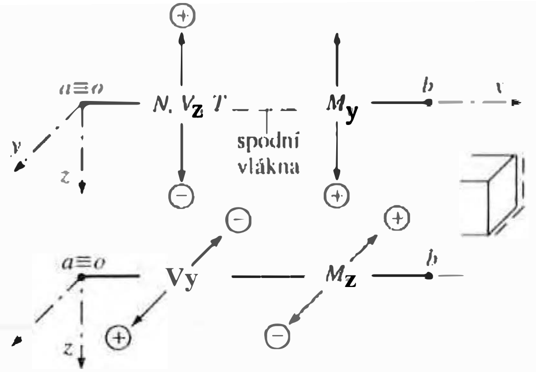
ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY

BDA001

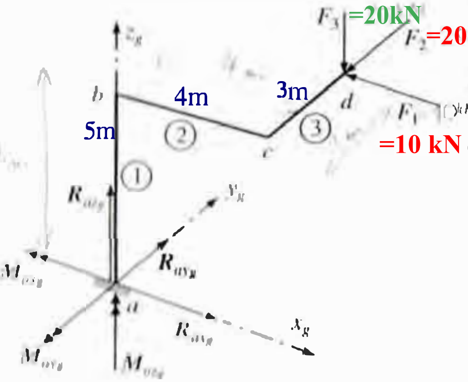
Prostorová pravoúhle lomená konzola a nosník, reakce a diagramy vnitřních sil a momentů. Informace o zkoušce.

Zdeněk Kala



Příklad 15.5

Stanovte průběh složek vnitřních sil na prostorově lomeném konzolovém nosníku, sestávajícím ze tří přímých částí délek $l_1 = 5$ m, $l_2 = 4$ m, $l_3 = 3$ m navzájem spojených monoliticky pod pravými úhly, pro zatížení osamělými břemeny $F_1 = 10$ kN, $F_2 = F_3 = 20$ kN (obr. 15.11a).



Obr. 15.11a. Prostorově lomený konzolový nosník

Řešení

Složky reakcí dokonalého vetknutí a lomeného konzolového nosníku (obr. 15.11a) stanovíme ze šesti statických podmínek rovnováhy (3.58) o velikostech:

$$R_{ax_g} = F_1 = 10\,\text{kN},$$

$$R_{ay_g} = F_2 = 20\,\text{kN},$$

$$R_{az_g} = F_3 = 20\,\text{kN},$$

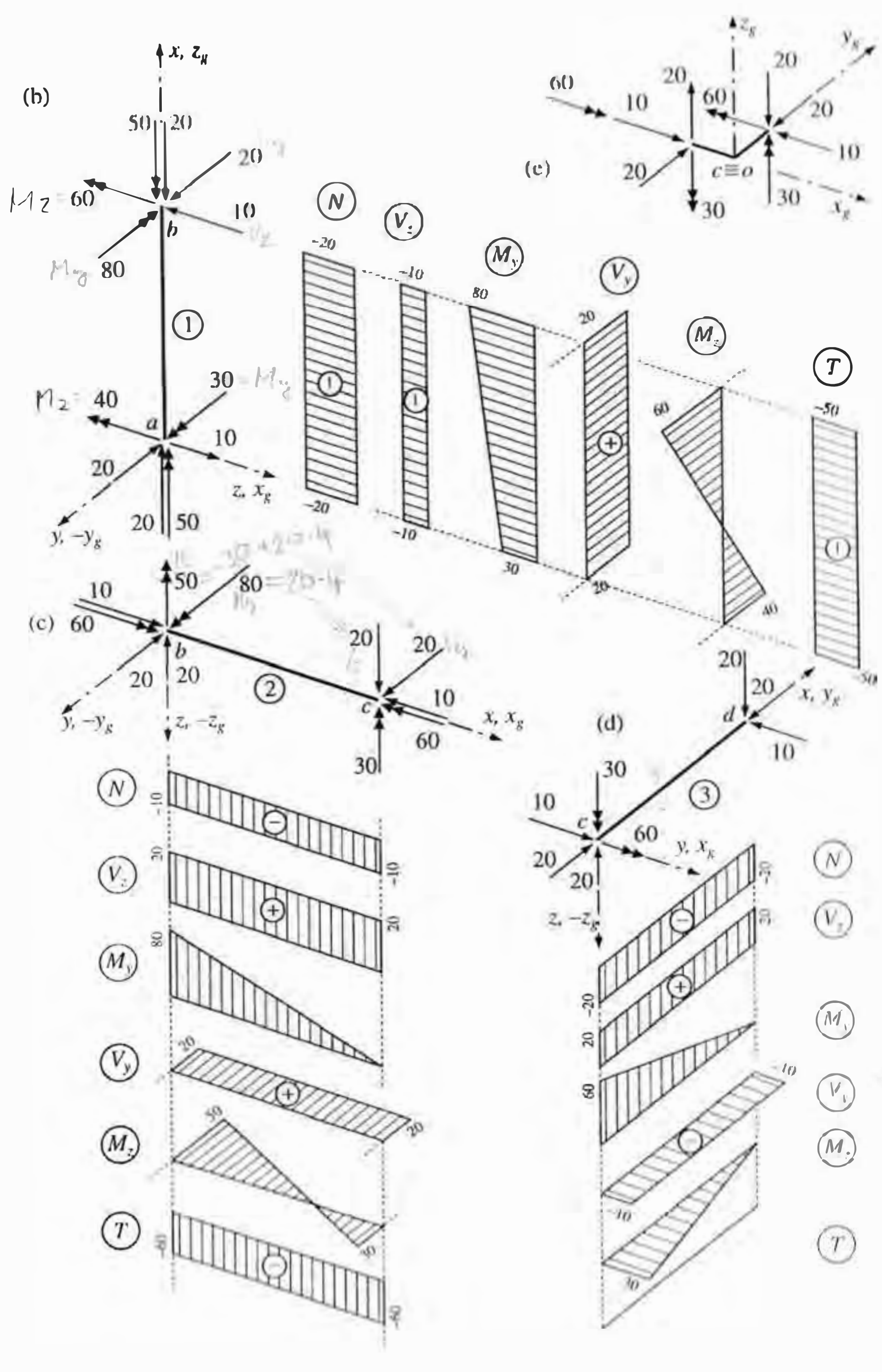
$$M_{ax_g} = F_2 l_1 - F_3 l_3 = 40\,\text{kNm},$$

$$M_{ay_g} = -F_1 l_1 + F_3 l_2 = 30\,\text{kNm},$$

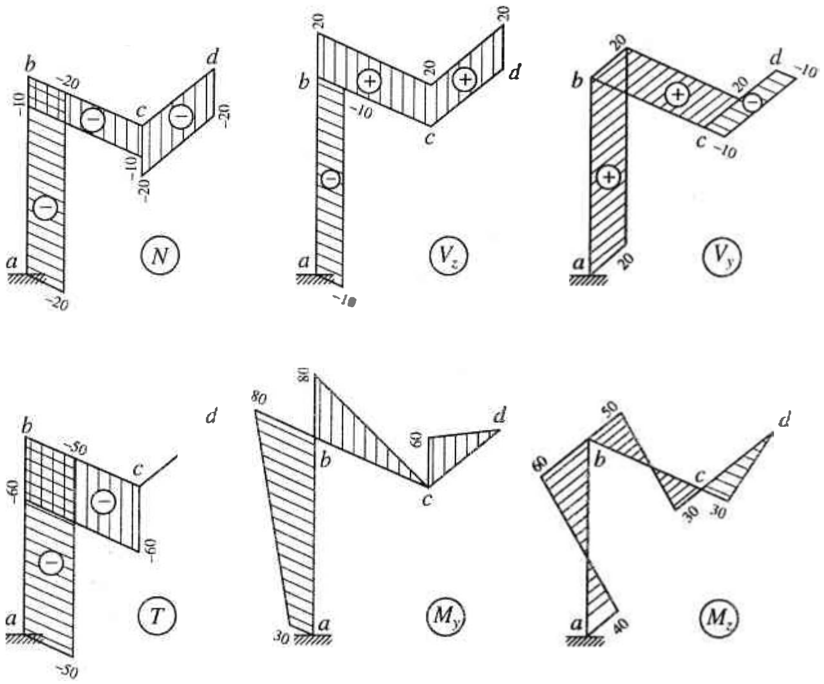
$$M_{az_g} = -F_1 l_3 + F_2 l_2 = 50\,\text{kNm}.$$

ejich správné smysly ve vektorovém zobrazení jsou shodné s předpokládanými smysly na br. 15.11a. Koncové síly a momenty na jednotlivých prutech $1 \equiv \overline{ab}$, $2 \equiv \overline{bc}$, $3 \equiv \overline{cd}$ nosníku sou i s daným zatížením a průběhy složek vnitřních sil nakresleny na obr. 15.11b–d. Výsledné brazce šesti složek vnitřních sil N, V_y, V_z, T, M_y, M_z na celém lomeném nosníku jsou obrazeny v axonometrickém pohledu na obr. 15.11f. Jsou získány spojením odpovídajících růběhů složek vnitřních sil na jednotlivých prutech 1, 2, 3 vztažených k jejich lokálním souřadnicovým soustavám. Ověření rovnováhy jednoho uzlu nosníku, např. c, je provedeno a obr. 15.11e.

Výpočet složek vnitřních sil na prostorově lomeném konzolovém nosníku je možné rovněž rovádět postupem od volného konce d nosníku směrem k dokonalému vetknutí a. V takovém řípadě nemusíme předem určovat složky reakcí dokonalého vetknutí nosníku.

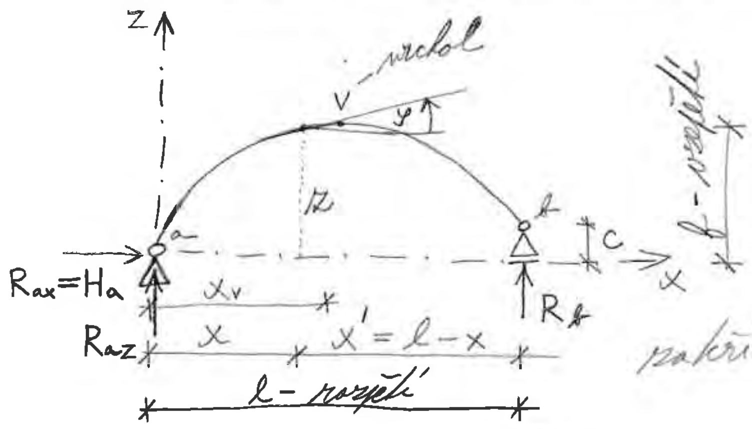


Obr. 15.11b–e. Průběhy složek vnitřních sil na jednotlivých prutech nosníku v lokálních souřadnicových soustavách

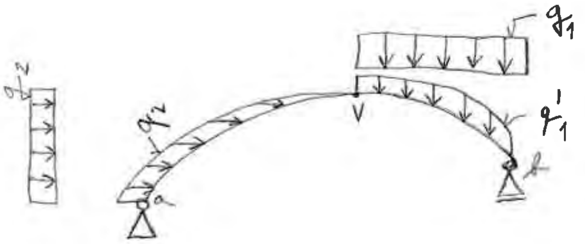


Obrázek: Výsledné průběhy složek vnitřních sil na nosníku

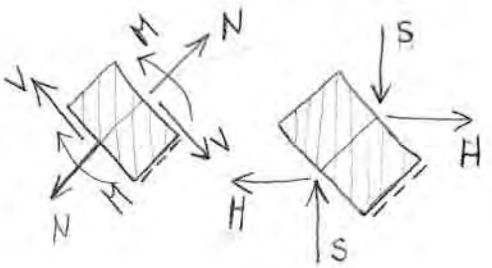
Zakřivený (křivý) nosník



zakřivený nosník



spojité zatížení zakřiveného nosníku



Normálová síla N resp. posouvající síla V v libovolném průřezu x zakřiveného nosníku je rovna algebraickému součtu průmětů všech sil, působících na levou nebo pravou část nosníku od průřezu x, do směru tečny resp. normály ke střednici v uvažovaném průřezu x nosníku.

Horizontální H resp. vertikální S složka výslednice vnitřních sil v libovolném průřezu x zakřiveného nosníku je rovna algebraickému součtu průmětů všech sil, působících na levou nebo pravou část nosníku od průřezu x, do směru horizontálního x resp. vertikálního z.

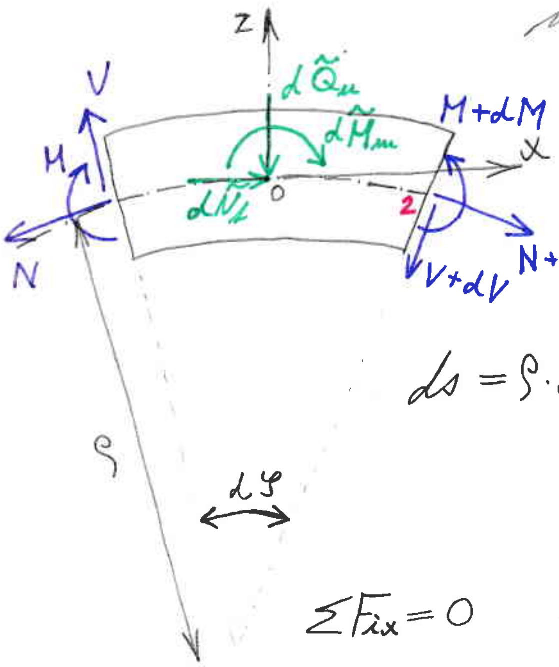
Složky N, V vypočteme dle transformačních vztahů:

$$N = H \cdot \cos\varphi - S \cdot \sin\varphi$$

$$V = H \cdot \sin\varphi + S \cdot \cos\varphi$$

Pořadnice vynášíme ve směru normál ke střednici, moment na stranu tažených vláken.

Diferenciální podmínky rovnováhy zakřiveného nosníku



Nosníkový element je zatížený spojitým rovnoměrným zatížením

$n_t = n$; $q_n = q$; m

s výslednicemi

$ds = \rho \cdot d\varphi$

$$d\tilde{N}_t = n_t \cdot ds = n \cdot \rho \cdot d\varphi$$
$$d\tilde{Q}_n = q_n \cdot ds = q \cdot \rho \cdot d\varphi$$
$$d\tilde{M}_m = m \cdot ds = m \cdot \rho \cdot d\varphi$$

$$\sum F_{ix} = 0 \quad -N \cdot \cos\frac{d\varphi}{2} + (N+dN)\cdot\cos\frac{d\varphi}{2} - 2V\cdot\sin\frac{d\varphi}{2} + n\cdot\rho\, d\varphi = 0$$

$2 \cdot V \cdot \sin\frac{d\varphi}{2} \approx V \cdot d\varphi$

$$\sum F_{iz} = 0 \quad -V\cdot\cos\frac{d\varphi}{2} + (V+dV)\cos\frac{d\varphi}{2} + 2N\cdot\sin\frac{d\varphi}{2} + q\cdot\rho\cdot d\varphi = 0$$

$$\sum M_{i2} = 0 \quad -M + (M+dM) - V\cdot\rho\, d\varphi + q\cdot\rho\cdot d\varphi\cdot\frac{1}{2}\rho\, d\varphi - m\cdot\rho\cdot d\varphi = 0$$

Pokud $\frac{d\varphi}{2} \ll 1$ pak $\cos\frac{d\varphi}{2} \approx 1$; $\sin\frac{d\varphi}{2} = \operatorname{tg}\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$

Úpravou:

$$dN - V\cdot d\varphi + n\rho\, d\varphi = 0 \qquad | \; d\varphi = ds/\rho \,;\; \rho\, d\varphi = ds$$
$$dV + N\, d\varphi + q\cdot\rho\, d\varphi = 0$$
$$dM - V\rho\, d\varphi - m\rho\, d\varphi = 0$$

z nichž plynou diferenciální podmínky rovnováhy

$$dN - V\cdot\frac{ds}{\rho} + n\cdot ds = 0$$

$$\frac{dN}{ds} = \frac{V}{\rho} - n \;;\quad \frac{dV}{ds} = -\frac{N}{\rho} - q \;;\quad \frac{dM}{ds} = V + m$$

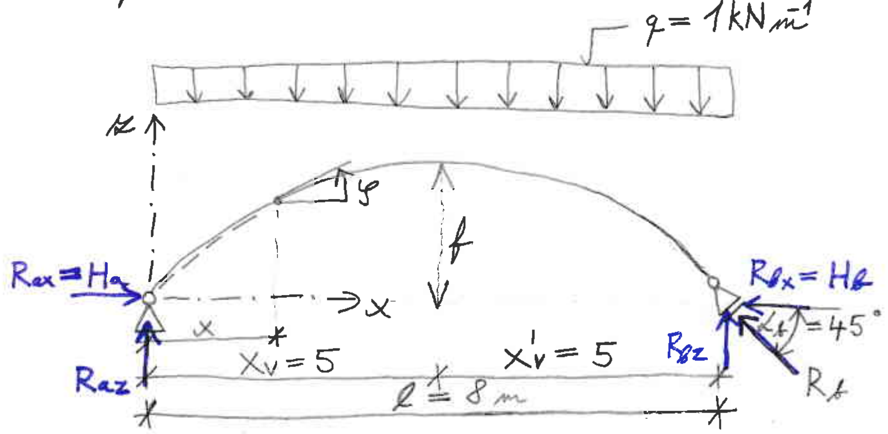
Jsou vztahy mezi vnitřními silami a vnějším zatížením nosníku.

Extrém ohybového momentu nalezneme v průřezu kde $\frac{dM}{ds} = 0$

$$V + m = 0 \Rightarrow V = -m$$

nebo $V = 0$ při $m = 0$

Příklad: Určete N, V, M na prostém nosníku s parabolickou střednicí o rozpětí $l = 8\,m$, vzepětí $f = 3\,m$, zatíženém svislým zat. $q = 1\,kN\,m^{-1}$.



$$z(x) = c\cdot x\cdot(l-x)$$

$$z\left(\frac{l}{2}\right) = c\cdot\frac{l}{2}\cdot\left(l-\frac{l}{2}\right) = f$$

$$c = \frac{4\cdot f}{l^2}$$

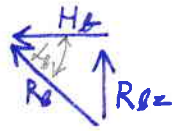
$$z(x) = \frac{4\cdot f\cdot x}{l^2}\cdot(l-x)$$

- složky reakcí vazeb

$\sum F_{ix} = 0 \qquad H_a - H_b = 0 \Rightarrow H_a = H_b$

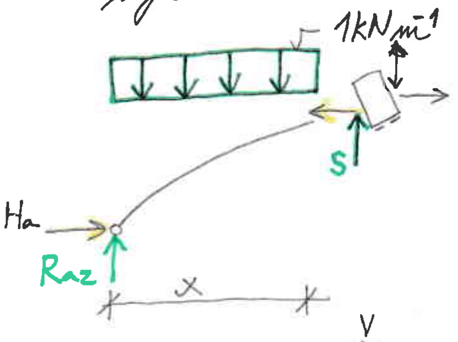
$\sum M_{ia} = 0 \qquad R_{bz}\cdot l - q\cdot l\cdot\frac{l}{2} = 0 \Rightarrow R_{bz} = \frac{1}{2}q\cdot l = 4\,kN$

$\sum F_z = 0 \qquad R_{az} + R_{bz} - q\cdot l = 0 \Rightarrow R_{az} = 1\cdot 8 - 4 = 4\,kN$



$$\frac{R_{bz}}{H_b} = tg\,\alpha_b \Rightarrow H_b = H_a = \frac{R_{bz}}{tg\,\alpha_b} = \frac{4}{1} = 4\,kN$$

- výslednice vnitřních sil v průřezu x

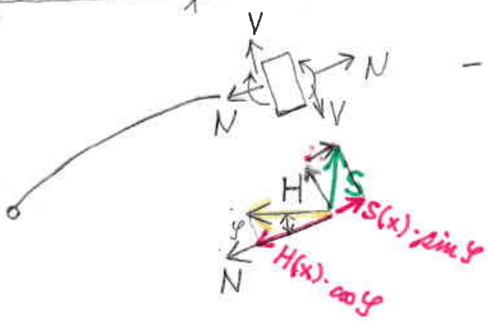


- vertikální složka

$S(x) = R_{az} - q\cdot x$

- horizontální složka

$H(x) = -H_a = -4\,kN$



- normálová síla

$N(x) = H(x)\cdot\cos\varphi - S(x)\cdot\sin\varphi$

$V(x) = H(x)\cdot\sin\varphi + S(x)\cdot\cos\varphi$

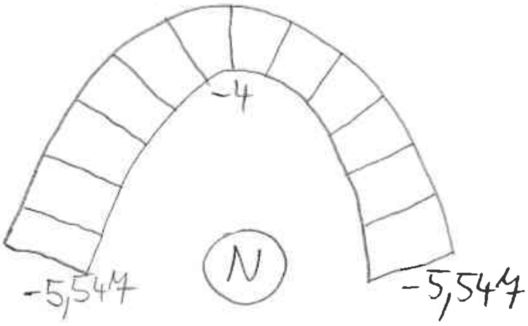
$$\varphi = \arctan(z'(x)) = \arctan\left(\frac{4\cdot f(l-2x)}{l^2}\right)$$

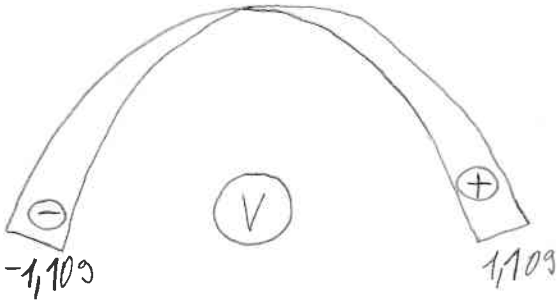
$$z'(x) = \frac{4\cdot f\,(l-2x)}{l^2}$$

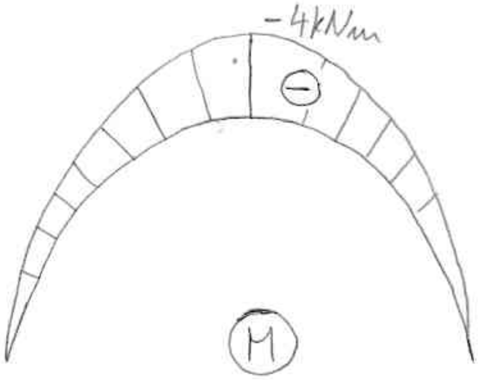
$$N(x) = -4\cdot\cos\left[\arctan\left(\frac{4\cdot 3\cdot(8-2x)}{8^2}\right)\right] - (4-x)\cdot\sin\left[\arctan\left(\frac{4\cdot 3\cdot(8-2x)}{8^2}\right)\right]$$

$$V(x) = -4\cdot\sin\left[\arctan\left(\frac{4\cdot 3\cdot(8-2x)}{8^2}\right)\right] + (4-x)\cdot\cos\left[\arctan\left(\frac{4\cdot 3\cdot(8-2x)}{8^2}\right)\right]$$

$$M(x) = 4\cdot x - 1\cdot x\cdot\frac{x}{2} - 4\cdot\frac{4\cdot 3\cdot x}{8^2}\cdot(8-x)$$



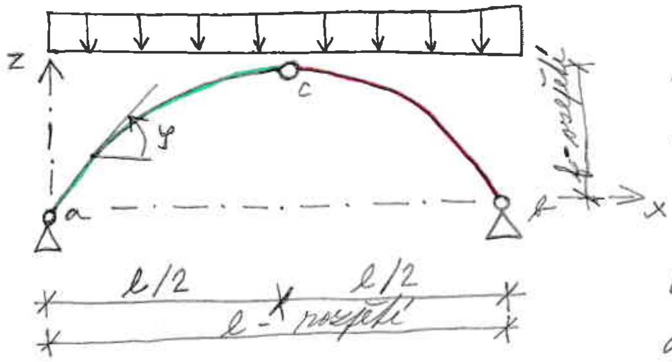




α	0	1	2	3	4	5	6	7	8
N	-5,547	-4,9	-4,4	-4,096	-4	-4,096	-4,4	-4,9	-5,547
V	-1,09	-1	-0,8	-0,468	0	0,468	0,8	1	1,09
M	0	-1,75	-3	-3,75	-4	-3,75	-3	-1,75	0

$$M_{max} = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} - 4 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 4}{8^2} \cdot 4 = -4\,kNm$$

6.9.4. Trojkloubový oblouk (bez táhla)



staticky a kinematicky určitý, neboť

$$3d = 2a_2$$

$d = 2$ počet tuhých desek

$a_2 = 3$ klouby tedy 6 složek reakcí vnějších a vnitřních vazeb

$$N = H \cdot \cos\varphi - S \cdot \sin\varphi$$

$$V = H \cdot \sin\varphi + S \cdot \cos\varphi$$

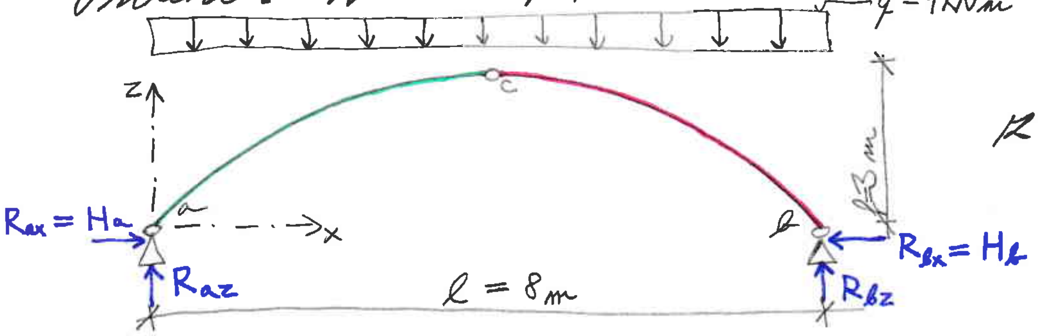
- Výpočet reakcí

1) $\sum^{l} F_{ix} = 0$
2) $\sum^{l} F_{iz} = 0$
3) $\sum^{l} M_{ia} = 0$
4) $\sum^{p} F_{ix} = 0$
5) $\sum^{p} F_{iz} = 0$
6) $\sum^{p} M_{ib} = 0$

- Výpočet reakcí vnějších vazeb

1) $\sum M_{ib} = 0$
2) $\sum M_{ia} = 0$
3) $\sum^{l} M_{ic} = 0$
4) $\sum^{p} M_{ic} = 0$

Příklad: Urči N, V, M oblouku



$$z(x) = \frac{4 \cdot f \cdot x}{l^2} \cdot (l - x)$$

- výpočet reakcí

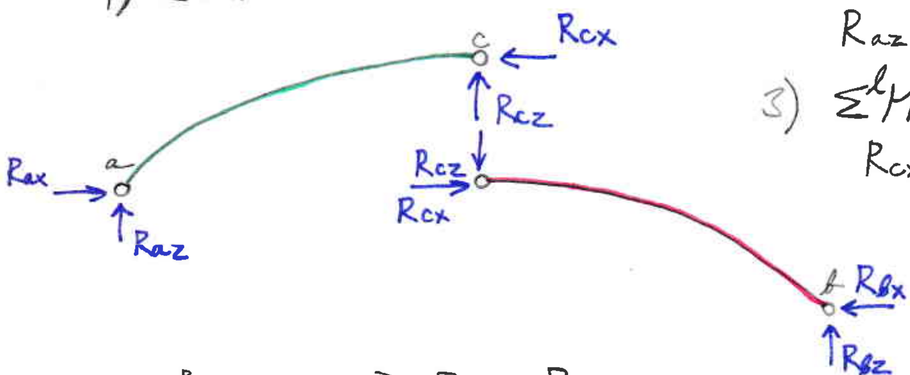
1) $\sum^{l} F_{ix} = 0 \Rightarrow R_{ax} = R_{cx}$

2) $\sum^{l} F_{iz} = 0$

$$R_{az} + R_{cz} - 1 \cdot 4 = 0$$

3) $\sum^{l} M_{ia} = 0$

$$R_{cx} \cdot 3 + R_{cz} \cdot 4 - 1 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$



4) $\sum^{p} F_{ix} = 0 \Rightarrow R_{cx} = R_{bx}$

5) $\sum^{p} F_{iz} = 0 \Rightarrow R_{bz} - R_{cz} - 1 \cdot 4 = 0$

6) $\sum^{p} M_{ib} = 0 \Rightarrow R_{cz} \cdot 4 - R_{cx} \cdot 3 + 1 \cdot 4 \cdot 2 = 0$

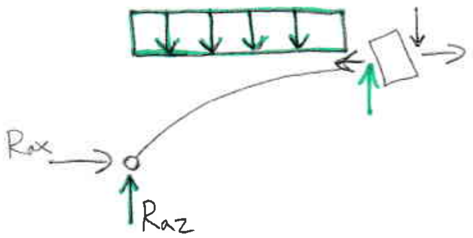
$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} R_{ax} \\ R_{az} \\ R_{bx} \\ R_{bz} \\ R_{cx} \\ R_{cz} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}
$$

$R_{ax} = 8/3$
$R_{az} = 4$
$R_{bx} = 8/3$
$R_{bz} = 4$
$R_{cx} = 8/3$
$R_{cz} = 0$

- výpočet reakcí vnějších vazeb

1) $\Sigma M_{ib} = 0$ $\quad -R_{az} \cdot 8 + 1 \cdot 8 \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_{az} = 4\ kN$
2) $\Sigma M_{ia} = 0$ $\quad R_{bz} \cdot 8 - 1 \cdot 8 \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_{bz} = 4\ kN$
3) $\Sigma^{L} M_{ic} = 0$ $\quad -4 \cdot 4 + R_{ax} \cdot 3 + 1 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_{ax} = 8/3\ kN$
4) $\Sigma^{P} M_{ic} = 0$ $\quad 4 \cdot 4 - R_{bx} \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_{bx} = 8/3\ kN$

- výslednice vnitřních sil v průřezu x



- vertikální složka
$S(x) = R_{ax} - q \cdot x$
- horizontální složka
$H(x) = -R_{ax} = -8/3\ kN$

- normálová síla
$N(x) = H(x) \cdot \cos\varphi - S(x) \cdot \sin\varphi$
$V(x) = H(x) \cdot \sin\varphi + S(x) \cdot \cos\varphi$

$$\varphi = \arctan(z'(x)) = \arctan\left(\frac{4 \cdot f \cdot (l - 2x)}{l^2}\right)$$

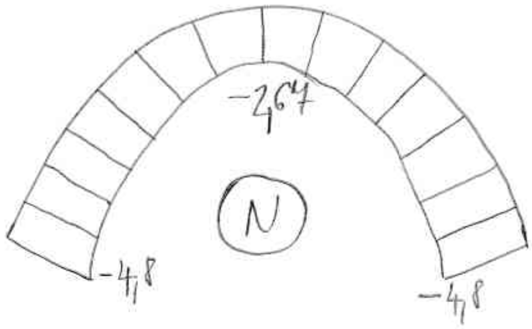
$$z' = \frac{4 \cdot f\,(l-2x)}{l^2}$$

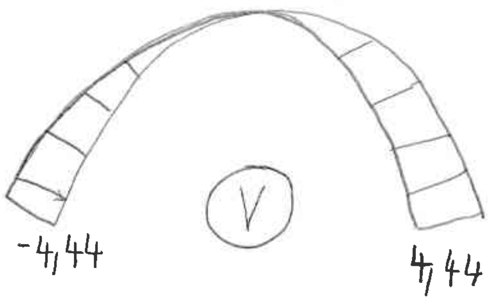
$$N(x) = -\frac{8}{3} \cdot \cos\left[\arctan\left(\frac{4 \cdot 3 \cdot (8-2x)}{8^2}\right)\right] - (4-x) \cdot \sin\left[\arctan\left(\frac{4 \cdot 3 \cdot (8-2x)}{8^2}\right)\right]$$

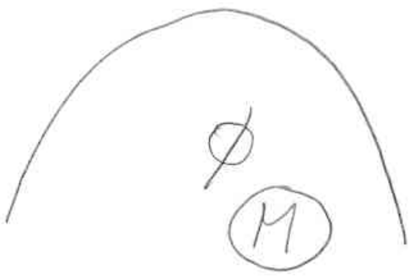
$$V(x) = -\frac{8}{3} \cdot \sin\left[\quad -||- \quad\right] + (4-x) \cdot \cos\left[\quad -||- \quad\right]$$

$$M(x) = 4 \cdot x - 1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} - \frac{8}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot x}{8^2}(8-x) =$$

$$= \cancel{4 \cdot x} - \frac{x^2}{2} - \cancel{\frac{4}{8} \cdot 8x} + \frac{4}{8} \cdot x^2 = 0$$


-2,67
N
-4,8
-4,8


V
-4,44
4,44


∅
M