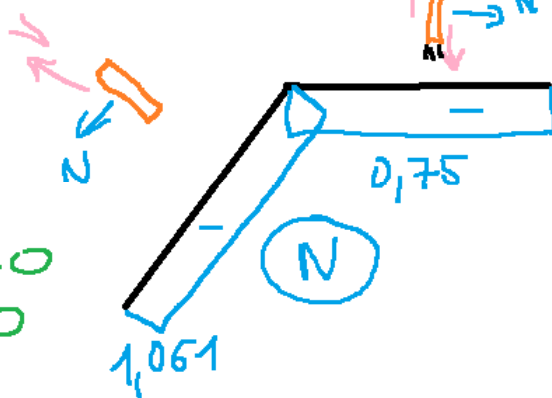






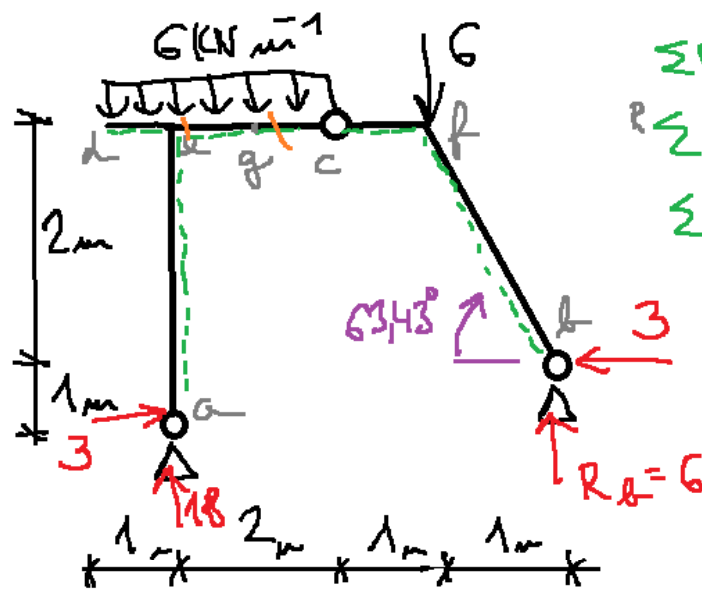
$$\begin{aligned} \checkmark \sum M_a &= 0 \quad -1.5 \cdot 1.75 + R_b \cdot 2.5 + H_b \cdot 1 = 0 \\ \checkmark \sum M_b &= 0 \quad -R_a \cdot 2.5 + H_a \cdot 1 + 1.5 \cdot 0.75 = 0 \\ \checkmark \sum M_c &= 0 \quad -R_a \cdot 1 + H_a \cdot 1 = 0 \\ \checkmark \sum M_c &= 0 \quad R_b \cdot 1.5 - 1.5 \cdot 0.75 = 0 \\ \checkmark \sum F_x &= 0 \quad H_a - H_b = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_a &= 0 \quad -R_c \cdot 1 + H_c \cdot 1 = 0 \\ \sum M_c &= 0 \quad -R_a \cdot 1 + H_a \cdot 1 = 0 \\ \sum F_x &= 0 \quad R_a - R_c = 0 \\ \sum M_c &= 0 \quad -1.5 \cdot 0.75 + R_b \cdot 1.5 = 0 \\ \sum M_b &= 0 \quad -R_c \cdot 1.5 + 1.5 \cdot 0.75 = 0 \\ \sum F_x &= 0 \quad H_c - H_b = 0 \end{aligned}$$

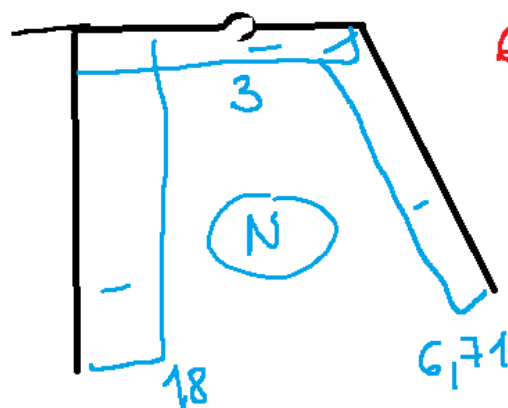
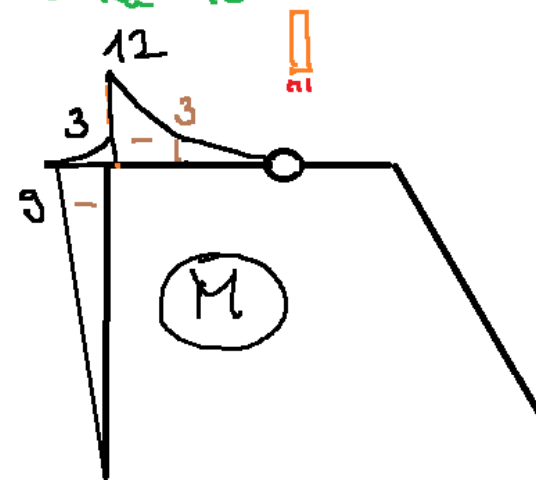
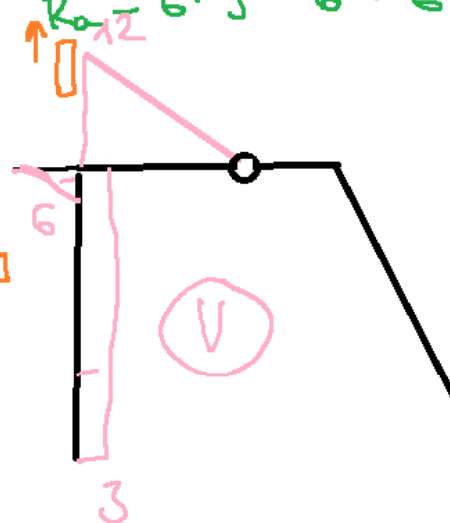


$$M_{max} = 0.75 \cdot 0.75 - 1.0 \cdot 0.75 \cdot \frac{0.75}{2} = 0.2813 \text{ kNm}$$





$$\begin{aligned} \sum M_a &= 0 & -6 \cdot 3 \cdot 0.5 - 6 \cdot 3 + R_B \cdot 4 + H_B \cdot 1 &= 0 \\ \sum M_c &= 0 & -6 \cdot 1 + R_B \cdot 2 - H_B \cdot 2 &= 0 \\ \sum F_x &= 0 & R_a - 6 \cdot 3 - 6 + 6 &= 0 \Rightarrow R_a = 18 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} H_B &= 3 \\ R_B &= 6 \end{aligned} \right\}$$



$$M_g = +18 \cdot 1 - 3 \cdot 3 - 6 \cdot 2 \cdot 1 = -3$$

ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY

BDA001

Trojkloubový lomený nosník s táhlem
Gerberův nosník, reakce a diagramy vnitřních sil

Zdeněk Kala

Trojkloubový lomený nosník s táhlem

U trojkloubového rámu nebo oblouku vznikají vodorovné složky reakcí. Čím nižší oblouk, tím větší reakce. Zachycení je někdy obtížné, oblouk bývá uložen na zdech nebo štíhlých sloupech

Řešení: použití táhla

Táhlo slouží k odstranění velkých vodorovných složek reakcí.

Táhlo je jednonásobná vnitřní vazba zabraňující vzájemnému posunu protilehlých bodů, přenáší pouze tahové normálové síly N .

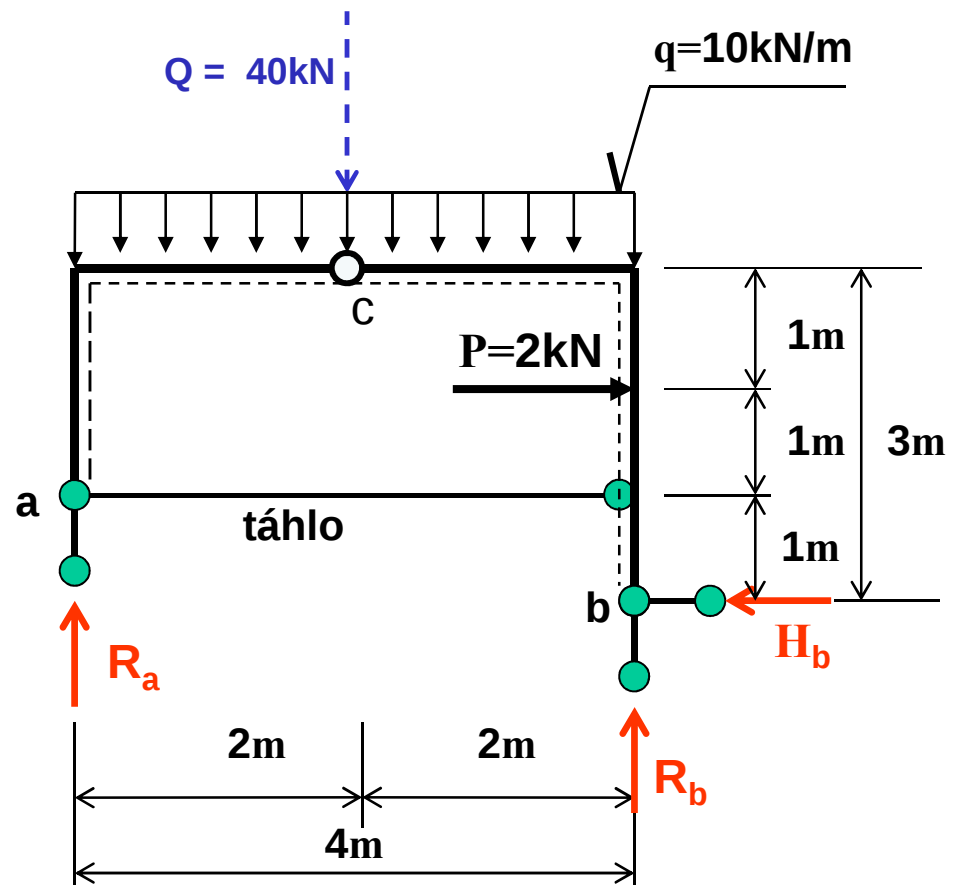


Trojkloubový lomený nosník s táhlem

1. $\sum F_x = 0: -H_b + P = 0 \quad \Rightarrow \quad H_b = 2 \text{ kN} (\leftarrow)$
2. $\sum M_a = 0: -Q \cdot 2 - P \cdot 1 + 4 \cdot R_b - 1 \cdot H_b = 0 \quad \Rightarrow \quad (R_b = 21 \text{ kN} \uparrow)$
3. $\sum M_b = 0: -P \cdot 2 + Q \cdot 2 - 4 \cdot R_a = 0 \quad \Rightarrow \quad (R_a = 19 \text{ kN} \uparrow)$

Kontrola:

$$\sum F_z = 0: -R_a - R_b + Q = 0$$

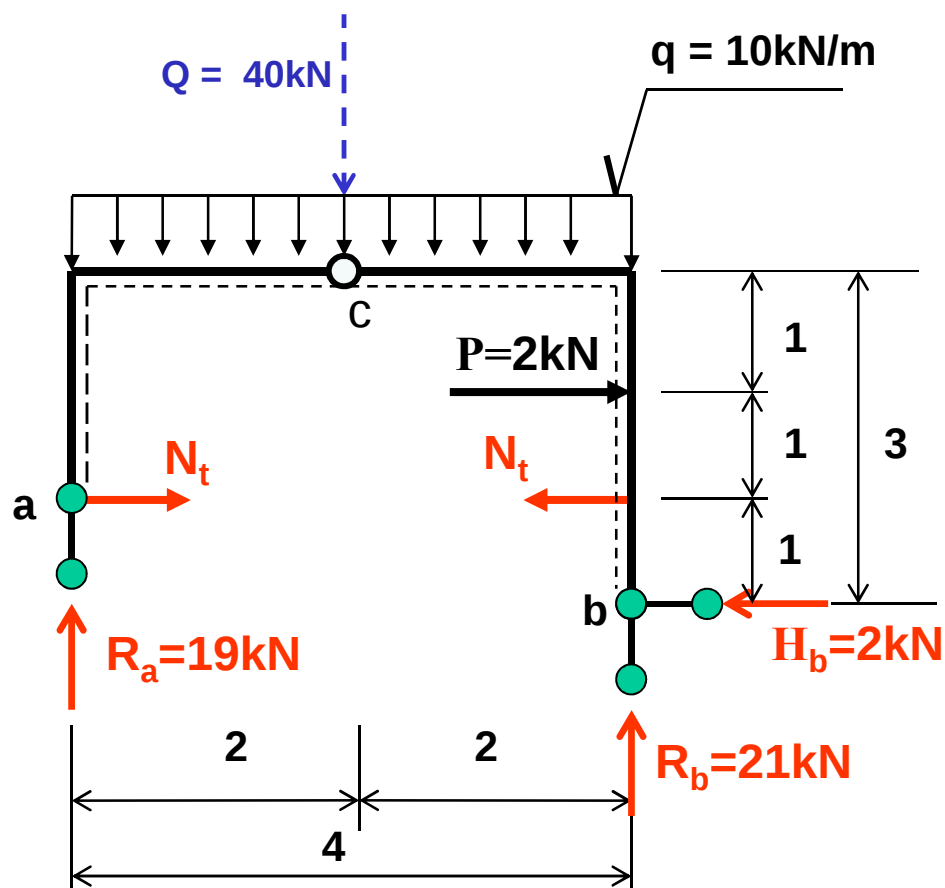


Výpočet síly v táhle

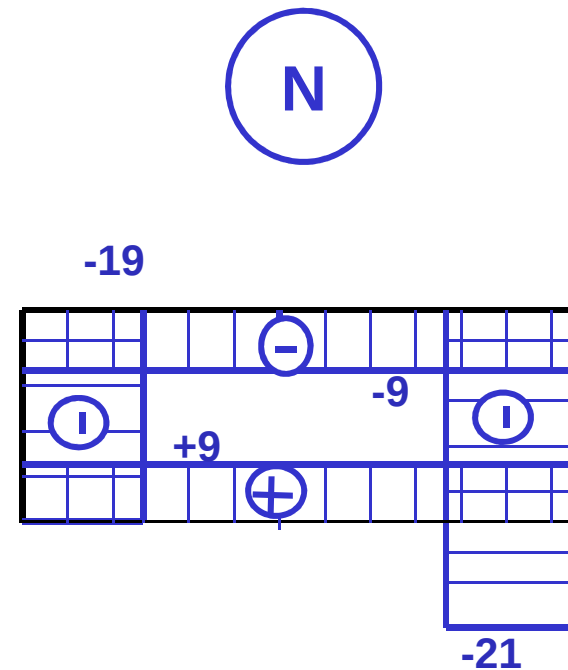
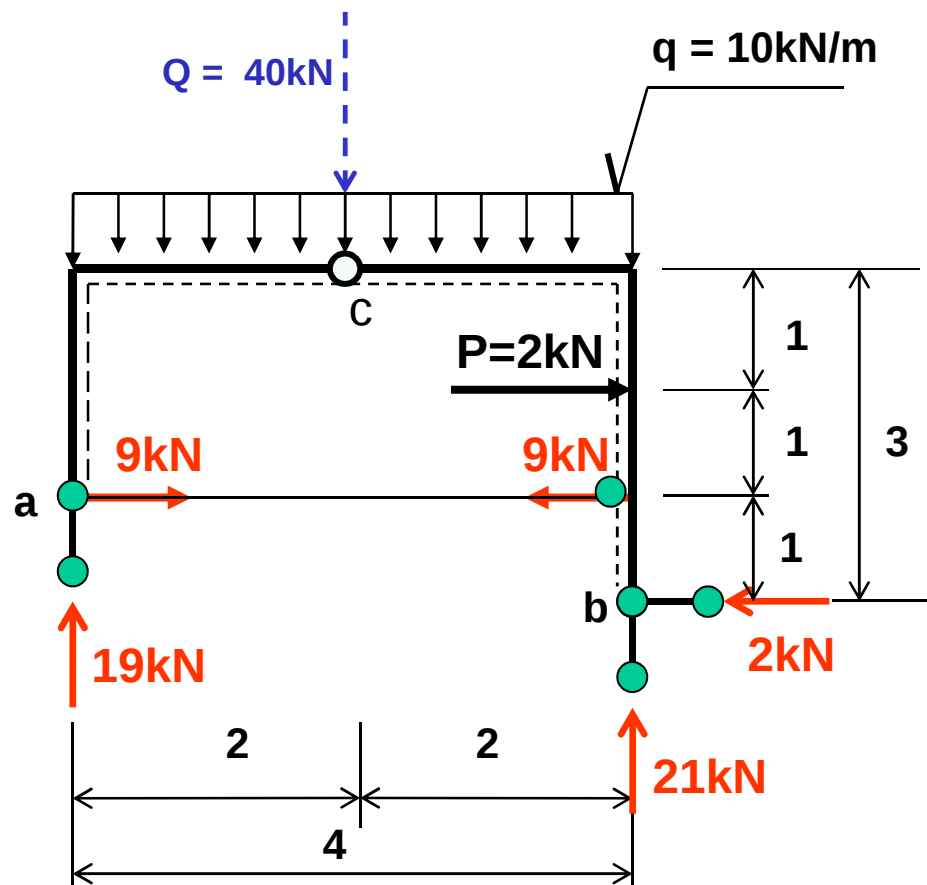
$$M_c^L = 0: \quad q \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot R_a + 2 \cdot N_t = 0 \quad \rightarrow \quad N_t = 9 \text{ kN}$$

nebo:

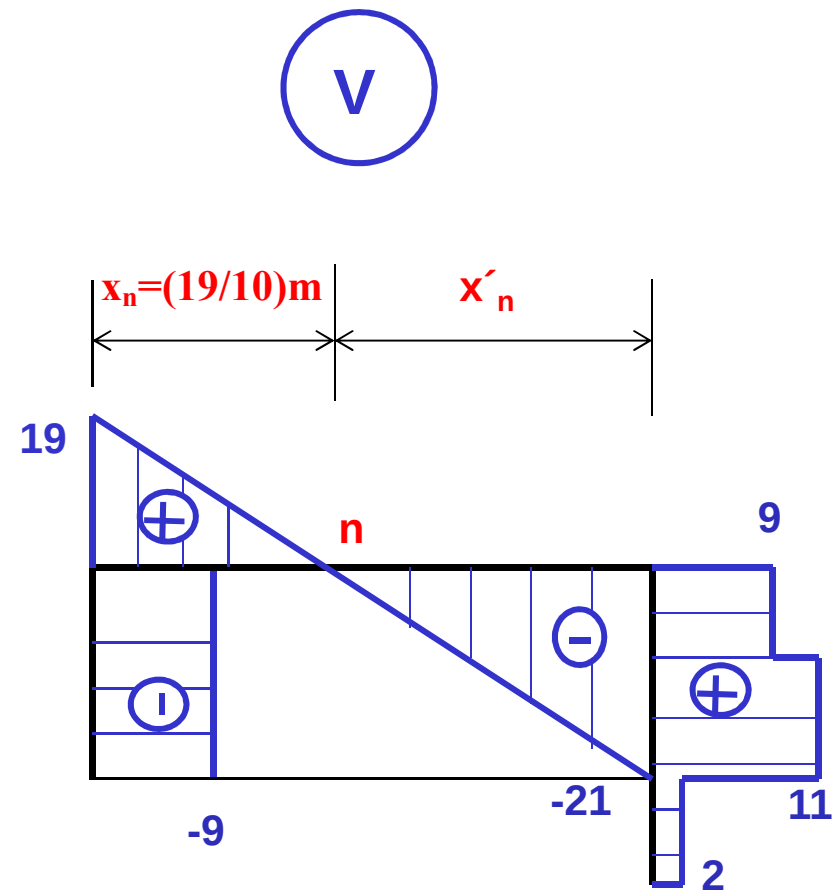
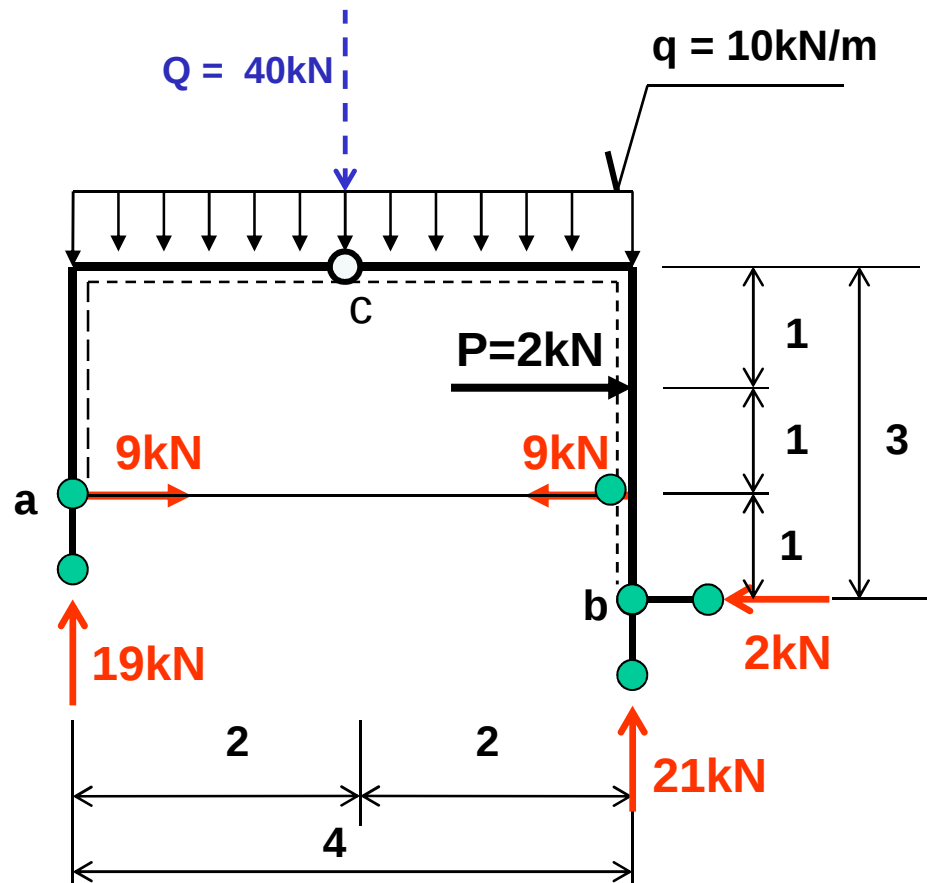
$$M_c^P = 0: \quad P \cdot 1 - q \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot R_b - 3 \cdot H_b - 2 \cdot N_t = 0 \quad \rightarrow \quad N_t = 9 \text{ kN}$$



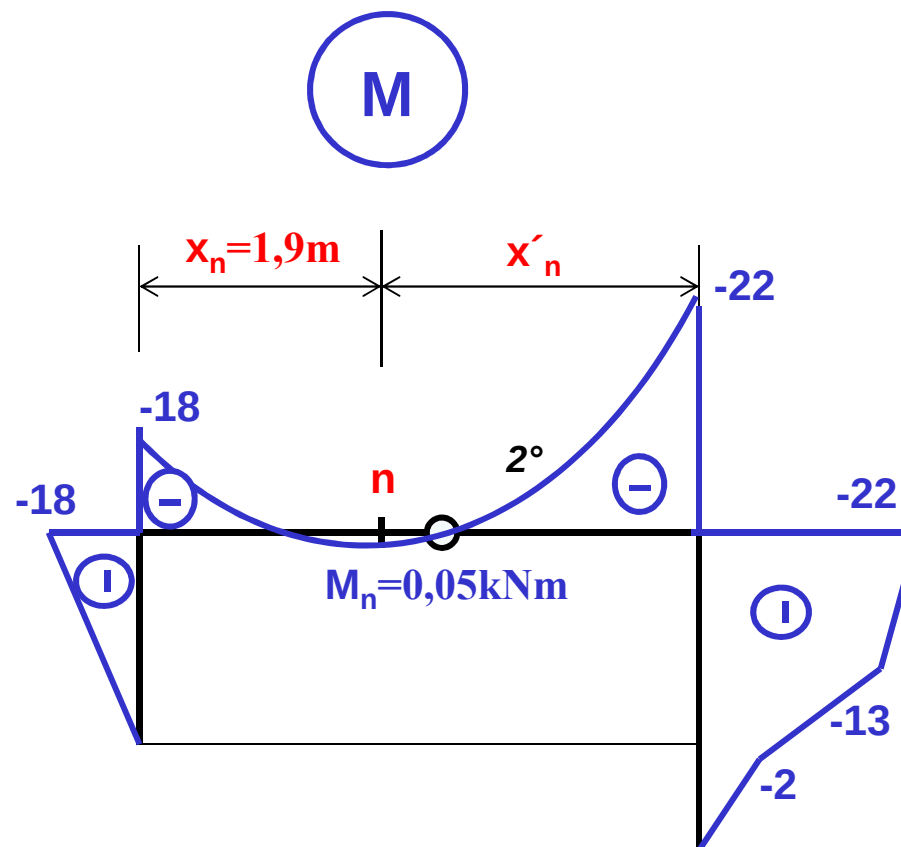
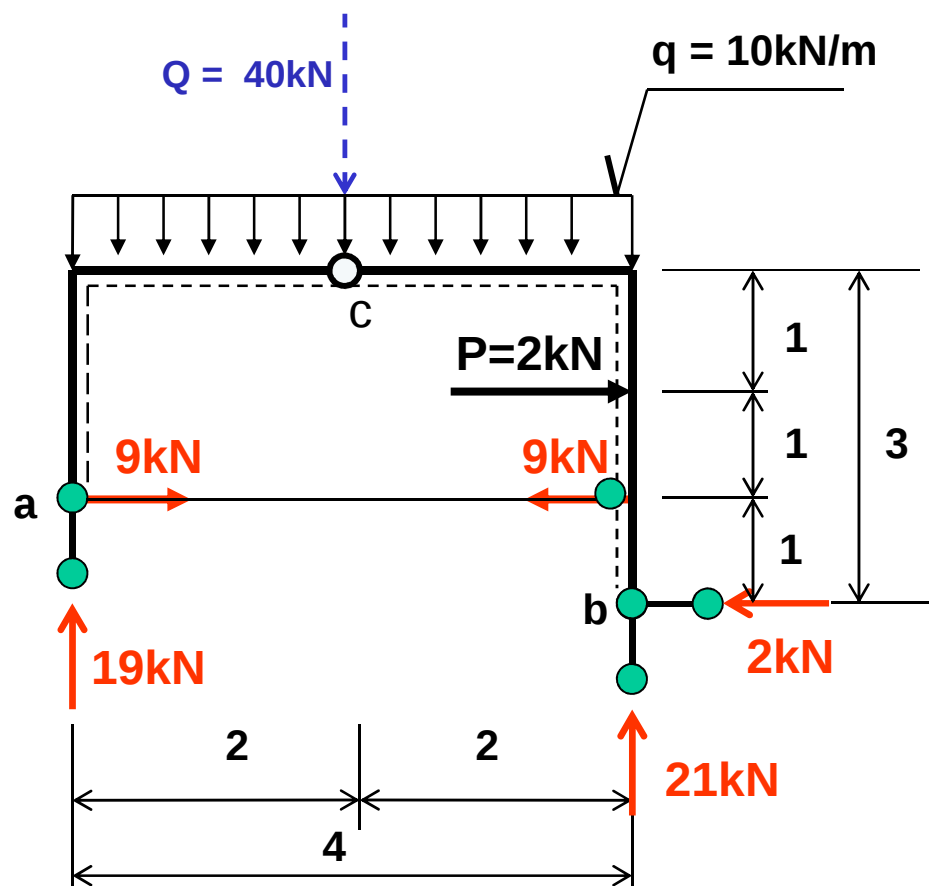
Normálové síly



Posouvající síly

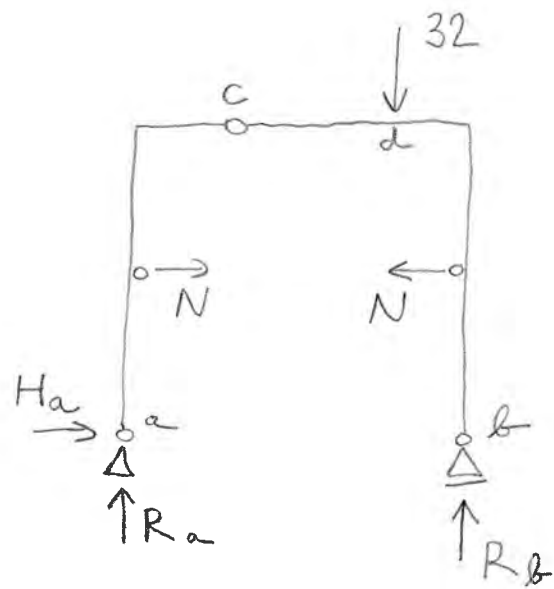
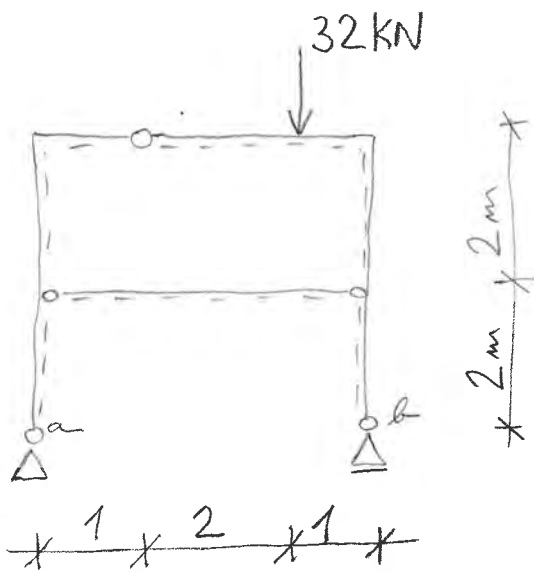


Ohybové momenty



$$M_n^L = 19 \cdot 1,9 - 18 - 10 \cdot 1,9^2 / 2 = 0,05 \text{ kNm}$$

$$M_n^P = 21 \cdot 2,1 - 22 - 10 \cdot 2,1^2 / 2 = 0,05 \text{ kNm}$$



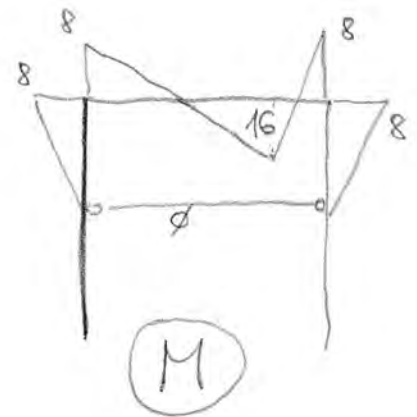
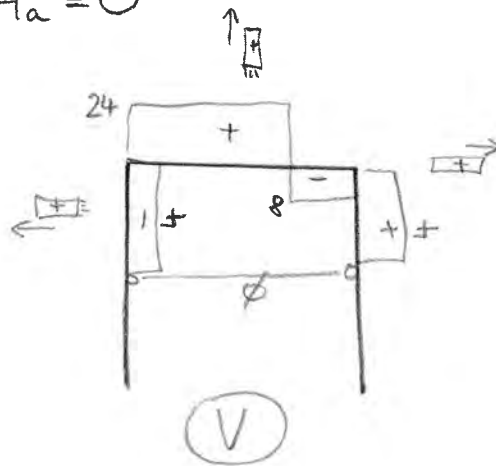
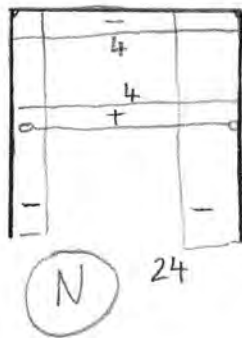
$$\sum M_a = 0 : -32 \cdot 3 + R_b \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_b = 24 \text{ kN}$$

$$\sum M_b = 0 : 32 \cdot 1 - R_a \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_a = 8 \text{ kN}$$

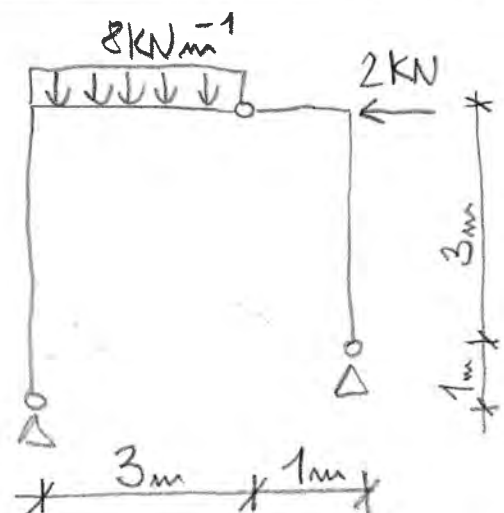
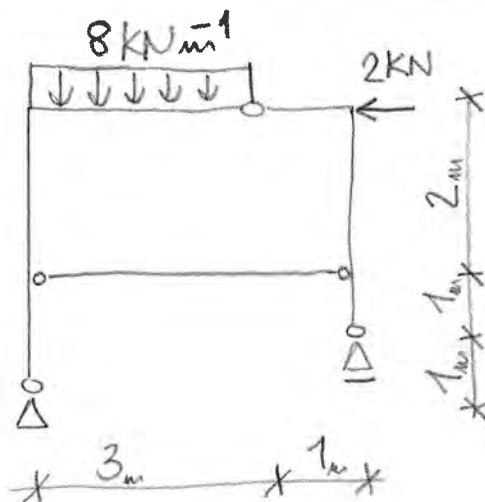
$$\sum M_c = 0 : -32 \cdot 2 - N \cdot 2 + 24 \cdot 3 = 0 \Rightarrow N = +4 \text{ kN (tah)}$$

$$\sum F_x = 0 : H_a = 0$$

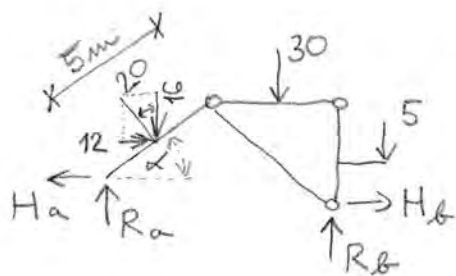
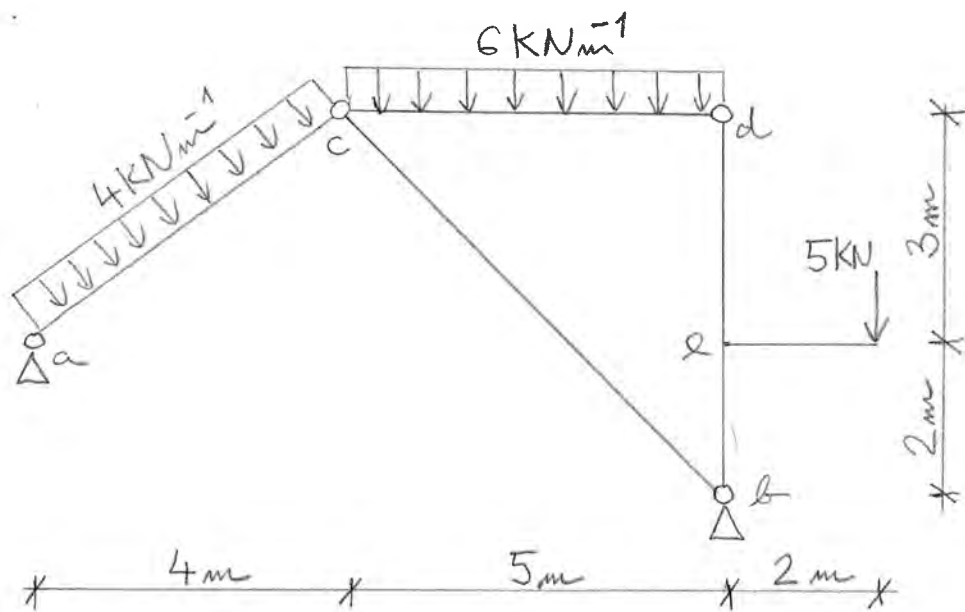
*neopádame,
pretože $N - N = 0$*



$$M_d = 24 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 16 \text{ kNm}$$



REAKCE: 2 rovnice - 2 neznámé



$$\sum M_b = 0$$

$$H_a \cdot 2 - R_a \cdot 9 - 12 \cdot 3,5 + 16 \cdot 7 + 30 \cdot 2,5 - 5 \cdot 2 = 0$$

$$H_a \cdot 2 - R_a \cdot 9 = -135$$

$$H_a = 4,5 \cdot R_a - 67,5$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 36,8699^\circ \quad \sum M_c = 0$$

$$20 \cdot 2,5 - R_a \cdot 4 - H_a \cdot 3 = 0$$

$$50 - R_a \cdot 4 - (4,5 \cdot R_a - 67,5) \cdot 3 = 0$$

$$50 - R_a \cdot 4 - 13,5 \cdot R_a + 202,5 = 0$$

$$R_a = 14,428 \text{ kN}$$

$$H_a = 4,5 \cdot 14,428 - 67,5 = -2,571$$

$$\sum M_a = 0 \quad -12 \cdot 1,5 - 16 \cdot 2 - 30 \cdot 6,5 - 5 \cdot 11 + R_b \cdot 9 + H_b \cdot 2 = 0$$

$$R_b \cdot 9 + H_b \cdot 2 = 300$$

$$H_b = 150 - R_b \cdot 4,5$$

$$\sum M_c = 0 \quad -30 \cdot 2,5 - 5 \cdot 7 + R_b \cdot 5 + H_b \cdot 5 = 0$$

$$-110 + R_b \cdot 5 + (150 - R_b \cdot 4,5) \cdot 5 = 0$$

$$-110 + R_b \cdot 5 + 750 - R_b \cdot 22,5 = 0$$

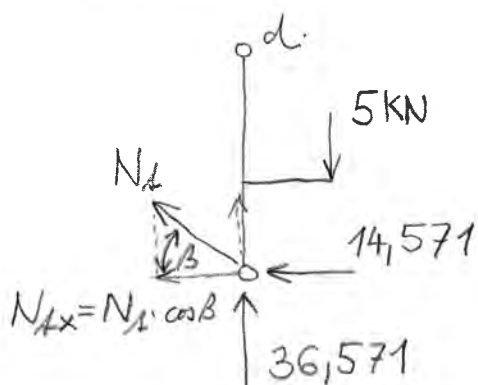
$$R_b = 36,571 \text{ kN}$$

$$H_b = 150 - 36,571 \cdot 4,5 = -14,571 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad 14,428 - 16 - 30 - 5 + 36,571 = -0,001 \approx 0 \quad \checkmark$$

$$\sum F_x = 0 \quad 2,571 + 12 - 14,571 = 0 \quad \checkmark$$

TÁHLŮ



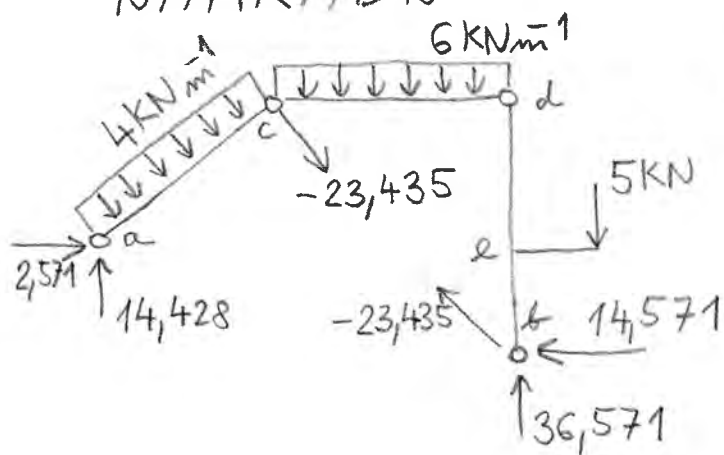
$$\tan \beta = \frac{5}{5} \Rightarrow \beta = 45^\circ$$

$$\sum M_d = 0$$

$$-(N_A \cdot \cos 45^\circ) \cdot 5 - 14,571 \cdot 5 - 5 \cdot 2 = 0$$

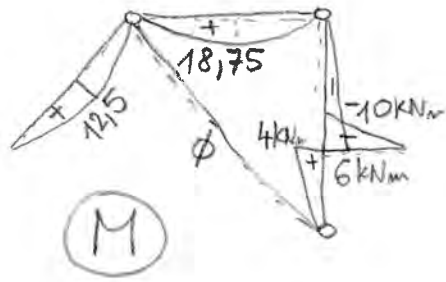
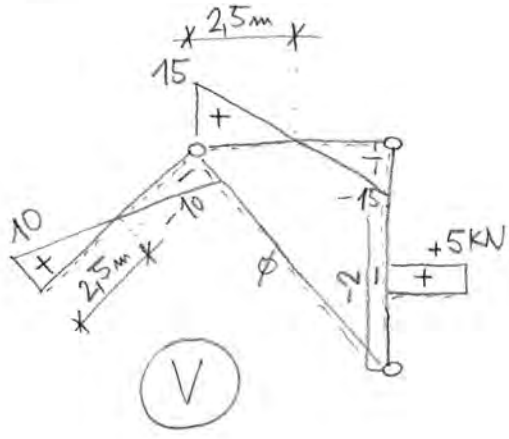
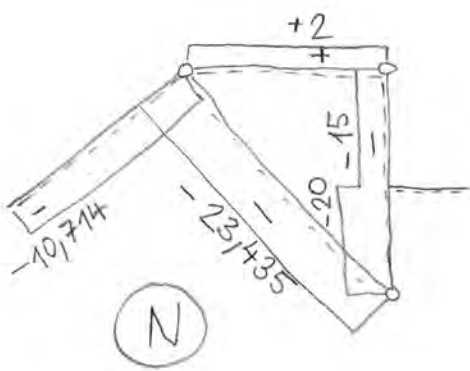
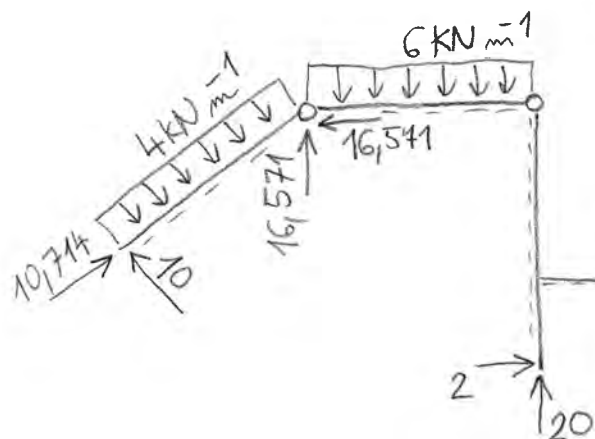
$$N_A = -23,435 \text{ kN (tlak v táhle)}$$

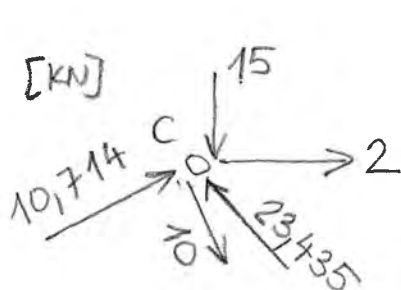
NÁHRADNÍ NOSNÍK



ROZKLADY
SIL:

NÁHRADNÍ NOSNÍK
5 kN PRO VYKRESLOVÁNÍ
N, V, M



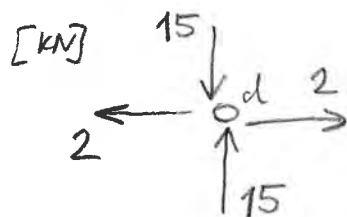


STYČNÍK C

$$\sum F_x = 0$$

$$10,714 \cdot \cos 36,87^\circ + 10 \cdot \sin 36,87^\circ - 23,435 \cdot \cos 45^\circ + 2 = 0,00015 \approx 0$$

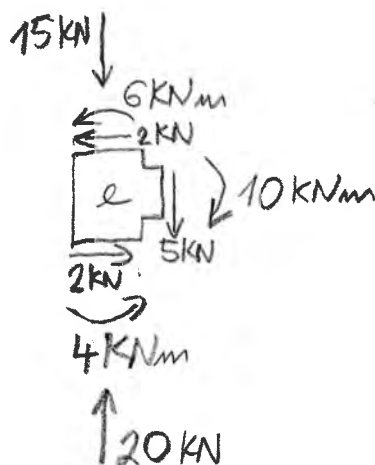
$$\sum F_y = 0 \quad 10,714 \cdot \sin 36,87^\circ - 10 \cdot \cos 36,87^\circ + 23,435 \cdot \sin 45^\circ - 15 = -0,00055 \approx 0$$



STYČNÍK d

$$\sum F_x = 0 \quad 2 - 2 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad 15 - 15 = 0$$

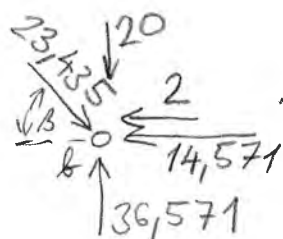


STYČNÍK e

$$\sum F_x = 0 \quad 2 - 2 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad 20 - 5 - 15 = 0$$

$$\sum M = 0 \quad 4 - 10 + 6 = 0$$



STYČNÍK b

$$\sum F_x = 0 \quad 23,435 \cdot \cos 45^\circ - 14,571 - 2 \approx 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad 36,571 - 23,435 \cdot \sin 45^\circ \approx 0$$

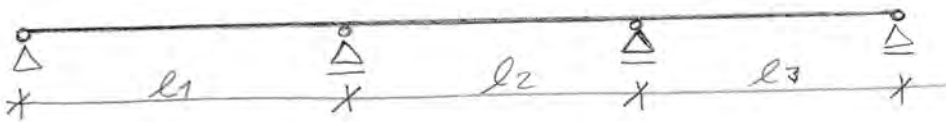
Poznámka: Pro přehlednost nejsou výsledky uvedeny jednotky.

Upeřitý nosník s omezeními klauky -

Gerberio nosník

Gerberio nosník vzniká z nosníku spojitěho, u něhož je statická neurčitost odstraněna vhodným složením omezení klauků.

Pro řešení N, V, M máme 3 statické podmínky rovnováhy + "moment v klauku = 0".

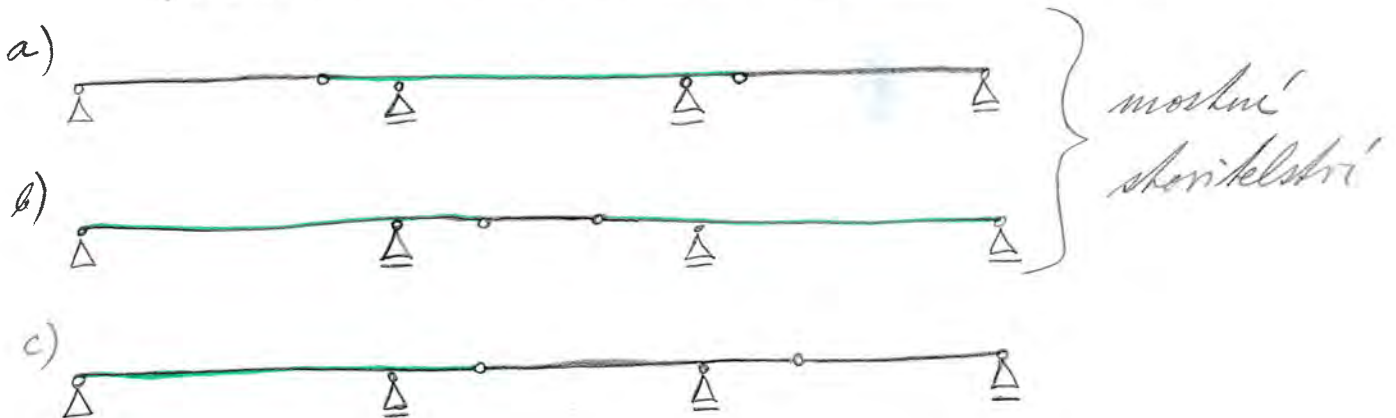


$$V = 2b + 3L = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3 \dots \text{počet stat. podm. r.}$$
$$a = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 2 \leq (n-1) \dots \text{počet statických reakcí všech}$$
$$= 3 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$V = 3, \quad a = 5$$

$3 < 5 \dots$ staticky neurčitý. Máme 5 složek reakcí a jen 3 podmínky rovnováhy.

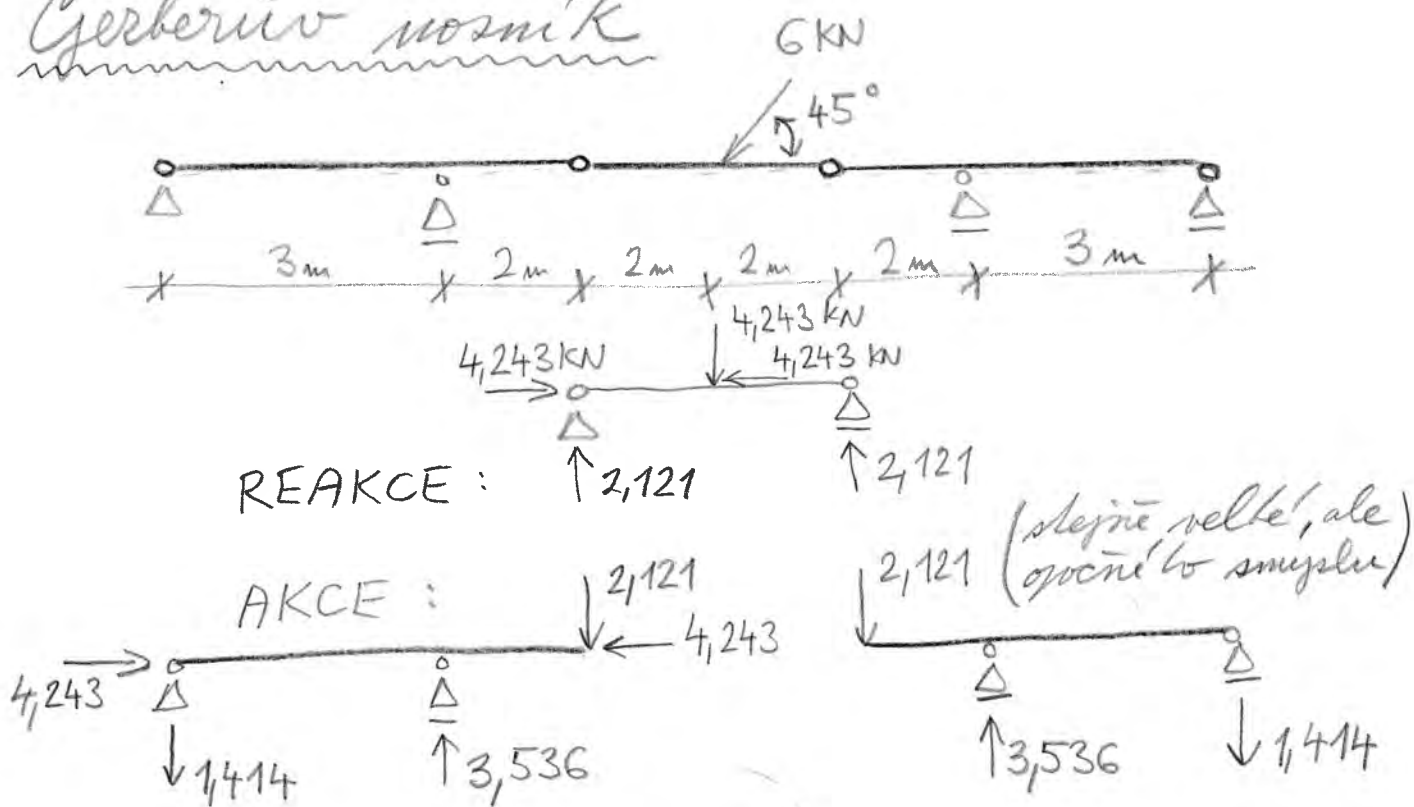
Proto přidáme další podmínky složením omezení klauků, ve kterých $M = 0$.



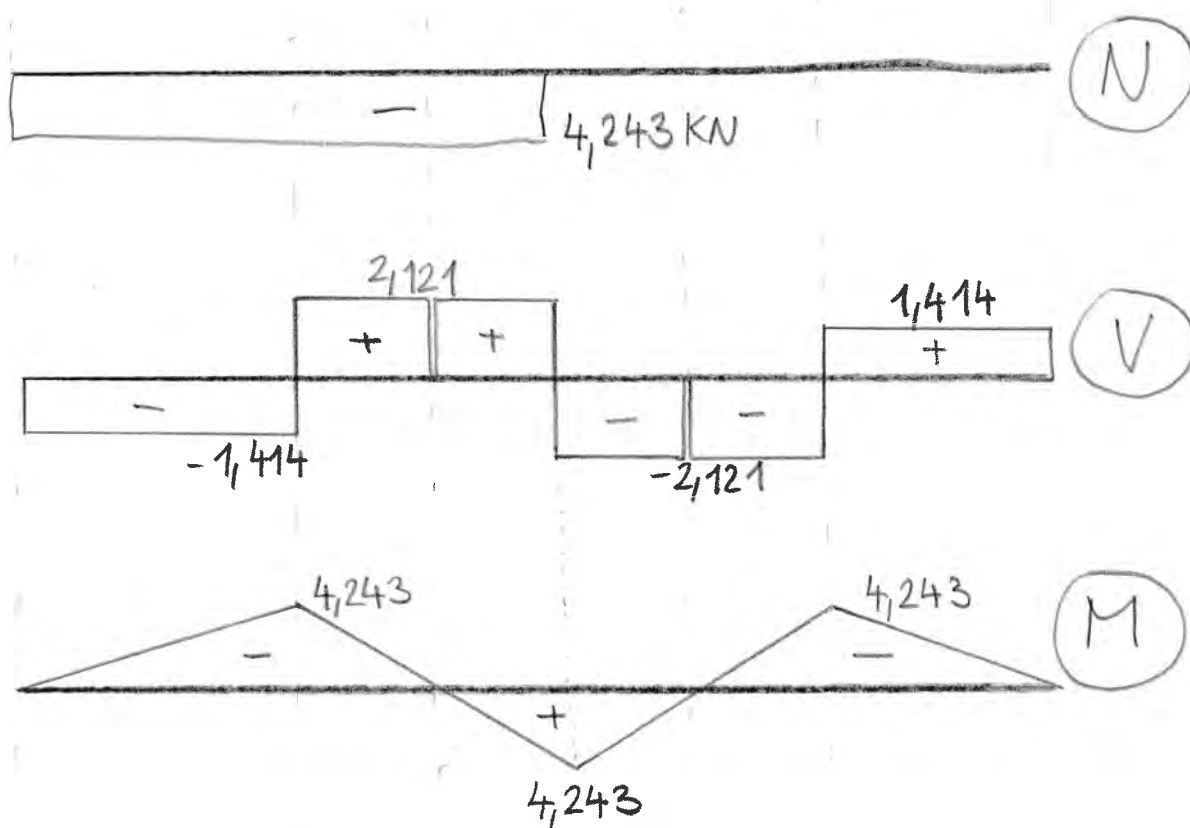
Základní část (nosník)

Výpočet složek reakcí počínáme na úseku vedlejším (podporovým)

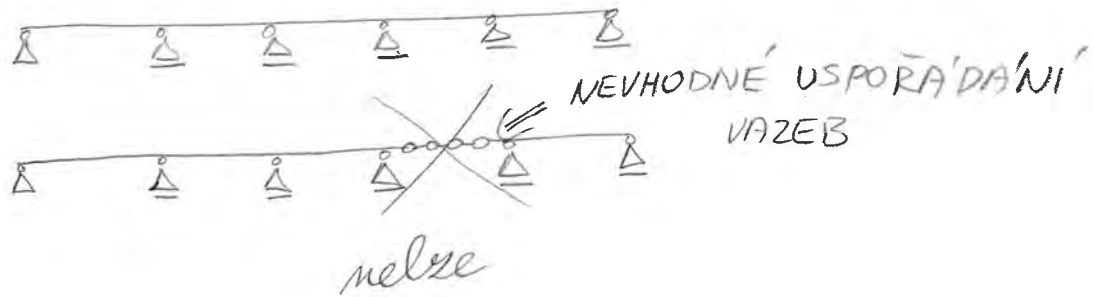
Gerberův nosník



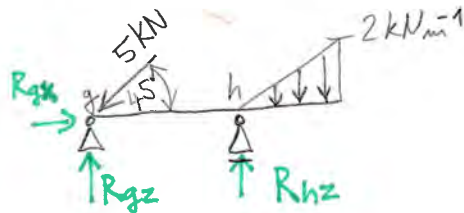
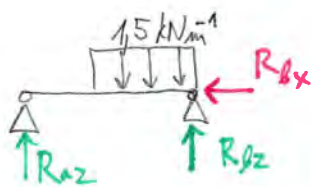
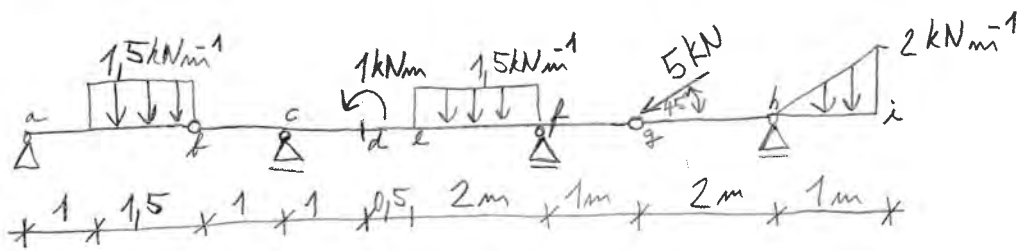
Vnitřní síly zakreslíme na tři nosníky jako by to byl jeden nosník



Klady nem' možno umiestniť veta libovolně!



Príklad: Stanovte N, V, M na Gerberovom mostíku.



$$\sum M_a = 0$$

$$-15 \cdot 1.5 \cdot \left(1 + \frac{1.5}{2}\right) + R_{bz} \cdot 2.5 = 0$$

$$R_{bz} = 1.575 \text{ kN}$$

$$\sum M_g = 0$$

$$R_{hz} \cdot 2 - \frac{2 \cdot 1}{2} \cdot 2.66\bar{6} = 0$$

$$R_{hz} = 1.333 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$R_{az} + 1.575 - 15 \cdot 1.5 = 0$$

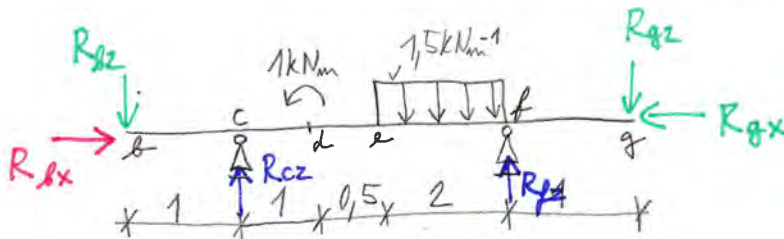
$$R_{az} = 0.675$$

$$\sum M_h = 0$$

$$-R_{gz} \cdot 2 + 5 \cdot \cos 45^\circ \cdot 2 - \frac{2 \cdot 1}{2} \cdot 0.66\bar{6} = 0 \Rightarrow R_{gz} = 3.2 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$R_{gx} = 5 \cdot \cos 45^\circ = 3.5355 \text{ kN}$$



$$\sum M_c = 0$$

$$1,545 \cdot 1 + 1 - 1,5 \cdot 2 \cdot 2,5 + R_{fz} \cdot 3,5 - 3,2 \cdot 4,5 = 0$$

$$R_{fz} = 5,521 \text{ kN}$$

$$\sum M_f = 0$$

$$1,545 \cdot 4,5 - R_{cz} \cdot 3,5 + 1 + 1,5 \cdot 2 \cdot 1 - 3,2 \cdot 1 = 0$$

$$R_{cz} = 2,25 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$1,333 + 1,5 \cdot 2 + 1,545 - 3,121 - 2,484 = 0 \quad \checkmark$$

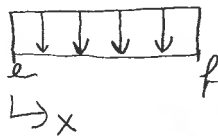
$$M_c = R_{cz} \cdot 3,5 - 1,5 \cdot 1,5 \cdot \left(1 + \frac{1,5}{2}\right) = -1,545$$

$$M_d = R_{cz} \cdot 4,5 - 1,5 \cdot 1,5 \cdot \left(2 + \frac{1,5}{2}\right) + R_{cz} \cdot 1 = -9,9$$

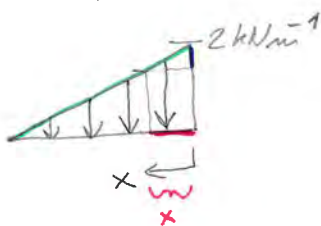
$$M_d = M_d - 1 = -1,9$$

$$M_{ef} = R_{cz} \cdot (x - 5) - 1,5 \cdot 1,5 \cdot (x - 3,25) + R_z \cdot (x - 1,5) - 1$$

$$- 1,5 \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

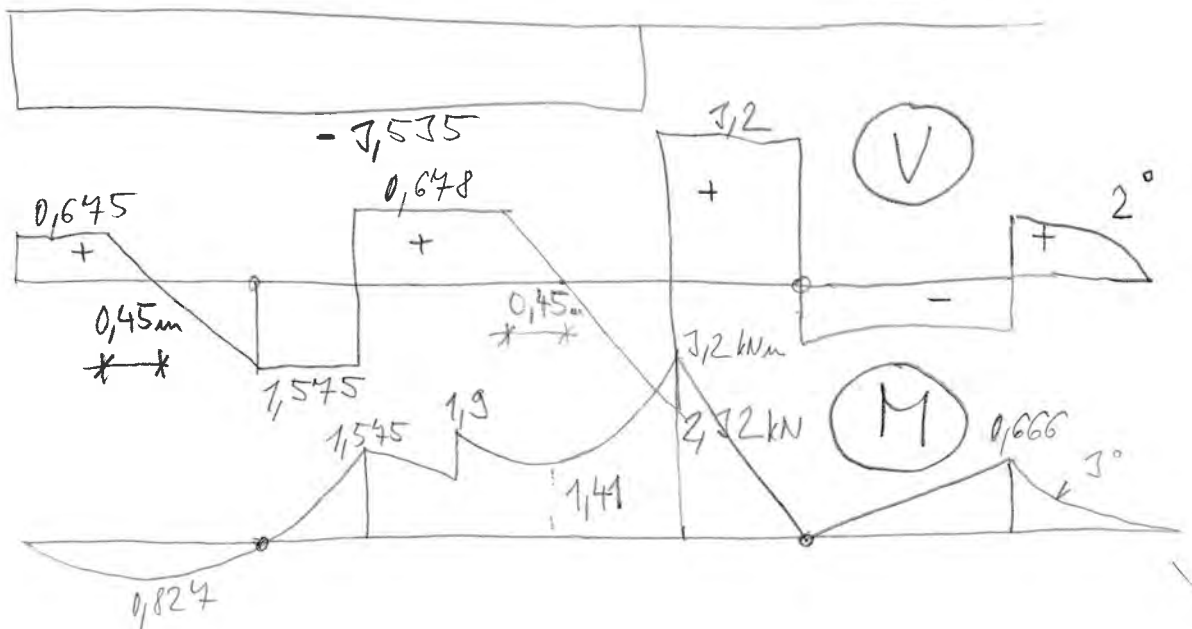


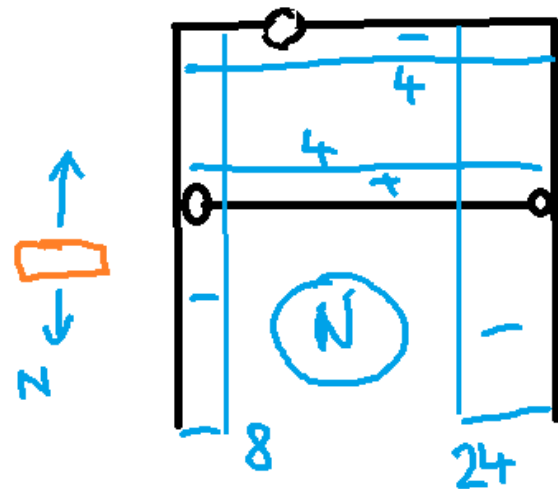
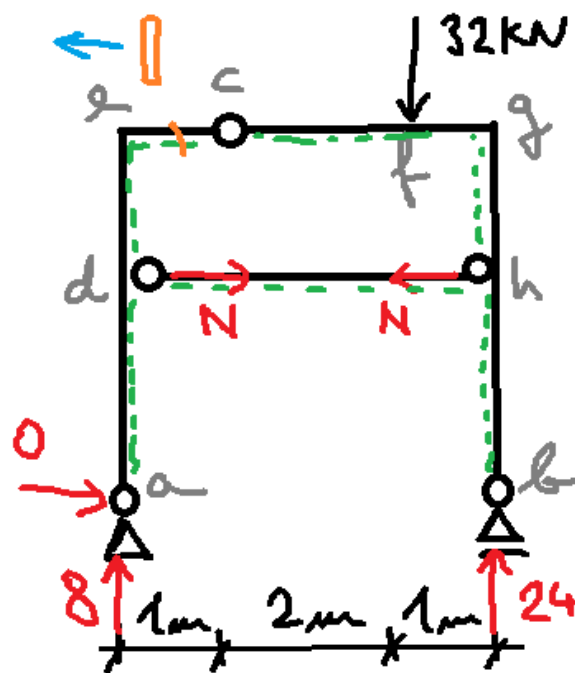
M_{ih}



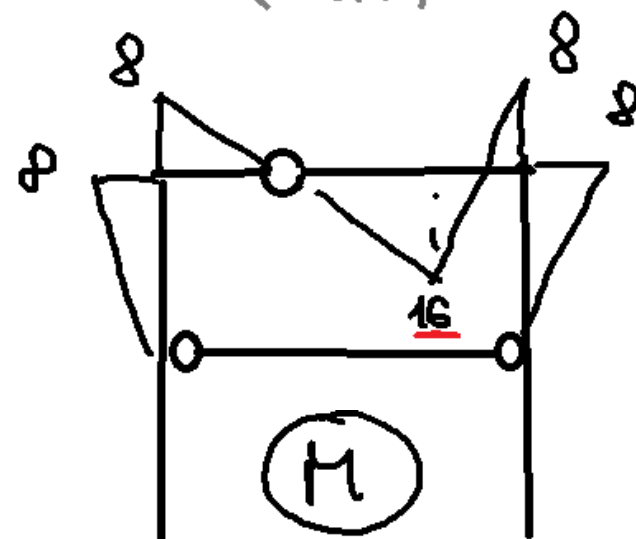
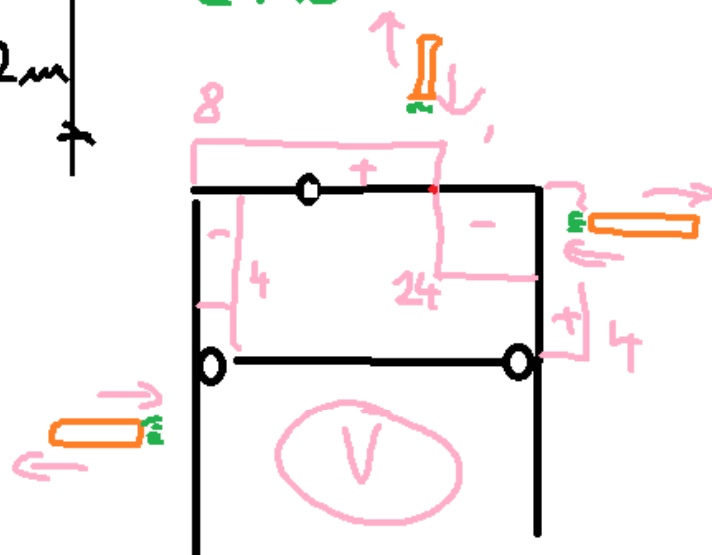
$$M_{ih} = \underbrace{(2 - 2 \cdot x) \cdot x \cdot \frac{x}{2}}_{Q_1} + \underbrace{2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot x}_{Q_2}$$

(N)

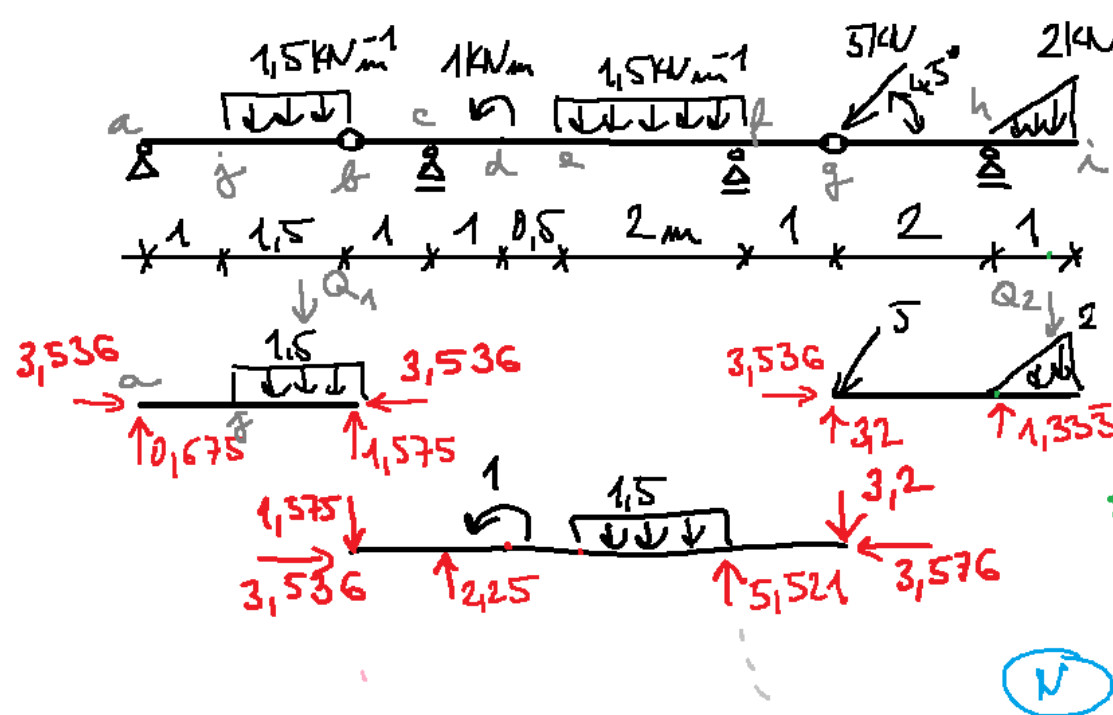




$$\begin{aligned} \sum M_a &= 0 \quad -32 \cdot 3 + R_b \cdot 4 = 0 & R_b &= 24 \text{ kN} \\ \sum M_b &= 0 \quad 32 \cdot 1 - R_a \cdot 4 = 0 & R_a &= 8 \text{ kN} \\ \sum F_x &= 0 \quad H_a = 0 \\ \sum M_c &= 0 \quad -8 \cdot 1 + N \cdot 2 = 0 & N &= 4 \text{ kN (TAM)} \end{aligned}$$



$$M_{\max} = 24 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = \underline{16 \text{ kNm}}$$



$$\sum M_a = 0 - 1,5 \cdot 1,5 \cdot (1 + \frac{1,5}{2}) + R_b \cdot 2,5 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad R_a = 1,5 \cdot 1,5 + 1,575 = 0$$

$$\sum M_b = 0 - \frac{2 \cdot 1}{2} \cdot (2 + \frac{2}{3}) + R_h \cdot 2 = 0$$

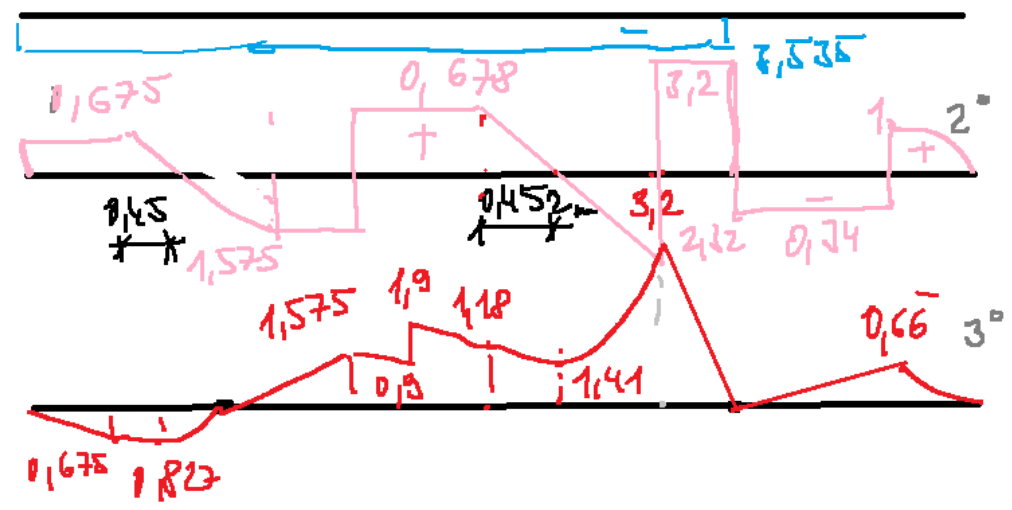
$$\sum M_u = 0 - R_g \cdot 2 + 5 \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 - \frac{2 \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 0$$

$$\sum F_x = 0 - 5 \cdot \cos 45^\circ + H_g = 0$$

$$\sum M_c = 0 = 1,575 \cdot 1 + 1 - 1,5 \cdot 2 \cdot 2,5 + R_f \cdot 3,5 - 3,2 \cdot 1$$

$$\sum M_f = 0 \quad 1,575 \cdot 4,5 - R_c \cdot 3,5 + 1 + 1,5 \cdot 2 \cdot 1 - 1,2 \cdot 1 = 0$$

$$M_{max} = -1,575 \cdot 2,952 + 2,25 \cdot 1,952 - 1 - 1,5 \cdot 0,452 \cdot \frac{0,452}{2} = 1,41 \text{ kNm}$$



ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY

BDA001

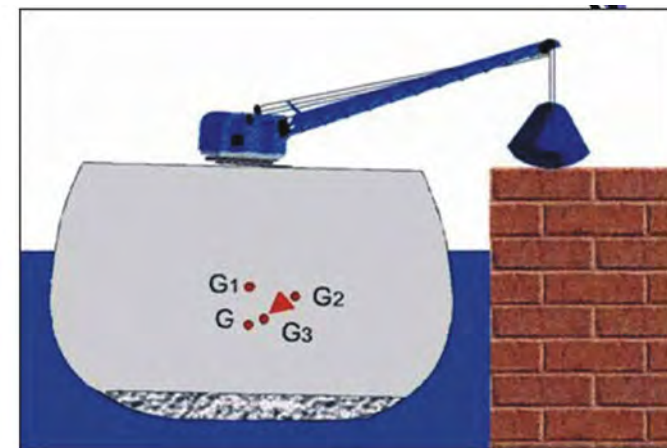
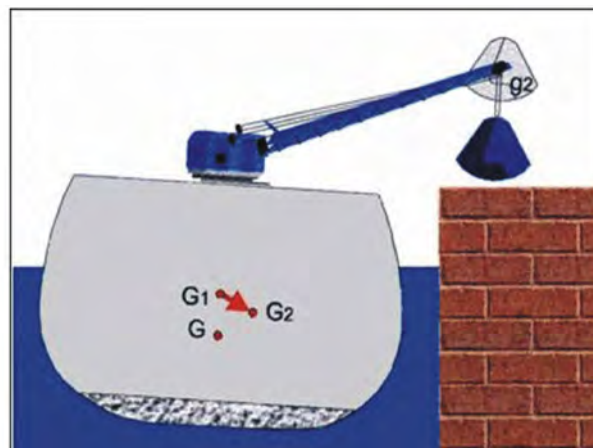
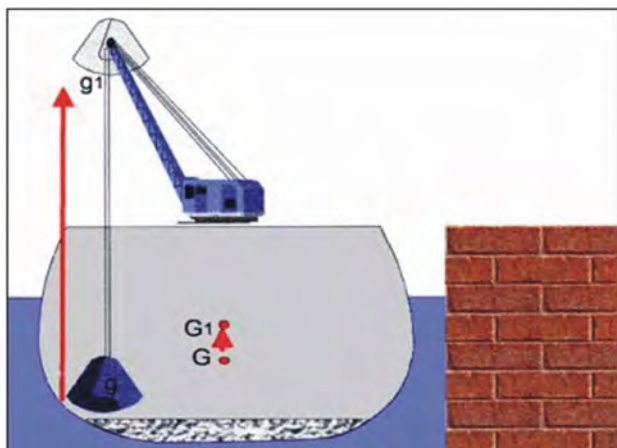
Plocha, statický moment, těžiště (analogie k řešení soustavy rovnoběžných sil).
Kvadratické a deviační momenty. Steinerova věta.

Zdeněk Kala



Těžiště

Těžiště



Těžiště

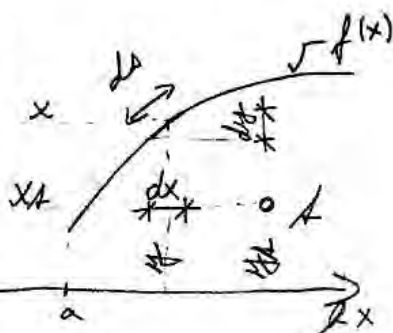
Geom. útvarem rozumíme čáru, plochu nebo těleso, jehož hustota ρ je konstantní.

Těžiště geom. útvaru je definováno jako statický střed soustavy příslušných rovnovážných sil v rovině (v prostoru), jež jsou rovný vlihasem je dvojnásobek jednodušší části útvaru a působí v těžištitě této části.

Těžiště rovinných čar

Rovinná křivka

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx$$



- délka křivky

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

- statický moment dU_x [dU_y] elementu křivky k ose x definujeme jako součin délky elementu ds a vzdálenosti je těžiště $y[x]$ od této osy.

$$dU_x = y \cdot ds \quad dU_y = x \cdot ds$$

- statický moment celé křivky má velikost

$$U_x = \int_{\bar{s}} dU_x = \int_{\bar{s}} y ds = \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx = s \cdot y_A$$

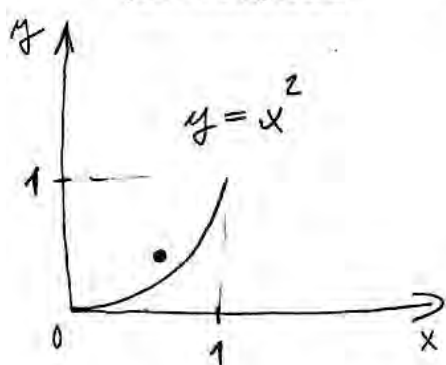
$$U_y = \int_{\bar{s}} dU_y = \int_{\bar{s}} x ds = \int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} dx = s \cdot x_A$$

- prověřte souřadnice x_A, y_A těžiště A kruhy jsou

$$x_A = \frac{U_y}{s} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx}$$

$$y_A = \frac{U_x}{s} = \frac{\int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx}$$

Příklad: Určete polohu těžiště paraboly.

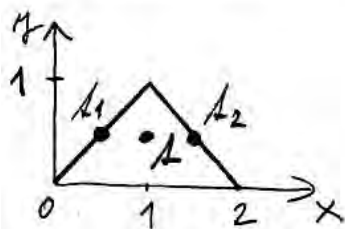


$$x_A = \frac{\int_0^1 x \cdot \sqrt{1+(2x)^2} dx}{\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2} dx} = \frac{0,848361}{1,47894} =$$

$$= 0,573627$$

$$y_A = \frac{\int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{1+(2x)^2} dx}{\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2} dx} = \frac{0,606337}{1,47894} = 0,40998$$

Příklad: Určete polohu těžiště lomene čáry



$$U_x = \sqrt{2} \cdot 0,5 + \sqrt{2} \cdot 0,5 = \sqrt{2}$$

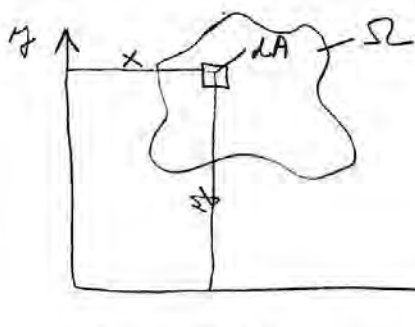
$$U_y = \sqrt{2} \cdot 0,5 + \sqrt{2} \cdot 1,5 = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$s = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$x_A = \frac{U_y}{s} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2}} = 1$$

$$y_A = \frac{U_x}{s} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2}} = 0,5$$

Těžiště rovinných oblastí



$$dA = dx \cdot dy$$

$$A = \iint_{\Omega} dx dy$$

- statický moment elementu plochy k ose x je roven obsahu prvku a vzdálenosti y

$$dU_x = y \cdot dA$$

- stat. m. k ose y

$$dU_y = x dA$$

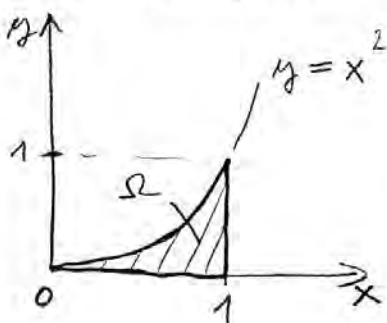
- pro celý útvar

$$U_x = \int_{\Omega} dU_x = \int_{\Omega} y dA = \iint_{\Omega} y \cdot dx dy \quad U_y = \int_{\Omega} dU_y = \int_{\Omega} x dA = \iint_{\Omega} x dx dy$$

- souřadnice těžiště určíme dle

$$x_1 = \frac{U_y}{A} = \frac{\iint_{\Omega} x dx dy}{\iint_{\Omega} dx dy} \quad y_1 = \frac{U_x}{A} = \frac{\iint_{\Omega} y dx dy}{\iint_{\Omega} dx dy}$$

Příklad: Vraťte těžiště plochy Ω



$$dA = x^2 \cdot dx$$

$$A = \int_{\Omega} dA = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$dU_x = \frac{y}{2} \cdot dA = \frac{x^2}{2} \cdot x^2 dx = \frac{x^4}{2} dx$$

$$U_x = \int_{\Omega} dU_x = \int_0^1 \frac{x^4}{2} dx = \left[\frac{x^5}{2 \cdot 5} \right]_0^1 = \frac{1}{2 \cdot 5} = 0,1$$

$$y_1 = \frac{U_x}{A} = \frac{\frac{1}{2 \cdot 5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2 \cdot 5} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$U_y = \int_{\Omega} dU_y = \int_{\Omega} x dA = \int_0^1 x \cdot x^2 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$x_1 = \frac{U_y}{A} = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Složený rovinný obrazec

Výčetřovaný složený rovinný obrazec rozdělíme na n jednoduchých částí (dílů), a můžeme známe plošné obsahy A_i a souřadnice těžišť $A_i (x_i, y_i)$. Celkový obsah složeného obrazce je

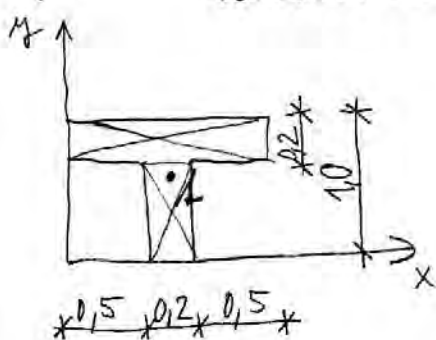
$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

Souřadnice těžiště celého obrazce můžeme určit po složení statických momentů $U_{x,i} = A_i \cdot y_i$ a $U_{y,i} = A_i \cdot x_i$ jednoduchých částí k osám x, y .

$$x_A = \frac{U_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad y_A = \frac{U_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

Ukrok nelo výřez máme máme záporně

Příklad: Vypočíte těžiště pravoúhelníku T.



$$A = 1,2 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,2 = 0,4$$

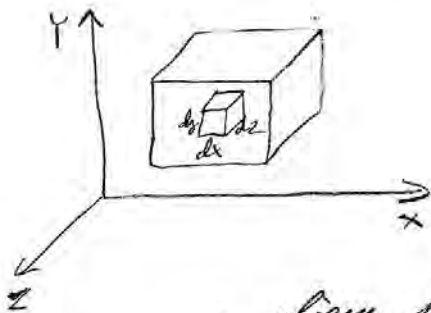
$$U_x = 1,2 \cdot 0,2 \cdot 0,9 + 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,4 = 0,28$$

$$y_A = \frac{U_x}{A} = \frac{0,28}{0,4} = 0,7$$

$$U_y = 1,2 \cdot 0,2 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,6 = 0,24$$

$$x_A = \frac{U_y}{A} = \frac{0,24}{0,4} = 0,6$$

Těžiště těles



Těleso V rozdělíme na diferenciální prvky se stranami rovnoběžnými s hranami dx, dy, dz a objemu $dV = dx dy dz$

- objem tělesa

$$V = \int_V dV = \iiint_V dx dy dz$$

- statické momenty

$$dU_{yz} = x \cdot dV$$

$$dU_{zx} = y \cdot dV$$

$$dU_{xy} = z \cdot dV$$

$$U_{yz} = \int_V dU_{yz} = \int_V x \cdot dV = \iiint_V x dx dy dz = V \cdot x_A$$

$$U_{zx} = \int_V dU_{zx} = \int_V y \cdot dV = \iiint_V y dx dy dz = V \cdot y_A$$

$$U_{xy} = \int_V dU_{xy} = \int_V z \cdot dV = \iiint_V z dx dy dz = V \cdot z_A$$

- souřadnice

$$x_A = \frac{U_{yz}}{V}$$

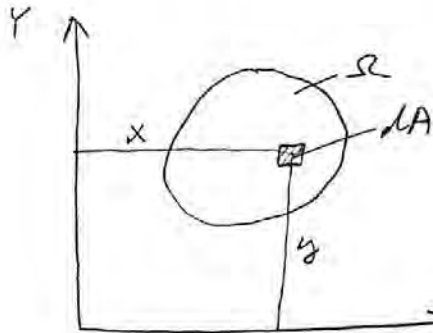
$$y_A = \frac{U_{zx}}{V}$$

$$z_A = \frac{U_{xy}}{V}$$

Momenty setračnosti a deniční momenty poriných obraců

Moment setračnosti

- diferenciální element
 $dI_x = y^2 dA$ [$dI_y = x^2 dA$]



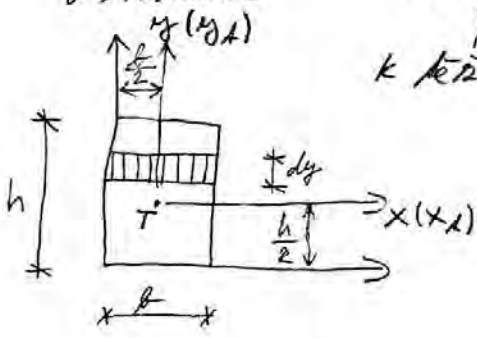
- aly' obraců

● $I_x = \int y^2 dA$ [m^4]

● [$I_y = \int x^2 dA$]

Moment setračnosti k těžištní ose m. centrální mom.
setračnosti.

Příklad : Centrální mom. setračnosti obdélníku



k těžišti $dI_{xA} = y^2 dA = y^2 \cdot b \cdot dy$

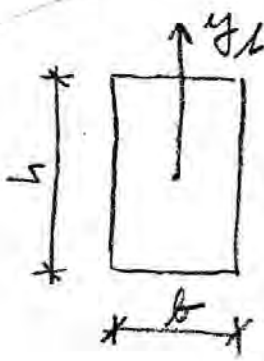
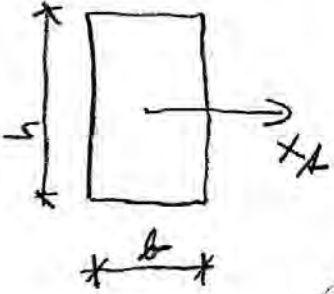
$$I_{xA} = b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = 2 \cdot b \cdot \int_0^{h/2} y^2 dy =$$

$$= 2 \cdot b \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{h/2} = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_{yA} = 2 \cdot b \cdot \int_0^{b/2} x^2 dx = \frac{1}{12} h b^3$$

Poznámka : Centrální znamená k těžišti
 (centrum = těžiště)

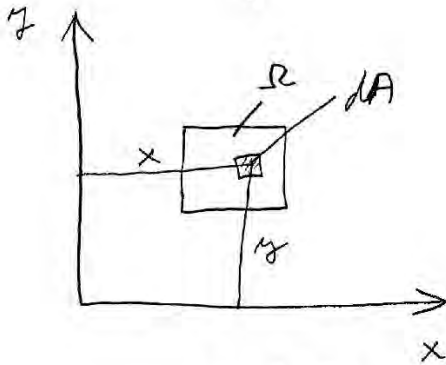
$$I_{xA} = \frac{1}{12} b \cdot h^3$$



$$I_{yA} = \frac{1}{12} h b^3$$

(HYBNOST / HMOTNOST * RYCHLOST
 MOM. SET * ÚHL. RYCHL.)

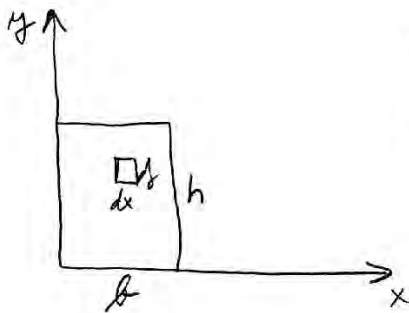
Derivátus momenty



$$dD_{xy} = x \cdot y \cdot dA$$

$$D_{xy} = \int_{\Omega} dD_{xy} = \int_{\Omega} x \cdot y \cdot dA \quad [m^4]$$

Příklad: Vypočítejte derivátus moment obdélníku k osám x, y



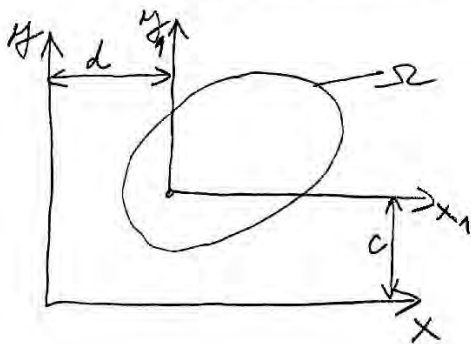
$$dD_{xy} = x \cdot y \cdot dx \cdot dy$$

$$D_{xy} = \int_0^b \int_0^h x \cdot y \cdot dx \cdot dy = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{h^2}{2}$$

$$\left\{ = b \cdot h \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2} \right\}$$

Transformační vztahy

Moment setrácivosti k posunutým osám



$$x = x_1 + d$$

$$y = y_1 + c$$

$$I_x = \int_{\Omega} y^2 dA = \int_{\Omega} (y_1 + c)^2 dA =$$

$$= \int_{\Omega} y_1^2 dA + 2 \cdot c \int_{\Omega} y_1 dA + c^2 \int_{\Omega} dA =$$

$$= I_{x_1} + 2c U_{x_1} + A c^2$$

$I_{x_1} = \int_{\Omega} y_1^2 dA$... moment setrácivosti obrábce k ose x_1

$U_{x_1} = \int_{\Omega} y_1 dA$... statický moment obrábce k ose x_1

$A = \int_{\Omega} dA$... obsah obrábce

Obdobně i pro osu y

Podobá osa x_1 je těžištní osou x_A a platí
 $Q_1 \equiv 1$ při sdílené momentu $U_{x_1} = U_{x_A} = 0$
 a lze psát

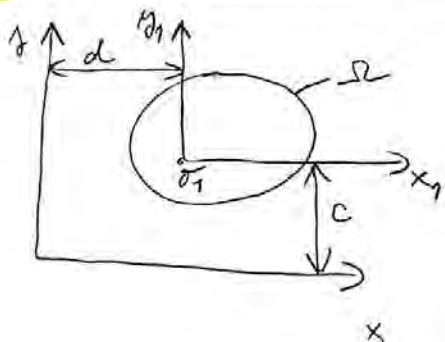
● $I_x = I_{x_A} + A c^2$

analogie pro osy y

● $I_y = I_{y_A} + A \cdot d^2$

Steinerova věta: Moment setrácivosti rovinného
 obrázce k libovolné ose je roven součtu
 momentu setrácivosti obrázce k rovnoběžné
 ose procházející těžištěm a obsahu obrázce
 vynásobeného třikrát vzdáleností obou os.

Derivát momentu k posunutým osám



$$D_{x_2} = \int_{\Omega} x_2^2 dA = \int_{\Omega} (x_1 + d)^2 (y_1 + c) dA =$$

$$= \int_{\Omega} x_1^2 y_1 dA + d \int_{\Omega} y_1^2 dA + c \int_{\Omega} x_1^2 dA + cd \int_{\Omega} dA =$$

$$= D_{x_1 y_1} + d U_{x_1} + c U_{y_1} + A \cdot c \cdot d$$

V případě, že jsou osy x_1, y_1 v počátku
 $Q_1 \equiv 1$ platí, že:

$$D_{x_2} = D_{x_1 y_1} + A \cdot c \cdot d$$

Derivát momentu rovinného obrázce k libovolným
 protínajícím osám je roven součtu derivátů
 momentu obrázce k rovnoběžným těžištním osám
 a obsahu obrázce vynásobeného vzdálenostmi
 příslušných rovnoběžných os.

Momenty setrácivosti a deňacím momenty
řlžených rovinných obrazci

$$I_x = \sum_{i=1}^n I_{x,i} = \sum_{i=1}^n (I_{x,i} + A_i c_i^2) = \sum_{i=1}^n (I_{x,i} + A_i y_i^2)$$

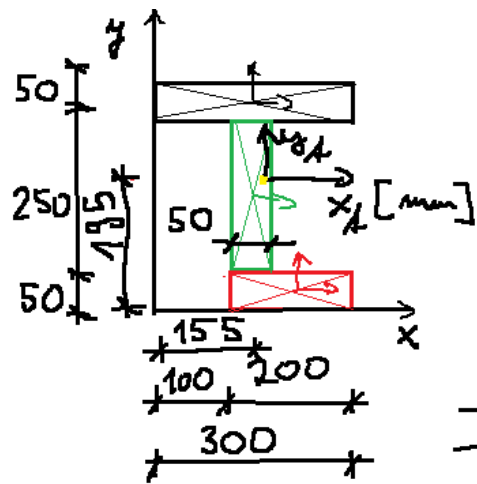
$$I_y = \sum_{i=1}^n I_{y,i} = \sum_{i=1}^n (I_{y,i} + A_i d_i^2) = \sum_{i=1}^n (I_{y,i} + A_i x_i^2)$$

$$D_{xy} = \sum_{i=1}^n D_{x,y,i} = \sum_{i=1}^n (D_{x,y,i} + A_i c_i d_i) = \sum_{i=1}^n (D_{x,y,i} + A_i x_i y_i)$$

kde A_i je obsah i -tého dílčího obrazce

$I_{x,i} = I_{x,i}$; $I_{y,i} = I_{y,i}$; $D_{x,y,i} = D_{x,y,i}$ jsou
momenty setrácivosti a deňacím momenty
dílčích obrazci k jejich vlastním těžištním
osám rovnoběžným s osami x, y .

$c_i = y_i$; $d_i = x_i$ jsou souřadnice těžiště dílčích obrazci
v souřadnicové soustavě x, y .



$$S_x = 200 \cdot 50 \cdot 25 + 250 \cdot 50 \cdot \left(\frac{250}{2} + 50\right) + 300 \cdot 50 \cdot (50 + 250 + 25) = 7312500 \text{ mm}^3$$

$$S_y = 200 \cdot 50 \cdot 200 + 250 \cdot 50 \cdot (100 + 25) + 300 \cdot 50 \cdot (150) = 5812500 \text{ mm}^3$$

$$A = 200 \cdot 50 + 250 \cdot 50 + 300 \cdot 50 = 37500 \text{ mm}^2$$

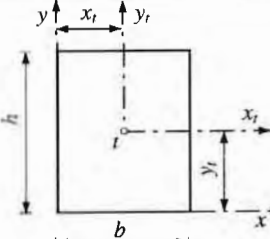
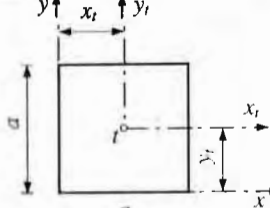
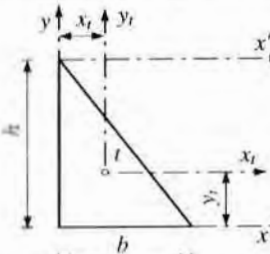
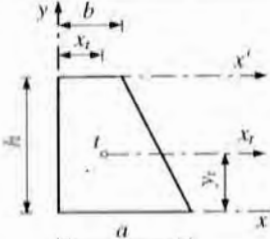
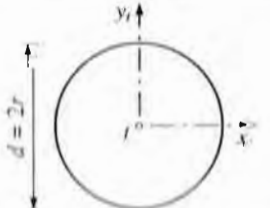
$$y_A = \frac{S_x}{A} = \frac{7312500}{37500} = 195 \text{ mm} \quad x_A = \frac{S_y}{A} = \frac{5812500}{37500} = 155 \text{ mm}$$

$$I_{x_A} = \frac{1}{12} \cdot 200 \cdot 50^3 + 200 \cdot 50 \cdot (195 - 25)^2 + \frac{1}{12} \cdot 250 \cdot 50^3 + 250 \cdot 50 \cdot (195 - 50 - \frac{250}{2})^2 + \frac{1}{12} \cdot 300 \cdot 50^3 + 300 \cdot 50 \cdot (150 - 25 - 195)^2 = 617,8125 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

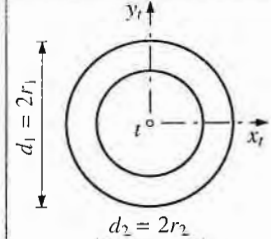
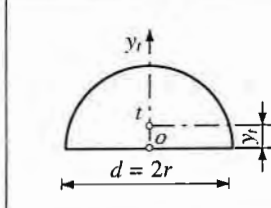
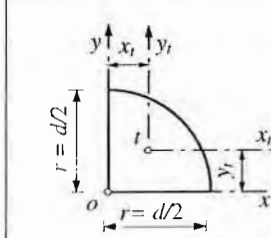
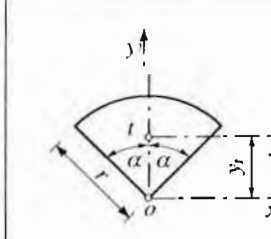
$$I_{y_A} = \frac{1}{12} \cdot 50 \cdot 200^3 + 50 \cdot 200 \cdot (200 - 155)^2 + \frac{1}{12} \cdot 250 \cdot 50^3 + 250 \cdot 50 \cdot (155 - 100 - 25)^2 + \frac{1}{12} \cdot 50 \cdot 300^3 + 50 \cdot 300 \cdot (155 - 150)^2 = 180,3125 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$D_{xy_A} = 0 + 200 \cdot 50 \cdot (200 - 155) \cdot (25 - 195) + 0 + 250 \cdot 50 \cdot (100 + 25 - 155) \cdot (50 + \frac{250}{2} - 195) + 0 + 300 \cdot 50 \cdot (150 - 155) \cdot (50 + 250 + 25 - 195) = -78,75 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Tab. 5.1 Geometrické charakteristiky rovinných obrazců

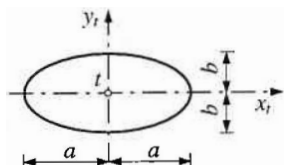
Tvar obrazce	Obsah A, poloha těžiště t , momenty setrvačnosti I , polární I_t a deviační D
Obdélník 	$A = bh; \quad x_t = \frac{b}{2}; \quad y_t = \frac{h}{2}$ $I_{x_t} = \frac{1}{12}bh^3; \quad I_{y_t} = \frac{1}{12}hb^3; \quad I_x = \frac{1}{3}bh^3; \quad I_y = \frac{1}{3}hb^3$ $D_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}; \quad I_t = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$
Čtverec 	$A = a^2; \quad x_t = y_t = \frac{a}{2}$ $I_{x_t} = I_{y_t} = \frac{a^4}{12}; \quad I_x = I_y = \frac{a^4}{3}$ $D_{xy} = \frac{a^4}{4}; \quad I_t = \frac{a^4}{6}$
Pravoúhlý trojúhelník 	$A = \frac{1}{2}bh; \quad x_t = \frac{b}{3}; \quad y_t = \frac{h}{3}$ $I_{x_t} = \frac{1}{36}bh^3; \quad I_{y_t} = \frac{1}{36}hb^3; \quad D_{x_t y_t} = -\frac{b^2h^2}{72}$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3; \quad I_y = \frac{1}{12}hb^3; \quad D_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$ $I_{x_t} = \frac{1}{4}bh^3; \quad I_t = \frac{bh}{36}(b^2 + h^2)$
Lichoběžník 	$A = \frac{1}{2}(a+b)h; \quad x_t = \frac{a^2 + ab + b^2}{3(a+b)}; \quad y_t = \frac{(a+2b)h}{3(a+b)}$ $I_{x_t} = \frac{(a^2 + 4ab + b^2)h^3}{36(a+b)}; \quad I_{x_t'} = \frac{(3a+b)h^3}{12}$ $I_{x_t} = \frac{(a+3b)h^3}{12}; \quad D_{xy} = \frac{(a^2 + 2ab + 3b^2)h^2}{24}$
Kruh 	$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}; \quad I_{x_t} = I_{y_t} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$ $I_t = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$

Tab. 5.1 Geometrické charakteristiky rovinných obrazců (pokračování)

Tvar obrazce	Obsah A, poloha těžiště t , momenty setrvačnosti I , polární I_t a deviační D
Mezikruží 	$A = \pi(r_1^2 - r_2^2) = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2)$ $I_{x_t} = I_{y_t} = \frac{\pi}{4}(r_1^4 - r_2^4) = \frac{\pi}{64}(d_1^4 - d_2^4)$ $I_t = \frac{\pi}{2}(r_1^4 - r_2^4) = \frac{\pi}{32}(d_1^4 - d_2^4)$
Půlkruh 	$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi d^2}{8}; \quad y_t = \frac{4r}{3\pi} = \frac{2d}{3\pi}$ $I_{x_t} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)r^4 = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)\frac{d^4}{16}$ $I_x = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi d^4}{128} = I_{y_t}; \quad I_o = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$
Čtvrtkruh 	$A = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi d^2}{16}; \quad x_t = y_t = \frac{4r}{3\pi} = \frac{2d}{3\pi}$ $I_{x_t} = I_{y_t} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4 = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)\frac{d^4}{16}$ $D_{x_t y_t} = \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4 = \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right)\frac{d^4}{16}$
Křídlová výseč 	$A = \alpha r^2; \quad y_t = \frac{2}{3}r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ $I_{x_t} = r^4 \left(\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{8} - \frac{4 \sin^2 \alpha}{9\alpha} \right); \quad I_o = \frac{\alpha r^4}{2}$ $I_x = \frac{r^4}{8}(2\alpha + \sin 2\alpha); \quad I_y = \frac{r^4}{8}(2\alpha - \sin 2\alpha)$
Křídlová klenba 	$A = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) r^2; \quad y_t = \frac{4r \sin^3 \alpha}{3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}$ $I_{x_t} = r^4 \left(\frac{4\alpha - \sin 4\alpha}{16} - \frac{8}{9} \frac{\sin^3 \alpha \cos \alpha}{(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} \right)$ $I_{x_t} = \frac{r^4}{16} (4\alpha - \sin 4\alpha); \quad I_{y_t} = \frac{r^4}{8} (1 - 2\alpha - \frac{8}{3} \sin \alpha \cos \alpha + \sin^3 \alpha)$

Tab. 5.1 Geometrické charakteristiky rovinných obrazců (pokračování)

Tvar obrazce

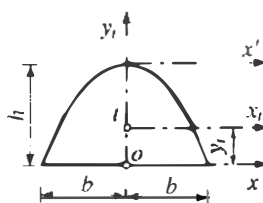
Obsah A , poloha těžiště t , momenty setrvačnosti I ,
polární I_t a deviační D 

$$A = \pi ab$$

$$I_{x_t} = \frac{\pi}{4} ab^3; \quad I_{y_t} = \frac{\pi}{4} ba^3$$

$$I_t = \frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2)$$

Parabolická úseč

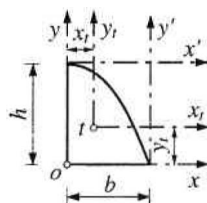


$$A = \frac{4}{3} bh; \quad y_t = \frac{2}{5} h$$

$$I_{x_t} = \frac{16}{175} bh^3; \quad I_{y_t} = \frac{4}{15} hb^3$$

$$I_x = \frac{32}{105} bh^3; \quad I_{x'} = \frac{4}{7} bh^3$$

parabolické úseče

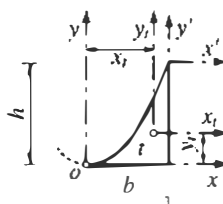


$$A = \frac{2}{3} bh; \quad x_t = \frac{3}{8} b; \quad y_t = \frac{2}{5} h$$

$$I_{x_t} = \frac{8}{175} bh^3; \quad I_x = \frac{16}{105} bh^3; \quad I_{x'} = \frac{2}{7} bh^3$$

$$I_{y_t} = \frac{19}{480} hb^3; \quad I_{y'} = \frac{2}{15} hb^3; \quad I_{y'} = \frac{3}{10} hb^3$$

Parabolický trojúhelník



$$A = \frac{1}{3} bh; \quad x_t = \frac{3}{4} b; \quad y_t = \frac{3}{10} h$$

$$I_{x_t} = \frac{37}{2100} bh^3; \quad I_x = \frac{1}{21} bh^3; \quad I_{x'} = \frac{19}{105} bh^3$$

$$I_{y_t} = \frac{1}{80} hb^3; \quad I_{y'} = \frac{1}{5} hb^3; \quad I_{y'} = \frac{1}{30} hb^3$$

ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY

BDA001

Hlavní osy průřezu, hlavní kvadratické momenty. Mohrova kružnice.
Poloměry setrvačnosti, elipsa setrvačnosti, polární kvadratické momenty.

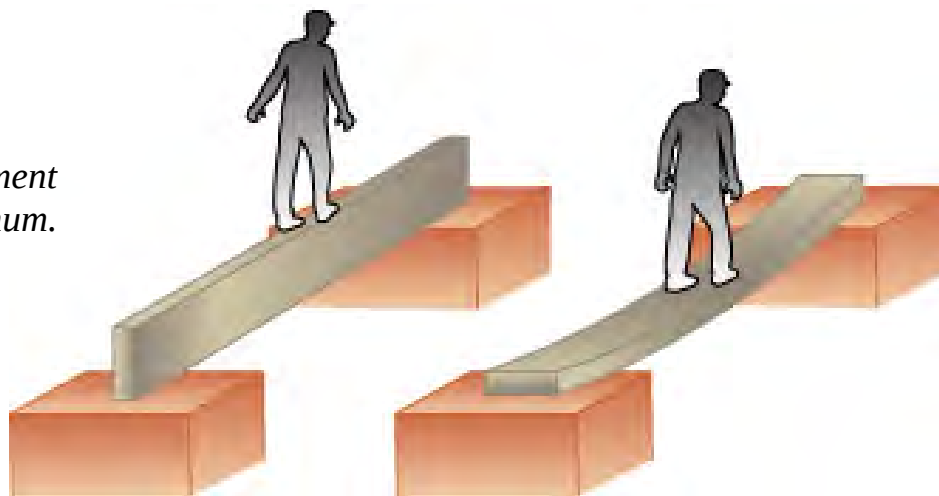
Zdeněk Kala

Moment setrvačnosti

Hlavní centrální moment setrvačnosti je měřítkem „účinnosti“ tvaru průřezu odolávajícího ohybu

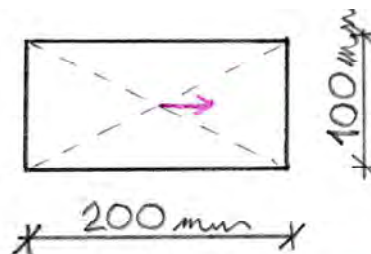
Centrální = osa vychází z těžiště

Hlavní = osa je natočená tak, že moment setrvačnosti je minimum, nebo maximum.



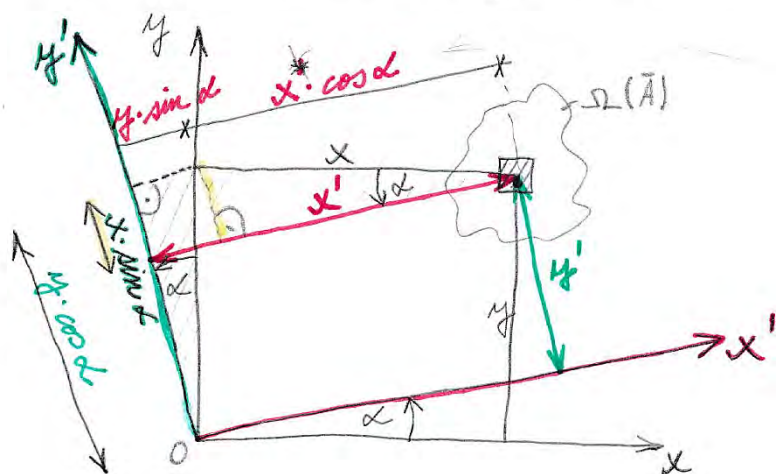
Určité tvary odolávají ohybu lépe než jiné

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 200^3$$
$$= 66,67 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$



$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 200 \cdot 100^3$$
$$= 16,67 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Transformační vztahy pro momenty setrvačnosti a derivací k posunutým osám. Klomí momenty setrvačnosti



$$x' = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha$$

$$y' = -x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha$$

Momenty setrvačnosti $I_{x'}$, $I_{y'}$ a derivací moment $D_{x'y'}$ porovnáme s výrazem k posunutým osám x', y' mají vztah

$$\begin{aligned} (1) \quad I_{x'} &= \int_{\bar{A}} y'^2 dA = \int_{\bar{A}} (-x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha)^2 dA = \\ &= \sin^2 \alpha \int_{\bar{A}} x^2 dA - \sin 2\alpha \int_{\bar{A}} xy dA + \cos^2 \alpha \int_{\bar{A}} y^2 dA = \\ &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - D_{xy} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad I_{y'} &= \int_{\bar{A}} x'^2 dA = \int_{\bar{A}} (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \cos^2 \alpha \int_{\bar{A}} x^2 dA + \sin 2\alpha \int_{\bar{A}} xy dA + \sin^2 \alpha \int_{\bar{A}} y^2 dA = \\ &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + D_{xy} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

Pozn: Oblast Ω přes kterou integrujeme, označíme jako $\bar{A}$.

Momenty setrvačnosti mají extrémní hodnoty k takovým osám x_0, y_0 , k nimž má derivací moment nulovou hodnotu. Hledáme příslušný úhel α těchto os.

$$\begin{aligned}
 (3) \quad D_{x'y'} &= \int_{\bar{A}} x'y' dA = \int_{\bar{A}} (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) dA = \\
 &= \sin \alpha \cos \alpha \left(\int_{\bar{A}} y^2 dA - \int_{\bar{A}} x^2 dA \right) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_{\bar{A}} xy dA = \\
 &= \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\alpha + D_{xy} \cos 2\alpha
 \end{aligned}$$

Extrémní hodnotu $I_{x'}$ dostáváme, pokud derivujeme $I_{x'}$ podle α a položíme rovnou nule $[\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha]$

$$(4) \quad \frac{d I_{x'}}{d \alpha} = -2 I_x \cos \alpha \sin \alpha + 2 I_y \sin \alpha \cos \alpha - 2 D_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

posadíme za α α_0 a upravíme (má násobek -1 a dělíme 2)

$$(5) \quad \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\alpha + D_{xy} \cos 2\alpha = D_{x_0 y_0} = 0$$

$\nwarrow$ viz (3)

$$(6) \quad \bullet \quad \tan 2\alpha_0 = \frac{2 D_{xy}}{I_y - I_x}$$

Řešením dostáváme úhly α_0 a $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$, které určují polohu dvou os x_0, y_0 navzájem kolmých $x_0, y_0 \dots$ hlavních os setrvačnosti.

$$\begin{aligned}
 (14) \quad I_{x_0} &= I_x \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - D_{xy} \sin 2\alpha_0 \leftarrow (1) \\
 I_{y_0} &= I_x \sin^2 \alpha_0 + I_y \cos^2 \alpha_0 + D_{xy} \sin 2\alpha_0 \leftarrow (2)
 \end{aligned}$$

vzájme geometrické vztahy:

$$\cos^2 \alpha_0 = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha_0) \quad \sin^2 \alpha_0 = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha_0)$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad I_{x_0} &= I_x \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha_0) + I_y \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha_0) - D_{xy} \sin 2\alpha_0 = \\
 &= \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cos 2\alpha_0 - D_{xy} \sin 2\alpha_0
 \end{aligned}$$

$$\text{odkud pro } I_{y_0} = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cos 2\alpha_0 + D_{xy} \sin 2\alpha_0$$

Plati, že

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{\tan 2\alpha_0}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha_0}} =$$

$$\cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha_0}} =$$

$$(6) \rightarrow \sin 2\alpha_0 = \frac{\frac{2 D_{xy}}{I_y - I_x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2 D_{xy}}{I_y - I_x} \right)^2}}$$

$$\cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2 D_{xy}}{I_y - I_x} \right)^2}}$$

Derivieren do (8) a nahrazením cos 2 α_0 ; sin 2 α_0 a vstihn (6):

$$I_{x0} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2D_{xy}}{I_y - I_x}\right)^2}}$$

$$- D_{xy} \cdot \frac{2D_{xy}}{I_y - I_x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2D_{xy}}{I_y - I_x}\right)^2}} =$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4D_{xy}^2}{I_y^2 - 2I_y I_x + I_x^2}}} -$$

$$- \frac{2D_{xy}^2}{(I_y - I_x) \cdot \sqrt{\frac{4D_{xy}^2}{I_y^2 - 2I_y I_x + I_x^2}}} =$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2 \cdot \sqrt{\frac{I_y^2 - 2I_y I_x + I_x^2 + 4D_{xy}^2}{I_y^2 - 2I_y I_x + I_x^2}}} -$$

$$- \frac{2D_{xy}^2}{(I_y - I_x) \cdot \sqrt{\frac{I_y^2 - 2I_y I_x + I_x^2 + 4D_{xy}^2}{I_y^2 - 2I_y I_x + I_x^2}}}$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{(I_x - I_y) \cdot (I_y - I_x)}{2 \cdot \sqrt{I_y^2 - 2I_y I_x + I_x^2 + 4D_{xy}^2}} -$$

$$- \frac{2D_{xy}^2}{\sqrt{I_y^2 - 2I_y I_x + I_x^2 + 4D_{xy}^2}} = \frac{I_x + I_y}{2} -$$

$$\frac{I_x^2 - 2I_x I_y + I_y^2 + 4D_{xy}^2}{2 \cdot \sqrt{I_x^2 - 2I_x I_y + I_y^2 + 4D_{xy}^2}} =$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{I_x^2 - 2I_x I_y + I_y^2 + 4D_{xy}^2}$$

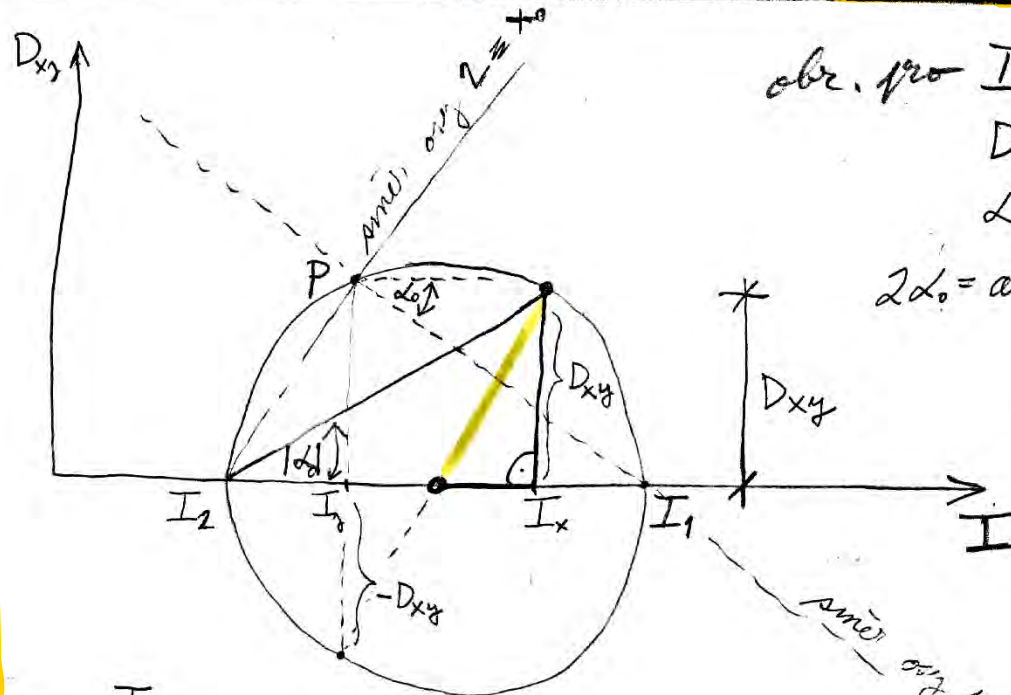
$$= \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + D_{xy}^2}$$

Dosazením do (8) s použitím (6) dostaneme

$$I_{\max, \min} = I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 D_{xy}^2}$$

Mohrova kružnice
 střed kružnice poloměr kružnice

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + D_{xy}^2}$$

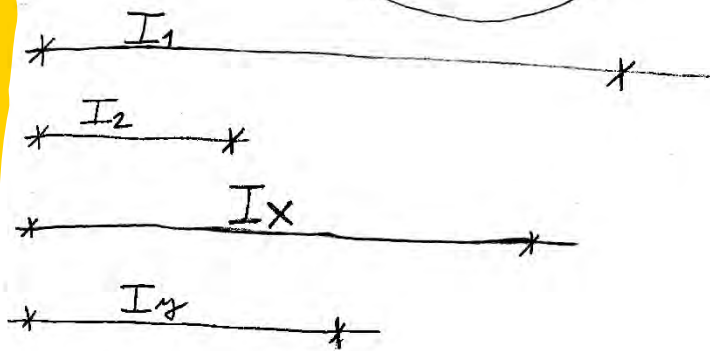


obr. pro $I_x > I_y$

$$D_{xy} > 0$$

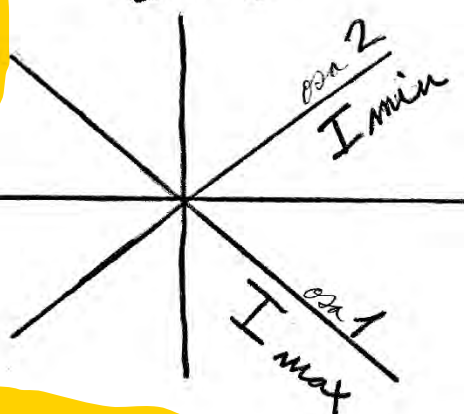
$$\alpha_0 < 0$$

$$2\alpha_0 = \arctan \frac{2D_{xy}}{I_y - I_x}$$

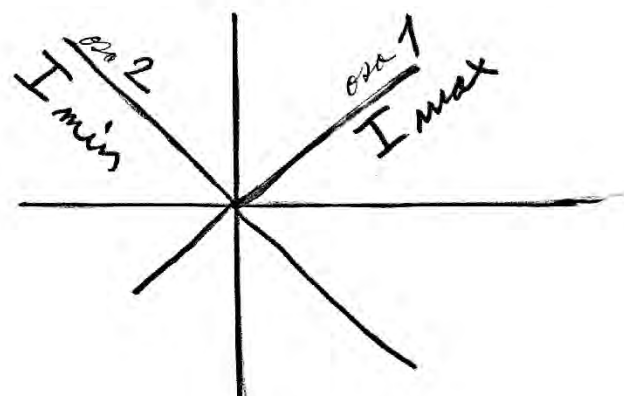


Kladné α_0 je
 proti směru hodin
 hodinových ručiček

$$D > 0$$



$$D < 0$$



v praxi velmi často potřebujeme centrální (nebo hlavní centrální) momenty setrvačnosti průřezů složených z rovinných obrazců jako např. obdélník, trojúhelník, kruh atd.

Postup výpočtu:

- 1) Zvolíme pomocnou souřadnicovou soustavu x, y
- 2) Rozdělíme složený obrazec na n jednodušších prvků $i = 1, \dots, n$.
- 3) Pro každý prvek určíme plochu (plošný obsah) A_i a souřadnice jeho těžiště x_{iA}, y_{iA} .
- 4) Určíme plochu A celého složeného obrazce (průřezu) $A = \sum_{i=1}^n A_i$ a souřadnice těžiště celého sl. obrazce $\bar{x}_A, \bar{y}_A$, kterým proložíme centrální osy setrvačnosti průřezu x_A, y_A rovnoběžné s osami x, y .
- 5) Pro každý prvek určíme ramena těžiště A_i $C_i = y_{iA} - \bar{y}_A$ i $d_i = x_{iA} - \bar{x}_A$.
- 6) Vypočítáme centrální kvadratické momenty setrvačnosti celého složeného obrazce

$$I_{x_A} = \sum_{i=1}^n I_{x_{iA}} + C_i^2 \cdot A_i \quad I_{y_A} = \sum_{i=1}^n I_{y_{iA}} + d_i^2 \cdot A_i$$

$$D_{x_A y_A} = \sum_{i=1}^n D_{x_{iA} y_{iA}} + C_i \cdot d_i \cdot A_i$$

kde $I_{x_{iA}}, I_{y_{iA}}, D_{x_{iA} y_{iA}}$ jsou (tabulkové) kvadratické momenty dílčích obrazců (prvků).

U otvorů se kv. momenty odečítají (momenty setrvačnosti mají znaménko minus, deformační momenty s opačným znaménkem).

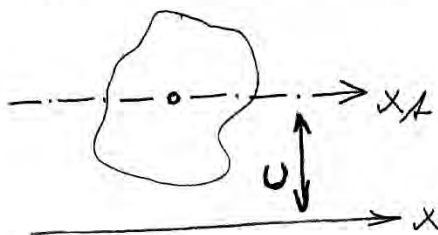
Poloměr setrvačnosti

Poloměr setrvačnosti i_x rovnajícího obrace k ose x je roven druhé mocnině x polohy momentu setrvačnosti I_x k této ose a obsahu obrace A .

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

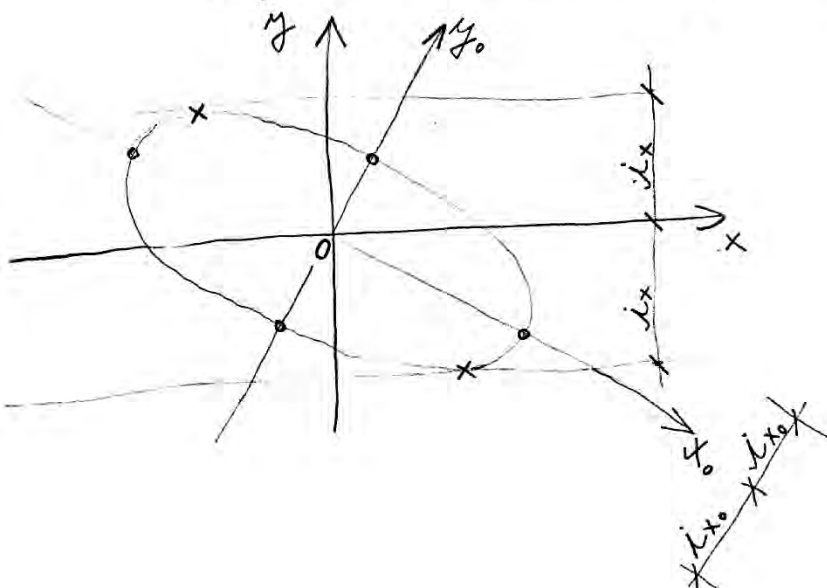
Poloměr setrvačnosti ke dvěma vzájemně rovnoběžným osám, z nichž jedna prochází těžištěm.

$$i_x^2 = i_{xL}^2 + c^2$$

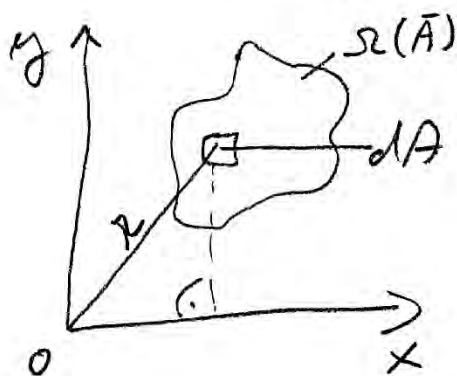


Elipsa setrvačnosti

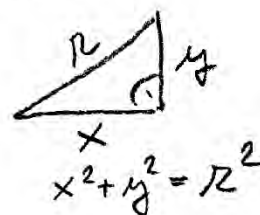
Představme-li daný bodem O v rovině obrace osy setrvačnosti různými směry, přísluší každé ose, např. x , jistý moment setrvačnosti I_x a tedy i jistá veličnost poloměru setrvačnosti i_x . Vedeme-li přímkou rovnoběžnou s osami setrvačnosti se vzdálenostech příslušných poloměrů setrvačnosti, obdržíme kružnici křivku rovnou elipse setrvačnosti pro daný bod.



Polární moment setrvačnosti:



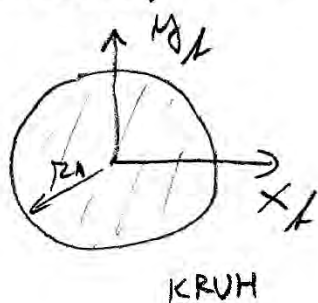
$$I_o = \int_A r^2 dA =$$



$$= \int_A (x^2 + y^2) dA =$$

$$= \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x$$

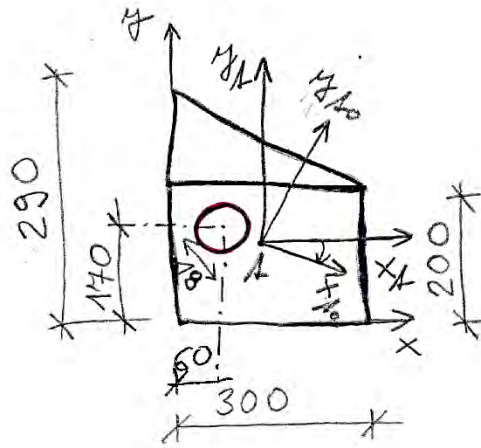
Vzorek má význam zejména polární moment setrvačnosti k těžištním osám, viz kroucení v 2. ročníku.



$$I_o = I_{x_1} + I_{y_1} = \frac{\pi r_1^4}{4} + \frac{\pi r_1^4}{4} = \frac{\pi r_1^4}{2}$$

Pozn.: I_o se někdy označuje I_p

Pr.: Vypočítajte hlavné centrálné momenty zvrátenia.



Težisko:

$$U_x = 300 \cdot 200 \cdot 100 + \frac{90 \cdot 300}{2} \cdot 230 - \pi \cdot 9^2 \cdot 170 = 9,062 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$U_y = 300 \cdot 200 \cdot 150 + \frac{90 \cdot 300}{2} \cdot 100 - \pi \cdot 9^2 \cdot 60 = 10,335 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$A = 300 \cdot 200 + \frac{90 \cdot 300}{2} - \pi \cdot 9^2 = 43,25 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

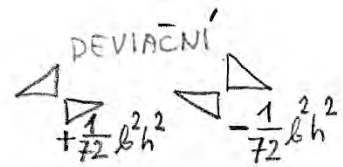
$$\bar{x}_A = \frac{U_x}{A} = \frac{9,062 \cdot 10^6 \text{ mm}^3}{43,25 \cdot 10^3 \text{ mm}^2} = 123,717 \text{ mm}$$

$$\bar{y}_A = \frac{U_y}{A} = \frac{10,335 \cdot 10^6 \text{ mm}^3}{43,25 \cdot 10^3 \text{ mm}^2} = 141,094 \text{ mm}$$

$$I_{x_A} = \frac{1}{12} 300 \cdot 200^3 + 300 \cdot 200 \cdot (123,717 - 100)^2 + \frac{1}{36} 300 \cdot 90^3 + \frac{90 \cdot 300}{2} (230 - 123,717)^2 - \left[\frac{\pi \cdot 9^4}{4} + \pi \cdot 9^2 \cdot (170 - 123,717)^2 \right] = 391,742 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_A} = \frac{1}{12} 200 \cdot 300^3 + 200 \cdot 300 \cdot (141,094 - 150)^2 + \frac{1}{36} 90 \cdot 300^3 + \frac{90 \cdot 300}{2} (100 - 141,094)^2 - \left[\frac{\pi \cdot 9^4}{4} + \pi \cdot 9^2 \cdot (60 - 141,094)^2 \right] = 543,378 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$D_{x_A y_A} = 0 + 300 \cdot 200 \cdot (150 - 141,094) \cdot (100 - 123,717) - \frac{300^2 \cdot 90^2}{42} + \frac{90 \cdot 300}{2} \cdot (100 - 141,094) (230 - 123,717) - \left[0 + \pi \cdot 9^2 \cdot (60 - 141,094) \cdot (170 - 123,717) \right] = -80,806 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$



$$\text{tg } 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot D_{x_A y_A}}{I_{y_A} - I_{x_A}} = \frac{2 \cdot -80,806}{543,378 - 391,742} = -1,066 \Rightarrow \alpha_0 = -23,415^\circ$$

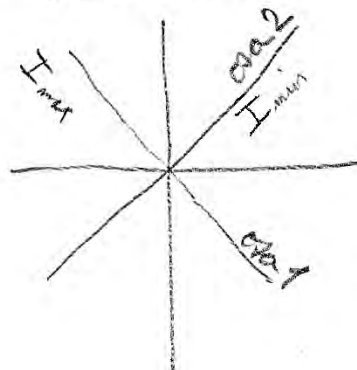
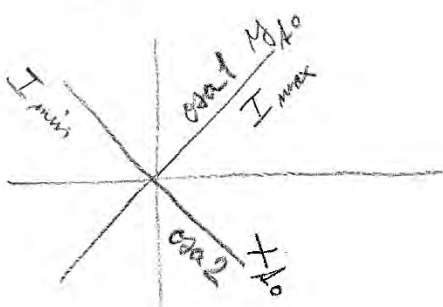
$$I_{\max/\min} = \frac{(391,742 + 543,378) \cdot 10^6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{391,742 \cdot 10^6 - 543,378 \cdot 10^6}{2} \right)^2 + (80,806 \cdot 10^6)^2} =$$

$$= \begin{cases} 578,37 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \\ 356,78 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

$D_{x_{A_0}, y_{A_0}} = 0$... derivácie moment k hlavným centrálnym osám sú rovné nule

$$D_{x_A y_A} = -80,806 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 < 0$$

$D > 0$
(NENASTALO)



- poloměr setravnosti

$$i_{xL} = \sqrt{\frac{I_{xL}}{A}}$$

$$i_{yL} = \sqrt{\frac{I_{yL}}{A}}$$

$$i_{xL} = \sqrt{\frac{391,772 \cdot 10^6}{73,25E3}} = 73,133_{\text{mm}} \quad i_{yL} = \sqrt{\frac{543,378E6}{73,25E3}} = 86,129_{\text{mm}}$$

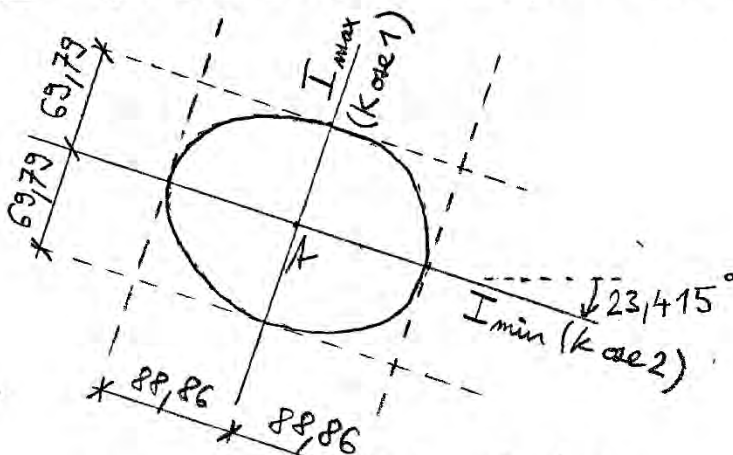
- hlavní centrální poloměry setravnosti

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}}$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$$

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{578,37E6}{73,25E3}} = 88,86_{\text{mm}} \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{356,78E6}{73,25E3}} = 69,79_{\text{mm}}$$

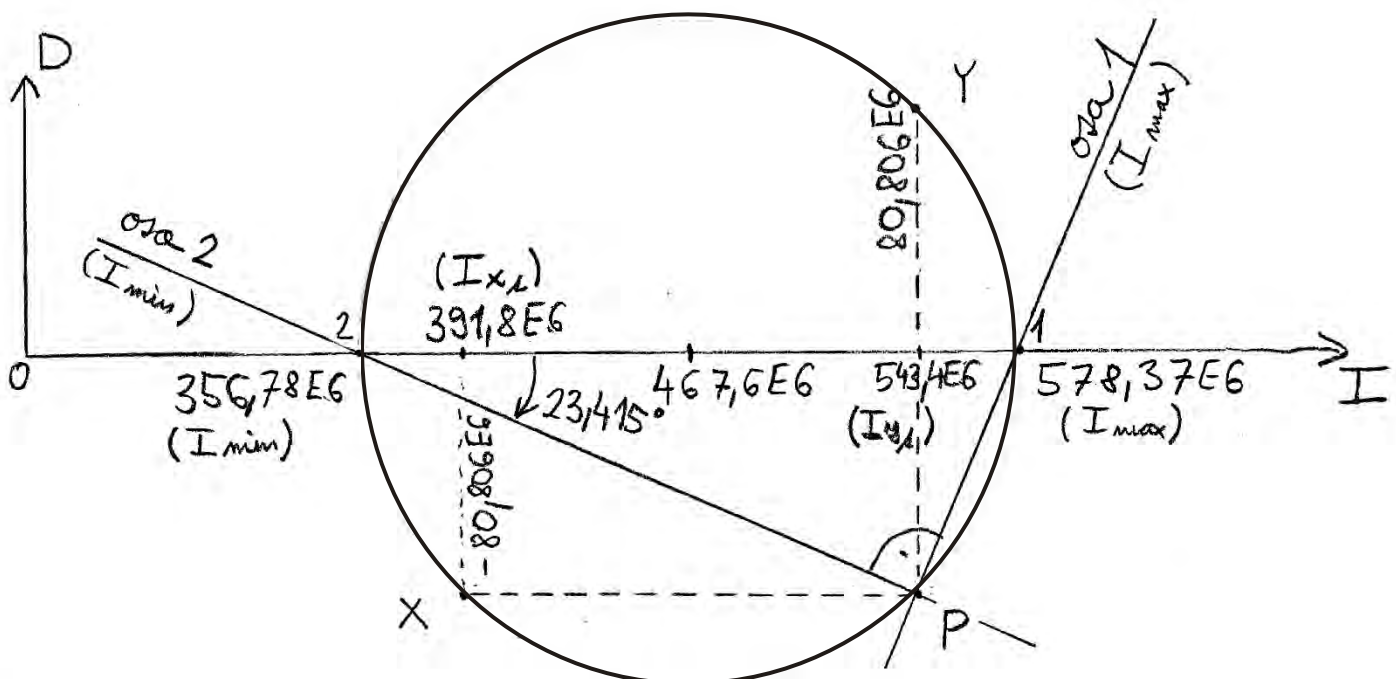
- centrální elipsa setravnosti



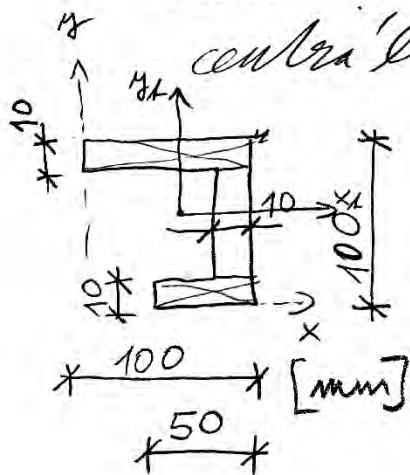
- polární moment setravnosti

$$\begin{aligned} I_o &= 391,772E6 + 543,378E6 = \\ &= 578,37E6 + 356,78E6 = \\ &= 935,15E6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

- Mohrova kružnice



Príklad: Určte početné a graficky smerné hlavné centrálné os srovnávosti a hodnoty hlavných centrálných momentov srovnávosti.



1) Tížištie

$$y_A = \frac{S_x}{A} = \frac{50 \cdot 10 \cdot 5 + 80 \cdot 10 \cdot 15 + 100 \cdot 10 \cdot 25}{50 \cdot 10 + 80 \cdot 10 + 100 \cdot 10}$$

$$= \frac{137500}{2300} = 59,7826087 \text{ mm}$$

$$x_A = \frac{S_y}{A} = \frac{50 \cdot 10 \cdot 45 + 80 \cdot 10 \cdot 35 + 100 \cdot 10 \cdot 50}{2300}$$

$$= \frac{163500}{2300} = 71,08695652 \text{ mm}$$

2) Momenty srovnávosti

$$I_{x_A} = \frac{1}{12} \cdot 50 \cdot 10^3 + 50 \cdot 10 \cdot (5 - 59,78261)^2 +$$

$$+ \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 80^3 + 10 \cdot 80 \cdot (15 - 59,78261)^2 +$$

$$+ \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 10^3 + 100 \cdot 10 \cdot (25 - 59,7826)^2 = 3,257 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_A} = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 50^3 + 10 \cdot 50 \cdot (45 - 71,087)^2 +$$

$$+ \frac{1}{12} \cdot 80 \cdot 10^3 + 80 \cdot 10 \cdot (35 - 71,087)^2 +$$

$$+ \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 100^3 + 10 \cdot 100 \cdot (50 - 71,087)^2 = 1,85395 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$D_{x_y} = 50 \cdot 10 \cdot (45 - 71,086956) \cdot (5 - 59,7826087) +$$

$$+ 80 \cdot 10 \cdot (35 - 71,086956) \cdot (15 - 59,7826087) +$$

$$+ 100 \cdot 10 \cdot (50 - 71,086956) \cdot (25 - 59,7826087) =$$

$$= -1,03696 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot (-1,03696)}{1,853946 - 3,257} = 1,4784 \Rightarrow \alpha_0 = 55,92^\circ$$

$$I_{I_2} = \frac{3,257 + 1,85}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3,257 - 1,85}{2}\right)^2 + (-1,034)^2} =$$

$$= \begin{cases} 3,807 \cdot 10^6 \\ 1,3035 \cdot 10^6 \end{cases}$$