

ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY

BDA001

Hlavní osy průřezu, hlavní kvadratické momenty. Mohrova kružnice.
Poloměry setrvačnosti, elipsa setrvačnosti, polární kvadratické momenty.

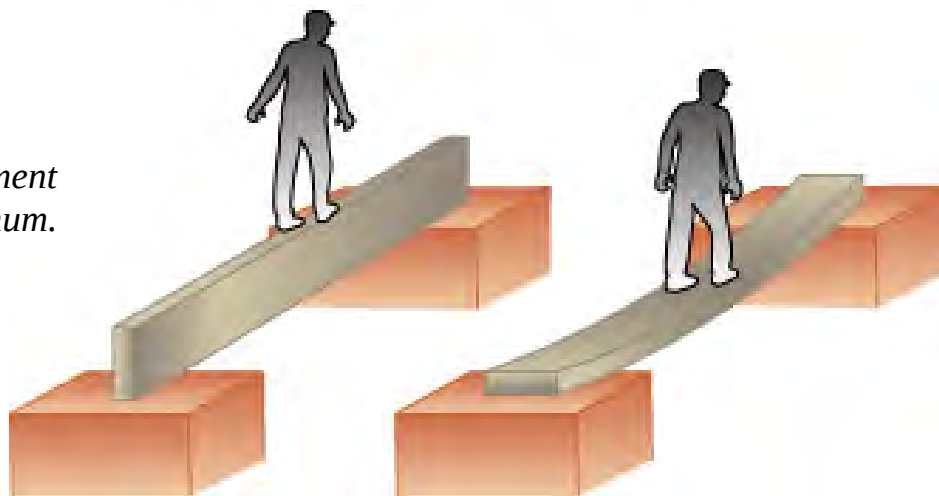
Zdeněk Kala

Moment setrvačnosti

Hlavní centrální moment setrvačnosti je měřítkem „účinnosti“ tvaru průřezu odolávajícího ohybu

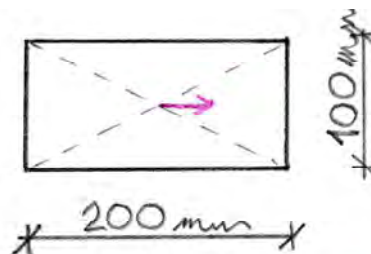
Centrální = osa vychází z těžiště

Hlavní = osa je natočená tak, že moment setrvačnosti je minimum, nebo maximum.



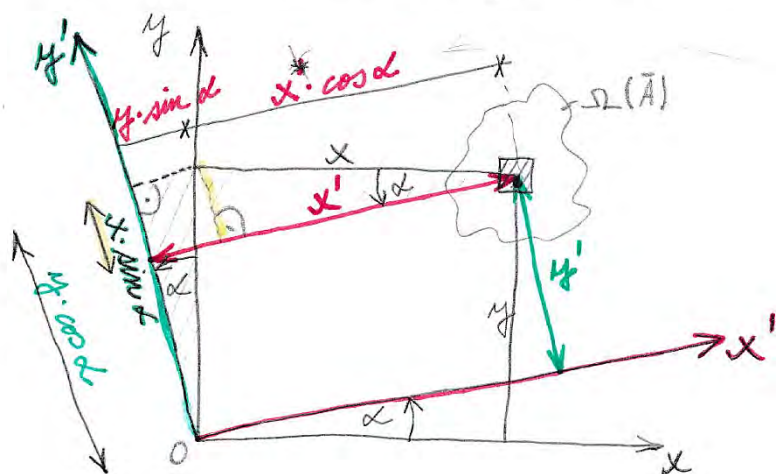
Určité tvary odolávají ohybu lépe než jiné

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 200^3$$
$$= 66,67 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$



$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 200 \cdot 100^3$$
$$= 16,67 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Transformační vztahy pro momenty setrvačnosti a derivací k posouváním osám. Klomí momenty setrvačnosti



$$x' = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha$$

$$y' = -x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha$$

Momenty setrvačnosti $I_{x'}$, $I_{y'}$ a derivací moment $D_{x'y'}$ porovnáme s výrazem k posouváním osám x, y mají vztah

$$\begin{aligned} (1) \quad I_{x'} &= \int_{\bar{A}} y'^2 dA = \int_{\bar{A}} (-x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha)^2 dA = \\ &= \sin^2 \alpha \int_{\bar{A}} x^2 dA - \sin 2\alpha \int_{\bar{A}} xy dA + \cos^2 \alpha \int_{\bar{A}} y^2 dA = \\ &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - D_{xy} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad I_{y'} &= \int_{\bar{A}} x'^2 dA = \int_{\bar{A}} (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \cos^2 \alpha \int_{\bar{A}} x^2 dA + \sin 2\alpha \int_{\bar{A}} xy dA + \sin^2 \alpha \int_{\bar{A}} y^2 dA = \\ &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + D_{xy} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

Pozn: Oblast Ω přes kterou integrujeme, označíme jako $\bar{A}$.

Momenty setrvačnosti mají extrémní hodnoty k takovým osám x_0, y_0 , k nimž má derivací moment nulovou hodnotu. Hledáme příslušný úhel α těchto os.

$$\begin{aligned}
 (3) \quad D_{x'y'} &= \int_{\bar{A}} x'y' dA = \int_{\bar{A}} (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) dA = \\
 &= \sin \alpha \cos \alpha \left(\int_{\bar{A}} y^2 dA - \int_{\bar{A}} x^2 dA \right) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_{\bar{A}} xy dA = \\
 &= \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\alpha + D_{xy} \cos 2\alpha
 \end{aligned}$$

Extrémní hodnotu $I_{x'}$ dostáváme, pokud derivujeme $I_{x'}$ podle α a položíme rovnou nule $[\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha]$

$$(4) \quad \frac{d I_{x'}}{d \alpha} = -2 I_x \cos \alpha \sin \alpha + 2 I_y \sin \alpha \cos \alpha - 2 D_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

posadíme za α α_0 a upravíme (má násobeno - 1 a dělíme 2)

$$(5) \quad \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\alpha + D_{xy} \cos 2\alpha = D_{x_0 y_0} = 0$$

$\nwarrow$ viz (3)

$$(6) \quad \bullet \quad \tan 2\alpha_0 = \frac{2 D_{xy}}{I_y - I_x}$$

Řešením dostáváme úhly α_0 a $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$, které určují polohu dvou os x_0, y_0 navzájem kolmých $x_0, y_0 \dots$ hlavních os setrvačnosti.

$$\begin{aligned}
 (14) \quad I_{x_0} &= I_x \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - D_{xy} \sin 2\alpha_0 \leftarrow (1) \\
 I_{y_0} &= I_x \sin^2 \alpha_0 + I_y \cos^2 \alpha_0 + D_{xy} \sin 2\alpha_0 \leftarrow (2)
 \end{aligned}$$

vzájme geometrické vztahy.

$$\cos^2 \alpha_0 = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha_0) \quad \sin^2 \alpha_0 = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha_0)$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad I_{x_0} &= I_x \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha_0) + I_y \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha_0) - D_{xy} \sin 2\alpha_0 = \\
 &= \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cos 2\alpha_0 - D_{xy} \sin 2\alpha_0
 \end{aligned}$$

$$\text{odkud pro } I_{y_0} = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cos 2\alpha_0 + D_{xy} \sin 2\alpha_0$$

Plati, že

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{\tan 2\alpha_0}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha_0}} =$$

$$\cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha_0}} =$$

$$(6) \rightarrow \sin 2\alpha_0 = \frac{\frac{2 D_{xy}}{I_y - I_x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2 D_{xy}}{I_y - I_x} \right)^2}}$$

$$\cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2 D_{xy}}{I_y - I_x} \right)^2}}$$

Derivativum des (8) a nahrazením cos 2 α_0 ; sin 2 α_0 a vstřín (6):

$$I_{x0} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2D_{xy}}{I_y - I_x}\right)^2}}$$

$$- D_{xy} \cdot \frac{2D_{xy}}{I_y - I_x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2D_{xy}}{I_y - I_x}\right)^2}} =$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4D_{xy}^2}{I_y^2 - 2I_y I_x + I_x^2}}} -$$

$$- \frac{2D_{xy}^2}{(I_y - I_x) \cdot \sqrt{\frac{4D_{xy}^2}{I_y^2 - 2I_y I_x + I_x^2}}} =$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2 \cdot \sqrt{\frac{I_y^2 - 2I_y I_x + I_x^2 + 4D_{xy}^2}{I_y^2 - 2I_y I_x + I_x^2}}} -$$

$$- \frac{2D_{xy}^2}{(I_y - I_x) \cdot \sqrt{\frac{I_y^2 - 2I_y I_x + I_x^2 + 4D_{xy}^2}{I_y^2 - 2I_y I_x + I_x^2}}}$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{(I_x - I_y) \cdot (I_y - I_x)}{2 \cdot \sqrt{I_y^2 - 2I_y I_x + I_x^2 + 4D_{xy}^2}} -$$

$$- \frac{2D_{xy}^2}{\sqrt{I_y^2 - 2I_y I_x + I_x^2 + 4D_{xy}^2}} = \frac{I_x + I_y}{2} -$$

$$\frac{I_x^2 - 2I_x I_y + I_y^2 + 4D_{xy}^2}{2 \cdot \sqrt{I_x^2 - 2I_x I_y + I_y^2 + 4D_{xy}^2}} =$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{I_x^2 - 2I_x I_y + I_y^2 + 4D_{xy}^2}$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + D_{xy}^2}$$

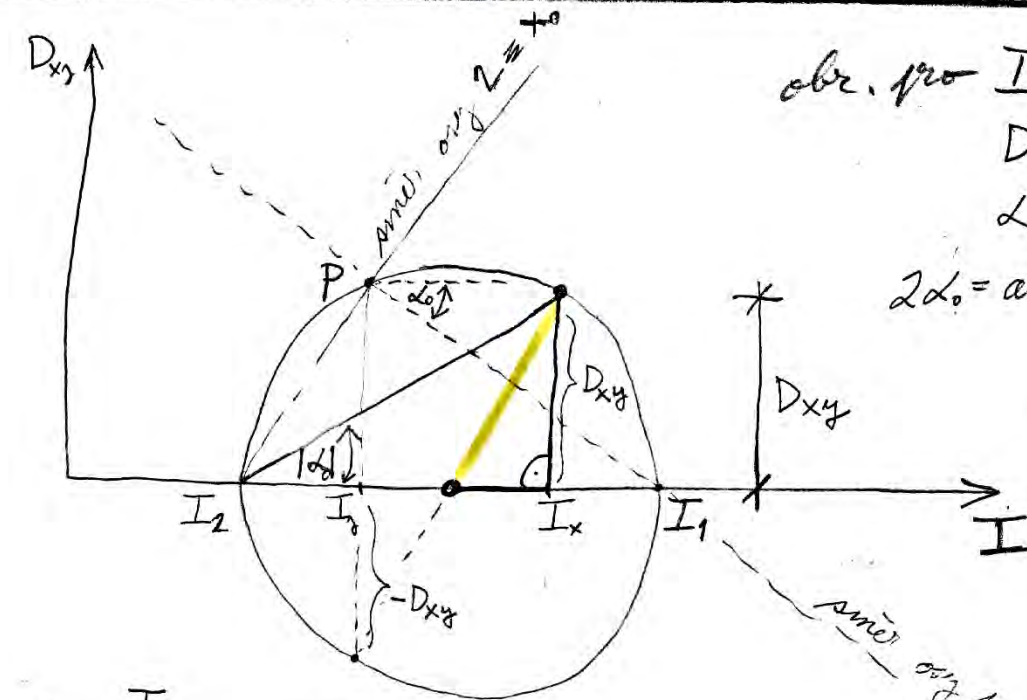
Dosadením do (8) s použitím (6) dostaneme

$$I_{\max, \min} = I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 D_{xy}^2}$$

Mohrova kružnica

stred kružnice polomer kružnice

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + D_{xy}^2}$$

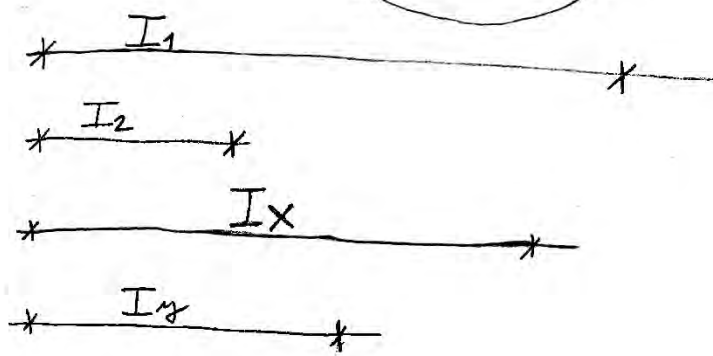


obr. pre $I_x > I_y$

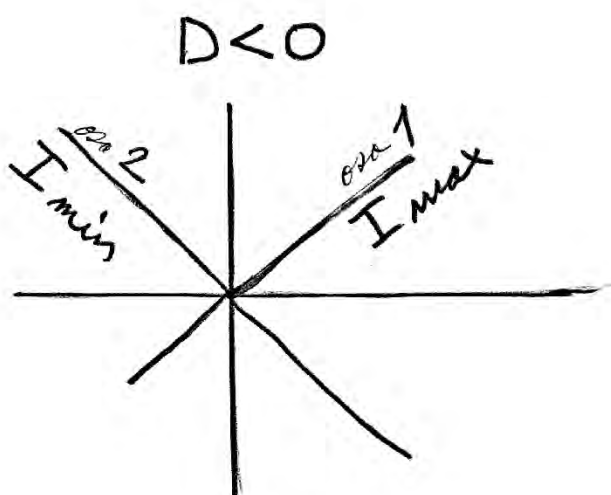
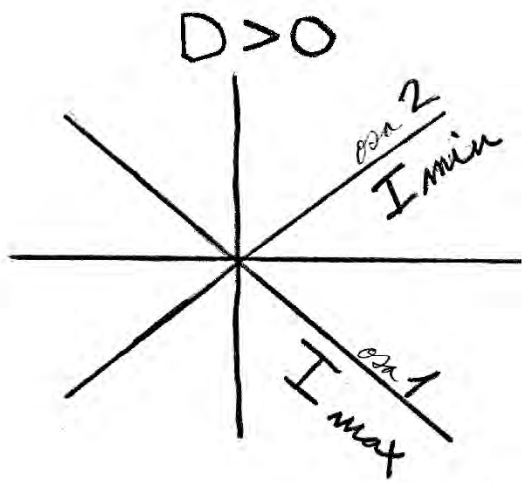
$$D_{xy} > 0$$

$$\alpha_0 < 0$$

$$2\alpha_0 = \arctan \frac{2D_{xy}}{I_y - I_x}$$



kladné α_0 je
proti smeru hodin
hodinových ručičiek



v praxi velmi často potřebujeme centrální (nebo hlavní centrální) momenty setrvačnosti průřezů složených z rovinných obrazců jako např. obdélník, trojúhelník, kruh atd.

Postup výpočtu:

- 1) Zvolíme pomocnou souřadnicovou soustavu x, y
- 2) Rozdělíme složený obrazec na n jednodušších prvků $i = 1, \dots, n$.
- 3) Pro každý prvek určíme plochu (plošný obsah) A_i a souřadnice jeho těžiště x_{iA}, y_{iA} .
- 4) Určíme plochu A celého složeného obrazce (průřezu) $A = \sum_{i=1}^n A_i$ a souřadnice těžiště celého sl. obrazce $\bar{x}_A, \bar{y}_A$, kterým proložíme centrální osy setrvačnosti průřezu x_A, y_A rovnoběžné s osami x, y .
- 5) Pro každý prvek určíme ramena těžiště A_i $C_i = y_{iA} - \bar{y}_A$ i $d_i = x_{iA} - \bar{x}_A$.
- 6) Vypočítáme centrální kvadratické momenty setrvačnosti celého složeného obrazce

$$I_{x_A} = \sum_{i=1}^n I_{x_{iA}} + C_i^2 \cdot A_i \quad I_{y_A} = \sum_{i=1}^n I_{y_{iA}} + d_i^2 \cdot A_i$$

$$D_{x_A y_A} = \sum_{i=1}^n D_{x_{iA} y_{iA}} + C_i \cdot d_i \cdot A_i$$

kde $I_{x_{iA}}, I_{y_{iA}}, D_{x_{iA} y_{iA}}$ jsou (tabulkové) kvadratické momenty dílčích obrazců (prvků).

U otáčení se kv. momenty odečítají (momenty setrvačnosti mají znaménko mínus, deformační momenty s opačným znaménkem).

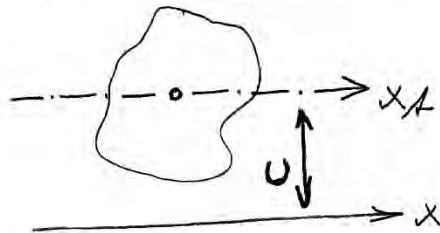
Poloměr setrvačnosti

Poloměr setrvačnosti i_x rovnajícího obrace k ose x je roven druhé mocnině z polohy momentu setrvačnosti I_x k této ose a obsahu obrace A .

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

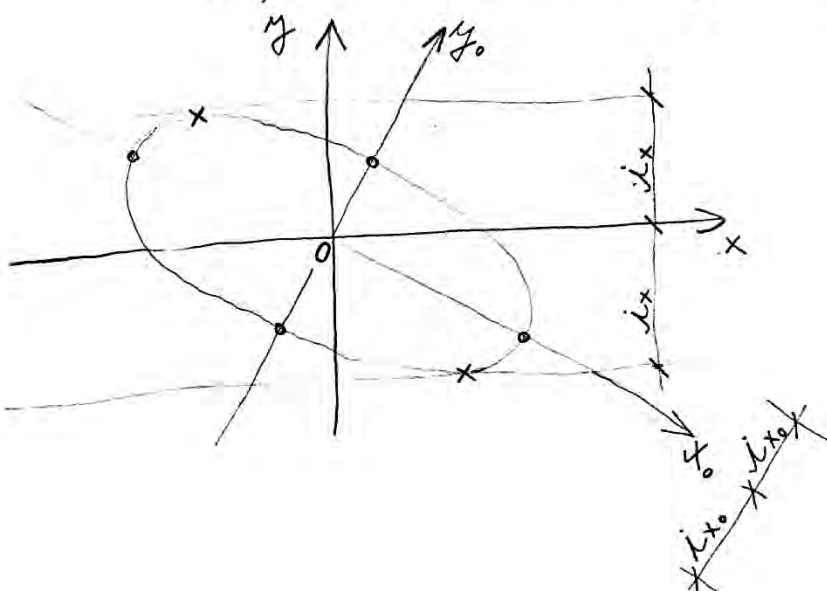
Poloměr setrvačnosti ke dvěma vzájemně rovnoběžným osám, z nichž jedna prochází těžištěm.

$$i_x^2 = i_{xL}^2 + c^2$$

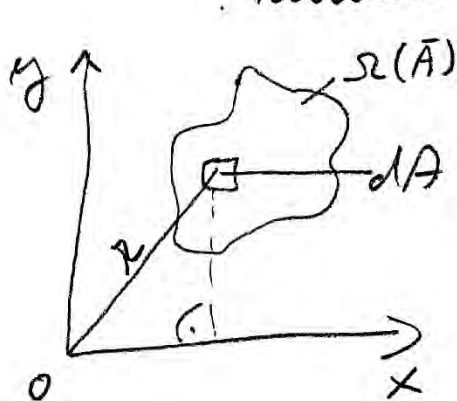


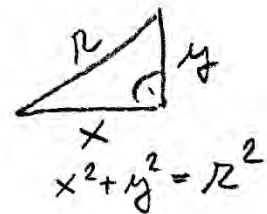
Elipsa setrvačnosti

Představme-li daný bodem O v rovině obrace osy setrvačnosti různými směry, přísluší každé ose, např. x , jistý moment setrvačnosti I_x a tedy i jistá veličnost poloměru setrvačnosti i_x . Vedeme-li přímkou rovnoběžnou s osami setrvačnosti se vzdálenostech příslušných poloměrů setrvačnosti, obléčí tyto přímky křivku v tvaru elipsy setrvačnosti pro daný bod.



Polární moment setrvačnosti:

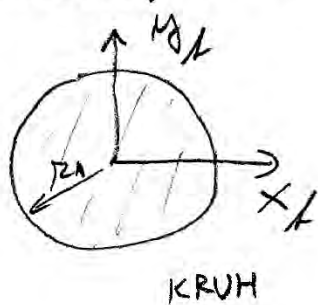


$$I_o = \int_A r^2 dA =$$


$$= \int_A (x^2 + y^2) dA =$$

$$= \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x$$

Vzorek má význam zejména polární moment setrvačnosti k těžištním osám, viz kroucení v 2. ročníku.

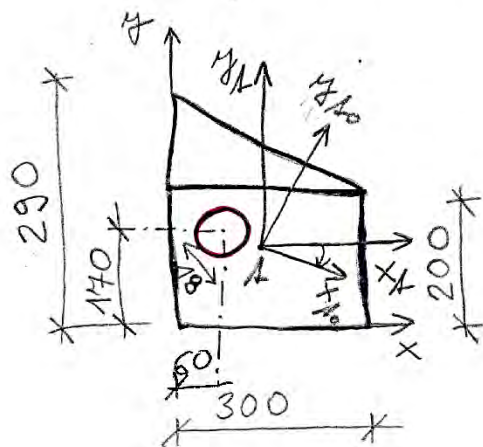


$$I_o = I_{x1} + I_{y1} = \frac{\pi r_1^4}{4} + \frac{\pi r_1^4}{4}$$

$$= \frac{\pi r_1^4}{2}$$

Pozn.: I_o se někdy označuje I_p

Pr.: Vypočítajte hlavné centrálné momenty zvrátenia.



Težisko:

$$U_x = 300 \cdot 200 \cdot 100 + \frac{90 \cdot 300}{2} \cdot 230 - \pi \cdot 9^2 \cdot 170 = 9,062 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$U_y = 300 \cdot 200 \cdot 150 + \frac{90 \cdot 300}{2} \cdot 100 - \pi \cdot 9^2 \cdot 60 = 10,335 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$A = 300 \cdot 200 + \frac{90 \cdot 300}{2} - \pi \cdot 9^2 = 43,25 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

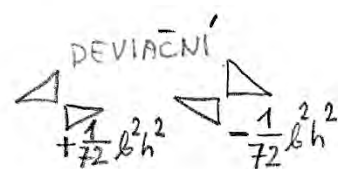
$$\bar{x}_A = \frac{U_x}{A} = \frac{9,062 \cdot 10^6 \text{ mm}^3}{43,25 \cdot 10^3 \text{ mm}^2} = 123,717 \text{ mm}$$

$$\bar{y}_A = \frac{U_y}{A} = \frac{10,335 \cdot 10^6 \text{ mm}^3}{43,25 \cdot 10^3 \text{ mm}^2} = 141,094 \text{ mm}$$

$$I_{x_A} = \frac{1}{12} 300 \cdot 200^3 + 300 \cdot 200 \cdot (123,717 - 100)^2 + \frac{1}{36} 300 \cdot 90^3 + \frac{90 \cdot 300}{2} (230 - 123,717)^2 - \left[\frac{\pi \cdot 9^4}{4} + \pi \cdot 9^2 \cdot (170 - 123,717)^2 \right] = 391,742 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_A} = \frac{1}{12} 200 \cdot 300^3 + 200 \cdot 300 \cdot (141,094 - 150)^2 + \frac{1}{36} 90 \cdot 300^3 + \frac{90 \cdot 300}{2} (100 - 141,094)^2 - \left[\frac{\pi \cdot 9^4}{4} + \pi \cdot 9^2 \cdot (60 - 141,094)^2 \right] = 543,378 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$D_{x_A y_A} = 0 + 300 \cdot 200 \cdot (150 - 141,094) \cdot (100 - 123,717) - \frac{300^2 \cdot 90^2}{42} + \frac{90 \cdot 300}{2} \cdot (100 - 141,094) (230 - 123,717) - \left[0 + \pi \cdot 9^2 \cdot (60 - 141,094) \cdot (170 - 123,717) \right] = -80,806 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$



$$\text{tg } 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot D_{x_A y_A}}{I_{y_A} - I_{x_A}} = \frac{2 \cdot -80,806}{543,378 - 391,742} = -1,066 \Rightarrow \alpha_0 = -23,415^\circ$$

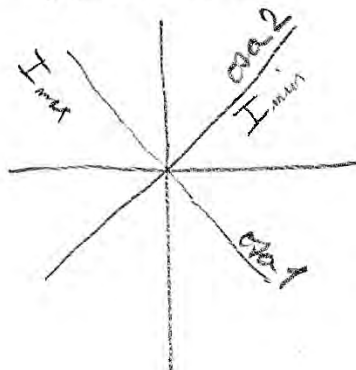
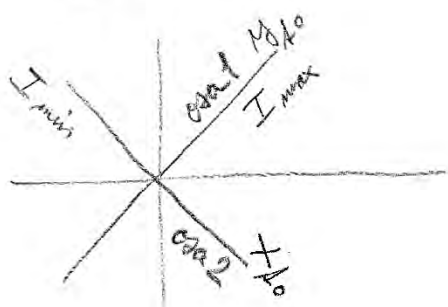
$$I_{\max/\min} = \frac{(391,742 + 543,378) \cdot 10^6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{391,742 \cdot 10^6 - 543,378 \cdot 10^6}{2} \right)^2 + (80,806 \cdot 10^6)^2} =$$

$$= \begin{cases} 578,37 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \\ 356,78 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

$D_{x_{A_0}, y_{A_0}} = 0$... derivácie moment k hlavným centrálnym osám sú rovné nule

$$D_{x_A y_A} = -80,806 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 < 0$$

$D > 0$
(NENASTALO)



- poloměr setravnosti

$$i_{xL} = \sqrt{\frac{I_{xL}}{A}}$$

$$i_{yL} = \sqrt{\frac{I_{yL}}{A}}$$

$$i_{xL} = \sqrt{\frac{391,772 \cdot 10^6}{73,25E3}} = 73,133_{\text{mm}} \quad i_{yL} = \sqrt{\frac{543,378E6}{73,25E3}} = 86,129_{\text{mm}}$$

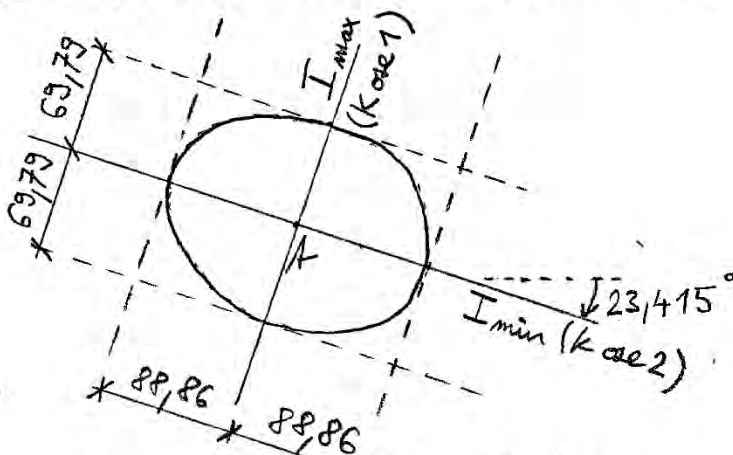
- hlavní centrální poloměry setravnosti

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}}$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$$

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{578,37E6}{73,25E3}} = 88,86_{\text{mm}} \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{356,78E6}{73,25E3}} = 69,79_{\text{mm}}$$

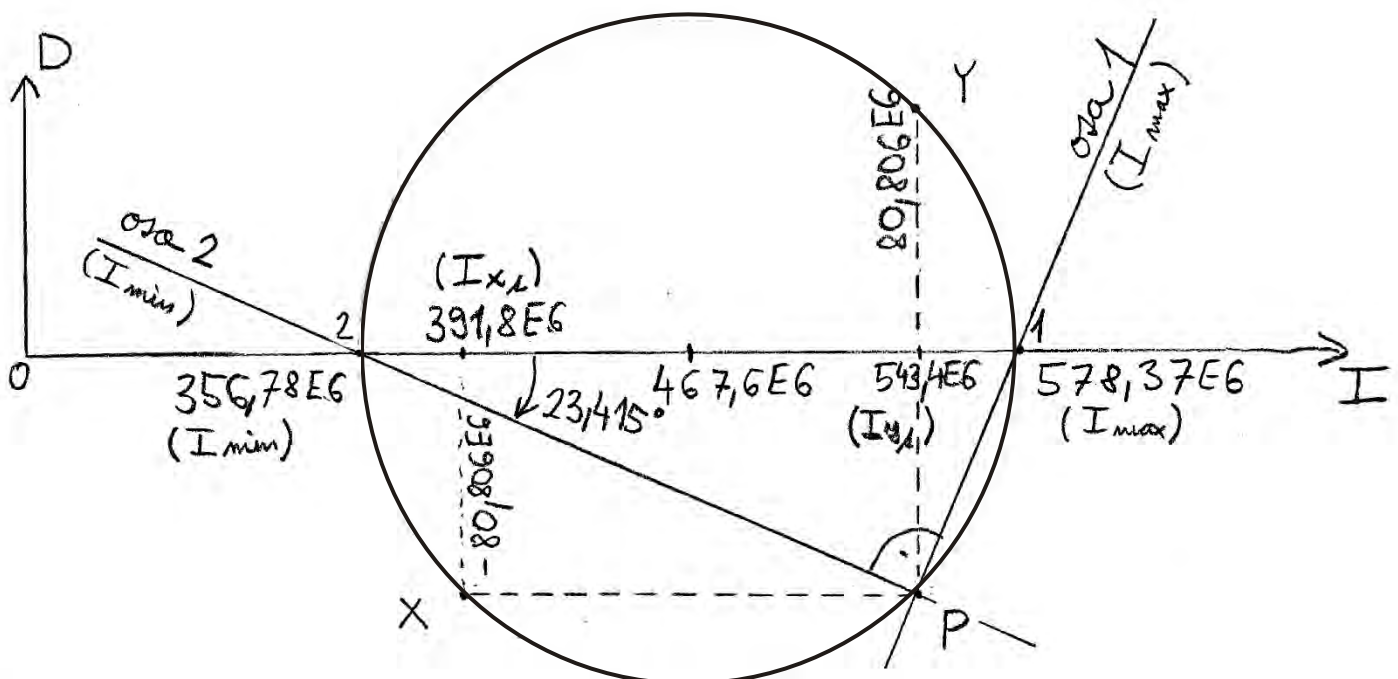
- centrální elipsa setravnosti



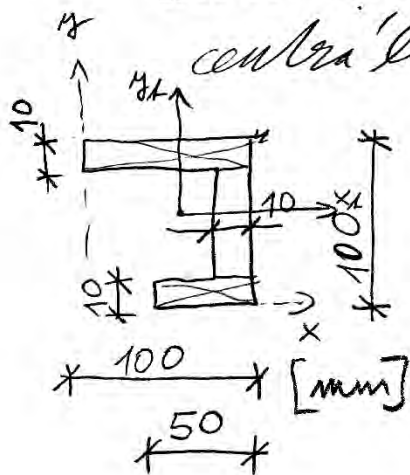
- polární moment setravnosti

$$\begin{aligned} I_o &= 391,772E6 + 543,378E6 = \\ &= 578,37E6 + 356,78E6 = \\ &= 935,15E6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

- Mohrova kružnice



Príklad: Určte početne a graficky smér hlavných centrálnych os srovnávosti a hodnoty hlavných centrálnych momentov srovnávosti.



1) Tížištie

$$y_A = \frac{S_x}{A} = \frac{50 \cdot 10 \cdot 5 + 80 \cdot 10 \cdot 50 + 100 \cdot 10 \cdot 95}{50 \cdot 10 + 80 \cdot 10 + 100 \cdot 10}$$

$$= \frac{134500}{2300} = 59,7826087 \text{ mm}$$

$$x_A = \frac{S_y}{A} = \frac{50 \cdot 10 \cdot 45 + 80 \cdot 10 \cdot 95 + 100 \cdot 10 \cdot 50}{2300}$$

$$= \frac{163500}{2300} = 71,08695652 \text{ mm}$$

2) Momenty srovnávosti

$$I_{x_A} = \frac{1}{12} \cdot 50 \cdot 10^3 + 50 \cdot 10 \cdot (5 - 59,78261)^2 +$$

$$+ \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 80^3 + 10 \cdot 80 \cdot (50 - 59,78261)^2 +$$

$$+ \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 10^3 + 100 \cdot 10 \cdot (95 - 59,7826)^2 = 3,257 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_A} = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 50^3 + 10 \cdot 50 \cdot (45 - 71,087)^2 +$$

$$+ \frac{1}{12} \cdot 80 \cdot 10^3 + 80 \cdot 10 \cdot (95 - 71,087)^2 +$$

$$+ \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 100^3 + 10 \cdot 100 \cdot (50 - 71,087)^2 = 1,85395 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$D_{xy} = 50 \cdot 10 \cdot (45 - 71,086956) \cdot (5 - 59,7826087) +$$

$$+ 80 \cdot 10 \cdot (95 - 71,086956) \cdot (50 - 59,7826087) +$$

$$+ 100 \cdot 10 \cdot (50 - 71,086956) \cdot (95 - 59,7826087) =$$

$$= -1,03696 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot (-1,03696)}{1,853946 - 3,257} = 1,4784 \Rightarrow \alpha_0 = 55,92^\circ$$

$$I_{I_2} = \frac{3,257 + 1,85}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3,257 - 1,85}{2}\right)^2 + (-1,034)^2} =$$

$$= \begin{cases} 3,807 \cdot 10^6 \\ 1,3035 \cdot 10^6 \end{cases}$$