

ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY

BDA001

Prostorové soustavy sil, prostorový svazek sil, obecná prostorová soustava sil.
Vazby a reakce tuhého tělesa v prostoru, výpočet reakcí ve vazbách. Prostorově
namáhaný přímý prut.

Zdeněk Kala

Městský plavecký stadion Lužánky



<https://drive.google.com/file/d/1fyfU2TCR06B9rjdcjcYA9hXu6l1SVy-C/view?usp=sharing>

Autor nosné konstrukce: Ing. Dr. Ferdinand Lederer

Prof. ing. Jaroslav Kadlčák

Teoretická mechanika

Ti, kteří mají trpělivost dělat prosté věci dokonale, osvojují si umění dělat nesnadné věci snadno.

F. Schiller

3. PROSTOROVÉ SOUSTAVY SIL

3.3. SKLÁDÁNÍ TŘÍ SIL SE SPOLEČNÝM PŮSOBIŠTĚM

3.3.1. ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ VÝSLEDNICE

Výslednice $R = F$ tří sil F_x, F_y, F_z navzájem kolmých (obecně i kosoúhlých), působících v jednom bodě $O \equiv m$, je co do velikosti a směru rovna tělesné diagoně hranolu o stranách F_x, F_y, F_z (obr. 72)

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (82)$$

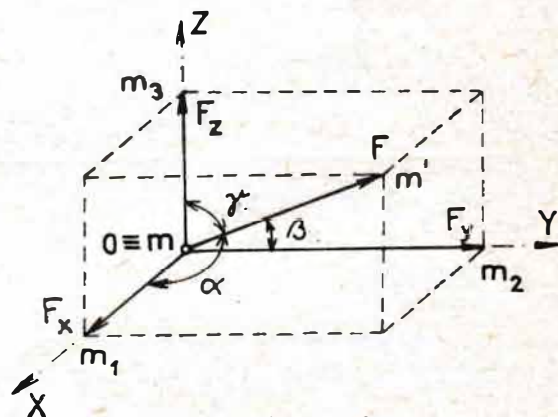
s souřadnicovými osami X, Y, Z úhly α, β, γ , jejichž směsiny mají hodnotu

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F},$$

$$\cos \beta = \frac{F_y}{F},$$

$$\cos \gamma = \frac{F_z}{F}.$$

(83)



Obr. 72

Pro rovinné úhly α, β, γ paprsku výslednice F platí vztah

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F^2} = 1. \quad (84)$$

Příklad 44

Stanovte sílu F , známe-li její pravoúhlé průměty $F_x = 200 \text{ N}, F_y = 300 \text{ N}, F_z = 600 \text{ N}$ do souřadnicových os X, Y, Z (obr. 72).

Řešení

Velikost síly F ze vztahu (82)

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{200^2 + 300^2 + 600^2} = 700 \text{ N}.$$

Směrové kosiny úhlů α , β , γ , které svírá síla F s kladnými souřadnicovými osami X , Y , Z , podle (83)

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{200}{700} = 0,286; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F} = \frac{300}{700} = 0,429;$$

$$\cos \gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{600}{700} = 0,857.$$

Směrové úhly α , β , γ síly F

$$\alpha = 73^\circ 24'; \quad \beta = 64^\circ 37'; \quad \gamma = 31^\circ 00'.$$

Kontrola

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 0,286^2 + 0,429^2 + 0,857^2 = 1,000.$$

Příklad 45

Stanovte pravoúhlé průměty R_x , R_y , R_z síly $R = 1000 \text{ N}$ do souřadnicových os X , Y , Z , svírá-li s nimi úhly $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

Řešení

Průměty síly R do souřadnicových os X , Y , Z stanovíme pomocí vztahů (83)

$$R_x = R \cdot \cos \alpha = 1000 \cdot \cos 60^\circ = 500 \text{ N } (\swarrow),$$

$$R_y = R \cdot \cos \beta = 1000 \cdot \cos 120^\circ = -500 \text{ N } (\leftarrow),$$

$$R_z = R \cdot \cos \gamma = 1000 \cdot \cos 45^\circ = 707 \text{ N } (\uparrow)$$

Složka R_y má smysl souhlasný se smyslem záporné osy Y .

Příklad 46

Jaké směrové úhly α , β , γ musí svírat paprsek síly F s pravoúhlými souřadnicovými osami X , Y , Z , mají-li její průměty F_x , F_y , F_z stejnou hodnotu

Řešení

V důsledku platnosti $F_x = F_y = F_z$, vyplývá ze vztahu (83)

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma.$$

Z rovnice (84) pak dostáváme

$$3 \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{3} \quad \cos \alpha = 0,577; \quad \alpha = \beta = \gamma = 54^\circ 44'$$

3.2. PROSTOROVÁ SOUSTAVA SIL SE SPOLEČNÝM PUSOBIŠTĚM PROSTOROVÝ SVAZEK SIL

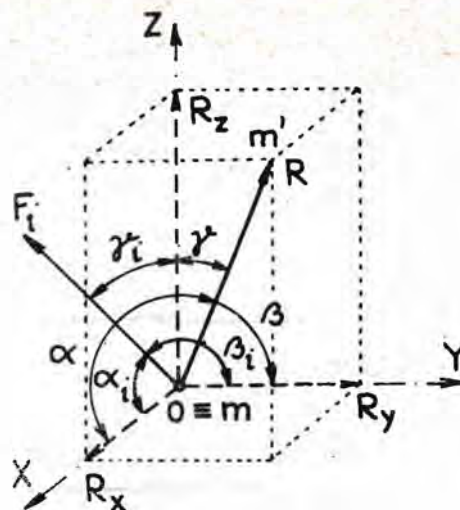
3.2.1. ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ VÝLEDNICE

Vyšetřovanou soustavou sil F_i ($i = 1, 2, \dots, n$), působící v jednom bodu m na obr. 73, vztáhneme k pravoúhlým souřadnicovým osám X , Y , Z tak, aby se počá-

souřadnic O ztotožnil se společným působením m všech sil. Každou sílu F_i dané soustavy rozložíme do tří pravouhlých složek F_{ix} , F_{iy} , F_{iz} , působících v souřadnicových osách X , Y , Z

$$\begin{aligned} F_{ix} &= F_i \cos \alpha_i, \\ F_{iy} &= F_i \cos \beta_i, \\ F_{iz} &= F_i \cos \gamma_i. \end{aligned} \quad (85)$$

ty působící v souřadnicových osách X , Y , Z mají sílu výslednice R_x , R_y , R_z , pro jejich velikosti platí vztahy



Obr. 73

$$\begin{aligned} 1) \quad R_x &= R \cos \alpha = \sum_{i=1}^n F_{ix} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i, \\ 2) \quad R_y &= R \cos \beta = \sum_{i=1}^n F_{iy} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \beta_i, \\ 3) \quad R_z &= R \cos \gamma = \sum_{i=1}^n F_{iz} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \gamma_i. \end{aligned} \quad (86)$$

je původní soustava sil ekvivalentně nahrazena soustavou tří sil R_x , R_y , R_z vzájemně kolmých (viz kapitola 3.1), jejíž výslednice R má působíště ve společném působíšti všech sil $m \equiv O$, velikost

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (87)$$

s souhlasem s kladnými souřadnicovými osami X , Y , Z směrové úhly α , β , γ , pro něž platí vztahy

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}, \quad (88)$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (89)$$

Rovnice (86) představují tří statické podmínky ekvivalence pro prostorovou soustavu sil se společným působíštěm.

Při řešení některých praktických úloh, jako je např. určení osových sil prutů prostorových kloubových prutových soustav atd., nepracujeme se směrovými úhly α_i , β_i , γ_i sil F_i ($i = 1, 2, \dots, n$), ale pouze s ostrými úhly α'_i , β'_i , γ'_i , které svírají síly se souřadnicovými osami X , Y , Z . Pravouhlé složky F_{ix} , F_{iy} , F_{iz} síly F_i mají velikosti

$$F_{ix} = \pm F_i \cos \alpha'_i, \quad F_{iy} = \pm F_i \cos \beta'_i, \quad F_{iz} = \pm F_i \cos \gamma'_i \quad (90)$$

jejich znaménka určujeme přímo z představy tak, že složkám sil majícím souhlasné resp. nesouhlasné smysly s kladnými souřadnicovými osami $+X$, $+Y$, $+Z$ přisuzujeme znaménko plus resp. mínus. Další postup je pak obdobný jako výše uvedený.

Z velikostí a znamének složek R_x, R_y, R_z (viz rov. 86) stanovíme velikost výslednice R (rov. 87) a kvadrant, v němž působí. Nakonec zjistíme ostré úhly α', β', γ' , které svírá R se souřadnicovými osami X, Y, Z ze vztahů

$$\cos \alpha' = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta' = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma' = \frac{R_z}{R} \quad (91)$$

3.2.2. PODMÍNKY ROVNOVÁHY

Prostorová soustava sil se společným působištěm je v rovnováze jenom tehdy, když algebraický součet průmětů všech sil soustavy do tří os navzájem kolmých (obecně i kosouhlých) je roven nule

$$\begin{aligned} 1) \quad R_x &= \sum_{i=1}^n F_{ix} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i = 0, \\ 2) \quad R_y &= \sum_{i=1}^n F_{iy} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \beta_i = 0 \\ 3) \quad R_z &= \sum_{i=1}^n F_{iz} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \gamma_i = 0 \end{aligned} \quad (92)$$

Příklad 47

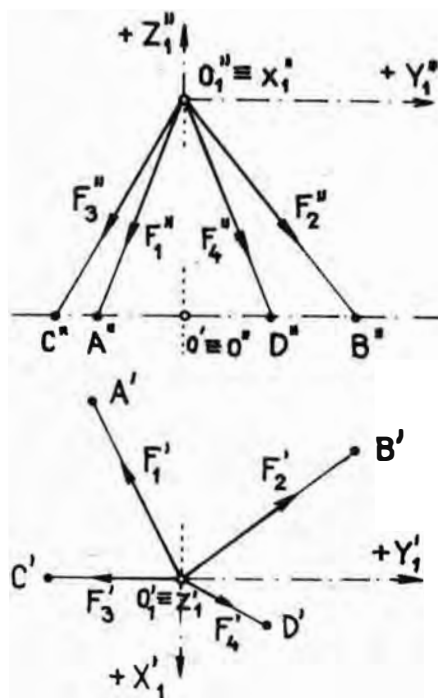
Stanovte výslednici prostorové soustavy čtyř sil $F_1 = 300 \text{ N}$, $F_2 = 200 \text{ N}$, $F_3 = 100 \text{ N}$, $F_4 = 80 \text{ N}$ se společným působištěm $m \equiv O_1$ (obr. 74). Směr sil

$\underline{F_1}, \underline{F_2}, \underline{F_3}, \underline{F_4}$ je dán směrem přímek O_1A, O_1B, O_1C, O_1D . Body O_1, A, B, C, D mají v pravouhlém souřadnicovém systému X, Y, Z s počátkem O pravouhlé souřadnice $O_1(6; 0; 5), A(2; -2; 0), B(3; 4; 0), C(6; -3; 0), D(7; 2; 0)$ udané v metrech.

Řešení

Společným působištěm O_1 všech sil proložíme pravouhlý souřadnicový systém X_1, Y_1, Z_1 (obr. 74). Abychom mohli stanovit kosiny směrových úhlů, které svírají paprsky sil F_i ($i = 1, 2, 3, 4$) se souřadnicovými osami $+X, +Y, +Z$, je nutno stanovit délky úsečků $l_1 = O_1A, l_2 = O_1B, l_3 = O_1C, l_4 = O_1D$ a jejich pravouhlé průměty $l_{ix_1}, l_{iy_1}, l_{iz_1}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) do souřadnicových os X_1, Y_1, Z_1 .

Pro přehlednost a snadnou kontrolu provedeme výpočet tabelárně (viz tabulka V v textu) s použitím vztahů



Obr. 74

$$\cos \alpha_i = \frac{l_{ix1}}{l_i}, \quad \cos \beta_i = \frac{l_{iy1}}{l_i}, \quad \cos \gamma_i = \frac{l_{iz1}}{l_i},$$

$$l_i = \sqrt{l_{ix1}^2 + l_{iy1}^2 + l_{iz1}^2},$$

Tabulka V

i	F _i (N)	Průměty l _i do os X ₁ , Y ₁ , Z ₁			l _{ix1} ²	l _{iy1} ²	l _{iz1} ²	l _i ²	l _i (m)	Směrové kosiny			Průměty sil do os X ₁ , Y ₁ , Z ₁ v N		
		l _{ix1}	l _{iy1}	l _{iz1}						cos α _i	cos β _i	cos γ _i	F _i cos α _i	F _i cos β _i	F _i cos γ _i
1	300	-4	-2	-5	16	4	25	45	6,71	-0,596	-0,298	-0,745	-178,8	-89,4	-223,5
2	200	-3	4	-5	9	16	25	50	7,07	-0,424	0,566	-0,707	-84,8	113,2	-141,4
3	100	0	-3	-5	0	9	25	34	5,83	0,000	-0,514	-0,857	—	-51,4	-85,7
4	80	1	2	-5	1	4	25	30	5,48	0,183	0,365	-0,913	14,6	29,2	-73,0
$\sum_{i=1}^4$													R _x	R _y	R _z
													-249,0	1,6	-523,6

Velikost R má velikost

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-249,0)^2 + 1,6^2 + (-523,6)^2} = 580 \text{ N},$$

směrové úhly α, β, γ

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{-249}{580} = -0,429 \Rightarrow \alpha = 115^\circ 26',$$

$$\cos \beta = \frac{R_y}{R} = \frac{1,6}{580} = 0,003 \Rightarrow \beta = 89^\circ 50',$$

$$\cos \gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{-523,6}{580} = -0,903 \Rightarrow \gamma = 154^\circ 34',$$

ve společném působišti 0, a leží v kvadrantu omezeném souřadnicovými
- X₁, Y₁, - Z₁.

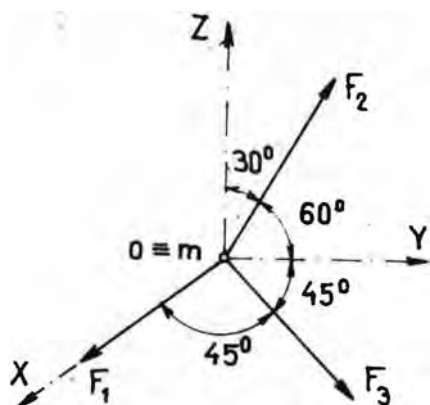
Příklad 48

Stanovte rovnovážnou sílu F_e dané prostorové soustavy sil se společným
působištem na obr. 75 pro F₁ = 300 N, α₁ = 0°, β₁ = γ₁ = 90°, F₂ = 400 N,
α₂ = 90°, β₂ = 60°, γ₂ = 30°; F₃ = 500 N, α₃ = β₃ = 45°, γ₃ = 90°.

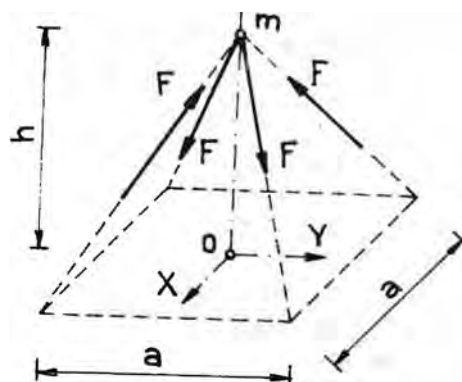
Řešení

$$F_{ex} = -653,55 \text{ N}, \quad F_{ey} = -553,55 \text{ N}, \quad F_{ez} = -346,41 \text{ N},$$

$$F_e = 923,88 \text{ N}, \quad \alpha_e = 135^\circ 01', \quad \beta_e = 126^\circ 48', \quad \gamma_e = 112^\circ 01'.$$



Obr. 75



Obr. 76

Příklad 49

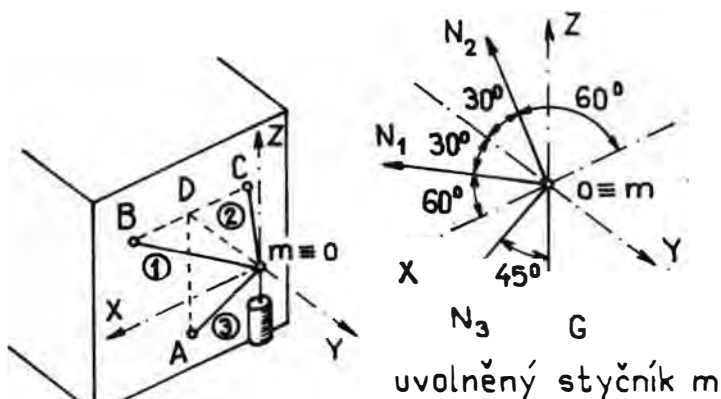
V hranách čtyřbokého jehlamu o čtvercové základně $a = 6\text{ m}$, výšce (obr. 76) působí síly $F = 5\text{ kN}$. Stanovte jejich výsledný účinek !

Řešení

Daná soustava sil je v rovnováze, neboť podle rov. (92) je $R_x = R_y = R_z = R = 0$

Příklad 50

Těleso o tíze $G = 10\text{ kN}$ je zavěšeno ve styčnicku m prutové konstrukce na obr. 77, skládající se ze tří prutů. Stanovte osové síly prutů N_1, N_2, N_3 , je-
 $\angle CBO = \angle BCO = 60^\circ$ a $\angle DAO = 45^\circ$.



Obr. 77

Řešení

Souřadnicový systém X, Y, Z , s počátkem O zvolme jak je ukázáno na obr. 77. Za daného zatížení budou pruty 1, 2, 3 namáhány pouze osovými silami N_1, N_2, N_3 , jejichž velikosti a správné smysly stanovíme z podmínek rovnováhy (92) na uvolněném styčnicku m (obr. 77)

$$\sum F_{ix} = 0 : N_1 \cos 60^\circ - N_2 \cos 60^\circ = 0 ,$$

$$\sum F_{iy} = 0 : -N_1 \cos 30^\circ - N_2 \cos 30^\circ - N_3 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_{iz} = 0 : -N_3 \cos 45^\circ - G = 0$$

Po dosazení, úpravě a vyřešení soustavy rovnic dostáváme

$$\begin{aligned}
 0,5 N_1 - 0,5 N_2 &= 0 \dots N_1 = 5,77 \text{ kN} \\
 -0,866 N_1 - 0,866 N_2 - 0,707 N_3 &= 0 \dots N_2 = 5,77 \text{ kN} \\
 -0,707 N_3 &= 10 \dots N_3 = -14,14 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Minus u síly N_3 znamená, že její předpokládaný smysl na obr. 77 je špatný a ve skutečnosti míří do styčnicku m .

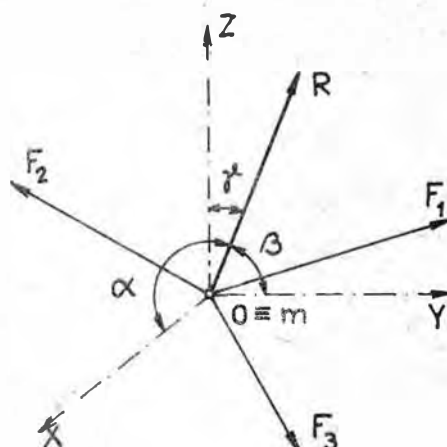
ROZKLAD A ZRUŠENÍ SÍLY TŘEMI SILAMI PAPRSKY SE SPOLEČNÝM PŮSOBIŠTĚM

Pravotočivém pravouhlém souřadnicovém systému X, Y, Z s počátkem $O \equiv m$

síla $R = F$ svou velikostí, působišťem m a směrovými úhly α, β, γ , paprsků sil F_i ($i = 1, 2, 3$) procházejících bodem m (obr. 78) kolem je rozložit - nahradit resp.

čínem síly R silami F_1, F_2, F_3 .
ámých sil F_i ($i = 1, 2, 3$), působících paprscích, zvolíme zcela libovolně jejich smysly, např. podle obr. 78, které odpovídají směrové úhly $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$

ze rozkladu síly R složek - sil F_1, F_2, F_3 obdržíme velikost a správný smysl neznámých sil F_1, F_2, F_3 soustavu tří lineárních rovnic, předložených třemi statickými podmínkami ekvivalence (93)



Obr. 78

$$\begin{cases}
 F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 = R \cos \alpha \\
 F_1 \cos \beta_1 + F_2 \cos \beta_2 + F_3 \cos \beta_3 = R \cos \beta \\
 F_1 \cos \gamma_1 + F_2 \cos \gamma_2 + F_3 \cos \gamma_3 = R \cos \gamma
 \end{cases} \quad (93)$$

Soustavy rovnic (93) je jednoznačné a určité jen když determinant této soustavy rovnic má hodnotu různou od nuly -

$$D = \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (94)$$

roven nule, znamená to, že paprsky všech tří sil F_1, F_2, F_3 leží v jedné rovině. Řešení úlohy je buď neurčité a nebo dokonce nemožné. O tom, který z případů nastane, rozhodne poloha rozkládané síly R . Leží-li síla R mimo rovinu, je řešení nemožné; působí-li však v rovině sil F_1, F_2, F_3 je řešení neurčité, neboť velikost jedné z těchto neznámých sil můžeme volit zcela

libovolně a zbývající dvě pak určit ze dvou statických podmínek ekvivalence (35) rovinné soustavy sil se společným působišťem m . Vyjde-li nám řešením znaménko některé síly záporné, znamená to, že tato síla má správný smysl opačný než předpokládaný.

Úlohu zrušení síly R třemi složkami - silami F_1, F_2, F_3 , působícími v zadaných paprscích, se společným působišťem m (obr. 78), vyšetřujeme obdobně. Rozdíl je jen v tom, že síly R, F_1, F_2, F_3 tvoří rovnovážnou bodovou prostorovou soustavu sil, pro kterou musíme napsat tři statické podmínky rovnováhy (92)

$$\left. \begin{aligned} F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 + R \cos \alpha &= 0, \\ F_1 \cos \beta_1 + F_2 \cos \beta_2 + F_3 \cos \beta_3 + R \cos \beta &= 0, \\ F_1 \cos \gamma_1 + F_2 \cos \gamma_2 + F_3 \cos \gamma_3 + R \cos \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Podmínkou řešitelnosti úlohy je platnost vztahu (94).

Příklad 51

Nahraďte sílu $R = 10 \text{ kN}$, procházející počátkem souřadnic O a svírající s kladnými souřadnicovými osami X, Y, Z úhly $\alpha = \beta = 60^\circ, \gamma = 45^\circ$, třemi silami F_1, F_2, F_3 působícími v paprscích o směrových úhlech $\alpha_1 = 120^\circ, \beta_1 = 60^\circ, \gamma_1 = 45^\circ; \alpha_2 = 0^\circ, \beta_2 = \gamma_2 = 90^\circ, \alpha_3 = \beta_3 = 45^\circ, \gamma_3 = 90^\circ$ a společném působišťi $m \equiv O$.

Řešení

Podmínky ekvivalence (93), napsané mezi neznámými silami F_1, F_2, F_3 a zadanou silou R , mají tvar

$$F_1 \cos 120^\circ + F_2 \cos 0^\circ + F_3 \cos 45^\circ = R \cos 60^\circ = 5,$$

$$F_1 \cos 60^\circ + F_2 \cos 90^\circ + F_3 \cos 45^\circ = R \cos 60^\circ = 5,$$

$$F_1 \cos 45^\circ + F_2 \cos 90^\circ + F_3 \cos 90^\circ = R \cos 45^\circ = 7,07$$

a řešení: $F_1 = 10 \text{ kN}, F_2 = 10 \text{ kN}, F_3 = 0$.

Příklad 52

Zrušte sílu $F = 7 \text{ kN}$ s působišťem m v počátku souřadnic O a směrovými úhly $\alpha = \beta = \gamma = 54^\circ 44'$ třemi silami F_1, F_2, F_3 působícími v souřadnicových osách X, Y, Z .

Řešení

Pro rovnovážnou soustavu sil F, F_1, F_2, F_3 se společným působišťem m napíšeme tři statické podmínky rovnováhy (95), mající jednoduchý tvar

$$F_1 + F \cos \alpha = 0, \quad F_2 + F \cos \beta = 0, \quad F_3 + F \cos \gamma = 0$$

a řešení

$$F_1 = F_2 = F_3 = -F \cos \alpha = -7 \cdot 0,577 = -4,04 \text{ kN}.$$

Smysl sil F_1, F_2, F_3 je nesouhlasný se smyslem kladných souřadnicových os $+X, +Y, +Z$.

2.4. STATICKÝ MOMENT SÍLY K BODU V PROSTORU

V platnosti zůstává vše, co je uvedeno v kapitole 2.5 o "statickém momentu síly F k libovolnému bodu S v rovině". Výjimku tvoří pouze Varignonova věta, která zde zní:

"Statický moment výslednice R jakékoliv prostorové soustavy sil k libovolnému bodu S v prostoru je roven vektorovému (nikoliv algebraickému) součtu statických momentů jednotlivých sil soustavy k témuž bodu (obr. 80)."

Při obecné poloze síly F a bodu S je výpočet statického momentu $M_S = Fp$ síly F k momentovému středu S poměrně pracný a zdlouhavý. Využijeme-li závěrů kapitoly 3.5, můžeme podle odstavce 3.5.3 získat velmi snadno a rychle statický moment M_S síly F k bodu S vektorovým součtem statických momentů $\vec{M}_{sx}, \vec{M}_{sy}, \vec{M}_{sz}$ síly F k momentovým osám X, Y, Z , procházejícím momentovým středem $S \equiv O$ (obr. 86 a příklad 59 s obr. 88).

Příklad 53

Stanovte statický moment síly F , rovnoběžné se souřadnicovou osou X , k momentovému středu $S \equiv O$ (obr. 79) pro $F = 2 \text{ kN}$, $p = 4 \text{ m}$.

Řešení

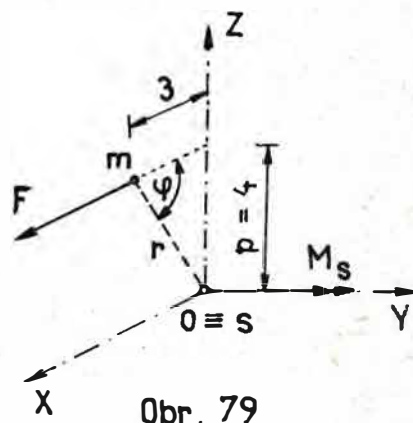
Statický moment síly F k bodu S podle vztahu

$$M_S = Fp = 2 \cdot 4 = 8 \text{ kNm}$$

nebo s použitím průvodiče r působíště m síly F

$$M_S = Fr \sin \varphi = 2 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 8 \text{ kNm}.$$

Statický moment M_S je vázaný na bod S , leží v rovině souřadnicové ose Y a má s ní souhlasný smysl (obr. 79), neboť smysl otáčení síly F kol bodu S se porovná s kladnou osou Y kladně, tj. proti směru hodinových ručiček.



Obr. 79

Příklad 54

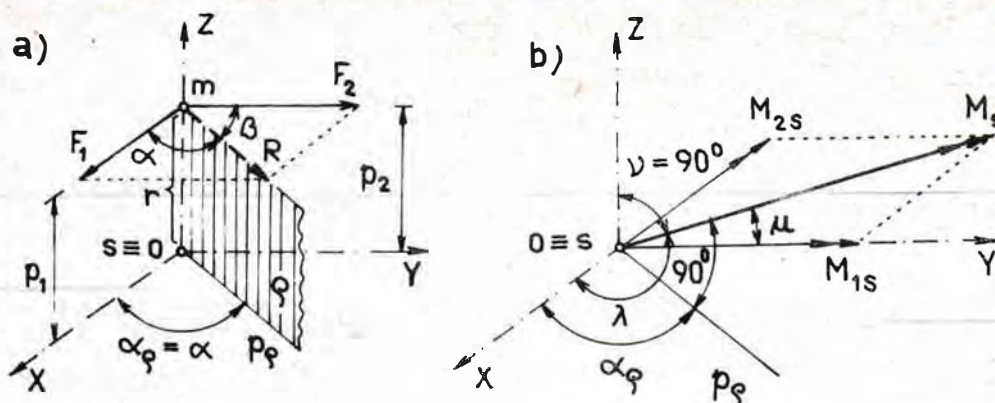
Stanovte statický moment soustavy sil $F_1 = 3 \text{ kN}$, $F_2 = 4 \text{ kN}$ se společným působíštěm m k bodu $S \equiv O$ (obr. 80a) pro $p_1 = p_2 = 3 \text{ m}$.

Řešení

Statické momenty jednotlivých sil soustavy k momentovému středu S

$$M_{1s} = F_1 \cdot p_1 = 3 \cdot 3 = 9 \text{ kNm}, \quad M_{2s} = F_2 \cdot p_2 = -4 \cdot 3 = -12 \text{ kNm}$$

zobrazit vektory $\vec{M}_{1s}$ a $\vec{M}_{2s}$ vázanými na bod S (obr. 80b).



Obr. 80

Vektor výsledného momentu $\vec{M}_S$ má velikost

$$M_S = \sqrt{M_{1s}^2 + M_{2s}^2} = \sqrt{9^2 + (-12)^2} = 15 \text{ kNm},$$

prochází momentovým středem S , leží v souřadnicové rovině XY a svírá s kladnými souřadnicovými osami X, Y, Z úhly λ, μ, ν , pro něž platí

$$\cos \lambda = \frac{M_{2s}}{M_S} = \frac{-12}{15} = -0,8 \Rightarrow \lambda = 180^\circ - 36^\circ 52' = 143^\circ 08',$$

$$\cos \mu = \frac{M_{1s}}{M_S} = \frac{9}{15} = 0,6 \Rightarrow \mu = 53^\circ 08'; \cos \nu = 0 \Rightarrow \nu = 90^\circ.$$

Výslednice R soustavy sil F_1, F_2 se společným působištěm m (obr. 80a) má velikost

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ kN},$$

svírá s kladnými souřadnicovými osami X, Y, Z úhly α, β, γ , pro něž platí vztahy

$$\cos \alpha = \frac{F_1}{R} = \frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow \alpha = 53^\circ 08',$$

$$\cos \beta = \frac{F_2}{R} = \frac{4}{5} = 0,8 \Rightarrow \beta = 36^\circ 52'; \cos \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 90^\circ$$

a vyvozuje podle Varignonovy věty statický moment k bodu $S \equiv 0$

$$M_S = R \cdot r = 5 \cdot 3 = 15 \text{ kNm},$$

jehož vektor vázaný na bod S je kolmý na svislou rovinu statického momentu φ , obsahující paprsek R a momentový střed S .

3.5. STATICKÝ MOMENT SÍLY K OSE V PROSTORU

3.5.1. POJEM A VEKTOR STATICKÉHO MOMENTU SÍLY K OSE V PROSTORU

Vedeme-li momentovou osou O libovolnou rovinu φ , protínající paprsek síly F v bodě m (obr. 84), bude statickým momentem M_0 síly F k ose O výraz

$$M_0 = F'p = Fp \sin \alpha, \quad (96)$$

v němž α je úhel, který svírá paprsek síly F s rovinou φ , p je kolmá vzdálenost bodu m od momentové osy O a $F' = F \sin \alpha$ je průmět síly F do normály k rovině φ .

Ze vztahu (96) vyplývá, že statický moment síly F k momentové ose O je roven statickému momentu její složky F' k bodu S - průsečíku momentové osy O s rovinou σ , vedenou složkou síly F' kolmo k rovině φ . Při $\alpha = \frac{\pi}{2}$ leží F v rovině kolmé na momentovou osu O a dostáváme

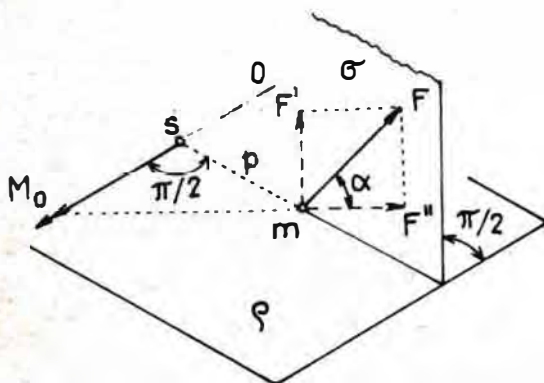
$$M_0 = F \cdot p, \quad (97)$$

kde p je nejkratší příčka dvou mimoběžek F a O .

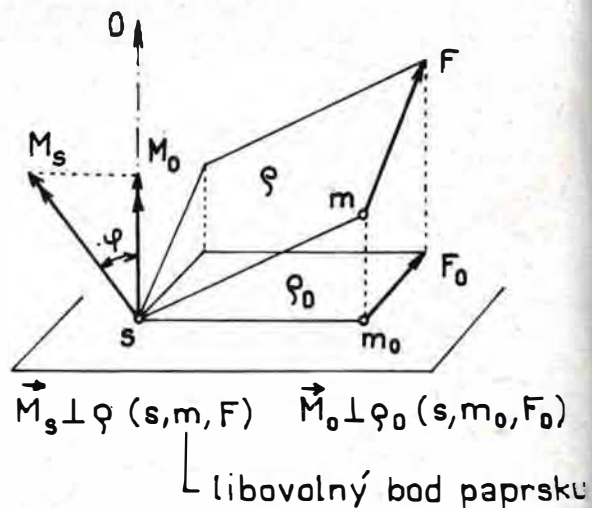
Závěr:

"Statický moment M_0 k momentové ose O vyvozuje pouze síla nebo složky síly, ležící v rovině kolmé na momentovou osu O ."

O, F'' leží v φ ; $F' \perp \varphi$
 σ obsahuje F' ; $\sigma \perp \varphi$



Obr. 84

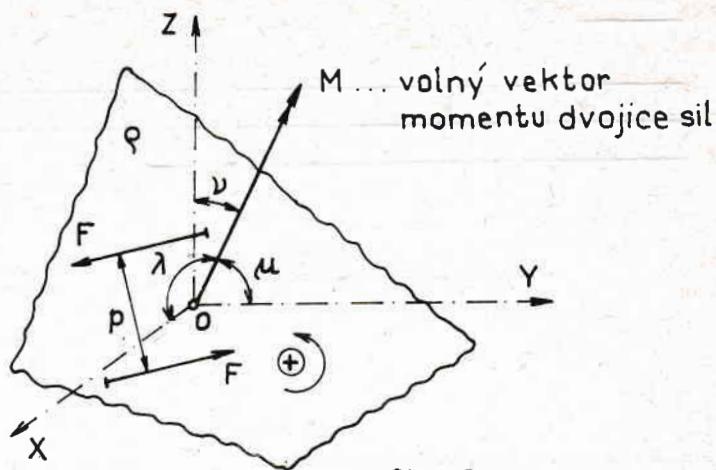


Obr. 85

Jinak a výhodněji lze stanovit statický moment síly F k ose O jako pravoúhlý průmět vektoru momentu M_s této síly k libovольnému bodu s , ležícímu na ose O , do této osy (obr. 85).

Dvojice sil v prostoru

vektoru $\vec{M}$ (obr. 90) a na smysl stažení dvojice sil rovinou φ se můžeme dívat z obou stran roviny φ . Na obr. 90 je nakreslena dvojice sil v libovolné rovině φ , obsahující zvolený počátek O rovnoběžného souřadnicového systému X, Y, Z . Volný vektor momentu $\vec{M}$ této dvojice sil o veličnosti



Obr. 90

$$M = F \cdot p, \quad (105)$$

vyjádřený v libovolném bodě roviny dvojice sil φ (na obr. 90 v počátku O) kolmo k rovině φ , má ve zvoleném souřadnicovém systému X, Y, Z směrové úhly λ, μ, ν .

2.5.1. ZÁKLADNÍ POUČKY O DVOJICI SIL V PROSTORU

Vycházíme z platných základních pouček o dvojici sil v rovině (viz odstavec 2.5.2), které lze pro dvojici sil v prostoru poněkud rozšířit.

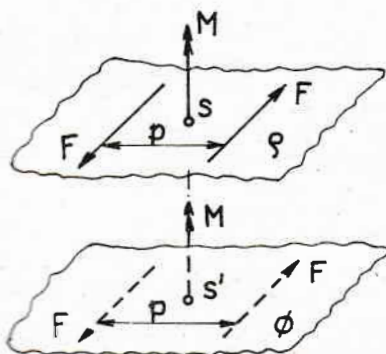
Poučka ①

"Dvojici sil lze v její rovině libovolně posunouti nebo potočit, aniž by se změnil její výsledný účinek."

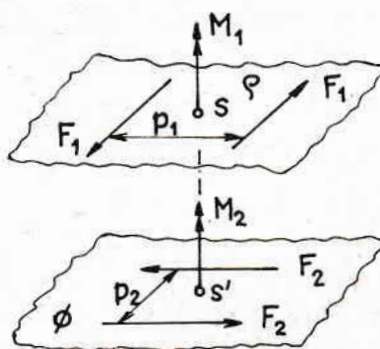
Poučka ②

"Dvojici sil je možno posunouti do libovolné roviny ϕ rovnoběžné s rovinou φ původní dvojice sil (obr. 91)." (STĚHOVÁNÍ SKŘÍŇE)

Přeložením dvojice sil z φ do $\phi \parallel \varphi$ zachovává vektor $\vec{M}$ momentu dvojice sil stejný směr. Mění se pouze působíště - počátek vektoru $\vec{M}$ (viz poučka o přeložení působíště m síly F do libovolného bodu jejího paprsku), ale výsledný účinek zůstává stejný.



Obr. 91



Obr. 92

Poučka ③

"Dvojici sil lze nahradit libovolnou jinou dvojicí sil, která má s původní dvojicí sil moment stejné velikosti, smyslu a působí v rovině ϕ rovnoběžné s rovinou ϱ původní dvojice sil (obr. 92)."

Mezi původní a náhradní dvojicí sil platí podmínka ekvivalence

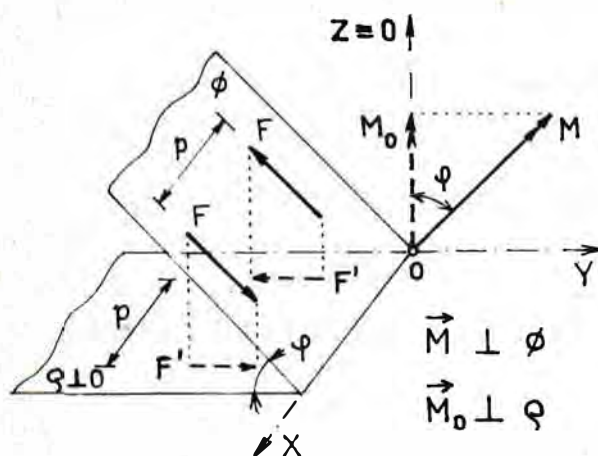
$$M_1 = M_2 \dots F_1 p_1 = F_2 p_2 \quad (106)$$

U dvojice sil v rovině ϕ lze volit zcela libovolně např. velikost síly F_2 a příslušné rameno p_2 stanovíme z rov. (106)

$$p_2 = \frac{F_1 p_1}{F_2} ; \quad (106a)$$

při volbě ramene p_2 dvojice platí pro velikost sil F_2 vztah

$$F_2 = \frac{F_1 p_1}{p_2} \quad (106b)$$



Obr. 93

Poučka ④

"Statický moment dvojice sil v prostoru má ke všem bodům v prostoru stálou hodnotu rovnou momentu dvojice sil"

$$M = F p \quad (107)$$

Poučka ⑤

"Statický moment M_0 dané dvojice sil působící v rovině ϕ , k libovolné ose O v prostoru (obr. 93), je roven průmětu vektoru M momentu dvojice sil do osy O "

$$M_0 = M \cos \varphi = F p \cos \varphi, \quad (108)$$

kde φ je úhel, který svírá vektor $\vec{M}$ momentu dvojice sil s osou O nebo též, který svírá rovina ϕ dané dvojice sil s rovinou $\varrho \perp O$.

Platí též

"Statický moment M_0 dané dvojice sil, působící v rovině ϕ , k libovolné ose O , je roven momentu dvojice sil, kterou obdržíme promítnutím dané dvojice sil do roviny $\varrho \perp O$ (obr. 93)"

$$M_0 = F' p = F p \cos \varphi, \quad (109)$$

kde

$$\frac{F'}{F} = \cos \varphi \Rightarrow F' = F \cos \varphi. \quad (110)$$

$$c(x_c = -0,397; y_c = 0; z_c = 2,683) \text{ m.}$$

OBECNÁ PROSTOROVÁ SOUSTAVA SIL

Pod obecnou prostorovou soustavou sil rozumíme soustavu sil, jejíž paprsky ležejí v jedné rovině a ani neprocházejí jedním bodem. V pravouhlém souřadnicovém systému X, Y, Z s počátkem O je každá síla soustavy F_i ($i = 1, 2, \dots, n$) zadána působitěm $m_i(x_i, y_i, z_i)$ a směrovými úhly $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ (obr. 107).

Účinek obecné prostorové soustavy sil

Rezultant - dynamika

Rozložíme-li rovnoběžně každou sílu soustavy F_i na pravoúhlých složkách F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}

$$F_{ix} = F_i \cos \alpha_i,$$

$$F_{iy} = F_i \cos \beta_i,$$

$$F_{iz} = F_i \cos \gamma_i \quad (156)$$

přičtením m_i do zvoleného počátku O souřadnicového systému X, Y, Z , dostáváme prostorovou soustavu sil se společným působitěm $m \equiv 0$.

Rezultant $\vec{R}$ této soustavy sil má podle

odstavce 3.2 působitě m ve zvoleném počátku souřadnic O , velikost

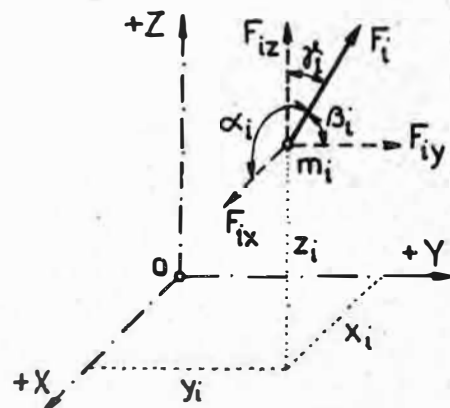
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (157)$$

kde R_x, R_y, R_z jsou pravoúhlé průměty síly R do souřadnicových os X, Y, Z , rovnající se algebraickým součtům průmětů všech sil soustavy do těchto os

$$\begin{aligned} 1) R_x &= R \cos \alpha = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \\ 2) R_y &= R \cos \beta = \sum_{i=1}^n F_i \cos \beta_i = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \\ 3) R_z &= R \cos \gamma = \sum_{i=1}^n F_i \cos \gamma_i = \sum_{i=1}^n F_{iz} \end{aligned} \quad (158)$$

Úhly α, β, γ jsou směrové úhly síly R , pro něž platí vztahy

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}, \quad (159)$$



Obr. 107

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (160)$$

Nemá-li se na výsledném účinku dané soustavy sil nic změnit, nutno přidat podle odstavce 3.7.1 k posunutým silám F_i v počátku O dvojice sil o momentech M_{i0} , jež se rovnají statikým momentům daných sil F_i k počátku O. Zobražíme-li tyto dvojice sil volnými vektory momentů $\vec{M}_{i0}$, vztyčenými ve zvoleném počátku O souřadnicového systému, představují průměty $\vec{M}_{ix}, \vec{M}_{iy}, \vec{M}_{iz}$ vektorů momentů $\vec{M}_{i0}$ do souřadnicových os X, Y, Z statiké momenty M_{ix}, M_{iy}, M_{iz} sil F_i ($i = 1, 2, \dots, n$) k osám X, Y, Z

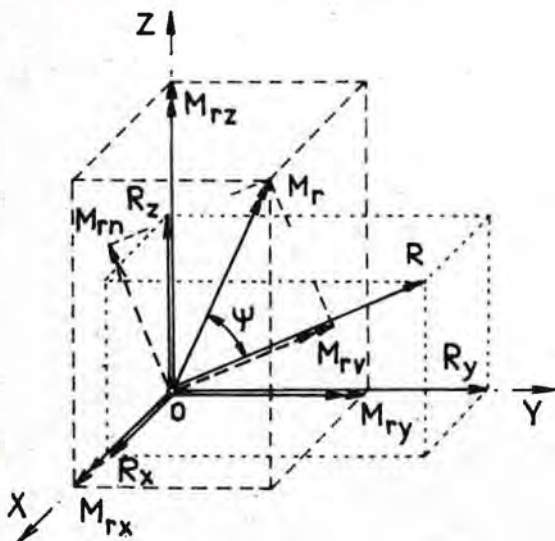
$$\begin{aligned} M_{ix} &= F_{iz} y_i - F_{iy} z_i = F_i (y_i \cos \gamma_i - z_i \cos \beta_i), \\ M_{iy} &= F_{ix} z_i - F_{iz} x_i = F_i (z_i \cos \alpha_i - x_i \cos \gamma_i), \\ M_{iz} &= F_{iy} x_i - F_{ix} y_i = F_i (x_i \cos \beta_i - y_i \cos \alpha_i). \end{aligned} \quad (161)$$

Výsledným účinkem soustavy silových dvojic v prostoru o momentech M_{i0} je podle odstavce 3.6.2 jediná dvojice sil o momentu M_r , jehož volný vektor $\vec{M}_r$ s působíštěm v počátku O souřadnicové soustavy má velikost

$$M_r = \sqrt{M_{rx}^2 + M_{ry}^2 + M_{rz}^2} \quad (162)$$

kde M_{rx}, M_{ry}, M_{rz} jsou pravoúhlé průměty vektoru momentu $\vec{M}_r$ výsledné dvojice sil do souřadnicových os X, Y, Z, rovnající se algebraickým součtům statikých momentů sil soustavy F_i ($i = 1, 2, \dots, n$) k osám X, Y, Z

$$\begin{aligned} 4) M_{rx} &= M_r \cos \lambda = \sum_{i=1}^n F_i (y_i \cos \gamma_i - z_i \cos \beta_i) = \sum_{i=1}^n (F_{iz} y_i - F_{iy} z_i), \\ 5) M_{ry} &= M_r \cos \mu = \sum_{i=1}^n F_i (z_i \cos \alpha_i - x_i \cos \gamma_i) = \sum_{i=1}^n (F_{ix} z_i - F_{iz} x_i), \\ 6) M_{rz} &= M_r \cos \nu = \sum_{i=1}^n F_i (x_i \cos \beta_i - y_i \cos \alpha_i) = \sum_{i=1}^n (F_{iy} x_i - F_{ix} y_i). \end{aligned} \quad (163)$$



Obr. 108

Pro směrové úhly λ, μ, ν vektoru momentu $\vec{M}_r$ platí vztahy

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{M_{rx}}{M_r}, \quad \cos \mu = \frac{M_{ry}}{M_r}, \\ \cos \nu &= \frac{M_{rz}}{M_r}, \end{aligned} \quad (164)$$

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1. \quad (165)$$

Vektory $\vec{R}$ a $\vec{M}_r$ v počátku souřadnic O svírají navzájem úhel ψ (obr. 108), pro něhož platí vztah

Prostorová soustava sil působící na tuhé těleso je v rovnováze jen tehdy, když součty průmětů všech sil soustavy do každé ze tří navzájem kolmých os X, Y, Z (obecně i kosoúhlých, které nejsou rovnoběžné s jednou rovinou) jsou nulové a když součty statických momentů všech sil soustavy k těmže osám jsou nulové. Platí tedy následující rovnice:

$$1) R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i = 0,$$

$$2) R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \beta_i = 0,$$

$$3) R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \gamma_i = 0,$$

$$4) M_{rx} = \sum_{i=1}^n (F_{iz} y_i - F_{iy} z_i) = \sum_{i=1}^n F_i (y_i \cos \gamma_i - z_i \cos \beta_i) = 0,$$

$$5) M_{ry} = \sum_{i=1}^n (F_{ix} z_i - F_{iz} x_i) = \sum_{i=1}^n F_i (z_i \cos \alpha_i - x_i \cos \gamma_i) = 0,$$

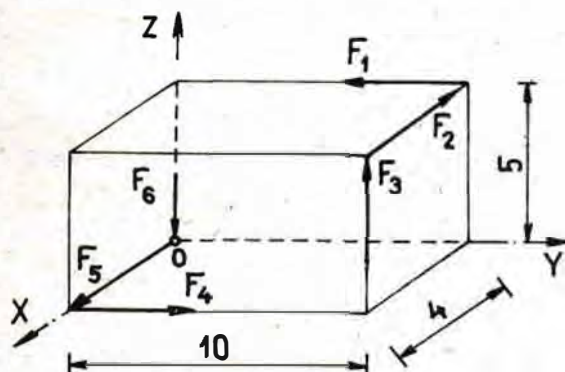
$$6) M_{rz} = \sum_{i=1}^n (F_{iy} x_i - F_{ix} y_i) = \sum_{i=1}^n F_i (x_i \cos \beta_i - y_i \cos \alpha_i) = 0.$$

(184)

Místo uvedených tří výminek součtových (1) až (3) a tří momentových (4) až (6) lze někdy s výhodou použít rovněž dvou součtových a čtyř momentových nebo jedné součtové a pěti momentových, případně šesti momentových k vhodně zvoleným osám. Použijeme-li šesti výminek momentových, nesmí těchto šest momentových os patřit nulovému systému, neboť by byly podmínky rovnováhy splněny i pro nerovnovážnou soustavu sil. Nulový systém určité prostorové soustavy sil je tvořen souhrnem všech nulových přímk, k nimž má uvažovaná soustava sil statické momenty rovny nule.

Příklad 72

Jaký je výsledný účinek prostorové soustavy sil $F_1 = 4 \text{ kN}$, $F_2 = 6 \text{ kN}$, $F_3 = 3 \text{ kN}$, $F_4 = 2 \text{ kN}$, $F_5 = 6 \text{ kN}$, $F_6 = 8 \text{ kN}$ působící ve hranách kvádra na obr. 109?



Obr. 109

Řešení

Translační síla R má pravouhlé průměty R_x , R_y , R_z do souřadnicových os X, Y, Z

$$R_x = \sum_{i=1}^6 F_{ix} = F_5 - F_2 = 6 - 6 = 0,$$

$$R_y = \sum_{i=1}^6 F_{iy} = -F_1 + F_4 = -4 + 2 = -2 \text{ kN},$$

$$R_z = \sum_{i=1}^6 F_{iz} = F_3 - F_6 = 3 - 8 = -5 \text{ kN},$$

velikost

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = 5,385 \text{ kN}$$

a směrové úhly α , β , γ

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{0}{5,385} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ,$$

$$\cos \beta = \frac{R_y}{R} = \frac{-2}{5,385} = -0,371 \Rightarrow \beta = 180^\circ - 68^\circ 12' = 111^\circ 48',$$

$$\cos \gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{-5}{5,385} = -0,928 \Rightarrow \gamma = 180^\circ - 21^\circ 48' = 158^\circ 12'.$$

Kontrola

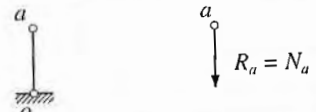
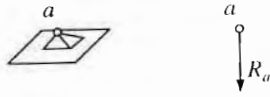
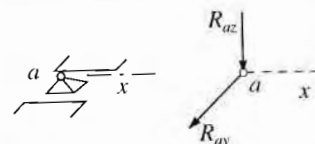
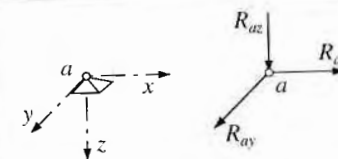
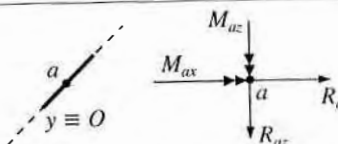
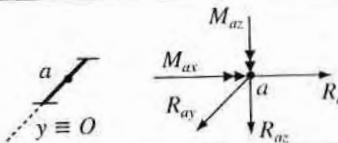
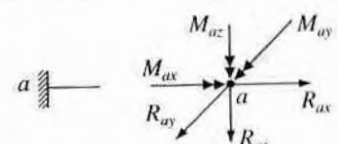
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 0^2 + (-0,371)^2 + (-0,928)^2 = 1,000.$$

Translační síla R má působiště v počátku souřadnic O (obr. 110) a leží v souřadnicové rovině $(-Y, -Z)$.

Volný vektor momentu $\vec{M}_R$ výsledné dvojice sil má průměty $\vec{M}_{Rx}$, $\vec{M}_{Ry}$, $\vec{M}_{Rz}$ do souřadnicových os X, Y, Z

$$M_{Rx} = \sum_{i=1}^6 M_{ix} = F_1 \cdot 5 + F_3 \cdot 10 = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 10 = 50 \text{ kNm},$$

Tabulka 15.1. Vazby jednoduchého prostorového prutu – nosníku

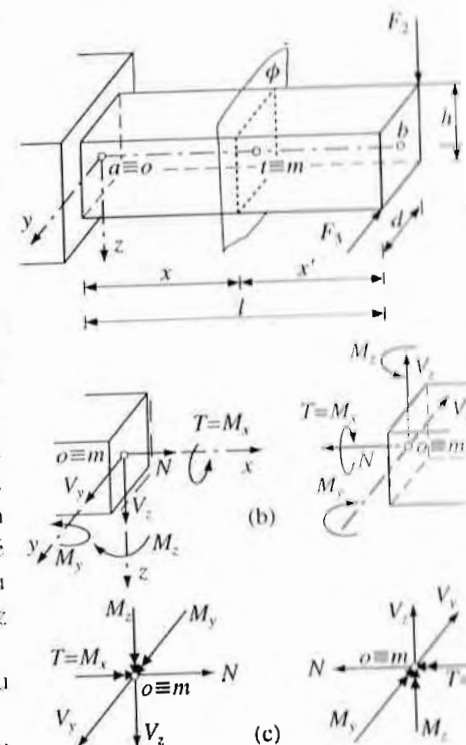
Číslo vazby	Název vazby	Násobnost vazby	Označení vazby se složkami reakcí
1	Kyvný prut	1	
2	Kulový kloub posuvný po ploše	1	
3	Kulový kloub posuvný po křivce či přímce	2	
4	Kulový kloub pevný – neposuvný	3	
5	Válcový kloub posuvný ve směru osy O	4	
6	Válcový kloub pevný – neposuvný	5	
7	Dokonalé vetknutí	6	

15.2. Prostorové namáhání přímého nosníku

15.2.1. Výslednice vnitřních sil ve tvaru bivektoru R, M a jejich šest složek

Uvažujme přímý nosník $\overline{ab}$ staticky určitě podepřený, např. jednostranně dokonale vetknutý, zatížený obecnou prostorovou soustavou sil (obr. 15.1a). Libovolným bodem m střednice nosníku $\overline{ab}$ vedme rovinu ϕ kolmou ke střednici nosníku, která rozdělí vyšetřovaný nosník na dvě části (obr. 15.1a). Těžištěm $t \equiv m$ průřezu nosníku, ležícího v rovině ϕ , proložme lokální pravoúhlý souřadnicový systém x, y, z tak, aby osa x ležela v ose nosníku a osy y, z se ztotožnily s hlavními centrálními osami setrvačnosti průřezu (obr. 15.1b). Na obě navzájem oddělené části nosníku působí prostorová soustava vnitřních sil, kterou můžeme nahradit v těžišti průřezu bivektorem, tj. vektorem síly R a vektorem momentu M (viz odstavec 3.7). Pravoúhlé průměty (složky) vektoru síly a vektoru momentu do souřadnicových os x, y, z označme:

- N – normálová síla (ve směru osy nosníku x),
- V_y, V_z – posouvající síly (ve směru os y, z),
- $T = M_x$ – krouticí či torzní moment (otáčí kolem osy nosníku x),
- M_y, M_z – ohybové momenty (momenty působí v rovinách xz, xy kolmých k osám



Obr. 15.1. Složky výslednice vnitřních sil přímého nosníku

Kladné smysly šesti složek výslednice vnitřních sil v průřezu prostorově namáhaného přímého nosníku budeme uvažovat podle obr. 15.1b s vektorovým zobrazením na obr. 15.1c.

Obdobným postupem jako u rovinného nosníku v odstavci 11.4.1 lze rovněž u prostoru zatíženého nosníku dokázat velmi důležitou větu: „Soustava vnitřních sil v libovolném průřezu m nosníku, jímž působí např. levá část nosníku na část pravou, je staticky ekvivalentní se soustavou vnějších sil (zatížení i reakce vazeb), působících na levou část nosníku uvažovaného průřezu.“ Analogická závislost platí mezi výslednicí vnitřních sil v průřezu m a výslednicí vnějších sil působících na pravou část nosníku. Vyjádření těchto silových a momentových podmínek ekvivalence slovně, získáme definice jednotlivých složek

výslednice vnitřních sil N , V_y , V_z , $T = M_x$, M_y , M_z v libovolném průřezu m prostorově namáhaného nosníku.

Normálová síla N v libovolném průřezu m nosníku je rovna algebraickému součtu průmětů všech vnějších sil, působících na levou nebo pravou část nosníku od průřezu m , do osy nosníku x .

Posouvající síla V_y resp. V_z v libovolném průřezu m nosníku je rovna algebraickému součtu průmětů všech vnějších sil, působících na levou nebo pravou část nosníku od průřezu m , do směru osy y resp. z .

Ohybový moment M_y resp. M_z v libovolném průřezu m nosníku je roven algebraickému součtu statických momentů všech vnějších sil, působících na levou nebo pravou část nosníku od průřezu m , k ose y resp. z .

Krouticí moment $T = M_x$ v libovolném průřezu m nosníku je roven algebraickému součtu statických momentů všech vnějších sil, působících na levou nebo pravou část nosníku od průřezu m , k ose nosníku x .

Ve výše uvedených definicích složek výslednice vnitřních sil se sumace vztahují na všechny vnější síly (osamělá břemena, osamělé momenty, spojitá zatížení), tj. dané zatížení i podporové reakce, působící na jednu (levou nebo pravou) část nosníku.

Hodnoty složek výslednice vnitřních sil v libovolném průřezu m prostorově namáhané přímé konzoly na obr. 15.1a při výpočtu postupem zprava:

$$N = F_1 \text{ (tah)}, \quad V_y = -F_3, \quad V_z = F_2,$$

$$T = M_x = -F_2 \cdot \frac{d}{2} + F_3 \cdot \frac{h}{2}, \quad M_y = -F_1 \cdot \frac{h}{2} - F_2 \cdot x', \quad M_z = F_1 \cdot \frac{d}{2} - F_3 x'.$$

15.2.2. Diferenciální podmínky rovnováhy přímého nosníku

Diferenciální podmínky rovnováhy, udávající vztahy mezi vnějším zatížením a vnitřními silami přímého prostorově namáhaného nosníku, odvodíme analogickým postupem jako u přímého rovinně namáhaného nosníku, viz odstavec 11.4.4 a vztahy (11.15).

a) Spojité osově zatížení n a normálová síla N (obr. 15.2a):

Z podmínek rovnováhy sil, působících na uvolněný nosníkový element, ve směru osy nosníku x dostáváme známou závislost

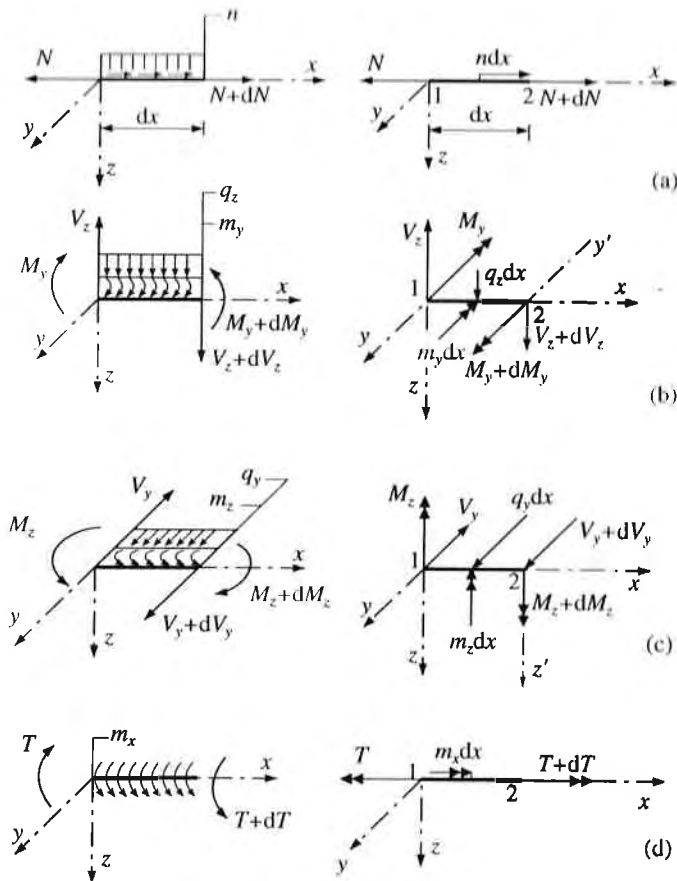
$$\frac{dN}{dx} = -n. \quad (15.1)$$

b) Spojité příčné zatížení q_z a momentové zatížení m_y ve svislé rovině xz a složky vnitřních sil V_z , M_y (obr. 15.2b):

Ze silové podmínky rovnováhy $\sum F_{iz} = 0$ a momentové podmínky $\sum M_{iy} = 0$ na uvolněném nosníkovém elementu plynou vztahy

$$\frac{dV_z}{dx} = -q_z, \quad \frac{dM_y}{dx} = V_z + m_y, \quad (15.2)$$

známé z rovinného případu namáhání, viz diferenciální podmínky rovnováhy (11.15).



Obr. 15.2. Nosníkový element s vnějším zatížením a složkami vnitřních sil

c) Spojité příčné zatížení q_y a momentové zatížení m_z ve vodorovné rovině xy a složky vnitřních sil V_y , M_z (obr. 15.2c):

Ze statických podmínek rovnováhy $\sum F_{iy} = 0$, $\sum M_{iz} = 0$ lze odvodit obdobné vztahy k (15.2)

$$\frac{dV_y}{dx} = -q_y, \quad \frac{dM_z}{dx} = -V_y + m_z. \quad (15.3)$$

Změna znaménka u V_y vyplývá z přijaté konvence vnitřních sil na obr. 15.1b,c. Při pootočení nosníkového elementu i se zatížením a složkami vnitřních sil z roviny xz (obr. 15.2b) do vodorovné roviny xy obdržíme analogické vztahy k (15.2) včetně znamének, avšak při nedodržení konvence pro posouvající sílu V_y .

d) Spojité zkrucující momentové zatížení m_x s rozměrem $\text{kNm} \cdot \text{m}^{-1} = \text{kN}$ a krouticí moment $T = M_x$ (obr. 15.2d):

Momentová podmínka rovnováhy k ose x na nosníkovém elementu má tvar

$$\sum M_{ix} = 0 : -T + T + dT + m_x dx = 0$$

a odtud vztah

$$\frac{dT}{dx} = -m_x. \quad (15.4)$$

Závěry plynoucí z prvních pěti diferenciálních podmínek rovnováhy (15.1) až (15.3) jsou analogické jako v odstavci 11.4.4. Z šesté diferenciální podmínky rovnováhy (15.4) lze finovat tyto **závěry**:

1) Lokální extrém krouticího momentu T nastane v průřezu, v němž je intenzita spojitěho zkrucujícího momentového zatížení m_x rovna nule

$$\frac{dT}{dx} = -m_x = 0. \quad (15.5)$$

2) Integrací diferenciální podmínky rovnováhy (15.4) lze získat složku výslednice vnitřní síly – krouticího momentu

$$T = -\int m_x dx + C_6. \quad (15.6)$$

Integrační konstantu C_6 určíme z okrajové podmínky nosníku.

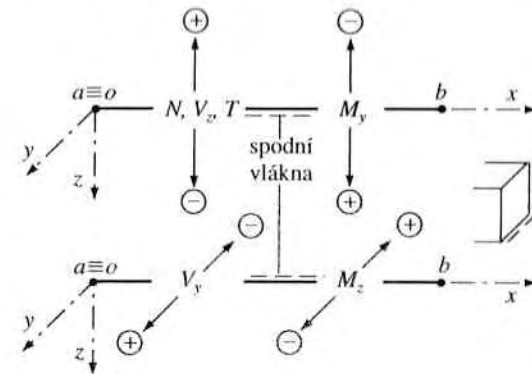
Z výše uvedených obr. 15.2a–d, rovnic (15.1) až (15.4) a z platnosti principu superpozice námků (viz odstavce 1.3) vyplývá, že *prostorové namáhání* přímého nosníku můžeme bivalentně *rozložit na čtyři dílčí stavy*:

- osové namáhání* – tah, tlak (vyvolává osové zatížení F_x , n a vzniká vnitřní síla N),
- ohyb se smykem ve svislé rovině xz* (vyvolává zatížení F_z , q_z , M_y , m_y a vznikají vnitřní síly V_z , M_y),
- ohyb se smykem ve vodorovné rovině xy* (vyvolává zatížení F_y , q_y , M_z , m_z a vznikají vnitřní síly V_y , M_z),
- kroucení* (vyvolává osamělé i spojitě zkrucující momentové zatížení kolem osy x a vzniká vnitřní síla $T = M_x$).

První dva dílčí stavy byly detailně vyšetřovány u rovinně namáhaných nosníků v kapitole 11. Řešení třetího stavu – ohyb se smykem ve vodorovné rovině – je analogické jako u ohybu se smykem ve svislé rovině. Zcela nový je čtvrtý stav – *kroucení nosníku* – vyvolané zatížením, které neprochází osou nosníku, viz příklad 15.1. Vnější vazby musejí být v jednom místě nosníku (např. na jednom konci) uspořádány tak, aby zachytily kroucení a zabránily pootočení průřezu nosníku kolem jeho osy x .

Při řešení obecně zatíženého přímého nosníku je velmi vhodné přidršet se rozložení prostorového namáhání na čtyři dílčí stavy, aby tak lépe vynikly souvislosti mezi vnějším zatížením, jednotlivými složkami vnitřních sil a případy namáhání. Je rovněž vhodné rozložit vnější osamělé i spojitě zatížení nosníku na složky rovnoběžné se souřadnicovými osami, a rozložit je do osy nosníku a doplnit příslušnými osamělými i spojitými zkrucujícími momenty. Statické vyšetřování prostorově zatíženého nosníku spočívá v tom, že po stanovení reakcí a vnějších vazeb určujeme složky vnitřních sil v charakteristických průřezích nosníku. Pomocí nich pak kreslíme obrazce normálových sil N , posouvajících sil V_y , V_z , ohybových momentů M_y , M_z a kroutících momentů $T = M_x$. Dodržujeme přitom zásadu, že N , V_y , M_y , T vynášíme

ve svislé rovině xz a V_y , M_z ve vodorovné rovině xy podle znaménkové konvence na obr. 15.3. Ohybové momenty M_y a M_z vynášíme vždy na stranu tažených vláken průřezu nosníku.



Obr. 15.3. Znaménková konvence pro pořadnice N , V_y , V_z , $T = M_x$, M_y , M_z

Příklad 15.1

Průběh složek vnitřních sil na přímém vodorovném konzolovém nosníku obdélníkového průřezu pro prostorové zatížení $F_1 = F_3 = 1$ kN, $F_2 = 2$ kN, $F_4 = 1,5$ kN, $F_5 = 2,6$ kN, $q = 2$ kNm⁻¹, $\varphi = 30^\circ$, $M_{dx} = 1$ kNm (obr. 15.4a).

Řešení

Spojitě rovnoměrné šikmé zatížení q rozložíme do dvou pravoúhlých složek q_y , q_z rovnoběžných s osami y , z

$$q_y = q \cos \varphi = 2 \cdot \cos 30^\circ = 1,73 \text{ kNm}^{-1}, \quad q_z = q \sin \varphi = 2 \cdot \sin 30^\circ = 1,0 \text{ kNm}^{-1}.$$

Posuneme-li rovnoběžně osamělá břemena F_1 , F_2 , ..., F_5 a spojitá rovnoměrná zatížení q_y , q_z tak, aby procházela střednicí nosníku, musíme doplnit jejich účinek momentovým zatížením:

$$F_1: M_{1,y} = F_1 \cdot \frac{h}{2} = 1 \cdot 0,4 = 0,4 \text{ kNm}, \quad M_{1,z} = -F_1 \cdot \frac{d}{2} = -1 \cdot 0,2 = -0,2 \text{ kNm},$$

$$F_2: M_{2,x} = -F_2 \cdot \frac{h}{2} = -2 \cdot 0,4 = -0,8 \text{ kNm},$$

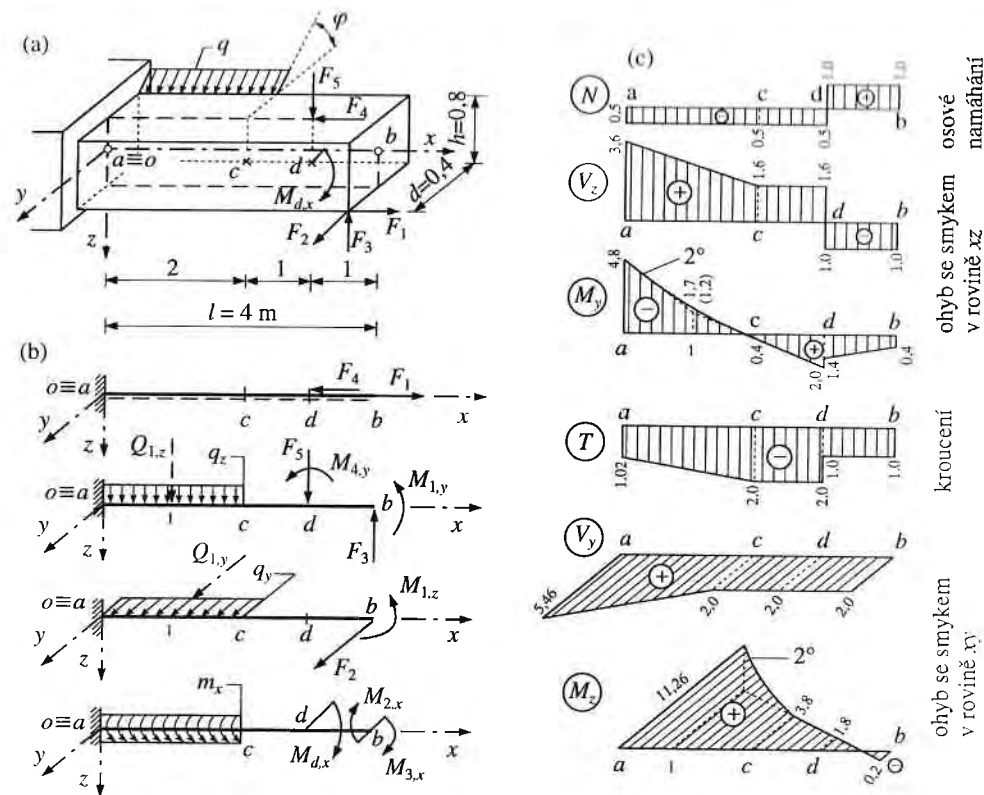
$$F_3: M_{3,x} = -F_3 \cdot \frac{d}{2} = -1 \cdot 0,2 = -0,2 \text{ kNm},$$

$$F_4: M_{4,y} = F_4 \cdot \frac{h}{2} = 1,5 \cdot 0,4 = 0,6 \text{ kNm}.$$

V případě částečných rovnoměrných spojitých zatížení q_y , q_z připojíme dvě rovnoměrná zkrucující momentová zatížení o výsledné intenzitě

$$m_x = q_y \cdot \frac{h}{2} - q_z \cdot \frac{d}{2} = 1,73 \cdot 0,4 - 1 \cdot 0,2 = 0,49 \text{ kNm} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Statické schéma zatížení v ose x , v rovinách xz a xy a zkrucujícího momentového zatížení k ose nosníku je uvedeno na obr. 15.4b.



Obr. 15.4. Konzolový vodorovný nosník s prostorovým zatížením

U konzolového nosníku řešíme složky vnitřních sil postupem z volného konce (v našem případě zprava) a nepotřebujeme předem znát složky reakce vetknutí a .

Průběhy N , V_z , M_y , nakreslené na prvních třech diagramech v obr. 15.4c, od zatížení působícího ve svislé rovině xz , určujeme stejným postupem jako u rovinně namáhaného nosníku (viz odstavec 11.4.5) a uvádíme je bez výpočtu.

Silové a momentové zatížení, působící ve vodorovné rovině xy nosníku, vyvolává složky vnitřních sil V_y , M_z , jejichž průběhy jsou nakresleny na pátém a šestém diagramu v obr. 15.4c z hodnot

$$\begin{aligned} V_{b,y} &= V_{c,y} = F_2 = 2 \text{ kN}, \quad V_{a,y} = F_2 + q_y \cdot 2 = 2 + 1,73 \cdot 2 = 5,46 \text{ kN}, \\ M_{b,z} &= -M_{1,z} = -0,2 \text{ kNm}, \quad M_{d,z} = F_2 \cdot 1 - M_{1,z} = 2 \cdot 1 - 0,2 = 1,8 \text{ kNm}, \\ M_{c,z} &= F_2 \cdot 2 - M_{1,z} = 2 \cdot 2 - 0,2 = 3,8 \text{ kNm}, \\ M_{a,z} &= F_2 \cdot 4 - M_{1,z} - Q_{1,y} \cdot 1 = 2 \cdot 4 - 0,2 + 1,73 \cdot 2 \cdot 1 = 11,26 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

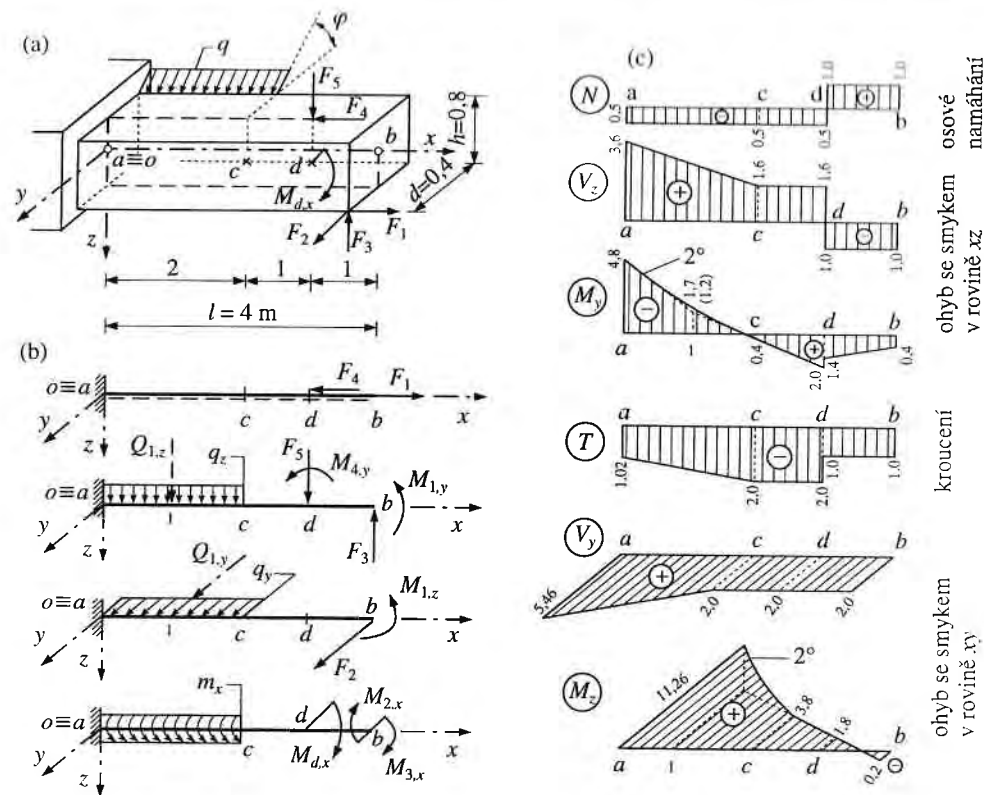
Zkrucující momentové zatížení na obr. 15.4b vyvolává krouticí momenty $T = M_x$, jejichž průběh na nosníku je nakreslen na obr. 15.4c z hodnot

$$\begin{aligned} T_{bd} &= M_{b,x} = M_{c,x} + M_{1,x} = -0,8 - 0,2 = -1,0 \text{ kNm} = T_{db}, \\ T_{cb} &= T_{db} + M_{d,x} = -1,0 - 1,0 = -2,0 \text{ kNm} = T_{cd} = T_{ca}, \\ T_{ac} &= T_{ca} + m_x \cdot 2 = -2,0 + 0,49 \cdot 2 = -1,02 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

Zápis označení složek vnitřních sil, např. v průřezu b nosníku, je možný též ve tvaru $V_{y,b}$, $V_{z,b}$, $M_{y,b}$, $M_{z,b}$, $T_b = M_{x,b}$.

Z hodnot složek vnitřních sil v průřezu a konzolového nosníku (obr. 15.4c) lze stanovit velikosti složek reakce dokonalého vetknutí a :

$$R_{ax} = 0,5 \text{ kN} (\rightarrow), \quad R_{ay} = 5,46 \text{ kN} (\nearrow), \quad R_{az} = 3,6 \text{ kN} (\uparrow),$$



Obr. 15.4. Konzolový vodorovný nosník s prostorovým zatížením

U konzolového nosníku řešíme složky vnitřních sil postupem z volného konce (v našem případě zprava) a nepotřebujeme předem znát složky reakce vetknutí a .

Průběhy N , V_z , M_y , nakreslené na prvních třech diagramech v obr. 15.4c, od zatížení působícího ve svislé rovině xz , určujeme stejným postupem jako u rovinně namáhaného nosníku (viz odstavec 11.4.5) a uvádíme je bez výpočtu.

Silové a momentové zatížení, působící ve vodorovné rovině xy nosníku, vyvolává složky vnitřních sil V_y , M_z , jejichž průběhy jsou nakresleny na pátém a šestém diagramu v obr. 15.4c z hodnot

$$V_{b,y} = V_{c,y} = F_2 = 2 \text{ kN}, \quad V_{a,y} = F_2 + q_y \cdot 2 = 2 + 1,73 \cdot 2 = 5,46 \text{ kN},$$

$$M_{b,z} = -M_{1,z} = -0,2 \text{ kNm}, \quad M_{d,z} = F_2 \cdot 1 - M_{1,z} = 2 \cdot 1 - 0,2 = 1,8 \text{ kNm},$$

$$M_{c,z} = F_2 \cdot 2 - M_{1,z} = 2 \cdot 2 - 0,2 = 3,8 \text{ kNm},$$

$$M_{a,z} = F_2 \cdot 4 - M_{1,z} - Q_{1,y} \cdot 1 = 2 \cdot 4 - 0,2 + 1,73 \cdot 2 \cdot 1 = 11,26 \text{ kNm}.$$

Zkrucující momentové zatížení na obr. 15.4b vyvolává krouticí momenty $T = M_x$, jejichž průběh na nosníku je nakreslen na obr. 15.4c z hodnot

$$T_{bd} = M_{b,x} = M_{2,x} + M_{3,x} = -0,8 - 0,2 = -1,0 \text{ kNm} = T_{db},$$

$$T_{dc} = T_{db} + M_{d,x} = -1,0 - 1,0 = -2,0 \text{ kNm} = T_{cd} = T_{ca},$$

$$T_{ac} = T_{ca} + m_x \cdot 2 = -2,0 + 0,49 \cdot 2 = -1,02 \text{ kNm}.$$

Zápis označení složek vnitřních sil, např. v průřezu b nosníku, je možný též ve tvaru $V_{y,b}$, $V_{z,b}$, $M_{y,b}$, $M_{z,b}$, $T_b = M_{x,b}$.

Z hodnot složek vnitřních sil v průřezu a konzolového nosníku (obr. 15.4c) lze stanovit velikosti složek reakce dokonalého vetknutí a :

$$R_{ax} = 0,5 \text{ kN} (\rightarrow), \quad R_{ay} = 5,46 \text{ kN} (\nearrow), \quad R_{az} = 3,6 \text{ kN} (\uparrow).$$