ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY

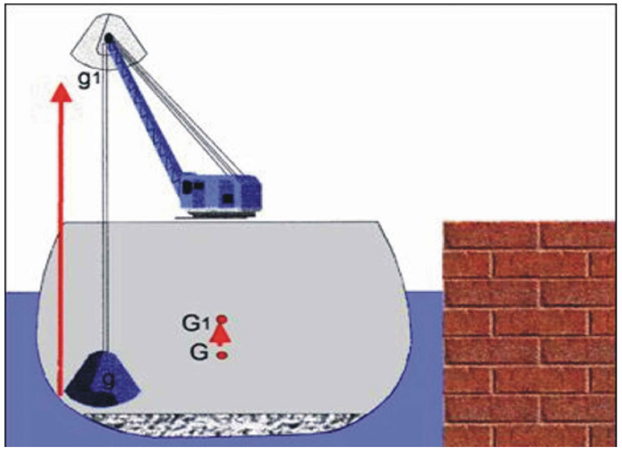
BDA001

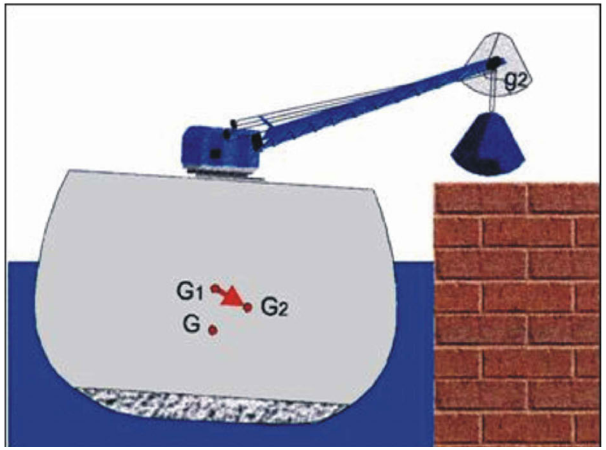
Plocha, statický moment, těžiště (analogie k řešení soustavy rovnoběžných sil). Kvadratické a deviační momenty. Steinerova věta.

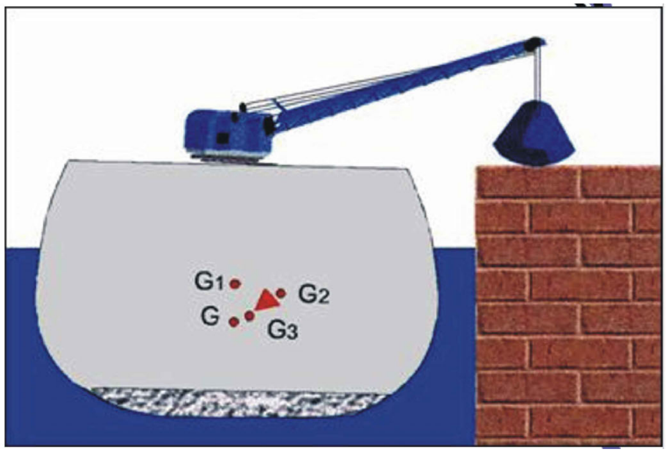
Zdeněk Kala


Těžiště

Těžiště







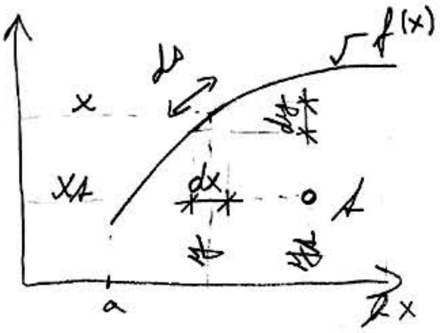
Těžiště

Geometrickým útvarem rozumíme čáru, plochu nebo těleso, jehož hustota ρ je konstantní.
Těžiště geom. útvaru je definováno jako statický střed soustavy fiktivních rovnoběžných sil v rovině (v prostoru), jež jsou rovny velikostem jednotlivých jednodušších částí útvaru a působí v těžištích těchto částí.

Těžiště rovinných čar

Rovinná křivka

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+y'^2}\,dx$$



- délka křivky

$$s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

- statický moment dU_x [dU_y] elementu křivky k ose x definujeme jako součin délky elementu ds a vzdálenosti jeho těžiště y [x] od této osy.

$$dU_x = y\cdot ds \qquad dU_y = x\,ds$$

- statický moment celé křivky má velikost

$$U_x = \int_{s} dU_x = \int_{s} y\,ds = \int_a^b y\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx = s\cdot y_A$$

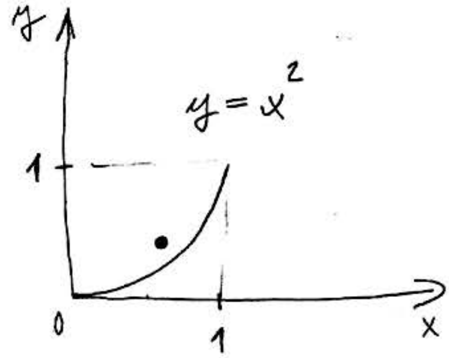
$$U_y = \int_{s} dU_y = \int_{s} x\,ds = \int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx = s\cdot x_A$$

- pravoúhlé souřadnice x_T, y_T těžiště T křivky jsou

$$x_T = \frac{U_y}{s} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx}$$

$$y_T = \frac{U_x}{s} = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx}$$

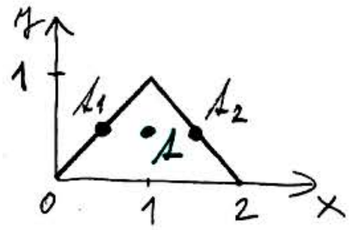
Příklad: Určete polohu těžiště paraboly.



$$x_T = \frac{\int_0^1 x\cdot\sqrt{1+(2x)^2}\,dx}{\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx} = \frac{0{,}848361}{1{,}47894} = 0{,}573627$$

$$y_T = \frac{\int_0^1 x^2\cdot\sqrt{1+(2x)^2}\,dx}{\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx} = \frac{0{,}606337}{1{,}47894} = 0{,}40998$$

Příklad: Určete polohu těžiště lomené čáry



$$U_x = \sqrt{2}\cdot 0{,}5 + \sqrt{2}\cdot 0{,}5 = \sqrt{2}$$

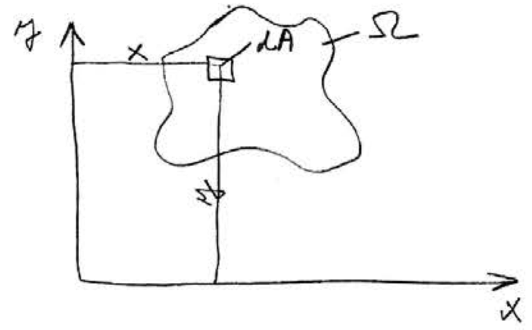
$$U_y = \sqrt{2}\cdot 0{,}5 + \sqrt{2}\cdot 1{,}5 = 2\cdot\sqrt{2}$$

$$s = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\cdot\sqrt{2}$$

$$x_T = \frac{U_y}{s} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}} = 1$$

$$y_T = \frac{U_x}{s} = \frac{\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}} = 0{,}5$$

Těžiště rovinných obrazců



$$dA = dx \cdot dy$$

$$A = \iint_\Omega dx\,dy$$

- statický moment elementu plochy k ose x je součin obsahu prvku a vzdálenosti y

$$dU_x = y \cdot dA$$

- stat. m. -||- k ose y

$$dU_y = x\,dA$$

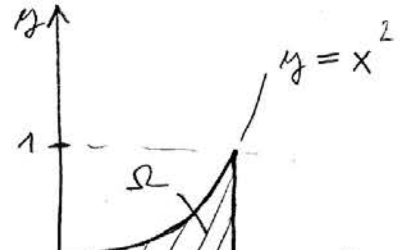
- pro celý obrazec

$$U_x = \int_\Omega dU_x = \int_\Omega y\,dA = \iint_\Omega y \cdot dx\,dy \qquad U_y = \int_\Omega dU_y = \int_\Omega x\,dA = \iint_\Omega x\,dx\,dy$$

- souřadnice těžiště určíme dle

$$x_t = \frac{U_y}{A} = \frac{\iint_\Omega x\,dx\,dy}{\iint_\Omega dx\,dy} \qquad y_t = \frac{U_x}{A} = \frac{\iint_\Omega y\,dx\,dy}{\iint_\Omega dx\,dy}$$

<u>Příklad</u>: Určete těžiště plochy Ω



$$dA = x^2 \cdot dx$$

$$A = \int_\Omega dA = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$dU_x = \frac{y}{2} \cdot dA = \frac{x^2}{2} \cdot x^2\,dx = \frac{x^4}{2}\,dx$$

$$U_x = \int_\Omega dU_x = \int_0^1 \frac{x^4}{2}\,dx = \left[\frac{x^5}{2\cdot 5}\right]_0^1 = \frac{1}{2\cdot 5} = 0{,}1$$

$$y_t = \frac{U_x}{A} = \frac{\frac{1}{2\cdot 5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2\cdot 5} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$U_y = \int_\Omega dU_y = \int_\Omega x \cdot dA = \int_0^1 x \cdot x^2\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{4}}$$

$$x_t = \frac{U_y}{A} = \frac{1/4}{1/3} = \underline{\frac{3}{4}} = 0{,}75$$

Složený rovinný obrazec

Vyšetřovaný složený rovinný obrazec rozdělíme na n jednoduchých částí (dílů), u nichž známe plošné obsahy A_i a souřadnice těžišť $t_i(x_i, y_i)$. Celkový obsah složeného obrazce je

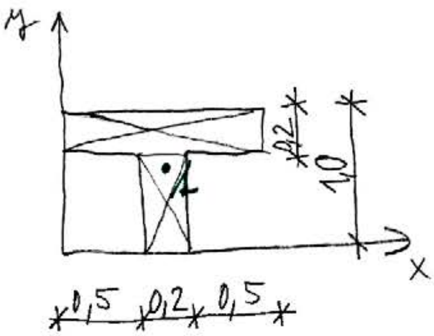
$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

Souřadnice těžiště celého obrazce můžeme určit po stanovení statických momentů $U_{x,i} = A_i \cdot y_i$ a $U_{y,i} = A_i \cdot x_i$ jednotlivých částí k osám x, y.

$$x_t = \frac{U_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad y_t = \frac{U_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

Otvor nebo výřez uvažujeme záporně.

Příklad: Určete těžiště průřezu T.



$$A = 1{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}4$$

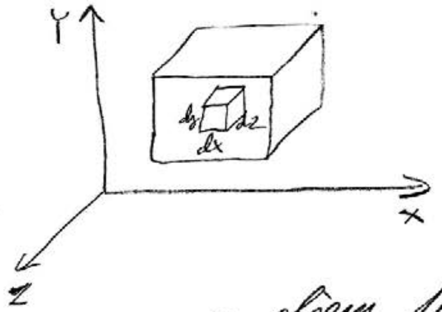
$$U_x = 1{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$$

$$y_t = \frac{U_x}{A} = \frac{0{,}28}{0{,}4} = 0{,}7$$

$$U_y = 1{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$$

$$x_t = \frac{U_y}{A} = \frac{0{,}24}{0{,}4} = 0{,}6$$

Těžiště těles



Těleso V rozdělíme na diferenciální prvky ve tvaru kvádru o hranách dx, dy, dz a objemu $dV = dx\,dy\,dz$

- objem tělesa

$$V = \int_V dV = \iiint_V dx\,dy\,dz$$

- statické momenty

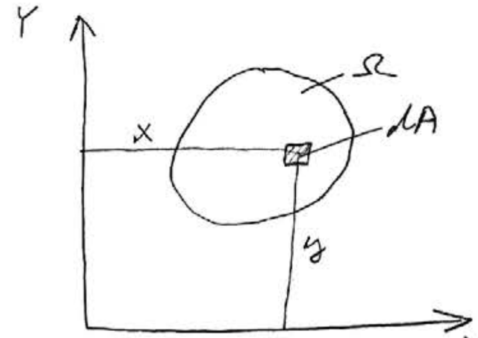
$$dU_{YZ} = x\,dV$$
$$dU_{ZX} = y \cdot dV$$
$$dU_{XY} = z \cdot dV$$
$$U_{YZ} = \int_V dU_{YZ} = \int_V x \cdot dV = \iiint_V x\,dx\,dy\,dz = V \cdot x_t$$
$$U_{ZX} = \int_V dU_{ZX} = \int_V y\,dV = \iiint_V y\,dx\,dy\,dz = V \cdot y_t$$
$$U_{XY} = \int_V dU_{XY} = \int_V z\,dV = \iiint_V z \cdot dx\,dy\,dz = V \cdot z_t$$

- těžiště

$$x_t = \frac{U_{yz}}{V} \qquad y_t = \frac{U_{zx}}{V} \qquad z_t = \frac{U_{xy}}{V}$$

Momenty setrvačnosti a deviační momenty rovinných obrazců

Moment setrvačnosti



- diferenciální element

$$dI_x = y^2 dA \quad [dI_y = x^2 dA]$$

- celý obrazec

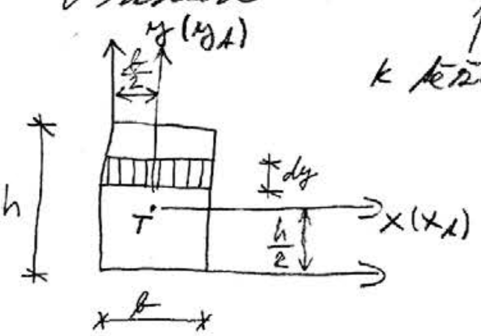
$$I_x = \int_\Omega y^2 dA \quad [m^4]$$

$$\left[I_y = \int_\Omega x^2 dA\right]$$

Moment setrvačnosti k těžišťní ose tzv. centrální mom. setrvačnosti.

Příklad : Centrální mom. setrvačnosti obdélníku

k těžišti



$$dI_{x1} = y^2 dA = y^2 \cdot b \cdot dy$$

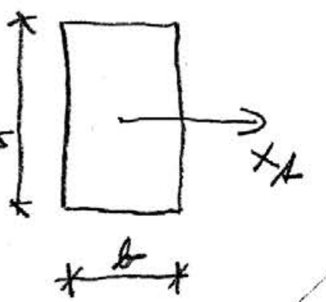
$$I_{x1} = b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = 2 \cdot b \int_0^{h/2} y^2 dy =$$

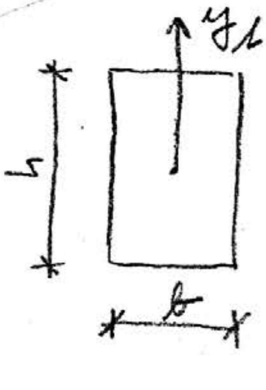
$$= 2 \cdot b \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{h/2} = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_{y1} = 2 \cdot h \int_0^{b/2} x^2 dx = \frac{1}{12} h b^3$$

Poznámka: Centrální znamená k těžišti
(centrum = těžiště)

$$\boxed{I_{x1} = \frac{1}{12} b \cdot h^3}$$

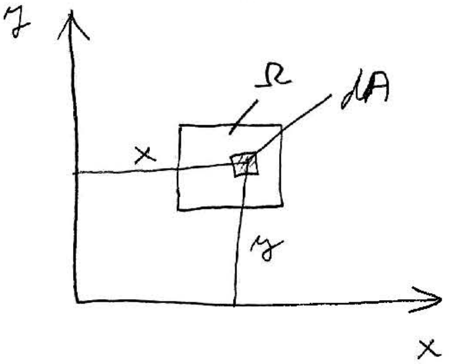




$$\boxed{I_{y1} = \frac{1}{12} h b^3}$$

(HYBNOST < HMOTNOST × RYCHLOST ; MOM. SET × ÚHL. RYCHL.)

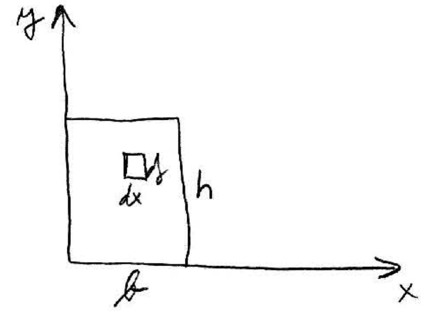
Deviační momenty



$$dD_{xy} = xy\,dA$$

$$D_{xy} = \int_\Omega dD_{xy} = \int_\Omega xy\,dA \quad [m^4]$$

Příklad: Stanovte deviační moment obdélníku k osám x, y



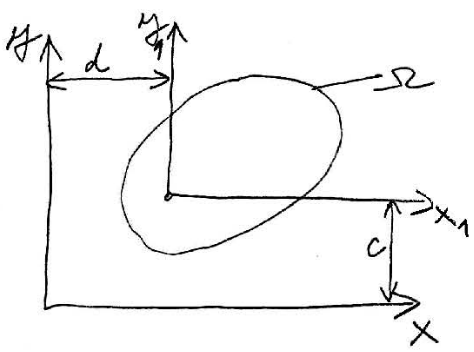
$$dD_{xy} = x\cdot y\cdot dx\,dy$$

$$D_{xy} = \int_0^b \int_0^h xy\,dx\,dy = \frac{b^2}{2}\,\frac{h^2}{2}$$

$$\left\{= b\cdot h\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{h}{2}\right\}$$

Transformační vztahy

Moment setrvačnosti k posunutým osám



$$x = x_1 + d$$

$$y = y_1 + c$$

$$I_x = \int_\Omega y^2\,dA = \int_\Omega (y_1 + c)^2\,dA =$$

$$= \int_\Omega y_1^2\,dA + 2\cdot c\int_\Omega y_1\,dA + c^2\int_\Omega dA =$$

$$= I_{x1} + 2c\,U_{x1} + Ac^2$$

$I_{x1} = \int_\Omega y_1^2\,dA$ … moment setrvačnosti obrazce k ose x_1

$U_{x1} = \int_\Omega y_1\,dA$ … statický moment obrazce k ose x_1

$A = \int_\Omega dA$ … obsah obrazce

Obdobně i pro osu y

Pokud osa x_1 je těžištní osou x_t s počátkem $O_1 \equiv t$ pak statické momenty $U_{x1} = U_{xt} = 0$ a lze psát

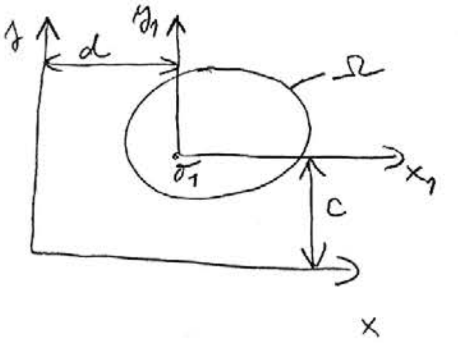
$$I_x = I_{xt} + Ac^2$$

Obdobně pro osy y

$$I_y = I_{yt} + A \cdot d^2$$

Steinerova věta: Moment setrvačnosti rovinného obrazce k libovolné ose je roven součtu momentu setrvačnosti obrazce k rovnoběžné ose procházející těžištěm a obsahu obrazce vynásobeného čtvercem vzdálenosti obou os.

Deviační moment k posunutým osám



$$D_{xy} = \int_\Omega xy \, dA = \int_\Omega (x_1 + d)(y_1 + c) \, dA =$$

$$= \int_\Omega x_1 y_1 \, dA + d \int_\Omega y_1 \, dA + c \int_\Omega x_1 \, dA + cd \int_\Omega dA =$$

$$= D_{x_1 y_1} + d \, U_{x_1} + c \, U_{y_1} + A \cdot c \cdot d$$

V případě, že jsou osy x_1, y_1 v počátku $O_1 \equiv t$ platí, že:

$$D_{xy} = D_{xt\,yt} + A \cdot c \cdot d$$

Deviační moment rovinného obrazce k libovolným pravoúhlým osám je roven součtu deviačního momentu obrazce k rovnoběžným těžištním osám a obsahu obrazce vynásobeného vzdálenostmi příslušných rovnoběžných os.

Momenty setrvačnosti a deviační momenty složených rovinných obrazců

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} I_{x,i} = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{x,i} + A_i c_i^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{xi} + A_i y_i^2 \right)$$

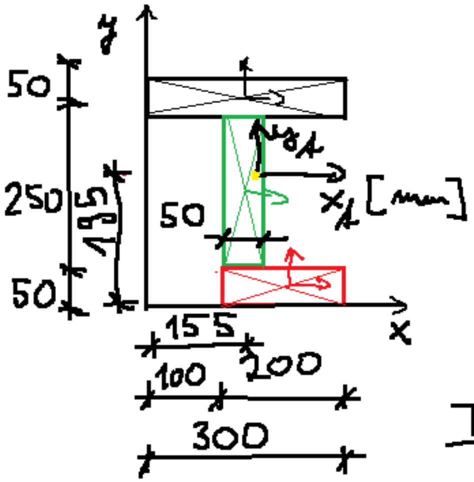
$$I_y = \sum_{i=1}^{n} I_{yi} = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{y,i} + A_i d_i^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{yi} + A_i x_i^2 \right)$$

$$D_{xy} = \sum_{i=1}^{n} D_{xy,i} = \sum_{i=1}^{n} \left(D_{x_1,y_1,i} + A_i c_i d_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(D_{x_i y_i} + A_i x_i y_i \right)$$

kde A_i je obsah i-tého dílčího obrazce

$I_{x1,i} = I_{xi}$; $I_{y1,i} = I_{yi}$; $D_{x1,y1,i} = D_{xi,yi}$ jsou momenty setrvačnosti a deviační momenty dílčích obrazců k jejich vlastním těžišťním osám rovnoběžným s osami x, y

$c_i = y_i$; $d_i = x_i$ jsou souřadnice těžišť dílčích obrazců v souřadnicové soustavě x, y.



$$S_x = 200\cdot 50\cdot 25 + 250\cdot 50\cdot\left(\frac{250}{2}+50\right) + 300\cdot 50\cdot(50+250+25) = 7312500\ mm^3$$

$$S_y = 200\cdot 50\cdot 200 + 250\cdot 50\cdot(100+25) + 300\cdot 50\cdot(150) = 5812500\ mm^3$$

$$A = 200\cdot 50 + 250\cdot 50 + 300\cdot 50 = 37500\ mm^2$$

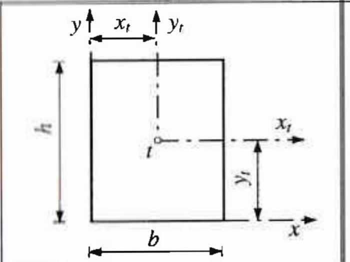
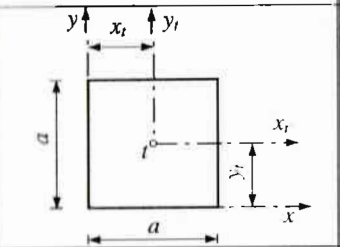
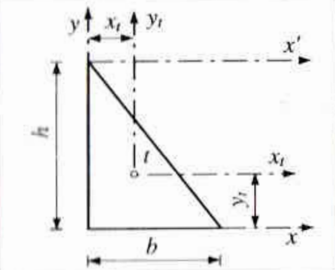
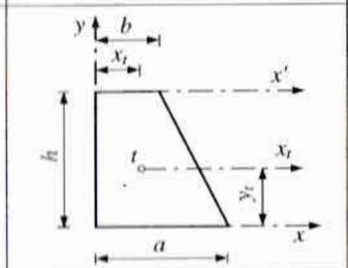
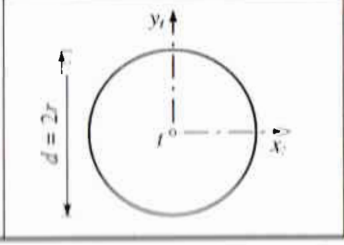
$$y_1 = \frac{S_x}{A} = \frac{7312500}{37500} = 195\ mm \qquad x_1 = \frac{S_y}{A} = \frac{5812500}{37500} = 155\ mm$$

$$I_{x_1} = \frac{1}{12}\cdot 200\cdot 50^3 + 200\cdot 50\cdot(195-25)^2 + \frac{1}{12}\, 50\cdot 250^3 + 50\cdot 250\cdot\left(195-50-\frac{250}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\cdot 300\cdot 50^3 + 300\cdot 50\cdot(350-25-195)^2 = 617{,}8125\cdot 10^6\ mm^4$$

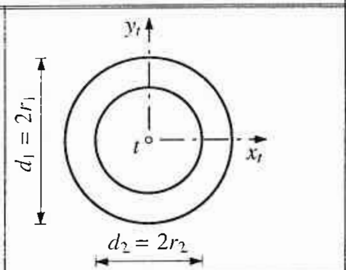
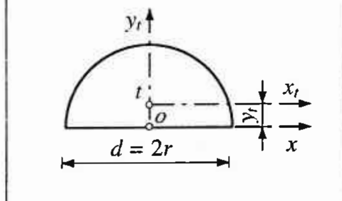
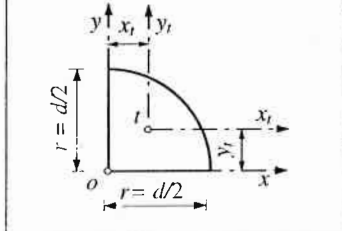
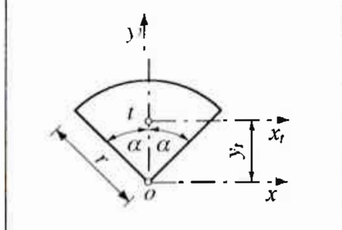
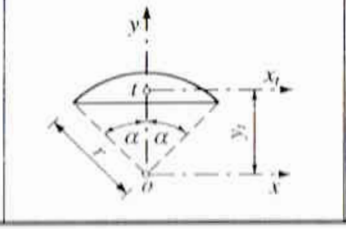
$$I_{y_1} = \frac{1}{12}\cdot 50\cdot 200^3 + 50\cdot 200\cdot(200-155)^2 + \frac{1}{12}\cdot 250\cdot 50^3 + 250\cdot 50\cdot(155-100-25)^2 + \frac{1}{12}\cdot 50\cdot 300^3 + 50\cdot 300\cdot(155-150)^2 = 180{,}3125\cdot 10^6\ mm^4$$

$$D_{x_1y_1} = 0 + 200\cdot 50\cdot(200-155)\cdot(25-195) + 0 + 250\cdot 50\cdot(100+25-155)\cdot\left(50+\frac{250}{2}-195\right) + 0 + 300\cdot 50\cdot(150-155)\cdot(50+250+25-195) = -78{,}75\cdot 10^6\ mm^4$$

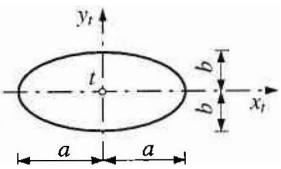
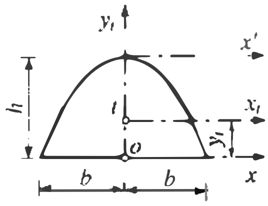
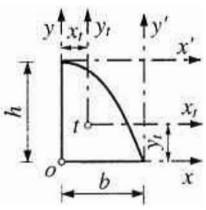
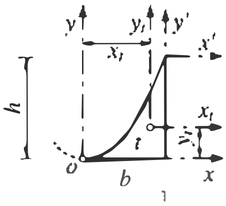
Tab. 5.1 Geometrické charakteristiky rovinných obrazců

Tvar obrazce	Obsah A, poloha těžiště t, momenty setrvačnosti I, polární I_t a deviační D
Obdélník 	$A = bh;\ x_t = \frac{b}{2};\ y_t = \frac{h}{2}$ $I_{x_t} = \frac{1}{12}bh^3;\ I_{y_t} = \frac{1}{12}hb^3;\ I_x = \frac{1}{3}bh^3;\ I_y = \frac{1}{3}hb^3$ $D_{xy} = \frac{b^2h^2}{4};\ I_t = \frac{bh}{12}\left(b^2+h^2\right)$
Čtverec 	$A = a^2;\ x_t = y_t = \frac{a}{2}$ $I_{x_t} = I_{y_t} = \frac{a^4}{12};\ I_x = I_y = \frac{a^4}{3}$ $D_{xy} = \frac{a^4}{4};\ I_t = \frac{a^4}{6}$
Pravoúhlý trojúhelník 	$A = \frac{1}{2}bh;\ x_t = \frac{b}{3};\ y_t = \frac{h}{3}$ $I_{x_t} = \frac{1}{36}bh^3;\ I_{y_t} = \frac{1}{36}hb^3;\ D_{x_ty_t} = -\frac{b^2h^2}{72}$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3;\ I_y = \frac{1}{12}hb^3;\ D_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$ $I_{x'} = \frac{1}{4}bh^3;\ I_t = \frac{bh}{36}\left(b^2+h^2\right)$
Lichoběžník 	$A = \frac{1}{2}(a+b)h;\ x_t = \frac{a^2+ab+b^2}{3(a+b)};\ y_t = \frac{(a+2b)h}{3(a+b)}$ $I_{x_t} = \frac{\left(a^2+4ab+b^2\right)h^3}{36(a+b)};\ I_{x'} = \frac{(3a+b)h^3}{12}$ $I_x = \frac{(a+3b)h^3}{12};\ D_{xy} = \frac{\left(a^2+2ab+3b^2\right)h^2}{24}$
Kruh 	$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4};\ I_{x_t} = I_{y_t} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$ $I_t = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$

Tab. 5.1 Geometrické charakteristiky rovinných obrazců (pokračování)

Tvar obrazce	Obsah A, poloha těžiště t, momenty setrvačnosti I, polární I_t a deviační D
Mezikruží 	$A = \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(d_1^2 - d_2^2\right)$ $I_{x_t} = I_{y_t} = \frac{\pi}{4}\left(r_1^4 - r_2^4\right) = \frac{\pi}{64}\left(d_1^4 - d_2^4\right)$ $I_t = \frac{\pi}{2}\left(r_1^4 - r_2^4\right) = \frac{\pi}{32}\left(d_1^4 - d_2^4\right)$
Půlkruh 	$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi d^2}{8};\ y_t = \frac{4r}{3\pi} = \frac{2d}{3\pi}$ $I_{x_t} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)r^4 = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)\frac{d^4}{16}$ $I_x = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi d^4}{128} = I_{y_t};\ I_o = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$
Čtvrtkruh 	$A = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi d^2}{16};\ x_t = y_t = \frac{4r}{3\pi} = \frac{2d}{3\pi}$ $I_{x_t} = I_{y_t} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4 = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)\frac{d^4}{16}$ $D_{x_ty_t} = \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4 = \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right)\frac{d^4}{16}$
Kruhová výseč 	$A = \alpha r^2;\ y_t = \frac{2}{3}r\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ $I_{x_t} = r^4\left(\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{8} - \frac{4\sin^2\alpha}{9\alpha}\right);\ I_o = \frac{\alpha r^4}{2}$ $I_x = \frac{r^4}{8}(2\alpha + \sin 2\alpha);\ I_y = \frac{r^4}{8}(2\alpha - \sin 2\alpha)$
Kruhová úseč 	$A = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)r^2;\ y_t = \frac{4r\sin^3\alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}$ $I_{x_t} = r^4\left(\frac{4\alpha - \sin 4\alpha}{16} - \frac{8}{9}\cdot\frac{\sin^6\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}\right)$ $I_x = \frac{r^4}{16}(4\alpha - \sin 4\alpha);\ I_y = \frac{r^4}{48}(12\alpha - 8\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)$

Tab. 5.1 Geometrické charakteristiky rovinných obrazců (pokračování)

Tvar obrazce	Obsah A, poloha těžiště t, momenty setrvačnosti I, polární I_t a deviační D
	$A = \pi ab$ $I_{x_t} = \frac{\pi}{4} ab^3$; $I_{y_t} = \frac{\pi}{4} ba^3$ $I_t = \frac{\pi}{4} ab\left(a^2 + b^2\right)$
Parabolická úseč 	$A = \frac{4}{3} bh$; $y_t = \frac{2}{5} h$ $I_{x_t} = \frac{16}{175} bh^3$; $I_{y_t} = \frac{4}{15} hb^3$ $I_x = \frac{32}{105} bh^3$; $I_{x'} = \frac{4}{7} bh^3$
pa abolické úseče 	$A = \frac{2}{3} bh$; $x_t = \frac{3}{8} b$; $y_t = \frac{2}{5} h$ $I_{x_t} = \frac{8}{175} bh^3$; $I_x = \frac{16}{105} bh^3$ $I_{x'} = \frac{2}{7} bh^3$ $I_{y_t} = \frac{19}{480} hb^3$; $I_y = \frac{2}{15} hb^3$; $I_{y'} = \frac{3}{10} hb^3$
Parabolický trojúhelník 	$A = \frac{1}{3} bh$; $x_t = \frac{3}{4} b$; $y_t = \frac{3}{10} h$ $I_{x_t} = \frac{37}{2100} bh^3$; $I_x = \frac{1}{21} bh^3$; $I_{x'} = \frac{19}{105} bh^3$ $I_{y_t} = \frac{1}{80} hb^3$; $I_y = \frac{1}{5} hb^3$; $I_{y'} = \frac{1}{30} hb^3$